

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

MAURICE HAMY

**Sur un cas particulier de diffraction des images des astres circulaires**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 7<sup>e</sup> série*, tome 3 (1917), p. 171-215.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1917\\_7\\_3\\_\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1917_7_3__171_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur un cas particulier de diffraction des images  
des astres circulaires;*

PAR MAURICE HAMY.



Des considérations particulières m'ont conduit à penser qu'il y aurait avantage, pour mesurer le diamètre mal connu du Soleil et en étudier les variations, à observer l'astre au foyer d'une lunette dont l'objectif est recouvert d'un écran opaque, percé d'une fente de grande longueur.

L'interposition d'un pareil diaphragme, dans le trajet des rayons, a pour effet de provoquer une dilatation de l'image, dans le sens parallèle à la largeur de la fente, et l'étude de cette déformation ne présente pas d'intérêt spécial. Les choses se passent, au contraire, tout autrement dans la direction parallèle au sens de la longueur de la fente.

La largeur angulaire de l'image, considérée au niveau de son centre, présente alors un rapport direct avec le diamètre de l'astre.

L'examen théorique du sujet est intimement lié à la solution du problème suivant :

*Un astre circulaire, de diamètre  $2\varepsilon$ , étant observé au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente rectiligne, trouver les variations de l'intensité lumineuse, le long de l'axe de symétrie de l'image parallèle au grand côté  $h$  de la fente, dans une direction faisant l'angle  $\varphi$  avec la droite allant de l'observateur au centre de l'astre.*

Dans mes recherches sur cette question, j'ai supposé l'éclat intrinsèque de l'astre uniforme, sa variation, du centre au bord, n'exerçant qu'une influence négligeable sur les conclusions. J'examine, dans le présent Mémoire, le cas limite correspondant à une fente de largeur très faible.

Le problème, considéré sans faire cette restriction, est beaucoup plus complexe. Son étude fera l'objet d'un autre travail.

L'application de mes résultats au Soleil complète la théorie.

Considérant l'image de cet astre, telle qu'elle se présente, dans le champ d'une lunette, je montre notamment que le contraste lumineux, de part et d'autre du bord géométrique, à l'une ou l'autre extrémité de l'axe de symétrie parallèle à la fente, est plus marqué en diaphragmant l'objectif par une fente étroite, de longueur égale à son ouverture, qu'en utilisant toute sa surface.

### I.

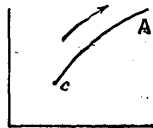
Le présent travail est fondé sur certains résultats établis, dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres (<sup>1</sup>), concernant les intégrales de la forme  $\int f(u) \varphi^n(u) du$ ,  $n$  désignant un nombre positif élevé. Je ne puis me dispenser de les résumer très succinctement ici, et d'en déduire dès maintenant les formules immédiatement applicables à la question à étudier.

1° Considérons l'intégrale

$$(1) \quad J = \int f(u) \varphi^n(u) du,$$

prise le long d'un contour  $cA$  et supposons que  $|\varphi(u)|$  prenne sa plus grande valeur, le long de ce chemin, à l'extrémité  $u = c$ .

Fig. 1.



Dans ces conditions, si  $\varphi(u)$  est holomorphe, dans le voisinage de  $c$ , sans que  $\varphi'(c)$  soit nul, et si l'on a, dans le voisinage du même point,

$$(2) \quad f(u) = (u - c)^\beta [B_1 + B_2(u - c) + \dots] \quad (\beta > -1),$$

on a pour  $n$  positif et très grand :

$$(3) \quad J = \left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1} \varphi^n \frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}} \left\{ B_1 + \frac{\beta+1}{n} \left[ \frac{\beta+2}{2} \left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - 1\right) B_1 - \frac{\varphi}{\varphi'} B_2 \right] + \dots \right\},$$

(<sup>1</sup>) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908.

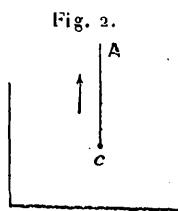
les termes négligés, dans la grande parenthèse, étant tels que leur produit par  $n^2$  reste fini, lorsque  $n$  augmente indéfiniment;  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ , ... représentant d'ailleurs  $\varphi(c)$ ,  $\varphi'(c)$ ,  $\varphi''(c)$ , ... et  $\Gamma(\beta + 1)$  la fonction eulérienne de seconde espèce.

Si l'on suppose que la détermination du facteur  $(u - c)^\beta$  qui figure, dans le développement de  $f(u)$ , correspond au plus petit argument positif de  $u - c$ , et si l'on appelle  $\Theta$  le plus petit angle positif que fait, avec la direction positive de l'axe des abscisses, la demi-tangente au contour d'intégration, menée au point  $u = c$ , dans le sens  $cA$ , la détermination du facteur  $\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}$  qui rentre dans l'expression de  $J$  est celle qui correspond à l'argument de  $\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)$  qui diffère le moins de  $\Theta$ . Ce que je viens de dire suppose essentiellement que l'intégration se fasse dans le sens  $cA$ . Dans le cas contraire, il faut changer le signe du second nombre.

*Applications.* — L'expression générale ci-dessus s'applique au cas où l'on a (E base des logarithmes népériens)

$$(4) \quad J = \int f(u) E^{nu\sqrt{-1}} du,$$

l'intégrale étant prise le long d'une perpendiculaire à l'axe des abscisses (Fig. 2) partant du point  $u = c$ , et dirigée dans le sens des ordonnées



positives.  $|E^{nu\sqrt{-1}}|$  va, en effet, constamment en décroissant, quand on s'éloigne du point  $c$  sur ce chemin.

Dans le cas actuel,

$$-\frac{\varphi}{\varphi'} = \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \Theta = \frac{\pi}{2}.$$

On doit donc poser

$$-\frac{\varphi}{\varphi'} = E^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

et il en résulte

$$(5) \quad J = E^{(\beta+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} E^{nc\sqrt{-1}} \frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}} \left[ B_1 + \sqrt{-1} \frac{\beta+1}{n} B_2 + \dots \right],$$

les coefficients  $B_1, B_2$ , du développement de  $f(u)$ , étant calculés de façon que l'argument de  $u - c$  choisi soit le plus petit argument positif.

D'ailleurs, quand  $f(u)$  se réduit à une constante  $B_0$ , on a exactement

$$J = \frac{B_0}{n} E^{(\frac{\pi}{2} + nc)\sqrt{-1}}.$$

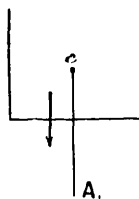
Voici une autre application de la formule générale

Supposons maintenant

$$(6) \quad J = \int f(u) E^{-nu\sqrt{-1}} du,$$

l'intégrale étant prise le long d'une perpendiculaire à l'axe des abscisses,

Fig. 3.



partant du point  $u = c$  et dirigée dans le sens des ordonnées négatives (fig. 3).

Les coefficients du développement de  $f(u)$ , dans le voisinage de  $u = c$ , étant calculés de façon à correspondre au plus petit argument positif de  $u - c$ , on trouve, en remarquant que  $\Theta$  est ici égal à  $\frac{3\pi}{2}$ ,

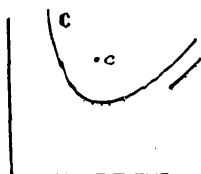
$$(7) \quad J = E^{(\beta+1)\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}} E^{-nc\sqrt{-1}} \frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}} \left[ B_1 - \sqrt{-1} \frac{\beta+1}{n} B_2 + \dots \right].$$

Dans le cas où  $f(u)$  se réduit à une constante  $B_0$ , on a exactement

$$J = \frac{B_0}{n} E^{[\frac{3\pi}{2} - nc]\sqrt{-1}}.$$

2° Les formules (3), (5) et (7) ne s'appliquent plus lorsque le point  $u = c$  n'est pas sur le contour d'intégration  $C$ . Dans cette hypothèse, la considération d'un point  $u = c$ , dans le voisinage duquel la

Fig. 4.

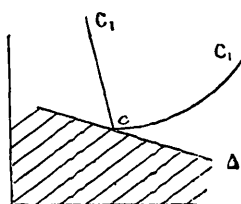


fonction  $f(u)$  est développable par la formule (2), est susceptible de conduire à une expression approchée de  $J$ , sous les conditions que nous allons spécifier. L'exposant  $\beta$  peut alors recevoir une valeur quelconque, à l'exception d'une valeur entière positive.

Voici d'abord une propriété de toute fonction  $\varphi(u)$ , holomorphe dans le voisinage du point  $c$ , et applicable seulement lorsque  $\varphi(c)$  et  $\varphi'(c)$  ne sont pas nuls. Par le point  $c$ , on peut faire passer une droite  $\Delta$  telle que  $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ , pour les points situés d'un côté de  $\Delta$  et suffisamment voisins de  $c$ , et  $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$  pour les points situés de l'autre côté de  $\Delta$ .

Imaginons maintenant qu'il existe un contour  $C_1$  (fig. 5), passant

Fig. 5.



par  $c$  et jouissant des propriétés suivantes : 1° ce contour serait équivalent au contour  $C$ , si le point  $u = c$  n'était pas un point singulier de  $f(u)$ ; 2° la plus grande valeur de  $|\varphi(u)|$  le long du contour  $C_1$  correspond à la valeur  $u = c$ .

Si, pour rendre le contour  $C_1$  équivalent au contour  $C$ , il faut le déformer, dans le voisinage du point  $u = c$ , de façon à le faire pénétrer dans la région du plan, couverte de hachures, contenant les points pour lesquels  $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ , la considération du point singulier  $u = c$  conduit à la valeur asymptotique de l'intégrale (1) et l'on a, pour  $n$

très grand,

$$(8) \quad J = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(-\beta)} \left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1} \frac{\varphi^n}{n^{1+\beta}} \left\{ B_1 + \frac{\beta+1}{n} \left[ \frac{\beta+2}{2} \left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - 1\right) B_1 - \frac{\varphi}{\varphi'} B_2 \right] + \dots \right\},$$

le produit par  $n^2$  des termes négligés, dans la grande parenthèse, restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Cette formule suppose d'ailleurs qu'en décrivant le chemin d'intégration final, la variable tourne, autour du point  $u = c$ , dans le sens direct. Il faut changer le signe du second membre, si le déplacement de la variable, autour de ce point, se fait dans le sens rétrograde.

La détermination du facteur  $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}$  se fixe de la façon suivante :

Supposons que les coefficients  $B$  du développement

$$f(u) = (u - c)^\beta [B_1 + B_2(u - c) + \dots]$$

soient calculés de façon à correspondre à un argument bien défini de  $u - c$ , le long du contour d'intégration. Dans ces conditions, l'argument de  $\frac{\varphi}{\varphi'}$  qu'il convient de prendre est celui qui diffère le moins de l'argument de  $u - c$ , en un point quelconque du contour choisi dans la région du plan couverte de hachures. On démontre qu'il est égal à l'argument de  $u - c$ , au point de rencontre de la partie du contour final, tracée dans la région couverte de hachures, et de la perpendiculaire à la droite  $\Delta$  menée par  $c$ .

*Applications.* -- Appliquons les résultats précédents à l'intégrale

$$J = \int_C f(u) E^{n\sqrt{-1}} du,$$

E désignant encore la base des logarithmes népériens et le contour  $C$  étant tel que celui marqué sur la figure 6. Dans le cas actuel, la droite  $\Delta$  est parallèle à l'axe des abscisses et la région du plan pour laquelle

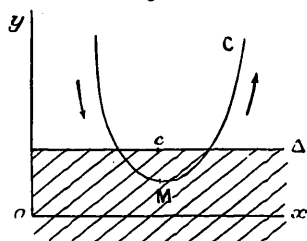
$$|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$$

est au-dessous de  $\Delta$ .

Supposons que les coefficients  $B$  du développement de  $f(u)$  correspondent à l'argument de  $u - c$  qui est nul sur la droite  $\Delta$ , à droite du point  $c$ . L'argument de  $u - c$  au point  $M$  du contour, placé sous le

point  $c$ , est alors égal à  $-\frac{\pi}{2}$ . C'est donc cette valeur qu'il faut multi-

Fig. 6.



plier par  $\beta + 1$ , pour avoir l'argument de  $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}$ . Appliquant la formule (8), on trouve

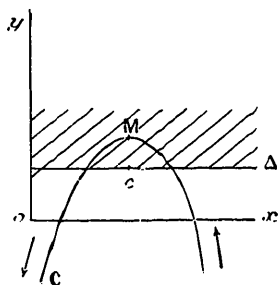
$$(9) \quad J = \frac{2\pi}{\Gamma(-\beta)} E^{-\beta \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}} \frac{E^{nc\sqrt{-1}}}{n^{\beta+1}} \left[ B_1 + \sqrt{-1} \frac{\beta+1}{n} B_2 + \dots \right].$$

Comme seconde application, nous prendrons

$$J = \int_C f(u) E^{-nu\sqrt{-1}} du.$$

La région dans laquelle  $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$  est maintenant au-dessus

Fig. 7.



de  $\Delta$ . Le contour C doit occuper une situation, telle que celle qui est représentée sur la figure 7, par rapport au point  $c$ , pour que la considération de ce point conduise à l'expression asymptotique de l'intégrale.

Supposant, comme ci-dessus, les coefficients B du développement



de  $f(u)$ , dans le voisinage de la valeur  $u = c$ , choisis de manière à correspondre à l'argument de  $u - c$  qui est nul sur la droite  $\Delta$ , à droite de  $c$ , on trouve

$$(10) \quad I = -\frac{2\pi}{\Gamma(-\beta)} E^{\beta \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}} \frac{E^{-nc\sqrt{-1}}}{n^{\beta+1}} \left[ B_1 - \sqrt{-1} \frac{\beta+1}{n} B_2 + \dots \right].$$

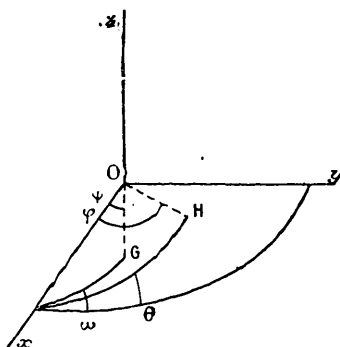
Les formules (9) et (10) supposent que la variable chemine le long du contour d'intégration de façon à tourner, dans le sens direct, autour du point  $c$ . Si elle tourne, au contraire, dans le sens rétrograde, il faut changer les signes des seconds membres.

## II.

Supposons qu'un diaphragme rectangulaire A soit disposé devant l'objectif d'une lunette mise au point sur l'infini. Soient  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  trois axes de coordonnées rectangulaires issus du centre de A et tracés l'un,  $Ox$ , perpendiculairement au plan du diaphragme, les deux autres,  $Oy$  et  $Oz$ , parallèlement à ses côtés. Appelons  $h$  la longueur du côté de A parallèle à  $Oz$  et  $a$  celle du côté parallèle à  $Oy$ .

Considérons une première direction  $OG$ , définie par les angles  $\psi$ ,  $\omega$ ,

Fig. 8.



marqués sur la figure, et une autre direction  $OH$ , définie de même par les angles  $\varphi$  et  $\theta$ . Nous nous proposons tout d'abord de résoudre la question suivante :

Une surface lumineuse, située à l'infini dans la direction  $GO$ , se voit de l'origine sous un angle solide infiniment petit. Les ondes qui

en émanent sont diffractées par l'ouverture A. On demande de calculer l'intensité lumineuse qui arrive, dans le plan focal de la lunette d'observation, au foyer Q des ondes qui se propagent perpendiculairement à OH.

Appelons P le plan perpendiculaire à OH placé entre l'ouverture A et l'objectif, à la distance  $q$  de l'origine. Les mouvements vibratoires partant d'un point quelconque de ce plan mettent le même temps  $\tau$  pour arriver au point Q.

Prenons comme phase origine, au temps  $t$ , la phase des vibrations incidentes en O. La distance d'un point M ( $o, y, z$ ) de l'ouverture A au plan perpendiculaire à OG, mené par O, ayant pour valeur

$$y \sin \psi \cos \omega + z \sin \psi \sin \omega,$$

la phase en M au temps  $t$  est

$$\frac{t}{T} - \frac{y \sin \psi \cos \omega + z \sin \psi \sin \omega}{\lambda},$$

pour les radiations de longueur d'onde  $\lambda$  et de période T.

D'autre part, la distance de M au plan P ayant pour valeur

$$q - y \sin \varphi \cos \theta - z \sin \varphi \sin \theta,$$

la phase du mouvement vibratoire arrivant au temps  $t$  en Q est

$$\frac{t - \tau}{T} - \frac{q}{\lambda} + \frac{y (\sin \varphi \cos \theta - \sin \psi \cos \omega) + z (\sin \varphi \sin \theta - \sin \psi \sin \omega)}{\lambda}.$$

La vitesse vibratoire diffractée par un élément de surface, décrit autour de M, est donc  $U \, dy \, dz$ , en posant

$$U = G \sin 2\pi \left[ \frac{t - \tau}{T} - \frac{q}{\lambda} + \frac{y (\sin \varphi \cos \theta - \sin \psi \cos \omega) + z (\sin \varphi \sin \theta - \sin \psi \sin \omega)}{\lambda} \right],$$

G étant indépendant de  $x$  et de  $y$ .

La vitesse vibratoire diffractée par toute l'ouverture A a elle-même pour valeur

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} U \, dz,$$

intégrale qui se réduit, tous calculs faits, à

$$G X ah \sin 2\pi \left( \frac{t - \tau}{T} - \frac{q}{\lambda} \right),$$

en posant

$$(11) \quad X = \frac{\sin \pi h \frac{\sin \varphi \sin \theta - \sin \psi \sin \omega}{\lambda}}{\pi h \frac{\sin \varphi \sin \theta - \sin \psi \sin \omega}{\lambda}} \times \frac{\sin \pi a \frac{\sin \varphi \cos \theta - \sin \psi \cos \omega}{\lambda}}{\pi a \frac{\sin \varphi \cos \theta - \sin \psi \cos \omega}{\lambda}}.$$

L'intensité de ce mouvement vibratoire est proportionnelle à  $\alpha^2 h^2 G^2 X^2$ . Mais le facteur  $G^2$  lui-même est proportionnel à l'angle solide sous-tendu par la source, c'est-à-dire à  $\sin \psi d\omega d\psi$ . L'intensité lumineuse émanant de l'élément de la source, situé dans la direction  $GO$  et arrivant en  $Q$ , peut donc se représenter par

$$\alpha^2 a^2 h^2 X^2 \sin \psi d\omega d\psi,$$

$\alpha$  désignant une constante proportionnelle à l'éclat intrinsèque angulaire de la source.

Admettons maintenant que la lumière, au lieu de provenir d'une source infiniment petite, émane d'un astre circulaire de diamètre  $2\varepsilon$  dont le centre se trouve dans la direction  $xO$ .

L'intensité lumineuse totale diffractée par le diaphragme, dans la direction  $OH$ , et par conséquent au point  $Q$  du plan focal de la lunette, a pour expression

$$\alpha^2 a^2 h^2 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin \psi X^2 d\omega,$$

$X$  étant donné par la formule (11).

### III.

Nous nous proposons d'étudier les variations de l'intensité le long du rayon de l'image focale parallèle au grand côté, de longueur  $h$ , du diaphragme. Il faut donc faire  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dans l'expression ci-dessus.

Posant

$$(12) \quad m = \frac{\pi h \sin \varepsilon}{\lambda}, \quad n = \frac{\pi a \sin \varepsilon}{\lambda}$$

et

$$(13) \quad K = \frac{1}{\alpha^2 a^2 h^2 \sin^2 \varepsilon},$$

l'intensité  $I$ , le long de ce rayon particulier, dépend de l'intégrale

$$(14) \quad K \sin^2 \varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sin \psi \, d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ \times \left[ \frac{\sin n \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\sin \varepsilon}}{m \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\sin \varepsilon}} \right]^2 \times \left[ \frac{\sin n \frac{\sin \psi \cos \omega}{\sin \varepsilon}}{n \frac{\sin \psi \cos \omega}{\sin \varepsilon}} \right]^2 d\omega$$

que nous allons tout d'abord transformer en posant

$$(15) \quad \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon},$$

et en effectuant le changement de variable défini par les égalités

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\sin \psi \sin \omega}{\sin \varepsilon} = u, \\ \frac{\sin \psi \cos \omega}{\sin \varepsilon} = t, \end{cases}$$

$u$  et  $t$  étant les nouvelles variables d'intégration. On tire des équations (16)

$$(16') \quad \begin{cases} \omega = \arctan \frac{u}{t}, \\ \sin^2 \psi = (u^2 + t^2) \sin^2 \varepsilon. \end{cases}$$

On en déduit

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin \psi \cos \psi};$$

$\psi$  étant compris entre  $\pm \varepsilon$ , on a, d'après la seconde équation (16'),

$$\cos \psi = \sqrt{1 - (u^2 + t^2) \sin^2 \varepsilon},$$

le radical étant affecté du signe +.

Il en résulte que l'élément différentiel de la nouvelle intégrale double est

$$\frac{\sin^2 \varepsilon}{\sqrt{1 - (u^2 + t^2) \sin^2 \varepsilon}} \left[ \frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)} \right]^2 \left[ \frac{\sin nt}{nt} \right]^2 du dt.$$

Or le champ d'intégration primitif est limité par la circonfé-

rence  $\psi = \varepsilon$ ; les limites de la nouvelle intégrale doivent donc satisfaire, d'après la seconde équation (16'), à la condition

$$u^2 + t^2 = 1.$$

D'autre part, la première équation (16) montre que  $u$  et  $t$  varient entre  $-1$  et  $+1$  quand les variables  $\omega$  et  $\psi$  parcourent le champ d'intégration primitif. Nous pouvons donc prendre, comme limites du signe  $\int$  dépendant de la variable  $u$ , les valeurs  $u = +1$  et  $u = -1$ , et comme limites du signe  $\int$  dépendant de la variable  $t$ , les valeurs  $+\sqrt{1-u^2}$  et  $-\sqrt{1-u^2}$ .

En résumé, on peut écrire

$$\sin^2 \varepsilon K = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)} \right]^2 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} \left[ \frac{\sin nt}{nt} \right]^2 \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sqrt{1-(u^2+t^2)\sin^2 \varepsilon}} dt.$$

Cette intégrale peut être simplifiée en remarquant que,  $\sin \varepsilon$  étant très petit, le radical  $\sqrt{1-(u^2+t^2)\sin^2 \varepsilon}$  diffère très peu de 1. En admettant une erreur relative de l'ordre de  $\sin^2 \varepsilon$  ( $\frac{1}{16000}$  pour le Soleil); on peut donc prendre finalement

$$(17) \quad K = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)} \right]^2 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} \left[ \frac{\sin nt}{nt} \right]^2 dt.$$

Telle est la fonction de  $\alpha$  ou de  $\varphi$  que nous avons à étudier.

Observant que

$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)} \right]^2 = - \frac{d}{du} \left[ \frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)} \right]^2,$$

on déduit de la formule (17)

$$\frac{dK}{d\alpha} = - \int_{-1}^{+1} \frac{d}{du} \left[ \frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)} \right]^2 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} \left[ \frac{\sin nt}{nt} \right]^2 dt,$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle,

$$(18) \quad \frac{dK}{d\alpha} = -2 \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)} \right]^2 \left[ \frac{\sin n \sqrt{1-u^2}}{n \sqrt{1-u^2}} \right]^2 \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

IV.

Nous nous bornerons, dans le présent Mémoire, à étudier l'intensité  $I$  ou, ce qui revient au même, l'intégrale  $K$ , lorsque la largeur  $\alpha$  de l'ouverture disposée devant la lunette d'observation est assez faible pour que la valeur de  $n = \frac{\pi \alpha \sin \varepsilon}{\lambda}$  soit petite. Dans ces conditions, les facteurs dépendant de  $n$ , dans les intégrales (17) et (18), se réduisent pratiquement à l'unité et il vient

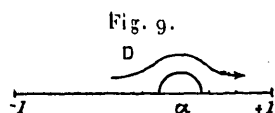
$$(19) \quad K = 2 \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)} \right]^2 \sqrt{1 - u^2} du,$$

$$(20) \quad \frac{dK}{d\alpha} = -2 \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)} \right]^2 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Appelons  $K_B$  la valeur de  $K$ , au bord géométrique de l'image, pour lequel  $\varphi = \varepsilon$  et  $\alpha = 1$ . On a

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_B = 2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - u^2} \left[ \frac{\sin m(u - 1)}{m(u - 1)} \right]^2 du, \\ \left( \frac{dK}{d\alpha} \right)_B = -2 \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \left[ \frac{\sin m(u - 1)}{m(u - 1)} \right]^2 du. \end{array} \right.$$

Nous allons montrer comment on peut calculer les intégrales (19) et (21), avec de faibles erreurs relatives, pour  $m$  très grand, en s'appuyant sur les résultats, rappelés au paragraphe I et tirés de mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres.



1° Nous nous occuperons d'abord de l'intégrale (19), en supposant  $\alpha^2 < 1$ .

Dans le plan représentatif de la variable  $u$ , considérée comme complexe, décrivons du point  $u = \alpha$ , comme centre, une demi-circonférence  $\sigma$  de rayon infiniment petit, du côté des ordonnées positives. La

fonction sous le signe  $\int$  étant holomorphe, dans le voisinage de la valeur  $u = \alpha$ , on peut remplacer le diamètre de cette demi-circonférence qui fait partie du chemin d'intégration donné, par la courbe elle-même. Appelons D le chemin d'intégration ainsi obtenu. On peut écrire

$$(22) \quad m^2 K = \int_b \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} du - \int_b \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} \cos 2m(u-\alpha) du.$$

Considérons l'intégrale

$$J = \int_b \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} \sin 2m(u-\alpha) du.$$

La partie de J prise le long de la portion du contour D qui se confond avec l'axe des abscisses est évidemment réelle. Nous allons calculer celle qui est prise le long de  $\sigma$ . A cet effet, il suffit de développer l'élément différentiel suivant les puissances ascendantes de  $u - \alpha$ . Tous les termes donnent des intégrales réelles, à l'exception du terme en  $\frac{1}{u-\alpha}$  qui a pour expression

$$\frac{2m\sqrt{1-\alpha^2}}{u-\alpha}.$$

Or on a

$$\int_{\sigma} \frac{du}{u-\alpha} = -i\pi \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Il résulte de là que la somme

$$J + i\pi 2m\sqrt{1-\alpha^2}$$

est réelle. On peut donc considérer le second membre de la formule (22) comme la partie réelle de

$$m^2 K - i(J + i\pi 2m\sqrt{1-\alpha^2}),$$

c'est-à-dire de

$$(23) \quad 2m\pi\sqrt{1-\alpha^2} + \int_c \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} du - H,$$

en faisant

$$(24) \quad H = \int_b \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} E^{2mi(u-\alpha)} du.$$

Or on a, pour  $\alpha^2 < 1$ , à une constante près,

$$\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} du = -\frac{\sqrt{1-u^2}}{u-\alpha} - \arcsin u + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} [L(1-u\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}) - L(u-\alpha)].$$

Cette intégrale, prise le long du chemin D, a pour valeur

$$-\pi + i\pi \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

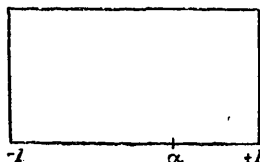
$m^2 K$  est donc, d'après l'expression (23), la partie réelle de la somme

$$(25) \quad 2m\pi\sqrt{1-\alpha^2} - \pi + \pi \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} i - H.$$

Reste à évaluer H.

Par les points  $u = -1$  et  $u = +1$ , menons deux ordonnées positives égales, prolongées à l'infini, et joignons leurs extrémités par une

Fig. 10.



droite parallèle à l'axe des abscisses. L'intégrale (24), prise le long de cette droite, est nulle puisque  $|E^{i(u-\alpha)}|$  est alors nul. Désignons par D' l'ordonnée partant du point  $u = -1$  et par D'' celle qui correspond à  $u = 1$ . Convenant de suivre ces chemins, en partant respectivement des points  $u = -1$  et  $u = +1$ , on peut écrire, d'après la formule (24),

$$(26) \quad H = \int_D = \int_{D'} - \int_{D''},$$

l'élément différentiel n'ayant pas de points singuliers dans l'aire limitée par D, D' et D''. Ce changement de contour est d'ailleurs justifié, bien que les points  $u = -1$  et  $u = +1$  soient des points singuliers de l'élément différentiel, parce que les produits de cette fonction par  $u - 1$



et par  $u + 1$  tendent vers zéro respectivement en même temps que  $u - 1$  et  $u + 1$ .

$|E^{i(u-\alpha)}|$  décroît, quand on s'éloigne de l'axe des abscisses, du côté des ordonnées positives. Chacune des intégrales  $\int_{D'}$ ,  $\int_{D''}$  figurant dans l'expression (18) de H est de la forme

$$\int f(u) \varphi^n(u) du,$$

où  $n$  représente le grand nombre  $2m$ ,  $|\varphi(u)|$  prenant d'ailleurs sa plus grande valeur, le long du contour d'intégration, à l'extrémité d'où part la variable. On est donc conduit, pour trouver la valeur asymptotique de ces intégrales, avec une faible erreur relative, pour  $m$  très grand, à appliquer la formule (5) qui suppose la connaissance des développements de  $\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}$  dans le voisinage des points  $u = -1$  et  $u = +1$ .

On a dans le voisinage du point  $u = -1$ , sur le contour  $D'$ ,

$$(27) \quad \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+u}}{(1+\alpha)^2} \left[ 1 + \frac{7-\alpha}{4(1+\alpha)}(1+u) + \dots \right],$$

$1+u$  étant affecté de son plus petit argument positif et, dans le voisinage du point  $u = +1$ , sur le contour  $D''$ ,

$$(28) \quad \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} = E^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\sqrt{u-1}}{(1-\alpha)^2} \left[ 1 - \frac{7+\alpha}{4(1-\alpha)}(u-1) + \dots \right],$$

$u-1$  étant affecté de son plus petit argument positif.

Il importe d'observer, pour des raisons que nous verrons plus loin, que la partie entre crochets du premier développement procède suivant les puissances de  $\frac{1+u}{1+\alpha}$  et la partie entre crochets du second développement suivant celles de  $\frac{u-1}{1-\alpha}$ .

Partant du développement (27) et appliquant la formule (5), on trouve

$$(29) \quad \int_{D'} = -\frac{1}{(1+\alpha)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 + i \frac{3}{16m} \frac{7-\alpha}{1+\alpha} + \dots \right] E^{-i\left[\frac{\pi}{3} + 2m(1+\alpha)\right]}.$$

De même, en partant du développement (28), on trouve

$$(30) \quad \int_0^{\pi} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 - i \frac{3}{16m} \frac{7+\alpha}{1-\alpha} + \dots \right] E \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1-\alpha) \right].$$

La formule (26) donne ensuite la valeur de H que l'on porte dans la somme (25), dont on déduit

$$(31) \quad m^2 K = 2m\pi \sqrt{1-\alpha^2} - \pi \\ + \frac{1}{(1+\alpha)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha) \right] \right. \\ \left. + \frac{3}{16m} \frac{7-\alpha}{1+\alpha} \sin \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha) \right] + \dots \right\} \\ + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha) \right] \right. \\ \left. + \frac{3}{16m} \frac{7+\alpha}{1-\alpha} \sin \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1-\alpha) \right] + \dots \right\},$$

les produits par  $m^2$  des termes négligés, dans les crochets, restant finis lorsque  $m$  croît indéfiniment.

Les développements (27) et (28) supposent essentiellement, pour être valables simultanément,  $\alpha$  compris entre  $-1$  et  $+1$ , à l'exception de ces valeurs elles-mêmes. La formule (31) n'a donc pas de sens pour  $\alpha = \pm 1$ ; toutefois elle donne l'expression asymptotique de K, pour  $m$  infiniment grand, quand  $\alpha$  reçoit une valeur fixe, aussi voisine que l'on veut de ces limites.

Mais si  $m$ , au lieu d'être infiniment grand, est simplement un nombre élevé, il peut arriver que l'on ne puisse en tirer parti. Cette circonstance provient de ce que les développements entre crochets procèdent, en réalité, l'un suivant les puissances de  $\frac{1}{m(1+\alpha)}$ , l'autre suivant les puissances de  $\frac{1}{m(1-\alpha)}$ . Pour s'en rendre compte, il faut se reporter à la remarque que nous avons faite, à propos des développements (27) et (28) qui procèdent suivant les puissances de  $\frac{u+1}{1+\alpha}$  et  $\frac{u-1}{1-\alpha}$ . Or il résulte, des théories exposées dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, qu'au terme en  $\frac{(u+1)^p}{(1+\alpha)^p}$ , entre crochets dans le développement (27), correspond un

terme en  $\frac{1}{(1+\alpha)^p} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}+p}}$  dans le développement asymptotique de  $\int_{\nu}$ , et qu'au terme en  $\frac{(u-i)^p}{(1-\alpha)^p}$ , entre crochets dans le développement (28), correspond un terme en  $\frac{1}{(1-\alpha)^p} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}+p}}$ , dans le développement asymptotique de l'intégrale  $\int_{\nu}$ .

Le développement asymptotique de H et par suite celui de  $m^2 K$  procède donc suivant les puissances de  $\frac{1}{m(1+\alpha)}$  et  $\frac{1}{m(1-\alpha)}$ , comme nous l'avons annoncé.

Reste maintenant à déterminer dans quelles conditions on peut appliquer l'expression (31) de K, lorsque  $\alpha$  devient voisin de 1, par exemple.

Il faut pour cela que  $m(1-\alpha)$  soit un nombre élevé et le terme en  $2m\pi\sqrt{1-\alpha^2}$  est alors le terme principal de la valeur de  $m^2 K$ .

Or

$$m(1-\alpha) = \frac{\pi h \sin \varepsilon}{\lambda} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon}\right),$$

où, comme  $\varepsilon$  et  $\varphi$  sont de l'ordre du demi-degré

$$m(1-\alpha) = \pi \frac{h}{\lambda} (\varepsilon - \varphi),$$

avec une faible erreur relative.

La condition pour que l'expression (31) reste applicable, quand  $\alpha$  est voisin de 1 et par suite  $\varphi$  voisin de  $\varepsilon$ , est donc que le produit

$$\frac{\pi h}{\lambda} (\varepsilon - \varphi)$$

soit un nombre suffisamment élevé.

2° Nous allons maintenant évaluer l'intégrale (23) quand  $\alpha^2 > 1$ .

La valeur  $u = \alpha$  étant en dehors du champ de l'intégration, on peut alors écrire

$$m^2 K = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} du - \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} \cos 2m(u-\alpha) du.$$

Or on a, à une constante près,

$$\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} du = -\frac{\sqrt{1-u^2}}{u-\alpha} - \arcsin u + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \arcsin \frac{u\alpha-1}{\alpha-u}.$$

On en déduit que  $m^2 K$  est la partie réelle de l'expression

$$-\pi + \pi \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} E^{2mi(u-\alpha)} du.$$

L'intégrale qui y figure se calcule exactement comme l'intégrale H, considérée lorsque  $\alpha^2 < 1$ , en remplaçant le chemin d'intégration par les deux chemins D' et D'', et a même expression analytique. On a donc, lorsque  $\alpha^2 > 1$ ,

$$(32) \quad m^2 K = \pi \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - 1 \right] + \frac{1}{(1+\alpha)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4 m^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha) \right] + \frac{3}{16m} \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \sin \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha) \right] + \dots \right\} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4 m^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1-\alpha) \right] + \frac{3}{16m} \frac{2+\alpha}{1-\alpha} \sin \left[ \frac{\pi}{4} + 2m(1-\alpha) \right] + \dots \right\},$$

les produits par  $m^2$  des termes négligés, dans les crochets, restant finis lorsque  $m$  croît indéfiniment.

Cette expression suppose essentiellement que  $\alpha$  ne prend pas les valeurs  $\pm 1$ ; mais  $\alpha$  peut recevoir des valeurs fixes voisines de ces limites. Dans les applications, l'expression (32), quand  $m$  est un grand nombre, peut servir à calculer  $K$ , avec une faible erreur relative, tant que  $m(1+\alpha)$  et  $m(1-\alpha)$  ont des valeurs absolues élevées; c'est-à-dire tant que  $\pi \frac{h}{\lambda} (\varphi - \varepsilon)$  a une valeur élevée, dans le cas où  $\alpha$  est voisin de 1.

3° Les moyens qui viennent d'être employés ne réussissent plus quand  $\alpha = 1$ . Pour tourner la difficulté il convient d'écrire, d'après la formule (21),

$$\frac{m^2}{2} K_R = \int_{-1}^{+1} [\sin m(u-1)]^2 d \left[ 2 \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u \right],$$

arc sin  $u$  étant compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ .

Intégrant par parties

$$\frac{m^2}{2} K_{\mathbb{R}} = -\frac{\pi}{2} \sin^2 2m - m \int_{-1}^{+1} \left[ 2 \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \operatorname{arc} \sin u \right] \sin 2m(u-1) du.$$

On peut donc écrire

$$(33) \quad \frac{m^2}{2} K_{\mathbb{R}} = -\frac{\pi}{2} \sin^2 2m - m \text{ fois le coefficient de } \sqrt{-1}, \text{ dans } H_{\mathbb{R}}$$

en posant

$$(34) \quad H_{\mathbb{R}} = \int_{-1}^{+1} \left[ 2 \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \operatorname{arc} \sin u \right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du.$$

On peut exécuter maintenant le même changement de contour d'intégration que pour le calcul de l'expression (25) et écrire

$$H_{\mathbb{R}} = \int_{D'} f(u) E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du - \int_{D''} f(u) E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du,$$

ou encore

$$H_{\mathbb{R}} = \frac{\pi}{2} \int_{D'} E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du + \int_{D'} \left[ f(u) - \frac{\pi}{2} \right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du \\ + \frac{\pi}{2} \int_{D''} E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du - \int_{D''} \left[ f(u) + \frac{\pi}{2} \right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du,$$

en posant

$$f(u) = 2 \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \operatorname{arc} \sin u.$$

Intégrant, il vient

$$(35) \quad H_{\mathbb{R}} = \frac{\pi}{4m} [\sin 4m + (1 + \cos 4m) \sqrt{-1}] \\ + \int_{D'} \left[ f(u) - \frac{\pi}{2} \right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du - \int_{D''} \left[ f(u) + \frac{\pi}{2} \right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du.$$

La valeur asymptotique de chacune des intégrales, figurant dans cette expression de  $J_{\mathbb{R}}$ , peut être obtenue en appliquant la formule (5), après avoir mis  $E^{-2m\sqrt{-1}}$  hors des signes  $\int$ .

Dans le voisinage du point  $u = -1$ , on a, le long du contour  $D'$ ,

$$(36) \quad f(u) - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(u+1)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

On a de même, dans le voisinage du point  $u = +1$ , le long du contour  $D''$ ,

$$(37) \quad f(u) + \frac{\pi}{2} = (u-1)^{-\frac{1}{2}} \left[ 2\sqrt{-1}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(u-1) + \dots \right],$$

les binômes  $u + 1$  et  $u - 1$  étant affectés de leur plus petit argument positif.

Partant du développement (36), on trouve

$$(38) \quad \int_{D''} \left[ f(u) - \frac{\pi}{2} \right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du \\ = - \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4m\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4m\right) \right] \frac{\sqrt{\pi}}{32m^2} (1 + \varepsilon'),$$

$\varepsilon'$  tendant vers zéro lorsque  $m$  augmente indéfiniment.

Le développement (37) conduit de même à l'expression

$$(39) \quad \int_{D''} \left[ f(u) + \frac{\pi}{2} \right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}m} \left[ -2 + \frac{1}{8m} + \dots + \sqrt{-1} \left( 2 + \frac{1}{8m} + \dots \right) \right],$$

les termes non calculés étant de l'ordre de  $\frac{1}{m^2}$ .

En résumé, en négligeant les termes de l'ordre de  $\frac{1}{m^2}$ , on a, d'après les formules (34), (38) et (39),

$$(40) \quad H_B = \frac{\pi}{4m} \left[ \sin 4m + 2\sqrt{-1} \cos^2 2m \right] \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}m} \left[ 2 - \frac{1}{8m} + \dots - \sqrt{-1} \left( 2 + \frac{1}{8m} + \dots \right) \right].$$

La formule (33) donne ensuite

$$(41) \quad \frac{m^2}{2} K_B = \sqrt{2\pi m} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8\sqrt{2\pi m}} + \dots,$$

les termes négligés, dans le second membre, étant de l'ordre de  $\frac{1}{[m]^{\frac{3}{2}}}$ .

Des moyens analogues à ceux qui viennent d'être employés conduisent à l'évaluation approchée de la seconde intégrale (21),

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dK}{d\alpha} \right)_B = - \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \left[ \frac{\sin m(u-1)}{m(u-1)} \right]^2 du,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{3m^2}{2} \left( \frac{dK}{d\alpha} \right)_B = - \int_{-1}^{+1} [\sin m(u-1)]^2 d \left[ \frac{\sqrt{1-u^2}}{(1-u)^2} - 2 \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u} \right].$$

Intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned} \frac{3m^2}{2} \left( \frac{dK}{d\alpha} \right)_B &= m \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{(1-u)^{\frac{3}{2}}} \sin 2m(u-1) du \\ &\quad - 2m \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} \sin 2m(u-1) du \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{3m^2}{2} \left( \frac{dK}{d\alpha} \right)_B &= m \int_{-1}^{+1} d \left[ 2 \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u \right] \sin 2m(u-1) \\ &\quad - 2m \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} \sin 2m(u-1) du. \end{aligned}$$

Effectuant une nouvelle intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{3m^2}{2} \left( \frac{dK}{d\alpha} \right)_B &= m \frac{\pi}{2} \sin 4m - 2m^2 \int_{-1}^{+1} \left[ 2 \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u \right] \cos 2m(u-1) du \\ &\quad - 2m \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} \sin 2m(u-1) du. \end{aligned}$$

Or la première intégrale figurant dans le second membre est la partie réelle de  $H_B$  comme le montre la formule (34). La formule (40) donne son expression asymptotique. On a donc

$$\begin{aligned} (42) \quad \frac{3m^2}{2} \left( \frac{dK}{d\alpha} \right)_B &= -m\sqrt{2\pi m} \left( 2 - \frac{1}{8m} + \dots \right) \\ &\quad - 2m \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} \sin 2m(u-1) du, \end{aligned}$$

le produit par  $m^{\frac{3}{2}}$  des termes négligés restant fini lorsque  $m$  augmente indéfiniment.

L'intégrale qui reste à calculer est le coefficient de  $\sqrt{-1}$  dans

$$(43) \quad L = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du$$

qui se calcule en remplaçant le contour d'intégration par les chemins D' et D'' déjà considérés et écrivant

$$L = \int_{D'} f(u) E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du - \int_{D''} f(u) E^{2m(u-1)\sqrt{-1}} du.$$

Dans la circonstance, on a dans le voisinage du point  $u = -1$ , le long du contour D',

$$f(u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = \sqrt{1+u} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}(u+1) + \dots \right],$$

et dans le voisinage du point  $u = 1$ , le long du contour D'',

$$\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = (u-1)^{-\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{2}\sqrt{-1} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{-1}}{4}(u-1) + \dots \right].$$

Appliquant la formule (5), après avoir mis  $E^{-2m\sqrt{-1}}$  en dehors des signes  $\int$ , on trouve

$$\int_{D'} = \left[ -\cos\left(\frac{\pi}{4} + 4m\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 4m\right) \right] \frac{\sqrt{\pi}}{8m^{\frac{3}{2}}} + \dots,$$

les termes négligés étant de l'ordre de  $\frac{1}{m^{\frac{5}{2}}}$ ;

$$\int_{D''} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}} \left[ -1 - \frac{1}{16m} + \dots + \sqrt{-1} \left( 1 - \frac{1}{16m} + \dots \right) \right],$$

les termes négligés étant de l'ordre de  $\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}$ .

On déduit de là

$$(44) \quad L = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}} + \frac{\sqrt{\pi}}{8(2m)^{\frac{3}{2}}} [1 - 2(\cos 4m - \sin 4m)] + \dots \\ - \sqrt{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}} - \frac{\sqrt{\pi}}{8(2m)^{\frac{3}{2}}} [1 + 2(\cos 4m + \sin 4m)] + \dots \right\}.$$



Les formules (44), (43) et (42) donnent ensuite

$$(45) \quad \frac{3m^2}{2} \left( \frac{dK}{dx} \right)_n = -2m\sqrt{2\pi m} + \frac{9}{8}\sqrt{2\pi m}(1+n),$$

le produit  $m\eta$  restant fini, lorsque  $m$  augmente indéfiniment.

### V.

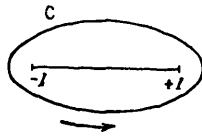
Les calculs se compliquent singulièrement, quand on cherche à évaluer les dérivées suivantes par une voie analogue. Aussi est-il préférable de changer de méthode.

Il est facile de voir que la formule (19) équivaut à la suivante :

$$(46) \quad m^2 K = \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} \sin^2 m(u-\alpha) du,$$

l'intégrale étant prise, dans le sens direct, le long d'un contour

Fig. 11.



fermé C renfermant les points  $u = -1$ ,  $u = +1$ , et le segment de l'axe des abscisses qu'ils comprennent, à condition de prendre la détermination du radical  $\sqrt{1-u^2}$  qui est purement imaginaire et positive, au point de rencontre du contour avec la partie positive de l'axe des abscisses. C'est ce qu'on voit immédiatement, en remplaçant le contour C par le chemin équivalent, constitué par un double lacet L (fig. 12) embrassant les points  $u = -1$ ,  $u = +1$  et le segment de l'axe des abscisses qu'ils limitent. Il suffit de remarquer : 1° que les parties de l'intégrale prises le long des circonférences infiniment petites sont nulles; 2° que le radical change de signe quand la variable décrit en entier chacune de ces circonférences.

Comme le point  $u = \alpha$  n'est pas un point singulier de l'élément différentiel de l'intégrale, on peut toujours supposer que le contour C a été dilaté de façon à renfermer la valeur  $u = \alpha$ .

En vertu de l'identité

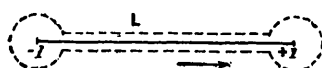
$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)} \right]^2 = - \frac{d}{du} \left[ \frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)} \right]^2,$$

on a

$$\frac{dK}{d\alpha} = - \int_C \sqrt{1 - u^2} \frac{d}{du} \left[ \frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)} \right]^2 du.$$

Intégrant par parties et observant que la partie intégrée est nulle,

Fig. 13.



comme reprenant sa valeur lorsque la variable, après avoir décrit le contour en entier, revient au point de départ, il vient

$$\frac{dK}{d\alpha} = \int_C \left[ \frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)} \right]^2 \frac{d}{du} \sqrt{1 - u^2} du.$$

On en déduit, de proche en proche, la formule générale

$$\frac{d^p K}{d\alpha^p} = \int_C \left[ \frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)} \right]^2 \frac{d^p}{du^p} \sqrt{1 - u^2} du.$$

On peut l'écrire

$$(47) \quad 2m^2 \frac{d^p K}{d\alpha^p} = \int_C \frac{1}{(u - \alpha)^2} \frac{d^p}{du^p} \sqrt{1 - u^2} du - \int_C \frac{\cos 2m(u - \alpha)}{(u - \alpha)^2} \frac{d^p}{du^p} \sqrt{1 - u^2} du.$$

Je dis que pour  $p \geq 1$  la première intégrale figurant dans le second membre est nulle. Pour l'établir, il convient de dilater le contour C de façon qu'en tous ses points  $|u|$  soit supérieur à 1 et à  $\alpha$ . Dans ces conditions on peut développer l'élément différentiel suivant les puissances de  $\frac{1}{u}$  et le terme de degré moindre en  $\frac{1}{u}$  a un exposant au moins égal à 2. L'intégrale, développable en une série dont tous les termes sont nuls, est donc nulle elle-même. La formule (47) se réduit en conséquence à la suivante :

$$(48) \quad 2m^2 \frac{d^p K}{d\alpha^p} = - \int_C \frac{\cos 2m(u - \alpha)}{(u - \alpha)^2} \frac{d^p}{du^p} \sqrt{1 - u^2} du.$$

## VI.

Avant de calculer l'expression asymptotique de cette dérivée, pour  $p$  fixe et  $m$  très grand, proposons-nous de retrouver la valeur déjà obtenue, pour  $K_R$ , en faisant  $\alpha = 1$  dans la formule (46),

$$(49) \quad m^2 K_R = \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} \sin^2 m(u-1) du.$$

On en tire

$$2m^2 K_R = \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} du - \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} \cos 2m(u-1) du.$$

Or on a

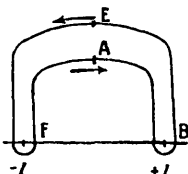
$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} = \frac{d}{du} \left[ 2 \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u \right].$$

Le contour  $C$  renfermant les deux points singuliers  $u = +1$  et  $u = -1$  de la fonction  $\arcsin u$ , la première intégrale a pour valeur <sup>(1)</sup>  $-2\pi$ . On peut donc écrire

$$(50) \quad 4m^2 K_R = -4\pi - \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{2m(u-1)i} du - \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{-2m(u-1)i} du.$$

Pour calculer la première intégrale qui figure dans le second

Fig. 13.



membre, nous pouvons donner au contour d'intégration  $C$  la forme indiquée sur la figure (13), et écrire

$$\int_C = \int_{(ABE)} + \int_{(EFA)}.$$

(1) On peut aussi calculer cette intégrale, en faisant en sorte que  $|u|$  soit supérieur à 1 et à  $|\alpha|$ , tout le long du contour, après l'avoir convenablement dilaté. L'élément différentiel est alors développable suivant les puissances entières de  $\frac{1}{u}$ . Le résidu de cette fonction étant égal à  $\sqrt{-1}$ , on retombe immédiatement sur le résultat déjà obtenu.

Or ces deux nouvelles intégrales peuvent être évaluées en appliquant la formule (9) aux points singuliers  $u = +1$  et  $u = -1$ .

Pour avoir la valeur de l'intégrale prise suivant ABĒ, il faut tout d'abord développer

$$f(u) = \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2},$$

dans le voisinage de  $u = 1$ , suivant les puissances de  $u - 1$ , ce binôme étant affecté de l'argument nul sur l'axe des abscisses, à droite du point  $u = 1$ , au point B de rencontre du contour avec cet axe, par exemple. Or, en ce point,  $\sqrt{1-u^2}$  a une valeur purement imaginaire positive, comme nous l'avons spécifié, pour établir la formule (46). Nous sommes donc amené à écrire

$$\sqrt{1-u^2} = i\sqrt{u-1}\sqrt{u+1} = i(u-1)^{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(u-1) + \dots \right],$$

d'où

$$(51) \quad \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} = i(u-1)^{-\frac{3}{2}} \left[ \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(u-1) + \dots \right],$$

$u - 1$  étant affecté de l'argument nul à droite du point  $u = +1$ . Appliquant la formule (9) en y faisant  $\beta = -\frac{3}{2}$  et rappelant que

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

on obtient

$$\int_{AB\bar{E}} \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{2m(u-1)i} du = 4\sqrt{2} \sqrt{2\pi m} E^{\frac{3\pi}{4}i} \left[ i + \frac{1}{16m} + \dots \right],$$

le produit par  $m^2$  des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque  $m$  augmente indéfiniment.

Pour évaluer l'intégrale  $\int_{(EFA)}$ , il faut de même développer  $\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2}$ , dans le voisinage de  $u = -1$ . Or on voit immédiatement que ce développement commence par un terme en  $(u+1)^{\frac{1}{2}}$ . L'application de la formule (9) montre donc que le terme de degré le plus élevé par rapport à  $m$ , dans le développement asymptotique de  $\int_{(EFA)}$ , a pour exposant  $-\frac{3}{2}$ . Il n'y a par suite pas lieu de calculer cette intégrale,

puisqu'elle fournirait des termes d'ordre supérieur à ceux que nous avons conservé dans l'expression de l'intégrale  $\int_{(ABE)}$ . De ce qui précède il résulte que l'on a

$$(52) \quad \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{2m(u-1)i} du = 4\sqrt{2}\sqrt{2\pi m} E^{\frac{3\pi}{4}i} \left[ i + \frac{1}{16m} + \dots \right],$$

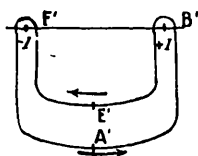
le produit par  $m^2$  des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque  $m$  augmente indéfiniment.

Pour achever de calculer le second membre de la formule (50), il reste à évaluer l'intégrale

$$\int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{-2m(u-1)i} du.$$

On remplace le contour C par le contour indiqué sur la figure 14 et l'on décompose l'intégrale en deux autres, prises sui-

Fig. 14.



vant les chemins A'B'E' et E'F'A', auxquelles on peut appliquer la formule (10). On reconnaît, pour la même raison que ci-dessus, que l'intégrale prise le long de E'F'A' est négligeable par rapport à celle qui est prise suivant le chemin A'B'E' et cette dernière s'obtient en partant du développement (51) de  $\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2}$ , dans le voisinage du point  $u=1$ , obtenu en affectant le binôme  $u-1$  de son argument qui est nul au point B'. On obtient

$$(53) \quad \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{-2m(u-1)i} du = 4\sqrt{2}\sqrt{2\pi m} E^{-\frac{3\pi}{4}i} \left[ -i + \frac{1}{16m} + \dots \right],$$

le produit par  $m^2$  des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque  $m$  augmente indéfiniment. Les formules (53), (52), (50) donnent ensuite

$$m^2 K_{11} = -\pi + 2\sqrt{2\pi m} \left[ 1 + \frac{1}{16m} + \dots \right],$$

le produit par  $m^2$  des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque  $m$  croît indéfiniment. C'est le résultat déjà obtenu [formule (41)].

La marche que nous venons de suivre s'impose pour tirer parti de la formule (48) qui peut s'écrire, pour  $\alpha = 1$ ,

$$(54) \quad i m^2 \left( \frac{d^p K}{d\alpha^p} \right)_B = - \int_c \frac{E^{2m(u-1)i}}{(u-1)^2} \frac{d^p}{du^p} \sqrt{1-u^2} du - \int_c \frac{E^{-2m(u-1)i}}{(u-1)^2} \frac{d^p}{du^p} \sqrt{1-u^2} du.$$

Les intégrales contenues dans le second membre se calculent exactement comme dans le cas où  $p = 0$ , que nous venons d'examiner. Il n'y a de différence que dans le point de départ qui dépend du développement, dans le voisinage du point  $u = 1$ , de la fonction

$$f(u) = \frac{1}{(u-1)^2} \frac{d^p}{du^p} \sqrt{1-u^2}.$$

On reconnaît, pour les mêmes raisons que précédemment, qu'il n'y a pas lieu de faire intervenir les développements asymptotiques fournis par le point  $u = -1$ , du moment où l'on s'en tient à l'ordre d'approximation relative avec laquelle est calculée l'expression de  $K_B$ .

Nous avons obtenu, à propos de la formule (51),

$$\sqrt{1-u^2} = i(u-1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{1}{4}(u-1) + \dots \right].$$

Or on a

$$\frac{d^p}{du^p} (u-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{p-1}}{2^p(2p-1)} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1) (u-1)^{\frac{1}{2}-p},$$

et cette formule, écrite en conservant  $2p-1$  en numérateur et dénominateur, s'applique pour  $p \geq 1$ . On commettrait une faute de signe pour  $p = 1$ , en supprimant  $2p-1$  haut et bas. On a de même

$$\frac{d^p}{du^p} (u-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2^p} (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{(2p-3)(2p-1)} (u-1)^{\frac{3}{2}-p},$$

d'où

$$(55) \quad f(u) = \frac{1}{(u-1)^2} \frac{d^p}{du^p} \sqrt{1-u^2} \\ = (-1)^{p-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2^p(2p-1)} i \sqrt{2} (u-1)^{-p-\frac{3}{2}} \left[ 1 - \frac{3}{2p-3} \frac{u-1}{4} + \dots \right],$$

l'argument de  $u - 1$  étant nul, pour les valeurs réelles de  $u$  supérieures à 1.

Les formules (9) et (10) fournissent les valeurs des intégrales figurant dans le second membre de la formule (54), en partant du développement (55).

Tenant compte de l'égalité

$$\Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} + p\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2p + 1)}{2^{p+1}} \sqrt{\pi},$$

on arrive à la formule

$$(56) \quad m^2 \left(\frac{d^p K}{dz^p}\right) = \frac{2}{4p^2 - 1} (2m)^p \sqrt{2\pi m} \left[ -\cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2} + \frac{3}{16m} \frac{2p+1}{2p-3} \left( \cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right],$$

le produit par  $m^2$  des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque  $m$  augmente indéfiniment. Cette formule n'est applicable que si l'entier  $p$  est petit par rapport à  $m$  dont la valeur est considérable. Nous l'utiliserons néanmoins bientôt pour obtenir un développement en série [formule (59)]. Mais comme les termes exacts très éloignés de ce développement sont certainement négligeables et que nous n'aurons à en retenir que les premiers termes, l'incorrection commise est pratiquement sans aucune importance.

## VII.

Si la diffraction n'existait pas, l'image du Soleil, dans le plan focal de la lunette, serait limitée par une circonférence déterminée par les lois de l'optique géométrique. On lui donne, pour cette raison, le nom de *bord géométrique*. D'autre part, dans les observations solaires, on est astreint à affaiblir suffisamment la lumière, pour que l'œil puisse supporter l'éclat des images. Pour comparer les indications théoriques, relatives à diverses méthodes d'observations, on peut admettre en conséquence que l'intensité, au bord géométrique, a été réduite, dans chaque cas particulier, à une valeur commune prise comme unité.

Nous sommes donc amenés à étudier non pas l'intensité absolue  $I$ ,

mais le rapport  $\frac{I}{I_B}$ , ou, ce qui revient au même, d'après la formule (13), le rapport  $\frac{K}{K_B}$ ,  $I_B$  et  $K_B$  étant les valeurs de  $I$  et de  $K$  au bord géométrique.

Désignons par  $J_i$  le rapport  $\frac{I}{I_B}$  pour les points intérieurs au bord géométrique. On a, d'après les formules (12), (15), (31), (41),

$$(57) \quad J_i = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2(1+\alpha)} \sqrt{\frac{h}{\lambda}(\sin \varepsilon - \sin \varphi)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}}{1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi m}} + \frac{1}{16m}} \quad \left( \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} < 1 \right),$$

avec une erreur relative de l'ordre de grandeur de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\alpha)} \left[ 2\pi \frac{h}{\lambda} (\sin \varepsilon - \sin \varphi) \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Cette expression de  $J_i$  n'a aucune signification pour  $\alpha = 1$ ; mais elle est valable pour  $\alpha$  voisin de 1 ou  $\varphi$  voisin de  $\varepsilon$  tant que le produit

$$\pi \frac{h}{\lambda} (\sin \varepsilon - \sin \varphi)$$

est un nombre suffisamment élevé, c'est-à-dire tant que l'erreur relative est suffisamment faible. Les termes négligés correspondent à des variations périodiques tellement faibles, par rapport à l'intensité générale, qu'il ne saurait être question d'en reconnaître l'existence par l'observation.

L'expression  $J_e$  de l'intensité relative à l'extérieur du bord géométrique, supposée réduite à l'unité sur le bord lui-même, s'obtient de même en partant des formules (12), (15), (32), (41). On a

$$(58) \quad J_e = \frac{1}{2\sqrt{2(1+\alpha)}[\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha] \left[ 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi m}} + \frac{1}{16m} \right] \sqrt{\frac{h}{\lambda}(\sin \varphi - \sin \varepsilon)}}$$

avec

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} > 1,$$



l'erreur relative étant de l'ordre de

$$\frac{\sqrt{\alpha+1} [\sqrt{\alpha^2-1} + \alpha]}{\sqrt{2\pi} \left[ 2\pi \frac{h}{\lambda} (\sin \varphi - \sin \varepsilon) \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Comme précédemment, les termes négligés correspondent à des variations périodiques insensibles par rapport à l'intensité générale. L'expression de  $J_e$  n'a d'ailleurs pas de sens pour  $\alpha = 1$  ou  $\varphi = \varepsilon$ . Elle est applicable, lorsque  $\alpha$  est voisine de 1, quand le produit

$$\frac{\pi h}{\lambda} (\sin \varphi - \sin \varepsilon)$$

est assez élevé, c'est-à-dire lorsque l'erreur relative est suffisamment petite.

$\varepsilon$  étant petit ( $\frac{1}{230}$  pour le Soleil) si l'on s'éloigne du bord géométrique de quantités qui ne dépassent pas l'ordre de grandeur de  $\varepsilon$ , on peut remplacer, dans les formules (57) et (58),  $\sin \varepsilon - \sin \varphi$  par  $\varepsilon - \varphi$ . L'erreur relative commise est entièrement négligeable.

Comme  $m$  est un nombre considérable, la partie principale de  $J_i$  est, d'après la formule (57),

$$\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \psi,$$

en appelant  $\psi$  la distance angulaire au bord géométrique du point, intérieur à ce bord, où l'on veut avoir l'intensité. Cela étant, considérons deux points  $M'$ ,  $M''$ , intérieurs à l'image géométrique, caractérisés par les valeurs  $\alpha'$ ,  $\psi'$  et  $\alpha''$ ,  $\psi''$ .

Le rapport des intensités, en ces points, est

$$\frac{J'_i}{J''_i} = \sqrt{\frac{1+\alpha'}{1+\alpha''}} \sqrt{\frac{\psi'}{\psi''}}$$

Il est fini, sans être petit ni élevé, si  $\psi'$  et  $\psi''$  sont du même ordre de grandeur. Par exemple, si  $\psi'' < \psi' < 2\psi''$ , le premier facteur est compris entre 1 et  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et le second entre 1 et  $\sqrt{2}$ ;  $\frac{J'_i}{J''_i}$  est par suite compris

entre  $\sqrt{2}$  et  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Il n'y a donc pas de chute rapide d'intensité à l'intérieur du bord géométrique tant que la formule (57) est valable, c'est-à-dire tant que l'on n'est pas trop près du bord géométrique.

La valeur principale de l'intensité  $J_e$ , à l'extérieur du bord géométrique, tiré de la formule (58), est

$$\frac{1}{2\sqrt{2}(\alpha+1)(\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha)}\sqrt{\frac{h}{\lambda}}\psi$$

Elle conduit, comme ci-dessus, à la conclusion que le rapport des intensités en deux points extérieurs au bord géométrique est finie, sans être grande ni petite, du moment où les distances angulaires de ces points au bord sont suffisantes et du même ordre de grandeur.

Il n'y a donc pas, plus que tout à l'heure, de chute rapide d'intensité à l'extérieur du bord géométrique, tant que la formule (58) est valable, c'est-à-dire tant que l'on n'est pas trop près du bord géométrique.

Voyons maintenant ce qui se passe de part et d'autre du bord géométrique. Considérons un point, à l'extérieur du bord géométrique, à une petite distance angulaire  $\psi$  de ce bord, et un second point, à l'intérieur, à la même distance angulaire  $\psi$ . Le rapport  $\alpha$  étant sensiblement égal à 1 dans les deux cas, on a

$$\frac{J_e}{J_i} = \frac{1}{4\pi\frac{h}{\lambda}\psi}$$

Comme les expressions dont nous sommes partis sont supposées valables, le produit  $\pi\frac{h}{\lambda}\psi$  a une valeur élevée. Il y a donc alors une chute rapide d'intensité quand on passe du point intérieur au bord géométrique au point extérieur, et cette chute est d'autant plus importante, pour une même valeur de  $\psi$ , que la longueur  $h$  de la fente est plus grande.

Comme exemple, supposons que les radiations admises dans l'œil aient pour longueur d'ondes  $0^{\mu},5$  et considérons le cas d'une fente de longueur égale à  $1^m$ . Le rapport obtenu en divisant la valeur de l'intensité, à  $3''$  du bord géométrique, en un point intérieur, par l'intensité, à  $1''$ , en un point situé également à l'intérieur du bord

géométrique, a pour valeur  $\sqrt{3}$ . A l'extérieur du bord géométrique, le même rapport, pour deux points situés à 1" et à 3" de ce bord, est égal à  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Enfin le rapport obtenu en divisant l'intensité, en un point intérieur au bord géométrique, à 1" de ce bord, par l'intensité en un point extérieur, situé aussi à 1" de ce même bord, monte à 125.

La chute rapide d'intensité, quand on traverse le bord géométrique, donne à l'observateur l'impression de l'existence d'un bord véritable à l'image fournie par la lunette bien que, mathématiquement parlant, il n'y ait pas de discontinuité. Ce bord apparent, auquel on peut donner le nom de *bord optique*, est d'autant plus tranché, d'après ce que l'on a vu ci-dessus, que  $h$  a une valeur plus grande. Pour avoir un bord optique aussi net que possible, il faut donc avoir recours à une lunette de grande ouverture.

Quand on s'éloigne du bord géométrique, dans les deux sens, l'intensité croît beaucoup plus vite, à l'intérieur de ce bord, qu'elle ne décroît, à l'extérieur. Cette propriété résulte immédiatement de l'égalité, dans laquelle  $\psi < \varepsilon$ ,

$$\frac{J_l - 1}{1 - J_e} = \pi \sqrt{1 - \frac{\psi}{2\varepsilon}} \sqrt{\frac{h}{\lambda} \psi} + \dots,$$

que l'on obtient en partant des formules (54) et (57).

A l'extérieur du bord géométrique, l'intensité  $J_e$  décroît rapidement quand on s'en éloigne. A une distance du bord égale à  $\varepsilon$ , c'est-à-dire pour  $\psi = \varepsilon$ ,  $\varphi = 2\varepsilon$ ,  $\alpha = 2$ , elle est inférieure à  $\frac{1}{2\sqrt{2\pi m}}$ . Elle est donc très faible.

Par contre, à l'intérieur du bord géométrique, l'intensité  $J_l$  croît, en se rapprochant du centre, et prend la valeur  $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi m}$  en ce point.

Elle est donc beaucoup plus élevée qu'au bord lui-même. Cette particularité pouvait être prévue, *a priori*, en se fondant sur un résultat bien connu de la théorie de la diffraction. L'image d'un point lumineux situé à l'infini, au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente, est une traînée lumineuse d'autant plus allongée que la fente est plus étroite et d'autant plus mince que la fente est plus longue. Il en résulte que tous les points du disque solaire, disposés sur une même corde, perpendiculaire à la direction de la longueur de la fente, très fine par hypothèse, fournissent un appoint à l'intensité observée, dans le

champ, au point coïncidant avec l'image géométrique du milieu de la corde. L'intensité au centre de l'image focale du Soleil, auquel correspond la corde maximum du disque, doit donc être très supérieure à celle que l'on observe près du bord géométrique, à l'intérieur, région du champ à laquelle correspond des cordes du disque de longueurs très réduites.

Quand on ouvre légèrement la fente, les traînées lumineuses fournies par chacun des points, disposés sur une même corde, diminuent de longueurs. L'effet signalé doit, en conséquence, perdre rapidement de l'importance au centre de l'image, tandis qu'il ne peut être sensiblement modifié, dans le voisinage du bord géométrique, tant que la largeur de la fente reste au-dessous de quelques millimètres, les cordes très courtes continuant alors à agir efficacement, en entier, sur l'intensité de la région du champ où porte l'observation, tandis qu'il n'en est plus de même pour les cordes longues. Ce raisonnement ne permet pas de prévoir les modifications d'aspect du bord de l'image, quand on écarte les lèvres de la fente. Cette question complexe nécessite une étude particulière qui fera l'objet d'un autre Mémoire.

L'étude de l'intensité, dans le voisinage immédiat du bord géométrique, ne peut pas être abordée en partant des expressions de  $J_i$  et de  $J_e$  qui n'ont plus alors de signification. Il faut alors recourir à un développement, suivant les puissances de

$$x - 1 = \frac{\sin \zeta - \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon},$$

qui se déduit des formules (41) et (50).

En posant alors

$$(59) \quad J_B = \frac{I}{I_0} = 1 + \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \left[ 2\pi \frac{h}{\lambda} (\sin \zeta - \sin \varepsilon) \right]^p,$$

on a, en tenant compte de l'égalité  $m = \pi \frac{h \sin \varepsilon}{\lambda}$ ,

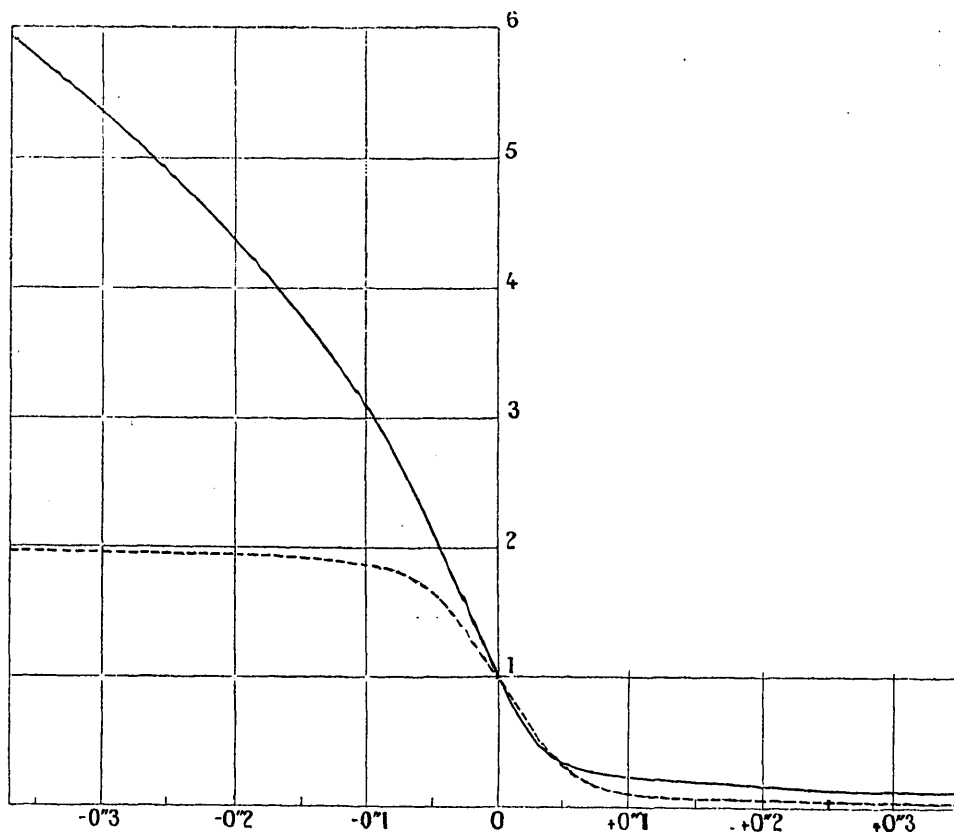
$$A_p = \frac{-\cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2} + \frac{3}{16m} \frac{2p+1}{2p-3} \left( \cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2} \right)}{1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi m}} + \frac{1}{16m}} \frac{1}{4p^2-1} \frac{1}{1.2 \dots p},$$

avec une erreur relative de l'ordre de  $\frac{1}{m^2}$ , sur  $A_p$ .

Le développement (59) est, en principe, valable quelle que soit la

valeur du produit  $2\pi \frac{h}{\lambda} (\sin \varphi - \sin \varepsilon)$ . Mais il n'est pratiquement applicable que lorsque ce produit ne dépasse pas quelques unités; c'est-à-dire, en raison de la grandeur du facteur  $\frac{h}{\lambda}$ , lorsque la différence  $\varphi - \varepsilon$  est suffisamment petite. Fort heureusement, les expres-

Fig. 15.



sions asymptotiques (57) et (58) de  $J_i$  et de  $J_e$  conviennent sitôt que l'on ne se trouve plus dans le voisinage immédiat du bord géométrique.

Par exemple, pour  $h = 1^m$ , les résultats numériques, tirés de la formule (59), coïncident avec ceux que l'on déduit des formules (57) et (58), dès que l'on ne se rapproche pas à plus de 0",15 du bord géométrique. Dans ces conditions, les termes les plus importants de la série ne dépassent pas quelques unités. Ces termes, affectés d'une

erreur relative très petite, sont donc connus avec une erreur absolue négligeable. Il en est de même si l'on remplace, dans chacun d'eux, la différence  $\sin \varphi - \sin \varepsilon$  par  $\varphi - \varepsilon$ .

La courbe, représentée (*fig. 15*), fournit les variations de l'intensité relative, dans le voisinage du bord géométrique, où elle est supposée ramenée à l'unité. Les distances angulaires au bord géométrique sont prises comme abscisses et comptées positivement vers l'extérieur de l'image, négativement vers l'intérieur. L'unité graphique choisie correspond au dixième de seconde. La courbe se rapporte à une longueur de fente égale à  $1^m$  (<sup>1</sup>) et à la longueur d'onde  $\lambda = 0^{\mu}, 5$  des radiations les plus visibles du spectre. La valeur adoptée du demi-diamètre solaire est  $\varepsilon = 16'$ . On a, dans ces conditions,

$$\log m = 4,466026;$$

$$\log 2\pi \frac{h}{\lambda} = 7,099210.$$

$m$  dépasse 29243 et  $2\pi \frac{h}{\lambda}$  le nombre 12566370.

Le Tableau suivant donne les valeurs numériques des premiers coefficients de la série (59) exprimées par leurs logarithmes; les signes des nombres sont placés après les logarithmes.

TABLEAU I.

$A_1 = 1,524467 -$	$A_2 = 2,524458 +$	$A_3 = 3,679381 +$	$A_4 = 7,822036 -$
$A_5 = 5,926781 -$	$A_6 = 6,988920 +$	$A_7 = 6,009130 +$	$A_8 = 8,989528 -$
$A_9 = 9,932630 -$	$A_{10} = 10,840854 +$	$A_{11} = 11,716493 +$	$A_{12} = 12,561585 -$
$A_{13} = 13,378012 -$	$A_{14} = 14,167420 +$	$A_{15} = 16,931336 +$	$A_{16} = 17,671094 -$
$A_{17} = 18,387945 -$	$A_{18} = 19,082979 +$	$A_{19} = 21,757235 +$	$A_{20} = 22,411616 -$
$A_{21} = 23,047000 -$	$A_{22} = 25,664142 +$	$A_{23} = 26,263792 +$	$A_{24} = 28,846590 -$
$A_{25} = 29,413184 -$	$A_{26} = 31,964126 +$	$A_{27} = 32,499973 +$	$A_{28} = 33,021212 -$
$A_{29} = 35,528329 -$	$A_{30} = 36,021749 +$	$A_{31} = 38,501903 +$	$A_{32} = 40,969165 -$

En partant de ces valeurs et des expressions (57) et (58) de  $J_i$  et de  $J_r$ , on a obtenu les valeurs suivantes de l'intensité, celle du bord géométrique étant prise comme unité :-

---

(<sup>1</sup>) On verra plus loin comment on peut passer de la courbe, construite pour  $h = 1^m$ , à celle qui correspond à une longueur de fente quelconque.

TABLEAU II.

Distance angulaire au bord géométrique.	Intensité au bord géométrique	
	à l'intérieur.	à l'extérieur.
0,00.....	1,000	1,600
0,01.....	1,215	0,810
0,02.....	1,448	0,649
0,03.....	1,689	0,521
0,04.....	1,930	0,424
0,05.....	2,164	0,357
0,06.....	2,386	0,312
0,07.....	2,591	0,286
0,08.....	2,779	0,270
0,09.....	2,951	0,260
0,10.....	3,109	0,253
.....	.....	.....
0,15.....	3,799	0,208
0,20.....	4,390	0,180
0,25.....	4,905	0,161
0,30.....	5,374	0,147
0,35.....	5,805	0,136
0,40.....	6,206	0,127
0,45.....	6,582	0,120
0,50.....	6,938	0,114
0,55.....	7,277	0,108
0,60.....	7,600	0,104
0,65.....	7,911	0,100
0,70.....	8,209	0,096
0,75.....	8,497	0,093
0,80.....	8,776	0,090
0,85.....	9,047	0,087
0,90.....	9,308	0,085
0,95.....	9,564	0,083
1,00.....	9,812	0,080

La courbe tracée en trait plein, sur la figure 15, a été obtenue en partant de ces nombres.

La courbe, tracée en pointillé, représente les variations correspondantes de l'intensité, dans le voisinage du bord géométrique solaire, dans le cas d'une lunette d'ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente. Le point correspondant au bord géométrique est centre de la courbe. L'intensité passe de 1 à 2, quand on quitte ce bord, pour se rapprocher du centre, et de 1 à 0, quand on s'en éloigne,

à l'extérieur. Cette seconde courbe a été construite en partant des Tables numériques de Struve, fournissant les valeurs de l'intensité près du bord d'une image solaire, obtenue au foyer d'une lunette d'ouverture circulaire (1).

Dans ces Tables, l'intensité au bord géométrique est prise égale à  $\frac{1}{2}$ . Les nombres doivent donc être doublés quand on prend cette intensité pour unité, comme nous l'avons fait. On entre d'ailleurs dans les Tables, avec l'argument  $\frac{\pi h}{\lambda}(\varepsilon - \varphi)$ ,  $\varepsilon - \varphi$  étant la distance angulaire au bord géométrique, exprimée en arc, et  $h$  le diamètre de l'objectif.

D'après les courbes de la figure 15, l'intensité croît plus vite, vers l'intérieur du bord géométrique, lorsque l'accès de la lumière, dans la lunette, est limité par une fente, de longueur égale au diamètre de son objectif, qu'en l'employant à toute ouverture. A l'extérieur du bord géométrique, elle décroît d'abord plus rapidement dans le premier cas; mais l'inverse se produit ensuite. L'intensité diminue plus vite, pour l'ouverture circulaire, dès que l'on s'éloigne du bord géométrique à plus de  $0''{,}04$ .

La considération des courbes de la figure 15 permet de se rendre compte que le bord géométrique de l'image solaire, au foyer d'une lunette, est mieux caractérisé en diaphragmant l'objectif par une fente étroite qu'en l'employant à toute ouverture. Cette propriété résulte des remarques suivantes :

On sait que l'œil ne discerne les détails, à la surface d'un objet, qu'autant qu'ils s'aperçoivent sous un angle dépassant une certaine limite  $\sigma$  (2). Il en résulte que l'éclat, en un point d'une image focale,

(1) Ch. ANDRÉ, *Traité d'Astronomie stellaire*, t. I, p. 34.

(2) Voici un moyen simple de se rendre compte de l'ordre de grandeur de cette imperfection. On perce trois petits trous d'aiguille, disposés aux sommets d'un triangle équilatéral, de 2<sup>mm</sup> de côté, dans une feuille de papier noir que l'on éclaire par derrière. Examinant les trois points lumineux ainsi constitués, à quelques mètres de distance, on aperçoit une source lumineuse unique qui paraît ronde. En se rapprochant graduellement, il arrive un moment où la source, tout en paraissant unique, présente un aspect rappelant la forme triangulaire. Ce n'est qu'en s'avancant davantage que l'on finit par distinguer nettement les trois points lumineux séparés les uns des autres. Mesurant la distance extrême à laquelle on commence à se rendre compte de la véritable nature de la source, on peut en déduire l'ordre de grandeur de  $\sigma$ .



examinée à travers l'oculaire d'une lunette, est proportionnel à la quantité de lumière émise par un élément de surface, décrit autour de ce point et vu par l'observateur sous l'angle  $\sigma$ , avec le grossissement employé. Considérons, en particulier, l'image solaire, au foyer d'une lunette, et prenons, de part et d'autre du bord géométrique, deux éléments de surface contigus qui se voient chacun sous l'angle  $\sigma$ , à travers l'oculaire. L'éclat, de chaque côté du bord géométrique, dépend de la quantité de lumière émise par chacun des éléments considérés. Le rapport  $R$ , obtenu en divisant la quantité de lumière émise par l'élément intérieur au bord géométrique, par celle qui émane de l'élément extérieur, peut servir à caractériser le contraste lumineux de part et d'autre du bord géométrique.

S'il n'y avait pas de lumière à l'extérieur du bord géométrique,  $R$  serait infini et ce bord serait parfaitement délimité. S'il y avait au contraire égalité de lumière de part et d'autre du bord géométrique,  $R$  serait égal à 1 et il n'y aurait aucun contraste. Le contraste est d'autant plus marqué que  $R$  est plus élevé.

Reportons-nous maintenant à la figure 15. Suivant le grossissement employé, l'angle  $\sigma$  correspond à une étendue angulaire plus ou moins faible de l'image focale. En conséquence, il convient de calculer le rapport  $R$  en donnant successivement diverses valeurs angulaires aux éléments lumineux pris de part et d'autre du bord géométrique. Que la lunette travaille à pleine ouverture ou soit diaphragmée par la fente, la quantité de lumière émise par l'élément intérieur au bord est représentée par l'aire comprise entre la courbe correspondante, l'axe des abscisses, l'ordonnée à l'origine et l'ordonnée ayant pour abscisse la largeur angulaire de l'élément. De même la quantité de lumière émise par l'élément extérieur au bord géométrique est figurée par l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, l'ordonnée à l'origine et l'ordonnée symétrique de celle qui a été considérée pour l'élément intérieur.

Le Tableau III donne les valeurs du rapport  $R$ , correspondant à la fente et à l'ouverture entière de l'objectif, dans l'hypothèse où un détail sous-tendant  $0''$ ,  $1$ ,  $0''$ ,  $2$ ,  $0''$ ,  $3$ , etc., sur la surface solaire, s'aperçoit sous l'angle  $\sigma$ , avec le grossissement employé.

TABEAU III.

"	Valeurs de R	
	pour la fente.	pour l'ouverture circulaire.
0,1.....	4,40	3,88
0,2.....	8,56	7,18
0,3.....	12,91	10,19
0,4.....	17,25	12,98
0,5.....	21,40	15,84
0,6.....	25,58	18,42
0,7.....	29,72	20,94
0,8.....	33,84	23,35
0,9.....	37,99	25,67
1,0.....	42,12	27,90

Les valeurs de R, dans le cas de la fente, sont toutes supérieures à celles qui correspondent à l'ouverture circulaire. Le contraste lumineux, de part et d'autre du bord géométrique, est, en conséquence, plus marqué, quand on diaphragme l'objectif d'une lunette par une fente étroite de longueur égale à son diamètre, qu'en l'employant à pleine ouverture.

Les nombres dont nous sommes partis, pour établir ce résultat, se rapportent à une lunette de 1<sup>m</sup> d'ouverture, mais il est facile de l'étendre à une ouverture quelconque.

Dans le voisinage du bord géométrique,  $\alpha$  est, en effet, très voisin de 1 et comme  $m$  est très grand on a sensiblement, d'après les formules (57) et (58),

$$J_i = \pi \sqrt{\frac{h}{\lambda} (\varepsilon - \varphi)},$$

$$J_e = \frac{1}{4 \sqrt{\frac{h}{\lambda} (\varphi - \varepsilon)}};$$

d'autre part le coefficient  $A_p$ , qui rentre dans la formule (59), se réduit sensiblement à

$$A_p = \frac{\cos p \frac{\pi}{2} + \sin p \frac{\pi}{2}}{4p^2 - 1} \frac{1}{1.2 \dots p},$$

les erreurs relatives commises étant toutes très petites.

Il s'ensuit que  $J_i, J_e, J_B$  ne dépendent que du produit  $\frac{h}{\lambda} (\varepsilon - \varphi)$  quand

on consent à commettre de faibles erreurs relatives. La courbe qui se rapporte à une fente de longueur  $h'$  est donc extrêmement voisine de celle que l'on obtient en multipliant, par  $\frac{h}{h'}$ , la graduation de l'échelle des abscisses de la courbe relative à la fente de longueur  $h$ , les ordonnées restant les mêmes. La courbe relative à une ouverture circulaire de diamètre  $h'$  s'obtient de la même manière, en partant de celle qui se rapporte au diamètre  $h$ , les Tables de Struve dépendant uniquement de l'argument  $\pi \frac{h}{\lambda} (\varepsilon - \varphi)$ .

Les courbes tracées figure 15 se rapportant à  $h = 1^m$ , la longueur représentant l'abscisse  $0'', 1$ , sur cette figure, correspond donc :

A l'abscisse	1,00	pour une lunette de	0,10	d'ouverture
»	0,50	»	0,20	»
»	0,20	»	0,50	»
»	....	»	....	»

On peut dire aussi que les courbes tracées (*fig. 15*) se rapportent à une lunette d'ouverture quelconque, à condition de représenter graphiquement son pouvoir séparateur par l'abscisse marquée  $0'', 1$ , sur la dite figure, cet angle étant la valeur même du pouvoir séparateur d'une lunette de  $1^m$  d'ouverture.

D'après le Tableau III, le rapport R, dans le cas de la fente de  $1^m$ , est toujours supérieur à celui qui lui correspond, dans le cas de l'ouverture circulaire. Cette propriété reste inaltérée, quand on modifie l'échelle des abscisses, sans toucher à celle des ordonnées, c'est-à-dire quand on passe de la fente de longueur égale à  $1^m$  et de l'ouverture circulaire de même diamètre à une fente et à une ouverture circulaire de longueur et de diamètre différents.

La conclusion à laquelle nous sommes arrivés plus haut, dans le cas d'une fente de  $1^m$ , concernant le contraste lumineux, de part et d'autre du bord géométrique de l'image solaire, au foyer d'une lunette, cette conclusion, dis-je, est donc indépendante de l'ouverture de l'instrument.

### VIII.

On sait que les images des étoiles, au foyer d'une lunette, augmentent de finesse quand on masque la partie centrale de l'objectif avec un écran circulaire. Cet avantage est, au contraire, inexistant, pour les astres à grands diamètres, tels que le Soleil. La netteté des

bords de l'image décroît même à mesure que le rayon de l'écran augmente.

Il est naturel, en conséquence, de se demander quel genre de modification subit le bord de l'image solaire obtenue au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente très étroite, lorsqu'on en masque la partie centrale. Nous nous proposons d'élucider cette question, pour terminer le présent travail, en nous bornant à examiner ce qui se passe aux points du bord de l'image situés à la rencontre de l'axe de symétrie parallèle au sens de la longueur de la fente.

D'après les notations adoptées au paragraphe II, le mouvement vibratoire émanant d'un élément  $\sin \psi d\omega d\psi$  de la source, dans la direction  $(\omega, \psi)$ , et diffracté, dans la direction  $(\theta, \varphi)$ , par une fente de longueur  $h$ , arrive dans le plan focal avec la vitesse

$$i X a h \sin 2\pi \left( \frac{t - \tau}{T} - \frac{q}{\lambda} \right),$$

$X$  étant donné par la formule (11). Lorsque la largeur de la fente est très petite, et quand on examine ce qui se passe uniquement le long de l'axe de symétrie de l'image parallèle à la longueur de la fente, dont la direction correspond à  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , l'expression de la vitesse, à la distance angulaire  $\varphi$  du centre, se réduit à

$$G a \frac{\sin \pi h \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\lambda}}{\pi \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\lambda}} \sin 2\pi \left( \frac{t - \tau}{T} - \frac{q}{\lambda} \right).$$

Quand on masque la partie centrale de la fente par un écran de longueur  $l$ , cette vitesse devient

$$G a \frac{\sin \pi h \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\lambda} - \sin \pi l \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\lambda}}{\pi \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\lambda}} \sin 2\pi \left( \frac{t - \tau}{T} - \frac{q}{\lambda} \right).$$

En posant

$$X' = \frac{\sin \pi \frac{h - l}{2} \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\lambda}}{\pi \frac{h - l}{2} \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\lambda}} \cos \pi \frac{h + l}{2} \frac{\sin \varphi - \sin \psi \sin \omega}{\lambda},$$

cette expression peut s'écrire

$$GN'a(h-l)\sin 2\pi\left(\frac{l-q}{F}-\frac{q}{\lambda}\right).$$

Il en résulte que l'intensité lumineuse, émanant de l'élément de la source situé dans la direction GO (fig. 8) et arrivant au point Q, défini au paragraphe II, peut se représenter par l'expression

$$\lambda^2 a^2 (h-l)^2 N'^2 \sin \psi d\psi d\omega.$$

Intégrant le long de la surface de l'astre, posant

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{l} \frac{h+l}{2} \sin \varepsilon &= m', \\ \frac{h-l}{h+l} &= \rho, \\ \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} &= \alpha \end{aligned}$$

et faisant le changement de variable défini par les relations (16), on trouve finalement que l'intensité, dans la direction  $\varphi$ , est proportionnelle à l'expression

$$K' = \int_{-1}^{+1} [\cos m'(u-\alpha)]^2 \left[ \frac{\sin \rho m'(u-\alpha)}{\rho m'(u-\alpha)} \right]^2 \sqrt{1-u^2} du,$$

qui se confond avec celle de K [formule (19)], pour  $l=0$  ou  $\rho=1$ ,  $m'$  étant alors égal à  $\frac{m}{2}$ .

Or on a l'identité

$$(\sin A \cos B)^2 = \frac{\sin^2(A+B) + \sin^2(A-B) + 2\sin^2 A - 2\sin^2 B}{4}.$$

On peut écrire, en conséquence,

$$\begin{aligned} 4K' &= \left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \left[ \frac{\sin m'(\rho+1)(u-\alpha)}{m'(\rho+1)(u-\alpha)} \right]^2 du \\ &+ \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \left[ \frac{\sin m'(\rho-1)(u-\alpha)}{m'(\rho-1)(u-\alpha)} \right]^2 du \\ &+ 2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \left[ \frac{\sin m'\rho(u-\alpha)}{m'\rho(u-\alpha)} \right]^2 du \\ &- \frac{2}{\rho^2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \left[ \frac{\sin m'(u-\alpha)}{m'(u-\alpha)} \right]^2 du. \end{aligned}$$

Supposons  $\rho$  différent de 0 et de 1. Les intégrales figurant dans cette formule sont de même forme que  $K$  [formule (9)]. Il en résulte qu'au bord géométrique de l'image, pour lequel  $\alpha = 1$ , on a, d'après les formules (41) et (45), en ne conservant que les termes les plus importants,

$$4K_b = \sqrt{\frac{2\pi}{m'^3}} \left[ \left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^2 \frac{1}{(\rho+1)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 \frac{1}{(1-\rho)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\rho^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\rho^2} \right],$$

$$4\left(\frac{dK'}{dz}\right)_b = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m'}} \left[ \left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\rho+1}} + \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} + \frac{2}{\sqrt{\rho}} - \frac{2}{\rho^2} \right],$$

et, par suite,

$$\left(\frac{dK'}{K'}\right)_b = -\frac{2m'}{3} \frac{(1+\rho)^{\frac{3}{2}} + (1-\rho)^{\frac{3}{2}} + 2\rho^{\frac{3}{2}} - 2}{\sqrt{1+\rho} + \sqrt{1-\rho} + 2\sqrt{\rho} - 2}.$$

Le second nombre de cette dernière égalité est proportionnel au coefficient angulaire de la tangente à la courbe figurant les variations du rapport  $\frac{K'}{K_b}$ , c'est-à-dire de l'intensité relative, au point correspondant au bord géométrique, quand on prend comme unité l'intensité en ce point.

Or la fonction de  $\rho$  qui accompagne le facteur  $-\frac{2m'}{3}$  croît de 0 à 2, lorsque  $\rho$  croît de 0 à 1. La plus grande valeur absolue du second membre correspond donc à  $\rho = 1$ , c'est-à-dire au cas où le volet qui masque la partie centrale de la fente a une largeur nulle.

La variation de l'intensité relative, dans le voisinage immédiat du bord géométrique, est donc plus rapide en utilisant la totalité de la fente qu'en en masquant la partie centrale. En conséquence, on ne peut que diminuer la netteté du bord de l'image solaire, en obturant la partie centrale de la fente.

Cependant les formules utilisées, pour établir ce résultat, supposent le produit  $m'(1-\rho)\frac{\pi l \sin \varepsilon}{\lambda}$  élevé. La démonstration tombe en défaut si la largeur  $l$  de l'écran central descend à une fraction de millimètre. Nous ne nous attarderons pas à étudier ce cas particulier.

