JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS ROY

Les ondes électromagnétiques planes périodiques et le problème de leur réflexion et de leur réfraction

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 1 (1918), p. 1-46.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1918_8_1__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Les ondes électromagnétiques planes périodiques et le problème de leur réflexion et de leur réfraction;

PAR LOUIS ROY.

INTRODUCTION.

Le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques planes périodiques, à la surface séparative plane de deux diélectriques homogènes et isotropes, a été traité pour la première fois, à notre connaissance, par A. Potier (¹). Les formules obtenues par ce physicien coïncident avec celles qui expriment, selon Fresnel, les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface séparative de deux milieux transparents. Aussi sa solution a-t-elle été acceptée par la plupart des auteurs.

Mais les conditions aux limites adoptées par A. Potier avaient été obtenues à partir de propositions litigieuses de Maxwell ou de ses

(¹) J.-C. MAXWELL, *Treatise of Electricity and Magnetism*, traduction française, t. II, p. 507.

continuateurs. Au cours de ses recherches sur l'Électrodynamique, P. Duhem fut ainsi conduit à en reprendre l'établissement et à les appliquer à son tour au même problème; c'est par là qu'il termine le dernier Mémoire de la série qu'il publia de 1893 à 1896 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

Ses conclusions sont les suivantes (1) :

« D'après ces nouvelles conditions limites, lorsqu'une onde électromagnétique plane, propageant une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence, tombe sur la surface plane qui sépare deux milieux diélectriques, il y a une seule onde plane réfléchie et une seule onde plane réfractée; chacune d'elles propage une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence; les formules qui lient la force réfléchie et la force réfractée à la force incidente sont identiques aux formules qui, selon Fresnel, lient la vibration réfléchie et la vibration réfractée à la vibration incidente, quand la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence.

« Mais, lorsque l'onde incidente propage une force électromotrice transversale située dans le plan d'incidence, il n'est plus possible d'accorder les conditions aux limites par nous obtenues avec l'existence d'une seule onde réfléchie et d'une seule onde réfractée, propageant toutes deux une force électromotrice transversale. »

Aussi n'hésite-t-il pas à terminer son Mémoire par cette phrase (2) :

« Cette conséquence paraît condamner toute théorie électromagnétique de la lumière. »

Ces conclusions, inacceptables au point de vue de l'Optique, tenaient à ce que P. Duhem avait appliqué la théorie de Helmholtz sans y introduire une hypothèse capitale, appelée ultérieurement par lui *hypothèse de Faraday et de Mossotti* (3), et qui rétablit l'accord de la théorie avec les expériences de Hertz et les formules de Fresnel. Quelques années plus tard, il reprit le même problème (4), en se pro-

(1) P. Duhem, *Sur la propagation des actions électrodynamiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, B. 3, 1896).

(2) P. Duhem, *loc. cit.*, B. 82.

(3) P. Duhem, *Les théories électriques de J.-C. Maxwell*, p. 41.

(4) P. Duhem, *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, 2e série, t. V, 1901, p. 227).

posant d'établir d'abord les formules générales résultant de la théorie de Helmholtz et de ne faire qu'en dernier lieu l'hypothèse de Faraday et de Mossotti. Dans ce problème, qu'il traite en partant des équations du champ électrique, les données sont l'amplitude incidente longitudinale et les deux composantes, parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence, de l'amplitude incidente transversale. Comme les inconnues sont les éléments correspondants relatifs aux ondes réfléchies et réfractées, leur nombre est égal à six ; mais les six conditions aux limites alors connues de la théorie de Helmholz et qui correspondent à celles de A. Potier sont insuffisantes pour les déterminer, car elles ne fournissent que cinq relations distinctes. Pour obtenir la sixième équation indispensable qui achèvera de déterminer le problème, P. Duhem admet *a priori* l'égalité des composantes tangentielles longitudinales réfléchie et réfractée. En faisant enfin l'hypothèse de Faraday et de Mossotti dans les formules obtenues, il retrouve celles de Fresnel.

Mais il ne faut pas voir, dans cette concordance, un argument en faveur de l'exactitude de la sixième relation posée *a priori* par P. Duhem. En effet, les champs longitudinaux disparaissent en vertu de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, en même temps que les six conditions aux limites primitives se réduisent à quatre distinctes. Comme il n'y a plus que quatre inconnues, le problème se trouve donc entièrement déterminé, sans qu'il y ait lieu de faire appel à une condition aux limites nouvelle.

Revenant sur ce sujet vers la fin de l'année 1915 et désireux d'obtenir des formules certaines indépendantes de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, nous traitâmes le problème par une méthode entièrement sûre mais indirecte, en partant des équations du potentiel vecteur total. Nous arrivâmes ainsi à des formules qui, ne s'accordant pas avec celles que P. Duhem avait antérieurement obtenues, prouvaient l'inexactitude de la condition aux limites supplémentaire dont cet auteur s'était servi. Mais le désir de parvenir aux mêmes résultats par la méthode directe, en partant des seules équations du champ, amena P. Duhem à découvrir la véritable condition aux limites supplémentaire qui achève de déterminer le problème (¹). Celle-ci

(¹) P. Duhem. *Sur l'Électrodynamique des milieux diélectriques* (*Comptes rendus*, t. 162, 1896, p. 282); *Sur l'Électrodynamique des milieux conducteurs* (*loc. cit.*, p. 337).

supposait les deux milieux non tous deux conducteurs; quelques jours après, nous l'étendions au cas général (1).

Tandis que P. Duhem utilisait cette nouvelle condition aux limites dans des recherches d'un ordre tout différent, que la mort ne lui a pas permis d'achever, nous l'appliquions de notre côté au problème de la réflexion et de la réfraction, qui lui avait donné naissance. Dans ses deux Mémoires, P. Duhem avait supposé les deux milieux non conducteurs, ce qui correspond en Optique au cas de la transparence parfaite, et les ondes incidentes uniformes, ce qui est analytiquement un cas très particulier. Or on sait que si l'on se borne à considérer des ondes planes périodiques, les équations de Maxwell relatives aux milieux conducteurs se ramènent à celles d'un milieu fictif non conducteur, dont le pouvoir inducteur spécifique serait imaginaire; de là une grande simplification, qui permet de traiter le problème de la réflexion métallique avec la même facilité que celui de la réflexion vitreuse. Comme les équations de Helmholtz, y compris la condition aux limites supplémentaire, jouissent précisément de la même propriété que celles de Maxwell, il devenait aisé de traiter le problème de la réflexion et de la réfraction sans imposer aux deux milieux d'autre condition que l'homogénéité et l'isotropie.

C'est à ce problème qu'est consacré le présent Mémoire.

Comme les ondes que nous considérons sont les ondes électromagnétiques planes les plus générales susceptibles d'être propagées par un milieu homogène et isotrope, nous avons cru bon d'en reprendre tout d'abord la théorie, en partant des équations du champ électrique. Lorsque le milieu est dénué de conductibilité, ces ondes deviennent évanescentes; les ondes uniformes, à la considération desquelles on se borne généralement en Optique, n'en sont qu'un cas extrêmement particulier.

Nous profitons des formules ainsi obtenues pour traiter également le cas des ondes latéralement limitées, d'après une méthode d'approximation due à M. Boussinesq. Les coefficients d'amplitude des composantes du champ électrique doivent alors, non seulement satisfaire aux conditions antérieures relatives aux ondes latéralement illimitées, mais encore être des fonctions analytiques d'une certaine variable complexe construite au moyen de deux variables réelles

(1) L. Roy, *Sur l'Électrodynamique des milieux absorbants* (*Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 468).

comptées respectivement suivant les normales au plan d'onde et au plan d'absorption.

Arrivons enfin à la théorie de la réflexion et de la réfraction par ondes planes périodiques. Dans l'exposé habituel de cette théorie, il y a un appel implicite à l'expérience, en ce sens qu'une onde incidente étant donnée, on admet *a priori* l'existence d'une onde réfléchie et d'une onde réfractée, alors que cette existence ne devrait, au contraire, résulter que de la théorie seule. Pour s'en affranchir il convient de se poser le problème de la façon suivante : si l'un des deux milieux est le siège d'une onde plane périodique d'orientation et de pulsation données, quelles autres ondes doit-on lui associer pour obtenir la solution simple la plus générale correspondante. On reconnaît ainsi que cette solution comprend, dans chaque milieu, deux ondes incidentes respectivement transversale et longitudinale et deux ondes réfléchies également transversale et longitudinale, les éléments directeurs de l'une de ces ondes déterminant ceux des sept autres. Les ondes réfléchies du second milieu coïncident avec les ondes réfractées de la théorie classique, mais les ondes incidentes de ce même milieu sont des ondes supplémentaires que cette théorie ne considère point, bien qu'elles s'imposent analytiquement au même titre que les précédentes. Il en résulte que, dans la théorie complète que nous exposons, le calcul des amplitudes est indéterminé, si l'on se donne seulement les amplitudes incidentes dans le premier milieu, comme cela suffit dans la théorie classique. En annulant les amplitudes incidentes dans le second milieu et en faisant l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, on obtient des formules plus particulières, qui correspondent aux formules habituelles et qui redonnent, comme cas particulier, celles de Fresnel.

CHAPITRE I.

LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PLANES.

1. — Réduction des équations générales des milieux homogènes et isotropes en repos à celles des milieux non conducteurs.

Considérons un système de corps homogènes et isotropes en repos, susceptibles d'électrisation et pouvant être à la fois conducteurs, diélectriques et magnétiques; ce système est rapporté à trois axes rectangulaires $Oxyz$ qui lui sont invariablement liés.

Nous savons que la détermination de l'état électrique et magnétique du système à un instant quelconque, c'est-à-dire la solution complète du problème général de l'Électrodynamique, se ramène au calcul du potentiel vecteur total en chaque point de ce système ([1]). Nous savons également que, si l'on n'a en vue que le champ électrique et le champ magnétique, ces grandeurs peuvent être déterminées directement sans faire intervenir le potentiel vecteur total.

Conservant les notations de notre précédent Mémoire ([2]), soient :

ε la constante fondamentale des actions électrostatiques;
$\frac{a^2}{2}$ la constante fondamentale des actions électrodynamiques;
k la constante de Helmholtz;
ρ la résistivité d'un des corps du système;
$\varkappa$ son coefficient de polarisation diélectrique;
$K = 1 + 4\pi\varepsilon\varkappa$ son pouvoir inducteur spécifique;
μ sa perméabilité magnétique;
X, Y, Z les composantes du champ électrique au point (x, y, z) et à l'instant t;
X', Y', Z' les composantes du champ magnétique au même point et au même instant;

les équations indéfinies du champ électrique et du champ magnétique sont ([3])

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\theta + \frac{\mu K - k}{2\pi\mu}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right) + \frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta X}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{X}{\rho} + \varkappa\frac{\partial X}{\partial t}\right) = 0,\\
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\theta + \frac{\mu K - k}{2\pi\mu}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right) + \frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta Y}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{Y}{\rho} + \varkappa\frac{\partial Y}{\partial t}\right) = 0,\\
&\frac{1}{a^2 k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\theta + \frac{\mu K - k}{2\pi\mu}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right) + \frac{1}{2\pi\mu a^2}\frac{\partial\Delta Z}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{Z}{\rho} + \varkappa\frac{\partial Z}{\partial t}\right) = 0,
\end{aligned}\right.$$

([1]) L. Roy, *L'Électrodynamique de Helmholtz-Duhem et son application au problème du mur et à la décharge d'un condensateur sur son propre diélectrique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. VII, p. 231).

([2]) L. Roy, *loc. cit.*, p. 221.

([3]) L. Roy, *loc. cit.*, p. 235.

équations où l'on a posé

$$\theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z};$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi\mu a^2}\Delta(X', Y', Z') - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(X', Y', Z')}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2(X', Y', Z')}{\partial t^2} = 0.$$

Les équations indéfinies que vérifie le potentiel vecteur total sont d'ailleurs identiques comme forme aux équations (1).

Passons aux équations vérifiées en chaque point M de la surface séparative S de deux corps contigus 1 et 2; soient :

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de la demi-normale en M à la surface S menée vers l'intérieur du corps 1 ;

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs de la demi-normale en M à la surface S menée vers l'intérieur du corps 2.

En affectant de l'indice 1 les grandeurs relatives au corps 1, de l'indice 2 celles relatives au corps 2 et en représentant d'une manière générale et pour abréger par $\sum \alpha\mathfrak{X}$ la projection $\alpha\mathfrak{X} + \beta\mathfrak{Y} + \gamma\mathfrak{Z}$ du vecteur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ sur la direction (α, β, γ), on a, en tout point M de la surface S, les équations aux surfaces séparatives

$$(3) \qquad \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}\sum \alpha_1 X_1 + K_1\frac{\partial}{\partial t}\sum \alpha_1 X_1 + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}\sum \alpha_2 X_2 + K_2\frac{\partial}{\partial t}\sum \alpha_2 X_2 = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{X_1 - X_2}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2} = \frac{Y_1 - Y_2}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2},$$

$$(5) \qquad \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}\theta_1 + K_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}\theta_2 + K_2\frac{\partial\theta_2}{\partial t},$$

$$(6) \qquad \mu_1\sum \alpha_1 X'_1 + \mu_2\sum \alpha_2 X'_2 = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{X'_1 - X'_2}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2} = \frac{Y'_1 - Y'_2}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2} = \frac{Z'_1 - Z'_2}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2},$$

le même indice devant figurer dans les trois dénominateurs des équations (4) ou (7).

D'ailleurs, les relations dites de Faraday, qui relient le champ magnétique au champ électrique, permettent de transformer les équations (6) et (7) en les suivantes :

$$(8) \qquad \sum \alpha_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial z}\right) + \sum \alpha_2\left(\frac{\partial Z_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_2}{\partial z}\right) = 0$$

et

$$(9)\qquad \frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y}-\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial y}-\frac{\partial Y_2}{\partial z}\right)}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2} = \frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial z}-\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial X_2}{\partial z}-\frac{\partial Z_2}{\partial x}\right)}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2} = \frac{\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}-\frac{\partial X_1}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x}-\frac{\partial X_2}{\partial y}\right)}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2},$$

qui, jointes aux précédentes (3), (4), (5), fournissent six équations aux limites distinctes.

Les équations aux limites que vérifie le potentiel vecteur total sont entièrement différentes de celles du champ électrique. Comme nous n'aurons pas à les utiliser, il nous suffit de savoir, pour l'objet que nous avons en vue, que la résistivité et le coefficient de polarisation diélectrique n'y figurent pas.

Cela posé, nous allons voir que les équations tant indéfinies qu'aux limites du champ électrique, du champ magnétique et du potentiel vecteur total peuvent être mises sous la forme de celles relatives à des corps non conducteurs, si l'on se borne à considérer des solutions simples constituées par les parties réelles d'expressions de la forme

$$(P, Q, R)\, e^{i\omega(t-lx-my-nz)},$$

où l'on a posé $i=\sqrt{-1}$ et où ω est une constante positive, où l, m, n sont des constantes généralement imaginaires et P, Q, R d'autres constantes généralement imaginaires aussi ou même des fonctions de x, y, z indépendantes de t. On convient de dire que ces solutions définissent des ondes planes périodiques simples de pulsation ω, de paramètres directeurs l, m, n et d'amplitude (P, Q, R).

Considérons donc, tout d'abord, les équations indéfinies (1) du champ électrique et du potentiel vecteur total et posons

$$(X, Y, Z) = \text{parties réelles de } (P, Q, R)\, e^{i\omega(t-lx-my-nz)},$$

ce que nous écrirons plus simplement, pour abréger,

$$(10)\qquad (X, Y, Z) = (P, Q, R)\, e^{i\omega(t-lx-my-nz)}.$$

Il vient

$$\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial t} = i\omega(X, Y, Z),$$

ce qui permet de mettre les équations (1) sous la forme

$$(11) \qquad (\mathcal{L}^2 - \mathcal{T}^2)\frac{\partial\theta}{\partial(x, y, z)} + \mathcal{T}^2\Delta(X, Y, Z) - \frac{\partial^2(X, Y, Z)}{\partial t^2} = 0,$$

en posant

$$(12) \qquad \mathcal{L}^2 = \frac{\varepsilon}{k\frac{a^2}{2}}\,\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K} - 1}, \qquad \mathcal{T}^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}(\mathcal{K} - 1)\mu},$$

$$(13) \qquad \mathcal{K} = 1 + 4\pi\varepsilon\mathcal{H}.$$

$$(14) \qquad \mathcal{H} = \varkappa\left(1 - \frac{i}{\omega\rho\varkappa}\right).$$

On voit que les équations (11) sont celles d'un milieu non conducteur, dont le coefficient de polarisation diélectrique aurait la valeur imaginaire $\mathcal{H}$ définie par l'égalité (14).

Il en résulte, pour ce milieu fictif, un pouvoir inducteur spécifique imaginaire $\mathcal{K}$ donné par l'égalité (13) et des vitesses de propagation des perturbations longitudinales et transversales $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}$ également imaginaires donnés par les égalités (12).

On voit que les équations (11) sont analogues à celles des petits mouvements d'un solide isotrope dénué de viscosité; cette analogie est, comme on sait, le point de départ de la théorie électromagnétique de la lumière.

De même, si nous prenons pour le champ magnétique (X', Y', Z') des solutions de la forme (10), les équations indéfinies correspondantes (2) peuvent s'écrire

$$\mathcal{T}^2\Delta(X', Y', Z') - \frac{\partial^2(X', Y', Z')}{\partial t^2} = 0$$

et l'on voit encore que ce sont celles d'un milieu fictif non conducteur, de coefficient de polarisation diélectrique $\mathcal{H}$.

En ce qui concerne les équations aux surfaces séparatives, il n'y a à s'occuper que de celles où figurent les quantités ρ, $\varkappa$ ou K, c'est-à-dire que des équations (3) et (5). Or on a par exemple, d'après la forme de solutions considérées,

$$\frac{\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}X + K\frac{\partial X}{\partial t}}{\frac{\partial X}{\partial t}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\frac{1}{i\omega} + K = 1 + 4\pi\varepsilon\varkappa\left(1 - \frac{i}{\omega\rho\varkappa}\right) = \mathcal{K},$$

de sorte que ces équations prennent la forme

$$\mathcal{K}_1\frac{\partial}{\partial t}\sum \alpha_1 X_1 + \mathcal{K}_2\frac{\partial}{\partial t}\sum \alpha_2 X_2 = 0, \tag{15}$$

$$\mathcal{K}_1\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \mathcal{K}_2\frac{\partial \theta_2}{\partial t}, \tag{16}$$

comme pour un milieu non conducteur.

Enfin, dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti (¹), on sait qu'on a l'équation indéfinie

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\theta + K\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

qui vérifie identiquement l'équation aux limites supplémentaire (5). Cette équation devient ici

$$\mathcal{K}\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = 0, \tag{17}$$

comme pour un milieu non conducteur.

II. — Ondes planes latéralement illimitées.

On dit que les ondes planes périodiques représentées par les égalités

$$(X, Y, Z) = (P, Q, R)\, e^{i\omega(t - lx - my - nz)} \tag{10}$$

sont latéralement illimitées quand les trois coefficients d'amplitude P, Q, R sont des constantes. Voyons les conditions qu'imposent aux différents paramètres, qui figurent dans ces égalités, les équations

(¹) L. Roy, *loc. cit.*, p. 240.

indéfinies

$$(11) \qquad (\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{T}^2)\frac{\partial \theta}{\partial(x, y, z)} + \mathfrak{T}^2 \Delta(X, Y, Z) - \frac{\partial^2(X, Y, Z)}{\partial t^2} = 0,$$

auxquelles nous joindrons l'équation aux dilatations

$$(18) \qquad \mathfrak{L}^2 \Delta \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0,$$

obtenue en dérivant, respectivement par rapport à x, y z, les équations (11) et en les ajoutant membre à membre.

Substituons donc les expressions (10) dans les équations (11) et (18); on a tout d'abord

$$(19) \qquad \theta = -i\omega \sum P l e^{i\omega(t - lx - my - nz)},$$

puis

$$(20) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right) l \sum P l + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \dfrac{1}{\mathfrak{T}^2}\right) P = 0, \\ \left(\dfrac{\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right) m \sum P l + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \dfrac{1}{\mathfrak{T}^2}\right) Q = 0, \\ \left(\dfrac{\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right) n \sum P l + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \dfrac{1}{\mathfrak{T}^2}\right) R = 0; \end{cases}$$

$$(21) \qquad \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{\mathfrak{L}^2}\right) \sum P l = 0.$$

On peut satisfaire de deux manières à cette dernière égalité : soit en posant

$$\sum P l = 0$$

et alors, pour que les trois coefficients P, Q, R ne soient pas tous nuls, les égalités (20) exigent qu'on ait en même temps

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\mathfrak{T}^2};$$

soit en posant

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}^2},$$

ce qui réduit les égalités (20) à la double proportion

$$\frac{P}{l} = \frac{Q}{m} = \frac{R}{n}.$$

Dans les deux cas, la pulsation ω est arbitraire.

Les ondes correspondant à la première solution sont dites *tranversales;* celles correspondant à la seconde solution sont dites *longitudinales.* Nous allons les étudier successivement.

I. *Ondes transversales.* — Ces ondes sont caractérisées par la solution

$$l^2+m^2+n^2=\frac{1}{\mathfrak{C}^2}, \qquad \sum \mathrm{P}\,l=0 \tag{22}$$

des équations (20) et (21).

Tout d'abord, les constantes l, m, n étant généralement imaginaires, nous pouvons regarder leurs parties réelles comme les composantes d'un vecteur $\frac{1}{\Omega}$ de cosinus directeurs α, β, γ et leurs parties imaginaires comme les composantes d'un autre vecteur h de cosinus directeurs $-a$, $-b$, $-c$; nous écrirons donc

$$(l, m, n)=\frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{\Omega}-ih(a, b, c), \tag{23}$$

égalités où $\frac{1}{\Omega}$ et h sont deux quantités positives ou nulles.

On sait, d'autre part [1], que la vitesse effective T de propagation des perturbations électromagnétiques transversales dans le milieu considéré a pour expression

$$\mathrm{T}^2=\frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}(\mathrm{K}-1)\mu};$$

nous pouvons donc écrire, d'après les égalités (12), (13) et (14),

$$\frac{1}{\mathfrak{C}^2}=\frac{1-i\lambda}{\mathrm{T}^2}, \tag{24}$$

en posant

$$\lambda=\frac{1}{\omega\rho\varkappa}. \tag{25}$$

D'après cela, la première égalité (22) équivaut, en tenant compte des

---

[1] L. Roy, *loc. cit.*, p. 234.

égalités (23) et (24), aux deux suivantes :

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega^2} - h^2 = \dfrac{1}{T^2}, \\ 2\dfrac{h}{\Omega}\cos\Theta = \dfrac{\lambda}{T^2}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(27)\qquad \cos\Theta = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Comme le nombre λ n'est jamais négatif, la deuxième égalité (26) montre qu'il en est de même de $\cos\Theta$; l'angle Θ des deux vecteurs $\frac{1}{\Omega}$ et h est donc toujours compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ et ne peut atteindre cette dernière limite que pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire pour un milieu non conducteur.

Laissant provisoirement de côté le cas où λ est nul, les égalités (26) constituent deux équations qui déterminent sans ambiguïté $\frac{1}{\Omega}$ et h en fonction de l'angle Θ donné arbitrairement entre les limites précédemment indiquées et l'on obtient aisément

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{T}{\Omega} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\quad 1 + \sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{\cos^2\Theta}}\right)}, \\ Th = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{\cos^2\Theta}}\right)}. \end{cases}$$

Ces expressions montrent, lorsque Θ croît de o à $\frac{\pi}{2}$, que Ω décroît en tendant vers zéro, tandis que h croît et augmente indéfiniment quand Θ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Nous verrons que λ varie dans de très larges limites suivant la substance considérée. Si ρ est très petit, comme cela a lieu pour les métaux, λ a une valeur considérable, de sorte que Ω n'est qu'une très petite fraction de T, quel que soit Θ; si au contraire ρ est très grand, comme cela a lieu pour les corps isolants, λ est extrêmement petit, de sorte que Ω reste sensiblement égal à T, tant que Θ n'est pas très voisin de $\frac{\pi}{2}$. La figure représente les courbes de variation $\frac{\Omega}{T}$ (en traits pleins) et de Th (en traits interrompus) en fonction de Θ, construites en coordonnées polaires pour quelques valeurs de λ.

Ω et h étant ainsi déterminés en fonction de Θ, explicitons la deuxième égalité (22) en posant à cet effet

$$(P, Q, R) = (U, V, W) + i(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w});$$

il vient d'après la première égalité (23),

$$Pl = \frac{U}{\Omega}\alpha + h\mathfrak{u}a + i\left(-hUa + \frac{\mathfrak{u}}{\Omega}\alpha\right).$$

Soient alors :

I le vecteur de composantes U, V, W;
φ l'angle des deux vecteurs I et $\frac{1}{\Omega}$;
ψ l'angle des deux vecteurs I et h;
$\mathfrak{J}$ le vecteur de composantes $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$;
Φ l'angle des deux vecteurs $\mathfrak{J}$ et $\frac{1}{\Omega}$;
Ψ l'angle des deux vecteurs $\mathfrak{J}$ et h;

on a

$$\sum Pl = I\frac{\cos\varphi}{\Omega} + \mathfrak{J}h\cos\Psi + i\left(-Ih\cos\psi + \mathfrak{J}\frac{\cos\Phi}{\Omega}\right),$$

de sorte que la deuxième égalité (22) équivaut aux deux suivantes :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & I\frac{\cos\varphi}{\Omega} + \mathfrak{J}h\cos\Psi = 0, \\ & -Ih\cos\psi + \mathfrak{J}\frac{\cos\Phi}{\Omega} = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme I et $\mathfrak{J}$ ne peuvent être tous les deux nuls, sans quoi il en serait de même de P, Q, R, il faut qu'on ait l'égalité

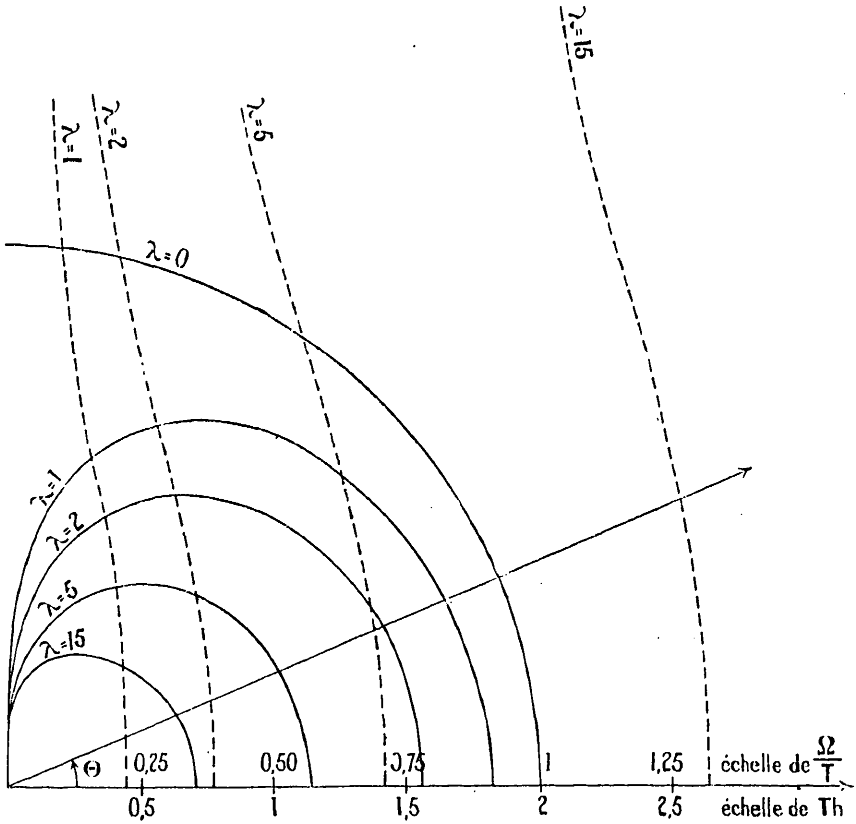
$$(30)\quad \frac{\cos\varphi\cos\Phi}{\Omega^2} + h^2\cos\psi\cos\Psi = 0,$$

en vertu de laquelle trois seulement des quatre angles φ, ψ, Φ, Ψ sont arbitraires. Celle-ci étant supposée vérifiée, l'une des égalités (29) détermine le rapport des deux vecteurs I et $\mathfrak{J}$.

Dès lors, tenons compte dans les expressions (10) de l'égalité

$$P = \sqrt{U^2 + \mathfrak{u}^2}\, e^{i\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\mathfrak{u}}{U}},$$

des deux autres analogues et des égalités (23); en prenant les parties réelles des seconds membres, nous obtiendrons finalement pour les



Courbes de variation de $\frac{\Omega}{T}$ (en traits pleins) et de Th (en traits interrompus) en fonction de Θ pour quelques valeurs de λ.

trois composantes du champ électrique transversal

$$(31)\quad \begin{cases} X = \sqrt{U^2+\mathfrak{U}^2}\, e^{-h\omega(ax+by+cz)} \cos\omega\left(t - \dfrac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\Omega} + \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctang}\dfrac{\mathfrak{U}}{U}\right), \\ Y = \sqrt{V^2+\mathfrak{V}^2}\, e^{-h\omega(ax+by+cz)} \cos\omega\left(t - \dfrac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\Omega} + \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctang}\dfrac{\mathfrak{V}}{V}\right), \\ Z = \sqrt{W^2+\mathfrak{W}^2}\, e^{-h\omega(ax+by+cz)} \cos\omega\left(t - \dfrac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\Omega} + \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctang}\dfrac{\mathfrak{W}}{W}\right). \end{cases}$$

Ces égalités définissent une vibration elliptique parallèle au plan fixe

$$(\mathrm{V}\psi - \varphi\mathrm{W})\mathrm{X} + (\mathrm{W}\upsilon - \psi\mathrm{U})\mathrm{Y} + (\mathrm{U}\varphi - \upsilon\mathrm{V})\mathrm{Z} = 0,$$

c'est-à-dire située dans un plan parallèle aux deux vecteurs I, $\mathfrak{I}$ et donnent pour la grandeur $\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}$ de ce champ l'expression

$$(32)\quad \mathrm{H}^2 = \frac{1}{2} e^{-2h\omega(ax+by+cz)} \Bigg[\mathrm{I}^2 + \mathfrak{I}^2 + \sqrt{(\mathrm{I}^2 - \mathfrak{I}^2)^2 + (2\mathrm{I}\mathfrak{I}\cos\varepsilon)^2} \times \cos 2\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\Omega} + \frac{1}{2\omega}\operatorname{arc\,tang}\frac{2\mathrm{I}\mathfrak{I}\cos\varepsilon}{\mathrm{I}^2 - \mathfrak{I}^2}\right)\Bigg],$$

ε désignant l'angle des deux vecteurs I et $\mathfrak{I}$. Il en résulte que les carrés du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse, qui correspondent respectivement au maximum et au minimum du champ, ont pour valeurs

$$(33)\qquad \frac{1}{2} e^{-2h\omega(ax+by+cz)} \left[\mathrm{I}^2 + \mathfrak{I}^2 \pm \sqrt{(\mathrm{I}^2 - \mathfrak{I}^2)^2 + (2\mathrm{I}\mathfrak{I}\cos\varepsilon)^2} \right].$$

D'après les égalités (31), la phase de chaque composante est à chaque instant la même dans tout plan perpendiculaire à la direction (α, β, γ); ces plans s'appellent les *plans d'onde;* la quantité Ω, qui représente la vitesse à laquelle il faut se déplacer suivant la normale à ces plans pour que la phase reste constante quand t varie, s'appelle la *vitesse de propagation de l'onde.*

De même, d'après les expressions (33), l'amplitude du champ est constante dans tout plan perpendiculaire à la direction (a, b, c); ces plans s'appellent les *plans d'absorption;* la quantité h, qui mesure la rapidité du décroissement de l'amplitude quand on se déplace dans la direction (a, b, c) s'appelle le *coefficient d'absorption;* l'angle Θ est donc celui que font entre eux les plans d'onde et les plans d'absorption.

D'après les expressions (33), pour que la vibration soit circulaire, il faut et il suffit que le radical soit nul, c'est-à-dire qu'on ait

$$\mathrm{I} = \mathfrak{I}, \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{2};$$

l'orientation du second vecteur est alors entièrement fixée d'après celle du premier.

De même, pour que la vibration soit rectiligne, il faut et il suffit que le petit axe de l'ellipse soit nul, ce qui exige que les deux vecteurs I et $\mathfrak{J}$ aient même directrice. Dès lors, il résulte de l'égalité (30) que cette directrice est la perpendiculaire commune aux deux directions (a, b, c), (α, β, γ). Le champ électrique en chaque point de l'espace est donc dirigé suivant l'intersection du plan d'onde et du plan d'absorption qui passent par ce point.

II. *Ondes longitudinales*. — Ces ondes sont caractérisées par la solution

$$(34) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\wp^2}, \qquad \frac{P}{l} = \frac{Q}{m} = \frac{R}{n}$$

des équations (20) et (21).

Tout d'abord, on sait (¹) que la vitesse effective L de propagation des perturbations électromagnétiques longitudinales dans le milieu considéré a pour expression

$$L^2 = \frac{\varepsilon}{k\frac{a^2}{2}} \frac{K}{K-1};$$

nous pouvons donc écrire, d'après les égalités (12), (13), (14) et (25),

$$(35) \qquad \frac{1}{\wp^2} = \frac{\mu - i\nu}{L^2},$$

en posant

$$(36) \qquad \mu = \frac{1 + \frac{K-1}{K}\lambda^2}{1 + \left(\frac{K-1}{K}\right)^2 \lambda^2}, \qquad \nu = \frac{\frac{\lambda}{K}}{1 + \left(\frac{K-1}{K}\right)^2 \lambda^2}.$$

Si donc nous définissons encore l, m, n d'après les égalités (23), la première égalité (34) équivaut aux deux suivantes :

$$(37) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\Omega^2} - h^2 = \frac{\mu}{L^2}, \\ &2\frac{h}{\Omega}\cos\Theta = \frac{\nu}{L^2}. \end{aligned} \right.$$

(¹) L. Roy, *loc. cit.*, p. 234.

Θ étant encore défini par l'égalité (27). Le nombre ν n'étant jamais négatif, l'angle Θ des deux vecteurs $\frac{1}{\Omega}$ et h reste donc compris entre les mêmes limites o et $\frac{\pi}{2}$ que dans le cas des ondes transversales.

Laissant toujours provisoirement de côté le cas où λ, et par suite ν, serait nul, les égalités (37) déterminent sans ambiguïté $\frac{1}{\Omega}$ et h en fonction de Θ donné arbitrairement entre les limites indiquées et il vient comme précédemment

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}}{\Omega} = \sqrt{\dfrac{\mu}{2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{\nu^2}{\mu^2\cos^2\Theta}}\right)}, \\ \mathrm{L}h = \sqrt{\dfrac{\mu}{2}\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{\nu^2}{\mu^2\cos^2\Theta}}\right)}. \end{cases}$$

Cela posé, les deuxièmes égalités (34) déterminent P, Q, R en fonction de l, m, n et d'une quantité arbitraire que nous désignerons par

$$\Delta = \mathrm{I}e^{i\omega\delta},$$

ce qui donne

$$(39)\qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (l, m, n)\mathrm{I}e^{i\omega\delta},$$

de sorte que les égalités (10) nous donnent pour les trois composantes du champ électrique longitudinal

$$(40)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{I}\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\Omega^2}+a^2h^2}\,e^{-h\omega(ax+by+cz)}\cos\omega\left(t-\dfrac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\Omega}+\delta-\dfrac{1}{\omega}\operatorname{arc\,tang} h\Omega\dfrac{a}{\alpha}\right), \\ \mathrm{Y} = \mathrm{I}\sqrt{\dfrac{\beta^2}{\Omega^2}+b^2h^2}\,e^{-h\omega(ax+by+cz)}\cos\omega\left(t-\dfrac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\Omega}+\delta-\dfrac{1}{\omega}\operatorname{arc\,tang} h\Omega\dfrac{b}{\beta}\right), \\ \mathrm{Z} = \mathrm{I}\sqrt{\dfrac{\gamma^2}{\Omega^2}+c^2h^2}\,e^{-h\omega(ax+by+cz)}\cos\omega\left(t-\dfrac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\Omega}+\delta-\dfrac{1}{\omega}\operatorname{arc\,tang} h\Omega\dfrac{c}{\gamma}\right). \end{cases}$$

Ces égalités définissent une vibration elliptique parallèle au plan fixe

$$(\beta c - b\gamma)\mathrm{X} + (\gamma a - c\alpha)\mathrm{Y} + (\alpha b - a\beta)\mathrm{Z} = 0,$$

c'est-à-dire perpendiculaire à l'intersection du plan d'onde et du plan d'absorption et donnent, pour la grandeur H de ce champ, l'expression qu'on obtient en remplaçant, dans l'égalité (32), I par $\frac{1}{\Omega}$, λ par h et

ε par $\pi - \Theta$; en tenant compte des égalités (37) il vient ainsi

$$(41)\quad H^2 = \frac{I^2}{2L^2} e^{-2h\omega(ax+by+cz)} \left[\sqrt{\mu^2 + \frac{\nu^2}{\cos^2\Theta}} + \sqrt{\mu^2+\nu^2} \times \cos 2\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\Omega} + \delta - \frac{1}{2\omega} \operatorname{arctang} \frac{\nu}{\mu}\right) \right]$$

et, par suite, pour les carrés des demi-axes de l'ellipse,

$$(42)\qquad \frac{I^2}{2L^2} e^{-2h\omega(ax+by+cz)} \left(\sqrt{\mu^2 + \frac{\nu^2}{\cos^2\Theta}} \pm \sqrt{\mu^2+\nu^2} \right).$$

Comme la quantité $\mu^2 + \nu^2$ ne peut être nulle pour aucun milieu, d'après les égalités (36), la vibration ne peut être circulaire. Pour qu'elle soit rectiligne, il faut et il suffit que les deux vecteurs $\frac{1}{\Omega}$ et h aient même directrice, c'est-à-dire qu'on ait $\Theta = 0$; les plans d'onde et d'absorption sont alors confondus et la vibration dirigée suivant leur perpendiculaire commune.

On obtiendrait enfin la solution générale par ondes planes périodiques latéralement illimitées en additionnant les solutions partielles (31) et (40).

III. — Ondes évanescentes et ondes uniformes.

Supposons maintenant que le nombre λ soit nul, ce qui aura lieu si le milieu considéré n'est pas conducteur; on aura, d'après les égalités (36),

$$\mu = 1, \qquad \nu = 0,$$

de sorte que, d'après les égalités (24) et (35), les vitesses de propagation $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{L}$ jusqu'ici imaginaires reprennent leurs valeurs réelles T et L; les égalités (26) et (37) deviennent d'autre part

$$(26')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega^2} - h^2 = \dfrac{1}{T^2}, \\ 2\dfrac{h}{\Omega}\cos\Theta = 0; \end{cases} \qquad (37')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega^2} - h^2 = \dfrac{1}{L^2}, \\ 2\dfrac{h}{\Omega}\cos\Theta = 0. \end{cases}$$

Considérons, par exemple, le premier groupe (26'): comme l'angle Θ n'a de signification qu'autant que les deux vecteurs $\frac{1}{\Omega}$ et h ne sont pas nuls, on y satisfait de la façon la plus générale en faisant $\Theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui vérifie la seconde équation; la première détermine alors $\frac{1}{\Omega}$ en fonction de h laissé arbitraire, ce qui donne

$$\Omega = \frac{T}{\sqrt{1 + T^2 h^2}}.$$

La vitesse de propagation de l'onde est donc susceptible d'une valeur quelconque comprise entre o et T. La limite inférieure o ne peut être atteinte puisque h devrait être infini. La limite supérieure T correspond à $h = 0$; d'après les égalités (29), les vecteurs I et $\mathfrak{J}$ sont alors situés dans le plan d'onde et il en est par suite de même du champ H, qui devient uniforme dans tout ce plan; de telles ondes sont appelées *ondes uniformes*. Quel que soit h, la vibration peut être elliptique, circulaire ou rectiligne.

Le second groupe (37′) conduit à des conclusions analogues : h étant arbitraire, la vitesse de propagation de l'onde est comprise entre o et L; l'expression (41) du champ devient

$$H^2 = \frac{I^2}{2L^2} e^{-2h\omega(ax+by+cz)} \left[1 + 2L^2h^2 + \cos 2\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\Omega} + \delta\right)\right]$$

et l'on voit qu'il n'est rectiligne que si $h = 0$. Dans ce dernier cas, il est de plus uniforme dans le plan d'onde et, d'après les égalités (40), perpendiculaire à ce plan.

D'une manière générale, de telles ondes transversales ou longitudinales susceptibles d'être propagées par un milieu non conducteur sont appelées *ondes évanescentes*, quand la valeur correspondante de h n'est pas nulle. On sait qu'elles se sont présentées pour la première fois à Cauchy dans la théorie de la réflexion totale, mais, pendant longtemps, elles n'ont été considérées qu'à titre de cas singulier. Il est intéressant de remarquer que ces ondes sont, au contraire, les plus générales susceptibles d'être propagées par un milieu non conducteur ou, ce qui revient au même analytiquement, par un milieu élastique isotrope dénué de viscosité. Un tel milieu est donc susceptible d'une infinité de vitesses de propagation transversales et longitudinales comprises respectivement dans les intervalles (o, T), (o, L), dont les limites supérieures T et L correspondent précisément aux ondes uniformes. Cette remarque a été faite pour la première fois, à notre connaissance, par M. M. Brillouin [1].

---

[1] M. BRILLOUIN, *Sur la propagation des vibrations dans les milieux absorbants isotropes* (*Comptes rendus*, t. 115, 1892, p. 808).

IV. — Valeurs numériques des nombres λ, μ, ν.

Avant d'aller plus loin, il est bon de nous rendre compte de la valeur numérique des nombres λ, μ, ν dans quelques cas particuliers et pour les valeurs extrêmes de ω susceptibles d'être réalisées.

Tout d'abord, si τ désigne la période de pulsation ω, Λ la longueur d'onde correspondante dans l'éther, où toutes les ondes uniformes électromagnétiques ou lumineuses se propagent avec la vitesse υ, on a

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \qquad \Lambda = \upsilon\tau.$$

Comme on a, d'autre part,

$$\alpha = \frac{K-1}{4\pi\varepsilon}, \qquad \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}K_0\mu_0} = \upsilon^2,$$

K_0, μ_0 désignant respectivement le pouvoir inducteur spécifique et la perméabilité magnétique de l'éther, l'expression (25) de λ devient

$$\lambda = a^2 \frac{K_0}{K-1}\frac{\upsilon\Lambda}{\rho}\mu_0.$$

Or, on peut faire $\mu_0 = 1$ à un très haut degré d'approximation, de sorte qu'en employant le système d'unités C.G.S. électromagnétiques où

$$\frac{a^2}{2} = 1, \qquad \upsilon = 3.10^{10}$$

et en supposant que le milieu considéré satisfasse à l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, il vient

$$\lambda = 6\frac{K_0}{K}\frac{\Lambda}{\rho}10^{10}.$$

Le Tableau ci-après donne la valeur de λ, calculée d'après cette formule, pour quelques corps que nous avons rangés par ordre de résistivité croissante. Le calcul a été fait en prenant successivement pour Λ la longueur d'onde moyenne du spectre lumineux visible, puis la plus petite et la plus grande des longueurs d'onde électromagnétiques réalisées jusqu'ici. Si le pouvoir inducteur spécifique des métaux, qui nous est inconnu, n'est pas extrêmement grand par rapport à celui de l'éther, λ atteindrait l'ordre de 10^{13} pour l'argent, le moins résistant des corps connus, et les très grandes longueurs d'onde. Ce nombre n'est au contraire que de l'ordre de 10^{-18} pour les corps extrêmement résistants et les très courtes longueurs d'onde.

Substances.	ρ C.G.S. élm.	$\frac{K}{K_0}$.	λ : $\Lambda = 5.10^{-5}$ cm.	λ : $\Lambda = 6.10^{-1}$ cm.	λ : $\Lambda = 5.10^{5}$ cm.
Argent.........	$1,5.10^{3}$	»	$\frac{K_0}{K}\,2.10^{3}$	$\frac{K_0}{K}\,2,4.10^{7}$	$\frac{K_0}{K}\,2.10^{13}$
Mercure.......	$9,4.10^{4}$	»	$\frac{K_0}{K}\,3,2.10^{2}$	$\frac{K_0}{K}\,3,8.10^{6}$	$\frac{K_0}{K}\,3,2.10^{12}$
Eau...........	2.10^{14}	80	$1,9.10^{-10}$	$2,3.10^{-6}$	$1,9$
Sélénium......	8.10^{15}	6	$6,2.10^{-10}$	$7,5.10^{-6}$	$6,2$
Glace..........	10^{18}	3	10^{-12}	$1,2.10^{-8}$	10^{-2}
Marbre........	10^{19}	6	5.10^{-14}	6.10^{-10}	5.10^{-4}
Huile d'olive....	10^{21}	3	10^{-15}	$1,2.10^{-11}$	10^{-5}
Soufre.........	10^{22}	4	$7,5.10^{-17}$	9.10^{-13}	$7,5.10^{-7}$
Verre..........	10^{23}	6	5.10^{-18}	6.10^{-14}	5.10^{-8}

Connaissant ainsi λ, les valeurs correspondantes de μ et de ν résultent des égalités (36), qui deviennent, en vertu de l'hypothèse de Faraday et de Mossotti,

$$\mu = 1, \qquad \nu = \frac{\frac{\lambda}{K}}{1+\lambda^2}.$$

Les pouvoirs inducteurs spécifiques absolus nous étant inconnus, nous n'avons aucun moyen de calculer ν; mais comme ils sont très supérieurs à l'unité, d'après l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, il en résulte que ν est d'un ordre de grandeur très inférieur à λ.

V. — Ondes planes latéralement limitées.

On dit que les ondes planes périodiques représentées par les égalités (10) sont latéralement limitées, quand les trois coefficients P, Q, R sont, non plus des constantes, mais des fonctions de x, y, z. Nous supposerons ces fonctions assez lentement variables pour qu'on puisse traiter leurs dérivées $\frac{\partial(P, Q, R)}{\partial(x, y, z)}$ comme des quantités infiniment petites, dont nous négligerons les carrés, les produits et les dérivées.

Considérons, par exemple, la dérivée

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \left(-i\omega l P + \frac{\partial P}{\partial x}\right) e^{-i\omega(t-lx-my-nz)};$$

comme on peut l'écrire

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -i\omega\left(l + \frac{i}{\omega}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) P e^{\,i\omega(t - lx - my - nz)},$$

on voit, suivant une remarque due à M. Boussinesq ([1]), qu'il n'y a qu'à remplacer, dans les égalités (20) et (21), l, m, n respectivement par $l + dl$, $m + dm$, $n + dn$, en posant

$$d(l, m, n) = \frac{i}{\omega}\,\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$$

et à négliger les carrés et produits de ces différentielles.

En posant alors

$$\mathfrak{z} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial S} = l\,\frac{\partial}{\partial x} + m\,\frac{\partial}{\partial y} + n\,\frac{\partial}{\partial z},$$

les égalités (20) et (21) deviennent

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{V^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right) l \sum Pl + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\right) P \\ &\quad = -\frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{V^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum Pl + l\mathfrak{z}\right) - 2\,\frac{\partial P}{\partial S}\right], \\ &\left(\frac{V^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right) m \sum Pl + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\right) Q \\ &\quad = -\frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{V^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\sum Pl + m\mathfrak{z}\right) - 2\,\frac{\partial Q}{\partial S}\right], \\ &\left(\frac{V^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right) n \sum Pl + \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\right) R \\ &\quad = -\frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{V^2}{\mathfrak{T}^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\sum Pl + n\mathfrak{z}\right) - 2\,\frac{\partial R}{\partial S}\right]; \end{aligned}\right.$$

$$(44)\quad \begin{aligned} &\left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{V^2}\right) \sum Pl \\ &\quad = -\frac{i}{\omega}\left[\left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{V^2}\right)\mathfrak{z} - 2\,\frac{\partial}{\partial S}\sum Pl\right]. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi, pour déterminer P, Q, R, non plus un système d'équations algébriques, mais un système d'équations aux dérivées partielles. Toutefois, les seconds membres étant des fonctions linéaires

---

([1]) J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, t. II, p. 473.

et homogènes de ces dérivées sont eux-mêmes des quantités très petites, de sorte que, pour calculer P, Q, R, nous pouvons procéder par approximations successives suivant la méthode indiquée par M. Boussinesq (¹). A une première approximation, négligeons les dérivées de P, Q, R; les seconds membres deviennent nuls et les égalités ci-dessus coïncident respectivement avec les égalités (20) et (21). Nous retrouvons donc, tout d'abord, les deux solutions

$$(22) \qquad l^2+m^2+n^2=\frac{1}{\mathfrak{T}^2}, \qquad \sum Pl=0;$$

$$(34) \qquad l^2+m^2+n^2=\frac{1}{\mathfrak{P}^2}, \qquad \frac{P}{l}=\frac{Q}{m}=\frac{R}{n},$$

relatives aux ondes latéralement illimitées et étudiées au paragraphe II. Mais tandis que P, Q, R étaient précédemment des constantes, ce sont ici plus généralement trois fonctions arbitraires de x, y, z lentement variables, assujetties seulement à vérifier les relations (22) ou (34).

La deuxième approximation consiste alors à remplacer P, Q, R par leurs valeurs de première approximation dans les seconds membres des égalités (43) et (44), en conservant pour l, m, n les mêmes valeurs que précédemment dans les deux membres. Si donc P, Q, R désignent les valeurs de première approximation, $P+dP$, $Q+dQ$, $R+dR$ celles de deuxième approximation, les égalités (43) et (44) deviennent, en vertu des égalités (20) et (21),

$$(45) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{T}^2}-1\right)l\sum l\,dP+\left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\right)dP\\
&\qquad=-\frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{T}^2}-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum Pl+l\,\Xi\right)-2\frac{\partial P}{\partial S}\right],\\
&\left(\frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{T}^2}-1\right)m\sum l\,dP+\left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\right)dQ\\
&\qquad=-\frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{T}^2}-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\sum Pl+m\,\Xi\right)-2\frac{\partial Q}{\partial S}\right],\\
&\left(\frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{T}^2}-1\right)n\sum l\,dP+\left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\right)dR\\
&\qquad=-\frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{T}^2}-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\sum Pl+n\,\Xi\right)-2\frac{\partial R}{\partial S}\right]
\end{aligned}\right.$$

(¹) J. Boussinesq, *loc. cit.*, p. 472.

et

$$(46)\qquad \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{V^2}\right)\sum l\,dP = -\frac{i}{\omega}\left[\left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{V^2}\right)\mathfrak{Z}-2\frac{\partial}{\partial S}\sum Pl\right].$$

Il ne nous reste plus qu'à leur adjoindre successivement les égalités (22) et (34), qui correspondent respectivement aux ondes transversales et aux ondes longitudinales.

I. *Ondes transversales.* — En vertu des égalités (22), l'égalité (46) devient

$$(47)\qquad \sum l\,dP = -\frac{i}{\omega}\mathfrak{Z},$$

ce qui réduit les égalités (45) à

$$(48)\qquad \frac{\partial(P, Q, R)}{\partial S} = 0.$$

Or on a

$$(49)\qquad l\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\alpha}{\Omega}\frac{\partial U}{\partial x} + ah\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + i\left(-ah\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{\Omega}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right),$$

de sorte que si l'on désigne par s et σ deux variables comptées respectivement suivant les directions (a, b, c) et (α, β, γ), c'est-à-dire si l'on pose

$$(50)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s} = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \sigma} = \alpha\dfrac{\partial}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial}{\partial z}, \end{cases}$$

la première égalité (48) équivaudra aux deux suivantes :

$$(51)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \sigma} + h\Omega\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s} = 0, \\[2ex] -h\Omega\dfrac{\partial U}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \sigma} = 0, \end{cases}$$

d'après lesquelles U et $\mathfrak{V}$ vérifient la même équation aux dérivées partielles

$$(52)\qquad \frac{\partial^2(U, \mathfrak{V})}{\partial \sigma^2} + h^2\Omega^2\frac{\partial^2(U, \mathfrak{V})}{\partial s^2} = 0.$$

Les équations (51) et (52) ont été antérieurement obtenues par M. Boussinesq [1]. Celles-ci peuvent encore se simplifier en posant

$$s = h\Omega s'$$

et en désignant par s' une nouvelle variable; elles deviennent en effet

$$\frac{\partial U}{\partial s'} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \sigma}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial s'};$$
$$\frac{\partial^2(U, \mathrm{v})}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2(U, \mathrm{v})}{\partial s'^2} = 0.$$

On voit donc, en définitive, que les égalités (48) expriment que les coefficients d'amplitude P, Q, R doivent être des fonctions analytiques de la variable complexe $s' + i\sigma$. D'ailleurs, si la condition est remplie pour deux des quantités P, Q, R, elle le sera également par la troisième en vertu de la relation $\sum Pl = 0$. Nous allons voir qu'il résulte encore des égalités (51) que, si l'on connaît les fonctions P, Q, R en chaque point d'un plan quelconque, celles-ci se trouvent déterminées dans tout l'espace.

Prenons, en effet, ce plan comme plan des x, y et considérons, par exemple, la fonction P : pour $z = 0$, U et v sont des fonctions données de x, y, de sorte que les dérivées $\frac{\partial(U, \mathrm{v})}{\partial(x, y)}$ sont connues pour $z = 0$; dès lors, en tenant compte des égalités (50), les égalités (51) font connaître, pour $z = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial(U, \mathrm{v})}{\partial z}$. On a ainsi, pour chacune de ces fonctions, deux conditions initiales qui, jointes à l'équation aux dérivées partielles (52) qu'elles vérifient, les déterminent dans tout l'espace.

En particulier, si les fonctions P, Q, R sont nulles en dehors d'une aire limitée du plan $z = 0$, il en est de même du champ électrique, de sorte que les ondes latéralement limitées que nous considérons constituent alors ce qu'on peut appeler *un pinceau électromagnétique transversal*.

On peut appeler, d'autre part, *rayon électromagnétique transversal* le lieu des points où l'amplitude du champ électrique reste

---

[1] J. Boussinesq, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXIX, 1905, deuxième Partie, p. 142.

constante, abstraction faite de l'exponentielle d'extinction

$$e^{-h\omega(ax+by+cz)};$$

si l'on néglige les termes complémentaires provenant des quantités infiniment petites $d(P, Q, R)$, le champ a la même expression (32) que dans le cas des ondes latéralement illimitées, sauf que les quantités I, $\mathfrak{J}$, ε sont maintenant des fonctions de x, y, z. Les parties principales des carrés des demi-axes de l'ellipse décrite par l'extrémité du vecteur H sont donc représentées par les expressions (33), de sorte que le lieu des points où ces axes restent constants, abstraction faite de l'exponentielle, est représenté par la famille de courbes

$$I^2+\mathfrak{J}^2+\sqrt{(I^2-\mathfrak{J}^2)^2+(2I\mathfrak{J}\cos\varepsilon)^2}=C,$$

$$I^2+\mathfrak{J}^2-\sqrt{(I^2-\mathfrak{J}^2)^2+(2I\mathfrak{J}\cos\varepsilon)^2}=C',$$

C et C' désignant deux constantes arbitraires. Chaque courbe de cette famille est précisément un rayon électromagnétique transversal.

Cela posé, il ne nous reste plus qu'à déterminer les trois quantités infiniment petites $d(P, Q, R)$, seulement astreintes à vérifier l'égalité (17), dont le second membre est maintenant connu; deux des quantités $d(P, Q, R)$ sont donc arbitraires. Posons alors

$$d(P, Q, R) = d(U, V, W) + i\,d(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$$

et soient :

dI le vecteur de correspondantes $d(U, V, W)$,
φ' l'angle des deux vecteurs dI et $\frac{1}{\Omega}$,
ψ' l'angle des deux vecteurs dI et h;
$d\mathfrak{J}$ le vecteur de composantes $d(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$,
Φ' l'angle des deux vecteurs $d\mathfrak{J}$ et $\frac{1}{\Omega}$,
Ψ' l'angle des deux vecteurs $d\mathfrak{J}$ et h;

par un calcul analogue à celui que nous avons fait au paragraphe II, nous voyons, d'après l'expression de $\mathfrak{Z}$, que l'égalité (17) équivaut aux deux suivantes :

$$\frac{\cos\varphi'}{\Omega}dI + h\cos\Psi'\,d\mathfrak{J} = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial z}\right),$$

$$-h\cos\psi'\,dI + \frac{\cos\Phi'}{\Omega}d\mathfrak{J} = -\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

qui déterminent les deux vecteurs $d\mathrm{I}$, $d\delta$ en fonction des petites dérivées $\frac{\partial(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots, \Psi)}{\partial(x, y, z)}$ et des quatre angles φ, ψ', Φ', Ψ' donnés arbitrairement sous la seule condition que la quantité

$$\frac{\cos\varphi' \cos\Phi'}{\Omega^2} + h^2 \cos\psi' \cos\Psi'$$

soit différente de zéro.

Le problème des ondes transversales latéralement limitées est ainsi entièrement résolu.

II. *Ondes longitudinales.* — En vertu de la première égalité (34), l'égalité (46) devient

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{S}} \sum \mathrm{P}l = 0.$$

de sorte que si l'on pose encore, d'après les deux autres égalités (34),

$$\frac{\mathrm{P}}{l} = \frac{\mathrm{Q}}{m} = \frac{\mathrm{R}}{n} = \Delta, \tag{53}$$

on aura

$$\sum \mathrm{P}l = \frac{\Delta}{\mathrm{V}^2}$$

et par suite

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \mathrm{S}} = 0. \tag{54}$$

La quantité $\Delta = \mathrm{I}e^{i\omega\delta}$ est donc une fonction analytique de $s' + i\sigma$ et, d'après ce qu'on a vu précédemment, il suffit de se la donner dans un plan pour qu'elle soit déterminée dans tout l'espace.

En particulier, si I est nul en dehors d'une aire limitée de ce plan, il en sera de même du champ électrique, de sorte que les ondes latéralement limitées que nous considérons, constitueront un pinceau électrique longitudinal.

Si l'on néglige encore les termes complémentaires provenant des quantités infiniment petites $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})$, le champ a la même expression (41) que dans le cas des ondes latéralement illimitées, sauf que les quantités I et δ sont maintenant des fonctions de x, y, z. Les parties principales des carrés des demi-axes de l'ellipse décrite par l'extrémité du vecteur H sont donc représentées par les expressions (42), de sorte que le lieu des points où ces axes restent constants, abstraction faite de l'exponentielle d'extinction, est représenté, non plus par une famille de courbes, mais par la famille de surfaces

$$\mathrm{I} = \mathrm{C},$$

C désignant une constante arbitraire. On ne peut donc plus ici, comme dans le cas des ondes transversales, parler de rayons électromagnétiques longitudinaux.

Cela posé, il ne nous reste plus qu'à déterminer les trois quantités infiniment petites $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})$: d'après les égalités (53) et (54), on a

$$\Xi = l\frac{\partial\Delta}{\partial x} + m\frac{\partial\Delta}{\partial y} + n\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \frac{\partial\Delta}{\partial \mathrm{S}} = 0.$$

$$\frac{\partial(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})}{\partial \mathrm{S}} = (l, m, n)\frac{\partial\Delta}{\partial \mathrm{S}} = 0,$$

de sorte que les égalités (45) deviennent

$$\xi^2 l \sum l\,d\mathrm{P} - d\mathrm{P} = -\frac{i}{\omega}\frac{\partial\Delta}{\partial x},$$

$$\xi^2 m \sum l\,d\mathrm{P} - d\mathrm{Q} = -\frac{i}{\omega}\frac{\partial\Delta}{\partial y},$$

$$\xi^2 n \sum l\,d\mathrm{P} - d\mathrm{R} = -\frac{i}{\omega}\frac{\partial\Delta}{\partial z}.$$

D'après l'égalité (54), qui en est une combinaison, elles se réduisent à deux distinctes et déterminent aussi deux des quantités $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})$ en fonction de la troisième laissée arbitraire.

En particulier, si l'on impose à ces quantités la condition supplémentaire $\sum l\,d\mathrm{P} = 0$, il vient les expressions très simples

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \frac{i}{\omega}\frac{\partial\Delta}{\partial(x, y, z)},$$

d'après lesquelles les vecteurs $d\mathrm{I}$ et $d\Xi$ dérivent d'un potentiel.

VI. Cas d'un milieu très résistant.

Quand le milieu considéré est très résistant, nous avons vu (§ IV) que λ est un nombre très petit et qu'il en est *a fortiori* de même de ν.

Il y a donc lieu d'examiner les simplifications que cette circonstance introduit dans les résultats précédents.

Nous supposerons l'angle Θ suffisamment différent de $\frac{\pi}{2}$ pour que le nombre $\frac{\lambda}{\cos\Theta}$ soit lui-même très petit; il en sera donc *a fortiori* de même de $\frac{\nu}{\cos\Theta}$. Nous traiterons ces nombres λ, ν, $\frac{(\lambda,\nu)}{\cos\Theta}$ comme des quantités très petites dont nous négligerons les carrés et produits.

Considérons déjà le cas des ondes latéralement illimitées : tout d'abord, au degré d'approximation adopté, les égalités (28) relatives aux ondes transversales se réduisent à

$$\Omega = \mathrm{T}, \qquad h = \frac{\lambda}{2\mathrm{T}\cos\Theta};$$

le coefficient d'extinction est donc très petit. Dès lors, il résulte des égalités (29) que les angles φ et Φ sont très voisins de $\frac{\pi}{2}$, les vecteurs I et $\mathfrak{I}$ sont ainsi presque parallèles aux plans d'onde et il en est par suite de même de la vibration.

De même, les égalités (38) relatives aux ondes longitudinales se réduisent à

$$\mu = 1, \qquad \Omega = \mathrm{L}, \qquad h = \frac{\nu}{2\mathrm{L}\cos\Theta};$$

le coefficient d'extinction est donc encore très petit. Dès lors, les radicaux qui figurent dans les égalités (40) peuvent être remplacés respectivement par

$$\frac{(\alpha,\beta,\gamma)}{\Omega},$$

ce qui montre que la vibration est sensiblement rectiligne et dirigée suivant la normale aux plans d'onde.

Passons au cas des ondes latéralement limitées : dans l'égalité (49), les termes en $h\frac{\partial(\mathrm{U},\mathfrak{v})}{\partial x}$ sont négligeables comme étant du second ordre de petitesse, de sorte qu'au degré d'approximation adopté, les paramètres directeurs l, m, n peuvent, dans le calcul de $\frac{\partial}{\partial \mathrm{S}}$, être réduits à leurs parties principales $\frac{(\alpha,\beta,\gamma)}{\Omega}$. Les égalités (48) et (54), qui deviennent ainsi

$$\frac{\partial(P, Q, R)}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta} = 0,$$

montrent alors que la propagation se fait très sensiblement suivant la normale aux plans d'onde. Les rayons électromagnétiques, courbes en général, sont donc ici très sensiblement rectilignes.

Remarquons enfin que cette propagation suivant la normale aux plans d'onde devient rigoureuse pour $h = 0$, c'est-à-dire pour les ondes uniformes latéralement limitées propagées par un milieu non conducteur.

CHAPITRE II.

LE PROBLÈME DE LA RÉFLEXION ET DE LA RÉFRACTION.

I. — Position du problème [1].

Considérons deux milieux homogènes et isotropes en repos confinant l'un à l'autre par le plan des x, y : l'un, que nous désignerons par l'indice zéro, occupe toute la région de l'espace où z est négatif; l'autre, que nous désignerons par l'indice 1, occupe toute la région de l'espace où z est positif.

Pris dans toute sa généralité, le problème de la réflexion et de la réfraction consisterait à déterminer, à l'instant t, l'état électrique et magnétique du système résultant d'une perturbation entretenue sur une surface donnée à partir de l'instant initial; dans le présent Mémoire, nous nous bornerons à étudier la solution simple la plus générale par ondes planes périodiques dont ce problème est susceptible.

Nous affecterons de l'indice 1 les quantités relatives au milieu 1; les quantités sans indice seront relatives au milieu zéro.

Cela posé, il résulte des égalités (10), (22) et (34) (Chap. I, § II) que la solution la plus générale par ondes planes périodiques des

---

[1] L. Roy, *Sur le problème de la réflexion et de la réfraction par ondes planes périodiques* (*Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 675).

équations indéfinies (11) est, pour nos deux milieux,

$$(55) \qquad (X, Y, Z) = \sum (P, Q, R) \quad e^{i\omega(t - lx - my - nz)} + \sum (l', m', n') \Delta \, e^{i\omega'(t - l'x - m'y - n'z)},$$

$$(55') \qquad (X_1, Y_1, Z_1) = \sum (P_1, Q_1, R_1) \quad e^{i\omega_1(t - l_1 x - m_1 y - n_1 z)} + \sum (l'_1, m'_1, n'_1) \Delta_1 \, e^{i\omega'_1(t - l'_1 x - m'_1 y - n'_1 z)}$$

avec

$$(56) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\mathcal{T}^2}, \qquad Pl + Qm + Rn = 0,$$

$$(57) \qquad l'^2 + m'^2 + n'^2 = \frac{1}{\mathcal{L}^2};$$

$$(56') \qquad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = \frac{1}{\mathcal{T}_1^2}, \qquad P_1 l_1 + Q_1 m_1 + R_1 n_1 = 0.$$

$$(57') \qquad l'^2_1 + m'^2_1 + n'^2_1 = \frac{1}{\mathcal{L}_1^2},$$

les amplitudes Δ et Δ_1 étant arbitraires et chaque signe $\sum$ indiquant la somme d'un nombre quelconque de termes analogues.

Mais l'existence de la surface séparative, qui astreint les expressions (55) et (55′) à vérifier, pour $z = 0$, les conditions (7), (8), (9), (15) et (16), y apporte de grandes simplifications.

En effet, ces conditions aux limites étant des équations linéaires et homogènes par rapport à X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 et à leurs dérivées, qui doivent être vérifiées pour $z = 0$, fournissent des relations linéaires et homogènes par rapport aux exponentielles successives

$$e^{i\omega(t - lx - my)}, \quad \ldots, \quad e^{i\omega'(t - l'x - m'y)}, \quad \ldots; \quad e^{i\omega_1(t - l_1 x - m_1 y)}, \quad \ldots, \quad e^{i\omega'_1(t - l'_1 x - m'_1 y)}, \quad \ldots,$$

qui doivent être satisfaites quels que soient t, x, y. Or, comme nous ne cherchons que la solution simple la plus générale, toutes ces exponentielles doivent être identiques; cela exige que toutes les ondes partielles aient même pulsation ω et qu'on ait les relations

$$l = \ldots = l' = \ldots = l_1 = \ldots = l'_1;$$
$$m = \ldots = m' = \ldots = m_1 = \ldots = m'_1.$$

Alors, en vertu des relations (56), (57), (56′), (57′), qui donnent pour n, n', n_1 et n'_1 les deux seules solutions $\pm n$, $\pm n'$, $\pm n_1$, $\pm n'_1$, on voit qu'il ne subsiste, dans le milieu zéro, que les quatre ondes de paramètres directeurs

$$l,\ m,\ n;\quad l,\ m,\ -n;\quad l',\ m',\ n';\quad l',\ m',\ -n'$$

et, dans le milieu 1, que les quatre ondes de paramètres directeurs

$$l_1,\ m_1,\ n_1;\quad l_1,\ m_1,\ -n_1;\quad l'_1,\ m'_1,\ n'_1;\quad l'_1,\ m'_1,\ -n'_1.$$

On peut donc dire que, si l'un des deux milieux est le siège d'une onde plane périodique de paramètres directeurs et de pulsation donnés, les expressions

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} X &= (P\, e^{-i\omega nz} + P'\, e^{i\omega nz})\, e^{i\omega(t-lx-my)} \\ &\quad + l'\,(\Delta\, e^{-i\omega n'z} + \Delta'\, e^{i\omega n'z})\, e^{i\omega(t-l'x-m'y)}, \\ Y &= (Q\, e^{-i\omega nz} + Q'\, e^{i\omega nz})\, e^{i\omega(t-lx-my)} \\ &\quad + m'(\Delta\, e^{-i\omega n'z} + \Delta'\, e^{i\omega n'z})\, e^{i\omega(t-l'x-m'y)}, \\ Z &= (R\, e^{-i\omega nz} + R'\, e^{i\omega nz})\, e^{i\omega(t-lx-my)} \\ &\quad + n'\,(\Delta\, e^{-i\omega n'z} - \Delta'\, e^{i\omega n'z})\, e^{i\omega(t-l'x-m'y)}; \end{aligned}\right.$$

$$(58')\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= (P_1\, e^{-i\omega n_1 z} + P'_1\, e^{i\omega n_1 z})\, e^{i\omega(t-l_1x-m_1y)} \\ &\quad + l'_1\,(\Delta_1\, e^{-i\omega n'_1 z} + \Delta'_1\, e^{i\omega n'_1 z})\, e^{i\omega(t-l'_1x-m'_1y)}, \\ Y_1 &= (Q_1\, e^{-i\omega n_1 z} + Q'_1\, e^{i\omega n_1 z})\, e^{i\omega(t-l_1x-m_1y)} \\ &\quad + m'_1\,(\Delta_1\, e^{-i\omega n'_1 z} + \Delta'_1\, e^{i\omega n'_1 z})\, e^{i\omega(t-l'_1x-m'_1y)}, \\ Z_1 &= (R_1\, e^{-i\omega n_1 z} + R'_1\, e^{i\omega n_1 z})\, e^{i\omega(t-l_1x-m_1y)} \\ &\quad + n'_1\,(\Delta_1\, e^{-i\omega n'_1 z} - \Delta'_1\, e^{i\omega n'_1 z})\, e^{i\omega(t-l'_1x-m'_1y)}, \end{aligned}\right.$$

auxquelles on doit joindre les relations (56), (57), (56′), (57′) et les suivantes :

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} l &= l' = l_1 = l'_1, \\ m &= m' = m_1 = m'_1; \end{aligned}\right.$$

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} P\,l + Q\,m + R\,n &= 0, \\ P'\,l + Q'\,m - R'\,n &= 0, \\ P_1\,l_1 + Q_1\,m_1 + R_1\,n_1 &= 0, \\ P'_1\,l_1 + Q'_1\,m_1 - R'_1\,n_1 &= 0, \end{aligned}\right.$$

représentent la solution simple correspondante la plus générale par ondes planes périodiques, dont le problème de la réflexion et de la réfraction soit susceptible.

Les égalités (59) jointes aux égalités (56), (57), (56'), (57') vont nous permettre de déterminer tout d'abord les orientations ainsi que les vitesses de propagation et les coefficients d'absorption de toutes les ondes en fonction de ces mêmes éléments relatifs à l'une d'entre elles. L'application des conditions aux limites nous donnera ensuite un certain nombre de relations entre les coefficients d'amplitude, qu'il faudra joindre aux précédentes (60). Nous verrons alors quels sont ceux de ces coefficients qu'il est nécessaire de se donner pour que le problème soit déterminé.

II. — Ondes incidentes et ondes réfléchies.

Considérons l'onde dont les paramètres directeurs sont

$$(23) \qquad (l, m, n) = \frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{\Omega} - i h(a, b, c)$$

et que nous appellerons, pour abréger, l'onde (l, m, n); en prenant pour plan zOx celui contenant la normale $O\nu$ aux plans d'onde correspondants, nous aurons $\beta = 0$. D'autre part, puisque l'onde $(l, m, -n)$ figure également dans les égalités (58), nous pouvons supposer γ positif, de sorte que, si nous prenons pour axe Ox la direction qui fait un angle aigu avec $O\nu$, la direction $O\nu$ sera située dans l'angle zOx et en posant $i = \widehat{zO\nu}$ (1), nous aurons

$$(61) \qquad \alpha = \sin i, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \cos i.$$

Le paramètre m étant ainsi imaginaire pur, il en est de même de m', m_1, m'_1, d'après les égalités (59), de sorte qu'en posant

$$(62) \qquad \left\{ \begin{aligned} (l', m', n') &= \frac{(\alpha', \beta', \gamma')}{\Omega'} - i h' (a', b', c'), \\ (l_1, m_1, n_1) &= \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{\Omega_1} - i h_1 (a_1, b_1, c_1), \\ (l'_1, m'_1, n'_1) &= \frac{(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)}{\Omega'_1} - i h'_1 (a'_1, b'_1, c'_1), \end{aligned} \right.$$

(1) La même lettre i désigne également le symbole $\sqrt{-1}$, mais il n'y a évidemment aucune confusion à craindre.

on a aussi

$$(\beta', \beta_1, \beta'_1) = 0.$$

Tous les plans d'onde sont donc normaux au plan zOx appelé *plan d'incidence*.

Nous dirons que l'onde (l, m, n) est *l'onde transversale incidente* dans le milieu zéro, que i est *l'angle d'incidence* correspondant et que l'onde $(l, m, -n)$ est *l'onde transversale réfléchie* dans le milieu zéro. La normale issue de O aux plans d'onde de cette dernière est symétrique de $O\nu$ par rapport à Ox; elle fait donc avec la direction des z négatifs un angle appelé *angle de réflexion* précisément égal à l'angle d'incidence i.

Soit alors i' l'angle compté positivement de Oz vers Ox que fait avec Oz la normale $O\nu'$ aux plans d'onde de l'onde (l', m', n'); on a

$$\alpha' = \sin i', \qquad \gamma' = \cos i'$$

et, de même, i_1 et i'_1 ayant des significations analogues,

$$\alpha_1 = \sin i_1, \qquad \gamma_1 = \cos i_1,$$
$$\alpha'_1 = \sin i'_1, \qquad \gamma'_1 = \cos i'_1.$$

Les égalités (59) sont ainsi, d'après les égalités (62), équivalentes aux suivantes :

$$(63)\qquad \begin{aligned} \frac{\sin i}{\Omega} &= \frac{\sin i'}{\Omega'} = \frac{\sin i_1}{\Omega_1} = \frac{\sin i'_1}{\Omega'_1}, \\ ha &= h'a' = h_1 a_1 = h'_1 a'_1, \\ hb &= h'b' = h_1 b_1 = h'_1 b'_1, \end{aligned}$$

qui constituent la généralisation de la loi de Descartes.

En particulier, si le milieu zéro n'est pas conducteur et si l'onde (l, m, n) est uniforme, h est nul; de sorte que, si h_1 et h'_1 ne sont pas nuls, ce qui a lieu nécessairement si le milieu 1 est conducteur, les cosinus directeurs a_1, b_1, a'_1, b'_1 sont nuls. Les plans d'absorption dans le milieu 1 sont donc alors parallèles à la surface séparative.

D'après les égalités (63), $\sin i'$, $\sin i_1$, $\sin i'_1$ sont positifs; comme, d'autre part, les ondes $(l', m', -n')$, $(l_1, m_1, -n_1)$, $(l'_1, m'_1, -n'_1)$ figurent dans les égalités (58) et (58') en même temps que les ondes (l', m', n'), (l_1, m_1, n_1), (l'_1, m'_1, n'_1), nous pouvons supposer $\cos i'$, $\cos i_1$, $\cos i'_1$ également positifs; d'où il résulte que les angles i', i_1, i'_1 sont, comme l'angle i, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Dans ces conditions, nous dirons que :

L'onde (l', m', n') est *l'onde longitudinale incidente* dans le milieu zéro;

L'onde $(l', m', -n')$ est *l'onde longitudinale réfléchie* dans le milieu zéro;

L'onde $(l_1, m_1, -n_1)$ est *l'onde transversale incidente* dans le milieu 1;

L'onde (l_1, m_1, n_1) est *l'onde transversale réfléchie* dans le milieu 1;

L'onde $(l'_1, m'_1, -n'_1)$ est *l'onde longitudinale incidente* dans le milieu 1;

L'onde (l'_1, m'_1, n'_1) est *l'onde longitudinale réfléchie* dans le milieu 1.

i' est *l'angle d'incidence longitudinale* dans le milieu zéro; il est égal à *l'angle de réflexion longitudinale*, dans le même milieu, que fait avec la direction des z négatifs la normale aux plans d'onde de l'onde $(l', m', -n')$.

i_1 est *l'angle de réflexion transversale* dans le milieu 1; il est égal à *l'angle d'incidence transversale*, dans le même milieu, que fait avec la direction des z négatifs la normale aux plans d'onde de l'onde $(l_1, m_1, -n_1)$.

i'_1 est *l'angle de réflexion longitudinale* dans le milieu 1; il est égal à *l'angle d'incidence longitudinale*, dans le même milieu, que fait avec la direction des z négatifs la normale aux plans d'onde de l'onde $(l'_1, m'_1, -n'_1)$.

Nous sommes donc conduits, en définitive, à considérer dans chaque milieu deux ondes incidentes, transversale et longitudinale, et deux ondes réfléchies, transversale et longitudinale.

Nous insistons sur cette spécification, en modifiant en partie la terminologie jusqu'ici adoptée, pour la raison suivante : dans la théorie de la réflexion et de la réfraction, telle qu'elle a été exposée jusqu'ici à notre connaissance et dont les ondes longitudinales se trouvent généralement exclues par la forme même des équations d'où l'on part, on admet que le mouvement, dans le milieu zéro, résulte de l'onde incidente (l, m, n) et de l'onde réfléchie $(l, m, -n)$, ce qui est bien conforme à ce que nous venons de voir; mais dans le milieu 1, on ne considère *a priori* que l'onde (l_1, m_1, n_1), qu'on appelle *onde réfractée* parce qu'on la regarde physiquement comme le prolongement de l'onde (l, m, n) dans le second milieu, et l'on passe entièrement sous silence la quatrième onde $(l_1, m_1, -n_1)$, dont la considération s'impose pourtant au même titre que les trois premières d'après l'analyse qui précède. Cette quatrième onde, à laquelle nous conduit logiquement une théorie complète, étant l'homologue de l'onde (l, m, n), il était naturel de lui donner le même nom d'*onde incidente*. De même, les ondes homologues $(l, m, -n)$, (l_1, m_1, n_1) devant naturellement aussi porter le même qualificatif, du fait que nous convenions d'appeler encore la première *onde réfléchie* dans le milieu zéro, nous devions également appeler la seconde *onde réfléchie* dans le milieu 1 et non plus *onde réfractée*.

III. — Relations entre les éléments directeurs, les vitesses de propagation et les coefficients des ondes.

Cela posé, nous allons déterminer les éléments de ces différentes ondes en fonction des éléments de l'une d'entre elles, par exemple de l'onde transversale incidente (l, m, n) dans le milieu zéro, en commençant par les ondes $(l', m', \pm n')$.

D'après les égalités (59), l'égalité (57) peut s'écrire

$$n'^2 = \frac{1}{\mathrm{v}'^2} - l^2 - m^2.$$

Posons alors

$$C' = \frac{\cos i'}{\Omega'}, \qquad \mathfrak{S}' = h'c',$$

on aura

$$n' = C' - i\mathfrak{S}',$$

puis, remplaçons g, l, m par leurs expressions (35) et (23); en séparant le réel de l'imaginaire et en posant

$$(64)\qquad \left\{ \begin{aligned} 2f &= \frac{\mu}{L^2} + (a^2 + b^2)h^2 - \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}, \\ 2g &= \frac{\nu}{L^2} - 2ah\frac{\sin i}{\Omega}, \end{aligned} \right.$$

il viendra pour déterminer C' et $\mathfrak{S}'$ les deux équations

$$C'^2 - \mathfrak{S}'^2 = 2f,$$
$$C'\mathfrak{S}' = g.$$

On en déduit aisément sans ambiguité, puisque C' n'est jamais négatif,

$$
(65) \qquad \left\{ \begin{aligned} C' &= \sqrt{f + \sqrt{f^2 + g^2}}, \\ \mathfrak{S}' &= \pm \sqrt{-f + \sqrt{f^2 + g^2}}, \end{aligned} \right.
$$

le signe à prendre devant le dernier radical étant celui de g. Dès lors, les deux groupes de relations

$$
(66) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin i'}{\Omega'} = \frac{\sin i}{\Omega}, \\ &\frac{\cos i'}{\Omega'} = C' ; \end{aligned} \right.
$$

$$
(67) \qquad \left\{ \begin{aligned} a' h' &= ah, \\ b' h' &= bh, \\ c' h' &= \mathfrak{S}', \end{aligned} \right.
$$

donnent pour la vitesse de propagation et le coefficient d'absorption de l'onde considérée

$$
(68) \qquad \frac{1}{\Omega'^2} = \frac{\sin^2 i}{\Omega^2} + C'^2, \qquad h'^2 = (a^2 + b^2) h^2 + \mathfrak{S}'^2,
$$

c'est-à-dire en développant

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\Omega'^2} = {} & \frac{\mu}{L^2} + (a^2 + b^2) h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2} \\
& + \sqrt{\left[\frac{\mu}{L^2} + (a^2 + b^2) h^2 - \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\right]^2 + \left(\frac{\nu}{L^2} - 2ah\frac{\sin i}{\Omega}\right)^2}, \\
2h'^2 = {} & -\frac{\mu}{L^2} + (a^2 + b^2) h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2} \\
& + \sqrt{\left[\frac{\mu}{L^2} + (a^2 + b^2) h^2 - \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\right]^2 + \left(\frac{\nu}{L^2} - 2ah\frac{\sin i}{\Omega}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Ω' et h' étant ainsi déterminés, les égalités (66) font connaître l'angle d'incidence i' et les égalités (67) les trois cosinus directeurs a', b', c'.

Dans le cas particulier où $g = 0$, les expressions (65) de C' et de $\mathfrak{S}'$ deviennent

$$
C' = \sqrt{f + |f|}, \qquad \mathfrak{S}' = \pm \sqrt{-f + |f|};
$$

nous avons donc deux cas à distinguer suivant le signe de f.

Si f est positif, il vient

$$C' = \sqrt{2f}, \qquad \mathfrak{C}' = 0,$$

de sorte que les expressions (68) de Ω' et de h' deviennent

$$\frac{1}{\Omega'^2} = \frac{\mu}{L^2} + (a^2 + b^2)h^2, \qquad h'^2 = (a^2 + b^2)h^2,$$

en même temps que c' est nul. Les plans d'absorption des ondes $(l', m', \pm n')$ sont donc confondus et perpendiculaires à la surface séparative des deux milieux.

Si f est négatif, il vient

$$C' = 0, \qquad \mathfrak{C}' = \sqrt{-2f},$$

car on peut évidemment alors supposer $\mathfrak{C}'$ positif, de sorte que les expressions (68) de Ω' et de h' deviennent

$$\frac{1}{\Omega'} = \frac{\sin i}{\Omega}, \qquad h'^2 = -\frac{\mu}{L^2} + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2},$$

en même temps que $\cos i'$ est nul. Les plans d'onde des ondes $(l', m', \pm n')$ sont donc confondus et perpendiculaires à l'axe Ox, suivant lequel s'effectue la propagation.

Plus particulièrement encore, g est identiquement nul si le milieu zéro n'est pas conducteur et si l'onde (l, m, n) est uniforme, puisqu'alors les quantités ν et h sont nulles. Si donc f est positif, h' est nul, de sorte que les ondes $(l', m', \pm n')$ sont uniformes; si au contraire f est négatif, h' n'est pas nul, de sorte que les ondes $(l', m', \pm n')$ sont évanescentes.

Passons aux ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$: on a, d'après les égalités (56') et (59),

$$n_1^2 = \frac{1}{\mathfrak{G}_1^2} - l^2 - m^2,$$

de sorte qu'en posant

$$C_1 = \frac{\cos i_1}{\Omega_1}, \qquad \mathfrak{C}_1 = h_1 c_1,$$

$$2f_1 = \frac{1}{T_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 - \frac{\sin^2 i}{\Omega^2},$$

$$2g_1 = \frac{\lambda_1}{T_1^2} - 2ah\frac{\sin i}{\Omega},$$

on obtient, par un calcul analogue au précédent,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_1 &= \sqrt{f_1 + \sqrt{f_1^2 + g_1^2}},\\
\mathfrak{S}_1 &= \pm\sqrt{-f_1 + \sqrt{f_1^2 + g_1^2}},
\end{aligned}
$$

le signe à prendre devant le dernier radical étant celui de g_1. Les deux groupes de relations

$$
(66') \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\sin i_1}{\Omega_1} &= \frac{\sin i}{\Omega},\\
\frac{\cos i_1}{\Omega_1} &= \mathrm{C}_1;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(67') \qquad \left\{
\begin{aligned}
a_1 h_1 &= ah,\\
b_1 h_1 &= bh,\\
c_1 h_1 &= \mathfrak{S}_1
\end{aligned}
\right.
$$

donnent ensuite

$$
\frac{1}{\Omega_1^2} = \frac{\sin^2 i}{\Omega^2} + \mathrm{C}_1^2, \qquad h_1^2 = (a^2 + b^2)h^2 + \mathfrak{S}_1^2,
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\Omega_1^2} = {} & \frac{1}{\mathrm{T}_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\\
& + \sqrt{\left[\frac{1}{\mathrm{T}_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 - \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\right]^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\mathrm{T}_1^2} - 2ah\frac{\sin i}{\Omega}\right)^2},\\
2h_1^2 = {} & -\frac{1}{\mathrm{T}_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\\
& + \sqrt{\left[\frac{1}{\mathrm{T}_1^2} + (a^2 + b^2)h^2 - \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}\right]^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\mathrm{T}_1^2} - 2ah\frac{\sin i}{\Omega}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Les relations (66′) et (67′) font ensuite connaître i_1, a_1, b_1, c_1.

Considérons le cas particulier où $g_1 = 0$: si f_1 est positif, il vient comme précédemment

$$
\mathrm{C}_1 = \sqrt{2f_1}, \qquad \mathfrak{S}_1 = 0,
$$

$$
\frac{1}{\Omega_1^2} = \frac{1}{\mathrm{T}_1^2} + (a^2 + b^2)h^2, \qquad h_1^2 = (a^2 + b^2)h^2, \qquad c_1 = 0.
$$

Les plans d'absorption des ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$ sont donc confondus et perpendiculaires à la surface séparative des deux milieux.

Si f_1 est négatif, il vient

$$C_1 = 0, \qquad \mathfrak{S}_1 = \sqrt{-2f_1},$$
$$\frac{1}{\Omega_1} = \frac{\sin i}{\Omega}, \qquad h_1^2 = -\frac{1}{T_1^2} + \frac{\sin^2 i}{\Omega^2}, \qquad \cos i_1 = 0.$$

Les plans d'onde des ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$ sont donc confondus et perpendiculaires à l'axe Ox suivant lequel s'effectue la propagation.

Plus particulièrement encore, g_1 est identiquement nul si les deux milieux 0 et 1 ne sont pas conducteurs et si l'onde (l, m, n) est uniforme, puisqu'alors les quantités λ_1 et h sont nulles. Si donc f_1 est positif, c'est-à-dire, en remarquant qu'alors $\Omega = T$, si $\sin i < \frac{T}{T_1}$, h_1 est nul, de sorte que les ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$ sont uniformes. Ceci correspond au cas dit de la *réfraction ordinaire*. Si au contraire f_1 est négatif, c'est-à-dire si $\sin i > \frac{T}{T_1}$, h_1 n'est pas nul, de sorte que les ondes $(l_1, m_1, \pm n_1)$ sont évanescentes. Ceci correspond au cas dit de la *réflexion totale*.

Enfin, les formules relatives aux ondes $(l_1, m'_1, \pm n'_1)$ se déduiraient de celles relatives aux ondes $(l', m', \pm n')$ par l'adjonction de l'indice 1 au bas des quantités

$$n', \ \zeta, \ C', \ \mathfrak{S}', \ \mu, \ \nu, \ L, \ a', \ b', \ c', \ h', \ \Omega'.$$

IV. — Relations entre les coefficients d'amplitude; conditions pour que le problème soit déterminé.

Il ne nous reste plus qu'à appliquer les équations (15), (16), (4), (8), (9), spéciales à la surface séparative $z = 0$ des deux milieux, ce qui nous fournira un certain nombre de relations entre les amplitudes. Comme on a ici

$$(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1) = 0, \qquad \gamma = -1, \qquad \gamma_1 = 1,$$

ces équations prennent la forme

$$\mathcal{K} Z = \mathcal{K}_1 Z_1,$$
$$\mathcal{K}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \mathcal{K}_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$$

et

$$
\begin{gathered}
X = X_1, \\
Y = Y_1, \\
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y}, \\
\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial z}\right), \\
\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right).
\end{gathered}
$$

Comme la cinquième résulte des deux qui la précèdent, nous n'avons là que six relations distinctes qui deviennent, en y remplaçant X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 par leurs expressions (58) et (58′) et en tenant compte des égalités (59),

$$
\begin{gathered}
(69) \qquad \mathfrak{K}[R + R' + n'(\Delta - \Delta')] = \mathfrak{K}_1[R_1 + R'_1 + n_1(\Delta_1 - \Delta'_1)], \\
\frac{\mathfrak{K}}{\mu^2}(\Delta + \Delta') = \frac{\mathfrak{K}_1}{\mu_1^2}(\Delta_1 + \Delta'_1),
\end{gathered}
$$

$$
(70) \qquad \left\{
\begin{aligned}
P + P' + l\,(\Delta + \Delta') &= P_1 + P'_1 + l\,(\Delta_1 + \Delta'_1), \\
Q + Q' + m(\Delta + \Delta') &= Q_1 + Q'_1 + m(\Delta_1 + \Delta'_1).
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(71) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{n(-Q + Q') + m(R + R')}{\mu} &= \frac{n_1(-Q_1 + Q'_1) + m(R_1 + R'_1)}{\mu_1}, \\
\frac{n(-P + P') + l\,(R + R')}{\mu} &= \frac{n_1(-P_1 + P'_1) + l\,(R_1 + R'_1)}{\mu_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces égalités jointes aux égalités (60), que nous écrirons

$$
(60') \qquad \left\{
\begin{aligned}
P\,l + Q\,m + R\,n &= 0, \\
P'\,l + Q'\,m - R'\,n &= 0, \\
P_1\,l + Q_1\,m + R_1\,n_1 &= 0, \\
P'_1\,l + Q'_1\,m - R'_1\,n_1 &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

constituent dix relations linéaires et homogènes entre les seize coefficients d'amplitude

$$
\begin{gathered}
P,\ Q,\ R;\quad P',\ Q',\ R';\quad P_1,\ Q_1,\ R_1;\quad P'_1,\ Q'_1,\ R'_1; \\
\Delta,\quad \Delta',\quad \Delta_1,\quad \Delta'_1.
\end{gathered}
$$

Pour que le problème soit déterminé, il faut donc se donner six coefficients d'amplitude indépendants, c'est-à-dire non liés par une ou plusieurs relations. On pourra, par exemple, se donner les amplitudes dans le milieu zéro, c'est-à-dire

$$\text{deux des coefficients } P,\ Q,\ R;$$
$$\text{deux des coefficients } P',\ Q',\ R';$$
$$\Delta \text{ et } \Delta';$$

ou encore les amplitudes incidentes dans les milieux o et 1, c'est-à-dire

$$\text{deux des coefficients } P,\ Q,\ R;$$
$$\Delta;$$
$$\text{deux des coefficients } P'_1,\ Q'_1,\ R'_1;$$
$$\Delta'_1.$$

Si donc on ne se donnait que les amplitudes incidentes dans le milieu zéro, le problème serait indéterminé.

Cependant, dans la solution classique du problème de la réflexion et de la réfraction, on ne se donne que les amplitudes incidentes dans le milieu zéro et pourtant le problème apparaît comme entièrement déterminé. Cette apparence tient à ce fait qu'on supprime *a priori* les ondes incidentes $(l_1, m_1, -n_1)$, $(l'_1, m'_1, -n'_1)$ dans le milieu 1, de sorte que tout se passe comme si l'on se donnait en outre

$$(P'_1,\ Q'_1,\ R'_1;\ \Delta'_1) = 0.$$

Remarquons, enfin, que si l'on se donne

$$\text{deux des coefficients } P,\ Q,\ R; \qquad \Delta = 0;$$
$$\text{deux des coefficients } P'_1,\ Q'_1,\ R'_1; \qquad \Delta'_1 = 0,$$

Δ' et Δ_1 ne sont pas nuls en général. L'absence d'ondes incidentes longitudinales n'entraîne donc pas celle d'ondes réfléchies longitudinales; de sorte que si l'on annulait *a priori* Δ' et Δ_1, sous le prétexte que Δ et Δ'_1 sont nuls, les équations deviendraient impossibles. C'est à cette difficulté que s'était heurté P. Duhem à la fin de son premier Mémoire.

V. — Expressions des amplitudes réfléchies en fonction des amplitudes incidentes dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti.

Nous allons faire le calcul des amplitudes réfléchies en fonction des amplitudes incidentes dans l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, d'après laquelle l'équation (17) est vérifiée dans tout l'espace. Il résulte alors de l'expression de θ

$$\theta = -\frac{i\omega}{V'^2}\left(\Delta e^{-i\omega n'z} + \Delta' e^{i\omega n'z}\right) e^{i(\omega t - l'x - m'y)},$$

déduite des égalités (58), et de celle analogue de θ_1 que les quatre amplitudes longitudinales

$$\Delta, \quad \Delta', \quad \Delta_1, \quad \Delta'_1$$

sont nulles, de sorte qu'il ne subsiste dans les deux milieux que les ondes transversales.

D'autre part, l'expression (12) de ϖ^2 devient dans notre hypothèse

$$\varpi^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{a^2}{2}\mathcal{K}\mu},$$

ce qui change l'égalité (69) en la suivante :

$$(69') \qquad \frac{R + R'}{\mu\varpi^2} = \frac{R_1 + R'_1}{\mu_1\varpi_1^2}.$$

Or, celle-ci est une combinaison des égalités (72), comme on le voit en les multipliant respectivement par m et l, puis en les ajoutant membre à membre et en tenant compte des égalités (56), (56') et (60'). Nous remplacerons donc les égalités (72) par la suivante :

$$(71') \quad \frac{n}{\mu}[m(P - P') - l(Q - Q')] = \frac{n_1}{\mu_1}[m(P_1 - P'_1) - l(Q_1 - Q'_1)],$$

obtenue en les multipliant respectivement par l et $-m$, puis en les ajoutant membre à membre.

Nous avons donc, en définitive, pour déterminer les amplitudes réfléchies

$$P', Q', R'; \quad P_1, Q_1, R_1$$

en fonction des amplitudes incidentes

$$\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R};\quad \mathrm{P}'_1,\ \mathrm{Q}'_1,\ \mathrm{R}'_1$$

les six équations distinctes :

$$(69')\qquad \frac{\mathrm{R}+\mathrm{R}'}{\mu\mathfrak{T}^2}=\frac{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}'_1}{\mu_1\mathfrak{T}_1^2},$$

$$(70')\qquad \begin{cases} \mathrm{P}+\mathrm{P}'=\mathrm{P}_1+\mathrm{P}'_1,\\ \mathrm{Q}+\mathrm{Q}'=\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}'_1,\end{cases}$$

$$(71')\qquad \frac{n}{\mu}[m(\mathrm{P}-\mathrm{P}')-l(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}')]=\frac{n_1}{\mu_1}[m(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}'_1)-l(\mathrm{Q}_1-\mathrm{Q}'_1)],$$

$$(72)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}'l+\mathrm{Q}'m-\mathrm{R}'n=0,\\ \mathrm{P}_1l+\mathrm{Q}_1m+\mathrm{R}_1n_1=0,\end{cases}$$

à l'une desquelles nous pouvons substituer la combinaison

$$n(\mathrm{R}-\mathrm{R}')=n_1(\mathrm{R}_1-\mathrm{R}'_1)$$

des égalités (60'), obtenue en tenant compte des équations (70').

Cela posé, l'équation (69') et la précédente déterminent tout d'abord R' et R_1 en fonction de R et de R'_1 et l'on obtient

$$(73)\qquad \begin{cases} (n\mu\mathfrak{T}^2+n_1\mu_1\mathfrak{T}_1^2)\mathrm{R}'=(n\mu\mathfrak{T}^2-n_1\mu_1\mathfrak{T}_1^2)\mathrm{R}+2n_1\mu\mathfrak{T}^2\mathrm{R}'_1,\\ (n\mu\mathfrak{T}^2+n_1\mu_1\mathfrak{T}_1^2)\mathrm{R}_1=2n\mu_1\mathfrak{T}_1^2\mathrm{R}-(n\mu\mathfrak{T}^2-n_1\mu_1\mathfrak{T}_1^2)\mathrm{R}'_1.\end{cases}$$

Les équations restantes donnent ensuite

$$(74)\qquad \begin{cases} (n\mu_1+n_1\mu)\mathrm{P}'=(n\mu_1-n_1\mu)\mathrm{P}+2n_1\mu\mathrm{P}'_1\\ \qquad +2\mu\mu_1\dfrac{l}{l^2+m^2}\,\dfrac{n^2\mathfrak{T}^2-n_1^2\mathfrak{T}_1^2}{n\mu\mathfrak{T}^2+n_1\mu_1\mathfrak{T}_1^2}(n\mathrm{R}+n_1\mathrm{R}'_1),\\ (n\mu_1+n_1\mu)\mathrm{Q}'=(n\mu_1-n_1\mu)\mathrm{Q}+2n_1\mu\mathrm{Q}'_1\\ \qquad +2\mu\mu_1\dfrac{m}{l^2+m^2}\,\dfrac{n^2\mathfrak{T}^2-n_1^2\mathfrak{T}_1^2}{n\mu\mathfrak{T}^2+n_1\mu_1\mathfrak{T}_1^2}(n\mathrm{R}+n_1\mathrm{R}'_1),\\ (n\mu_1+n_1\mu)\mathrm{P}_1=2n\mu_1\mathrm{P}-(n\mu_1-n_1\mu)\mathrm{P}'_1\\ \qquad +2\mu\mu_1\dfrac{l}{l^2+m^2}\,\dfrac{n^2\mathfrak{T}^2-n_1^2\mathfrak{T}_1^2}{n\mu\mathfrak{T}^2+n_1\mu_1\mathfrak{T}_1^2}(n\mathrm{R}+n_1\mathrm{R}'_1),\\ (n\mu_1+n_1\mu)\mathrm{Q}_1=2n\mu_1\mathrm{Q}-(n\mu_1-n_1\mu)\mathrm{Q}'_1\\ \qquad +2\mu\mu_1\dfrac{m}{l^2+m^2}\,\dfrac{n^2\mathfrak{T}^2-n_1^2\mathfrak{T}_1^2}{n\mu\mathfrak{T}^2+n_1\mu_1\mathfrak{T}_1^2}(n\mathrm{R}+n_1\mathrm{R}'_1),\end{cases}$$

Par raison de symétrie, on passe d'ailleurs des expressions de P', Q', R' à celles de P_1, Q_1, R_1, en y permutant P et P'_1, Q et Q'_1, R et R'_1; μ et μ_1, ϖ et ϖ_1, n et $-n_1$.

Ces formules (73) et (74) achèvent de résoudre le problème général de la réflexion et de la réfraction par ondes planes périodiques, que nous nous étions posé; dans le cas particulier où l'on a

$$(P'_1, Q'_1, R'_1) = 0, \tag{75}$$

elles deviennent, en tenant compte des égalités (56) et (56′) et en supposant pour simplifier $\mu = \mu_1$,

$$P' = \frac{n-n_1}{n+n_1}\left(P - \frac{2ln}{l^2+m^2+nn_1}R\right),$$

$$Q' = \frac{n-n_1}{n+n_1}\left(Q - \frac{2mn}{l^2+m^2+nn_1}R\right),$$

$$R' = \frac{n-n_1}{n+n_1}\,\frac{l^2+m^2-nn_1}{l^2+m^2+nn_1}R;$$

$$P_1 = \frac{2n}{n+n_1}\left[P + \frac{l(n-n_1)}{l^2+m^2+nn_1}R\right],$$

$$Q_1 = \frac{2n}{n+n_1}\left[Q + \frac{m(n-n_1)}{l^2+m^2+nn_1}R\right],$$

$$R_1 = \frac{2n}{n+n_1}\,\frac{l^2+m^2+n^2}{l^2+m^2+nn_1}R.$$

Celles-ci correspondent aux formules de la théorie classique; si, de plus, les deux milieux sont dénués de conductibilité et si l'onde incidente est uniforme, elles conduisent aux formules de Fresnel. Mais il resterait à expliquer pourquoi c'est seulement le cas particulier exprimé par les égalités (75) qui correspond aux faits expérimentaux.