

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. GLOBAL-MIKHAÏLENKO

Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation

Journal de mathématiques pures et appliquées 7^e série, tome 2 (1916), p. 1-78.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2__1_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

*Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide
en rotation;*

PAR B. GLOBA-MIRHAÏLENKO.

INTRODUCTION.

Dans le présent Mémoire j'étudie les figures d'équilibre relatif qu'affecte une masse fluide homogène, tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante. Je considère successivement trois cas relativement aux forces extérieures agissant sur la masse fluide. D'où la division de ce Mémoire en trois Parties :

Dans la première Partie, je suppose que le fluide est assujéti aux seules forces newtoniennes; dans la seconde Partie, aux forces newtoniennes plus une faible pression capillaire et enfin, dans la troisième Partie, je suppose que les seules forces qui agissent sur le fluide sont les forces capillaires.

Le cas du fluide soumis aux seules forces newtoniennes est déjà classique. Les principaux fondements ont été donnés par Mac Laurin et Jacobi qui ont donné les figures ellipsoïdales, et par Poincaré et M. Liapounoff qui ont découvert une infinité de nouvelles figures

d'équilibre infiniment voisines d'un ellipsoïde. Pour compléter cette étude, je me propose de rechercher par les mêmes méthodes les figures d'équilibre infiniment voisines d'un cylindre elliptique indéfini.

J'admets que le mouvement du fluide est de telle nature que chaque filet fluide, parallèle à l'axe de rotation, lui reste toujours parallèle; donc il me suffit, pour déterminer la figure cylindrique, de considérer n'importe laquelle de ses sections droites. Si je prends le plan de la section choisie pour plan des coordonnées, je ramène le problème au cas de deux coordonnées dans le plan. C'est pourquoi je commence par donner la notion des fonctions de deux variables, analogues aux fonctions de Lamé dans l'espace. Par analogie, j'appellerai ces nouvelles fonctions *fonctions de Lamé dans le plan*.

Je retrouve ainsi, en les rattachant aux travaux de Poincaré et de M. Liapounoff, les résultats obtenus par M. J.-H. Jeans (*Philosophical Transactions of the royal Society*, A, vol. CC, 1903, p. 67-104).

Dans la seconde Partie de ce Mémoire, j'étudie les figures d'équilibre d'une masse liquide en rotation, assujettie non seulement aux forces newtoniennes, mais encore aux forces capillaires qui produisent une faible pression superficielle, proportionnelle à la courbure moyenne de la surface.

Comme je l'ai démontré dans une Note, présentée à l'Académie des Sciences de Paris (13 février 1915), les figures ellipsoïdales d'équilibre sont impossibles dans ces conditions. Mais je chercherai à déterminer dans quel sens la pression capillaire tendra à modifier les figures ellipsoïdales que le liquide aurait affectées sans elle, et je démontrerai que la pression capillaire tend à arrondir toutes les figures ellipsoïdales.

Dans la troisième et dernière Partie, je considère une masse liquide soumise aux seules forces capillaires. Ce cas est tout à fait conforme à la réalité, car un tel liquide a été déjà réalisé par Plateau, qui a démontré en outre que dans ces conditions le liquide en repos affecte la figure sphérique ou une figure limitée par une portion d'une des surfaces indéfinies : cylindre, onduleïde, nodoïde, caténoïde. Je fais, pour ainsi dire, tourner ces figures autour de leur axe et j'obtiens chaque fois une série de nouvelles figures qui, pour une vitesse angulaire assez grande, donnent toujours naissance à un anneau.

Je dois maintenant exprimer ici tous les sentiments de gratitude et de reconnaissance les plus sincères à mon cher maître M. Paul Appell, Doyen à la Faculté des Sciences, qui, depuis mon arrivée à Paris, n'a jamais cessé de me témoigner sa bienveillance et son intérêt, et qui, par ses précieux conseils, m'a toujours guidé dans mes études et mes recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Fonctions de Lamé dans le plan.

1° *L'équation de Laplace en coordonnées elliptiques.* — Considérons l'équation de Laplace

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

et proposons-nous de l'écrire en coordonnées curvilignes ξ, η liées aux précédentes par les formules

$$x = f_1(\xi, \eta); \quad y = f_2(\xi, \eta).$$

En admettant que le nouveau système est orthogonal, nous avons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \alpha^2 d\xi^2 + \beta^2 d\eta^2,$$

α et β étant certaines fonctions de ξ et η .

Dans ces conditions

$$\Delta_2 V = -\frac{1}{\alpha\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \right]$$

et l'équation de Laplace devient

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Écrivons maintenant cette équation en coordonnées elliptiques.

Prenons pour ces coordonnées les racines positives ρ et μ de l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} - 1 = 0 \quad (\infty > \rho^2 > a^2 > \mu^2 > b^2).$$

Alors ρ^2 correspond à une ellipse et μ^2 à une hyperbole. L'identité fondamentale

$$(2) \quad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} - 1 = -\frac{(\rho^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)}$$

nous donne les formules de transformation

$$(3) \quad x^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)}{a^2 - b^2}; \quad y^2 = \frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{a^2 - b^2}.$$

On en déduit par un calcul classique

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2$$

en prenant

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{\rho^2}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)} (\rho^2 - \mu^2) = \frac{1}{A^2} (\rho^2 - \mu^2), \\ \beta^2 = \frac{\mu^2}{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)} (\rho^2 - \mu^2) = \frac{1}{B^2} (\rho^2 - \mu^2), \end{cases}$$

où l'on pose pour abrégé

$$(5) \quad A^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}{\rho^2}; \quad B^2 = \frac{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}{\mu^2}.$$

En portant ces valeurs dans la formule (1), et en multipliant par AB, nous aurons l'équation de Laplace en coordonnées elliptiques

$$(6) \quad A \frac{\partial}{\partial \rho} \left[A \frac{\partial V}{\partial \rho} \right] + B \frac{\partial}{\partial \mu} \left[B \frac{\partial V}{\partial \mu} \right] = 0.$$

Faisons encore un changement de variables qui s'impose : posons

$$(7) \quad \begin{cases} du = \frac{d\rho}{A} = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}}, \\ dv = \frac{d\mu}{B} = \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}}, \end{cases}$$

ce qui donne

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \int_a^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}} = \log \left[\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right], \\ v = \int_a^{\mu} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}} = \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{2\mu^2 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2} \right]. \end{array} \right.$$

Et l'équation de Laplace devient

$$(9) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = 0.$$

2° *Polynomes harmoniques en x, y en coordonnées elliptiques.*

— Tout polynome harmonique en x, y peut être présenté comme somme des polynomes suivants :

$$Q(x^2, y^2); \quad xQ(x^2, y^2); \quad yQ(x^2, y^2); \quad xyQ(x^2, y^2),$$

$Q(x^2, y^2)$ étant un polynome en x^2, y^2 , symétrique par rapport à x^2 et y^2 .

En coordonnées elliptiques, ces quatre polynomes ont des analogues

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \quad Q(x^2, y^2) = f(\rho^2) f(\mu^2), \\ \text{II} \quad \left\{ \begin{array}{l} xQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{a^2 - \mu^2} f(\rho^2) f(\mu^2), \\ yQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} f(\rho^2) f(\mu^2), \end{array} \right. \\ \text{III} \quad xyQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{a^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} f(\rho^2) f(\mu^2), \end{array} \right.$$

$f(\rho^2)$ étant un polynome en ρ^2 et $f(\mu^2)$ le même polynome où l'on change ρ^2 en μ^2 .

En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ les racines du polynome $f(\rho^2)$; alors, d'après l'identité (2), nous aurons

$$f(\rho^2)f(\mu^2) = \text{const.} \prod_i (\rho^2 - \alpha_i)(\mu^2 - \alpha_i) = \text{const.} \prod_i \left(\frac{x^2}{\alpha_i - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_i - b^2} - 1 \right).$$

De même, on vérifiera les autres formules. Les formules I et III donnent des polynomes de degré pair, et les formules II des polynomes de degré impair. Ainsi, pour chaque degré, nous aurons deux polynomes types.

3° *Équations analogues à celles de Lamé.* — Cherchons la solution des équations (6) et (9) sous la forme de produit d'une fonction R de ρ par une fonction M de μ ,

$$V = RM.$$

La substitution donne pour l'équation (6)

$$(11) \quad \frac{A}{R} \frac{d}{d\rho} \left(A \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{B}{M} \frac{d}{d\mu} \left(B \frac{dM}{d\mu} \right) = 0$$

et pour l'équation (9)

$$(12) \quad \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{du^2} + \frac{1}{M} \frac{d^2 M}{dv^2} = 0.$$

Et les équations pour déterminer R et M (analogues à celles de Lamé) sont

$$(13) \quad \begin{cases} A \frac{d}{d\rho} \left(A \frac{dR}{d\rho} \right) = H^2 R, \\ B \frac{d}{d\mu} \left(B \frac{dM}{d\mu} \right) = -H^2 M \end{cases}$$

et avec les variables u et v

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d^2 R}{du^2} = H^2 R, \\ \frac{d^2 M}{dv^2} = -H^2 M, \end{cases}$$

H^2 étant une constante arbitraire, qu'il faut spécifier, si nous voulons donner à R et M une forme spéciale.

4° *Solutions de l'équation de Laplace en forme des polynômes types, donnés par la formule (10).* — L'intégrale générale de la première des équations (14) est

$$(15) \quad R = C e^{Hu} + C' e^{-Hu}.$$

Mais, d'après la formule (8), nous avons

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = e^u,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = e^{-u}$$

et l'intégrale (15) devient

$$R = C_1 [\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2}]^H + C_2 [\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2}]^H,$$

C_1 et C_2 étant des nouvelles constantes.

On voit maintenant que, pour que R soit un polynome de degré n en ρ (en considérant $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ et $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ comme de degré 1 en ρ), il faut et il suffit que

$$H = n.$$

Il est aisé de vérifier que, pour avoir R de la forme

$$R = f(\rho^2) \quad \text{ou} \quad R = \sqrt{\rho^2 - b^2} f(\rho^2),$$

il faut poser $C_1 = C_2$ et pour avoir R de la forme

$$R = \sqrt{\rho^2 - a^2} f(\rho^2) \quad \text{ou} \quad R = \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} f(\rho^2),$$

il faut poser $C_1 = -C_2$. Pour avoir le coefficient 1 devant ρ^n , il faut toujours prendre $C_1 = |C_2| = 2^{-n}$.

Ainsi la formule générale s'écrit :

$$(16) \quad R = 2^{-n} [(\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2})^n \pm (\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2})^n].$$

A l'aide de la variable u , cette formule s'écrit :

$$(17) \quad R = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right)^n (e^{nu} \pm e^{-nu}).$$

Passons aux fonctions M . L'intégrale générale de la seconde équation (14) est

$$M = C'_1 \cos(Hv) + C'_2 \sin(Hv).$$

Or pour H pair

$$\cos(Hv) = f(\cos^2 v), \quad \sin(Hv) = \sin v \cos v f(\cos^2 v)$$

et pour H impair

$$\cos(Hv) = \cos v f(\cos^2 v) \quad \text{et} \quad \sin(Hv) = \sin v f(\cos^2 v),$$

$f(\cos^2 \nu)$ étant un polynome en $\cos^2 \nu$. Quant à la variable ν la formule (8) nous donne

$$\cos 2\nu = \cos^2 \nu - \sin^2 \nu = \left(\frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)^2,$$

d'où l'on tire

$$(18) \quad \cos \nu = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}; \quad \sin \nu = \frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Par conséquent, pour avoir M en forme de polynome en μ de degré n , il faut poser $H = n$. Pour avoir

$$M = f(\mu^2) \quad \text{ou} \quad M = \sqrt{\mu^2 - b^2} f(\mu^2),$$

il faut poser $C'_2 = 0$, et pour avoir

$$M = \sqrt{a^2 - \mu^2} f(\mu^2) \quad \text{ou} \quad M = \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{a^2 - \mu^2} f(\mu^2),$$

il faut poser $C'_1 = 0$.

Ainsi, pour chaque degré n , nous avons deux fonctions R et deux fonctions M correspondantes. Par conséquent, nous aurons deux produits RM. Ces produits sont des fonctions harmoniques symétriques par rapport à ρ et μ et représentent les polynomes types [formules (10)] en x, y .

5° Développement en série :

THÉORÈME. — *Toute fonction qui, sur un cercle, peut être développée en une série trigonométrique, peut être développée sur une ellipse en une série de fonctions M.*

La fonction M est analogue aux fonctions trigonométriques sin et cos. En effet, faisons la transformation changeant l'ellipse en cercle : $x = \sqrt{\rho^2 - a^2} x_1$; $y = \sqrt{\rho^2 - b^2} y_1$. Alors, désignant par θ l'angle polaire, nous aurons

$$x_1 = \cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \sin \nu,$$

$$y_1 = \sin \theta = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \cos \nu,$$

ce qui montre que $\nu = \frac{\pi}{2} - \theta$ est l'angle compris entre l'axe Oy et le rayon vecteur, compté dans le sens négatif.

Par conséquent

$$M_n = C_1 \cos n\nu + C_2 \sin n\nu = C' \cos n\theta + C'' \sin n\theta$$

est une fonction trigonométrique d'ordre n sur le cercle, étant en même temps une fonction de Lamé du même ordre sur l'ellipse. Or, sur l'ellipse, ρ étant donné, un point se détermine par la valeur de μ ; par conséquent, toute fonction, donnée sur l'ellipse, est fonction de μ seul. Mais μ , étant une fonction de ν et par conséquent de θ , toute fonction de μ , sur une ellipse, peut être représentée comme une fonction de θ sur un cercle. Et si elle est développable en une série trigonométrique sur un cercle, nous n'avons qu'à faire la transformation inverse (transformant le cercle en ellipse) pour voir que cette fonction sera développable sur cette ellipse en une série des fonctions M.

C. Q. F. D.

Ainsi toute fonction de μ seul, vérifiant de très larges conditions de développabilité en une série trigonométrique, peut être développée en la série suivante :

$$(19) \quad f(\mu) = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_n M_n + \dots$$

Les coefficients de ce développement se calculent comme les coefficients de la série de Fourier, ce qui s'ensuit du théorème suivant :

THÉORÈME. — Si M et M' sont deux fonctions de Lamé distinctes, l'intégrale suivante est nulle

$$\int_E l_0 MM' ds = 0,$$

où l'on pose

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}$$

et où l'intégration est faite le long de l'ellipse.

Appliquons la formule de Green aux fonctions $U = RM$ et $U' = R'M'$

$$\iint_E (U \Delta U' - U' \Delta U) d\sigma = - \int_E \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} + U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds.$$

Mais comme $dn = \alpha d\rho$, on a

$$\frac{dU}{dn} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial u} \frac{du}{d\rho} = \frac{\partial U}{\partial u} l = lM \frac{dR}{d\rho},$$

de même

$$\frac{dU'}{dn} = lM' \frac{dR'}{d\rho}$$

et la formule de Green donne

$$\int_E \left(l_0 M R M' \frac{dR'}{d\rho} - l_0 M' R' M \frac{dR}{d\rho} \right) ds = \left(R \frac{dR'}{d\rho} - R' \frac{dR}{d\rho} \right) \int_E l_0 M M' ds = 0.$$

Par conséquent, si M et M' sont distincts, R et R' le sont aussi, et nous aurons

$$\int_E l_0 M M' ds = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi, pour avoir le coefficient λ_n du développement (19), il suffit de multiplier tous ses termes par $l_0 M_n ds$ et intégrer le long de l'ellipse : ce qui nous donnera la formule

$$(20) \quad \lambda_n = \frac{\int_E l_0 M_n f(\mu) ds}{\int_E l_0 M_n^2 ds}.$$

Calculant

$$ds = \beta d\mu = \frac{d\mu}{l_0 B},$$

nous verrons que les deux intégrales de la dernière formule sont indépendantes de ρ , ce qui montre que le développement en série (19) est indépendant de l'ellipse E .

Si $f(\mu)$ est un polynôme de degré n , tous les coefficients $\lambda_k (k > n)$ sont nuls et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si $\Phi(\mu)$ est un polynôme, et si le degré de M est supérieur au degré de $\Phi(\mu)$, l'intégrale*

$$(21) \quad \int_E l_0 \Phi(\mu) M ds = 0.$$

6° *Racines de la fonction R :*

THÉORÈME. — *Toutes les racines des fonctions R sont réelles, distinctes et comprises entre a et b.*

Il est facile de voir que si la fonction R a des racines imaginaires, multiples ou en dehors de (a, b) , elle peut être décomposée en un produit de deux facteurs dont l'un conserve son signe dans l'intervalle (a, b) . Montrons que c'est impossible. Soit

$$R = \varphi(\rho) \psi(\rho)$$

dont $\psi(\rho) > 0$ entre a et b . Alors, posant dans la formule (21)

$$M = \varphi(\mu) \psi(\mu) \quad \text{et} \quad \Phi(\mu) = \varphi(\mu),$$

nous aurons

$$\int_{\mathbf{R}} l_0 [\varphi(\mu)]^2 \psi(\mu) ds = 0,$$

ce qui est manifestement impossible. Le théorème est ainsi démontré.

7° *Notations et formules.* — Pour $n = 0$, nous avons une fonction R et une fonction M.

Nous les désignerons par

$$R_0 = 1 \quad \text{et} \quad M_0 = 1.$$

Pour $n = 1$, il y a deux fonctions R et deux fonctions M. Désignons-les comme il suit :

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\rho^2 - a^2}, & M_1 &= \sqrt{a^2 - \mu^2} = \frac{1}{h} \sin \nu, \\ R_2 &= \sqrt{\rho^2 - b^2}, & M_2 &= \sqrt{\mu^2 - b^2} = \frac{1}{h} \cos \nu. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$x = h R_1 M_1; \quad y = h R_2 M_2,$$

où l'on pose

$$h = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Pour $n = 2$, nous aurons encore deux fonctions R et deux fonctions M :

$$\begin{aligned} R_3 &= \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2}, & M_3 &= \sqrt{a^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} = \frac{1}{2} h^2 \sin 2\epsilon, \\ R_4 &= \rho^2 - \alpha_1, & M_4 &= \mu^2 - \alpha_1 = \frac{1}{2} h^2 \cos 2\epsilon, \end{aligned}$$

où α_1 est une constante, pour laquelle le produit $(\rho^2 - \alpha_1)(\mu^2 - \alpha_1)$ devient une fonction harmonique. C'est donc une racine de l'équation

$$\frac{1}{a^2 - \alpha} + \frac{1}{b^2 - \alpha_1} = 0, \quad \alpha_1 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

et nous aurons

$$R_4 = \rho^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}; \quad M_4 = \mu^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2} h^2 \cos 2\epsilon.$$

Et ainsi de suite. On a dans chaque degré n deux fonctions R que nous désignerons par R_{2n-1} et R_{2n} , suivant que la fonction R contient $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ en facteur ou non. De même, pour la fonction M. Ainsi pour n pair,

$$R_{2n-1} = \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} f(\rho^2), \quad R_{2n} = f(\rho^2)$$

et pour n impair

$$R_{2n-1} = \sqrt{\rho^2 - a^2} f(\rho^2), \quad R_{2n} = \sqrt{\rho^2 - b^2} f(\rho^2).$$

Pour les fonctions M, nous aurons la formule unique

$$M_{2n-1} = 2^{-(n-1)} h^{-n} \sin n\epsilon, \quad M_{2n} = 2^{-(n-1)} h^{-n} \cos n\epsilon.$$

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} R_3 &= R_1 R_2, & M_3 &= M_1 M_2, \\ xy &= h^2 R_3 M_3. \end{aligned}$$

L'aire de l'ellipse

$$(22) \quad A = \pi \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} = \pi R_1 R_2 = \pi R_3.$$

Cherchons les cosinus directeurs de la normale. La normale étant tangente à la courbe $\mu = \text{const.}$, nous avons $dn = \alpha d\rho$. Par conséquent,

$$\cos(n, x) = \frac{dx}{dn} = \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{\alpha} h M_1 \frac{dR_1}{d\rho} = \frac{h}{\alpha} \frac{\rho}{R_1} M_1 = h_1 M_1 \sqrt{\rho^2 - b^2}$$

et finalement

$$(23) \quad \cos(n, x) = h l M_1 R_2 ;$$

de même

$$\cos(n, y) = h l M_2 R_1.$$

7° *Fonctions de Lamé de seconde espèce.* — Les fonctions R sont des intégrales particulières de l'équation (14)

$$\frac{d^2 R}{du^2} = H^2 R.$$

Désignons par S une autre solution de cette équation distincte de R. Alors S vérifiera la même équation

$$\frac{d^2 S}{du^2} = H^2 S.$$

Multipliant la première de ces équations par $-S$, la seconde par R et ajoutant, nous aurons

$$-S \frac{d^2 R}{du^2} + R \frac{d^2 S}{du^2} = 0.$$

Effectuant la première intégration et faisant la constante d'intégration égale à $-2n$, nous aurons

$$(24) \quad R \frac{dS}{du} - S \frac{dR}{du} = -2n.$$

D'où l'on tire S par une quadrature

$$(25) \quad S = R \int_{\infty}^u \frac{-2n}{R^2} du.$$

Nous appellerons cette fonction S, *fonction de Lamé de seconde espèce dans le plan.*

La fonction S vérifiant l'équation (14), le produit SM vérifie l'équation de Laplace. A chaque fonction R correspond une fonction S. Portant dans (25) la valeur de R [voir (17)], nous aurons

$$S = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right)^{-n} (e^{nu} \pm e^{-nu}) \int_{\infty}^u \frac{-2n du}{(e^{nu} \pm e^{-nu})^2},$$

n étant le degré de la fonction R . Effectuant l'intégration, on trouve

$$(26) S_{2n-1} = S_{2n} = \left(\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)^n e^{-nu} = \left(\frac{2}{\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2}} \right)^n = \left(\frac{2}{R_2 + R_1} \right)^n.$$

Ainsi, à chacune des deux fonctions R_{2n-1} et R_{2n} de degré n correspond une seule fonction S_n . On voit facilement que S est toujours positive, décroissante lorsque ρ croît, et prenant pour $\rho^2 = a^2 (u = 0)$ la valeur $S_n^0 = \left(\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)^n$ et pour $\rho = \infty$ devenant nulle comme ρ^{-n} .

8° *Problème de Dirichlet pour l'ellipse.* — *Étant donnée la valeur d'une fonction harmonique sur l'ellipse, déterminer cette fonction soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de cette ellipse.*

Appelons V_0 la valeur de la fonction sur l'ellipse E_0 . Alors V_0 peut être développée, comme nous le savons, en une série de fonctions M ,

$$V_0 = \sum_0^{\infty} A_k M_k;$$

ce que nous pouvons écrire

$$V_0 = \sum_0^{\infty} \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k,$$

en posant $A_k = \alpha_k R_k^0 S_k^0$.

La solution du problème sera alors :

Pour l'intérieur

$$V_i = \sum_0^{\infty} \alpha_k S_k^0 R_k M_k$$

et pour l'extérieur

$$V_e = \sum_0^{\infty} \alpha_k R_k^0 S_k M_k + \varphi,$$

φ étant une fonction harmonique s'annulant sur l'ellipse E_0 et prenant à l'infini la valeur donnée d'avance. Pour vérifier la solution il suffit de remarquer que les fonctions V_i et V_e prennent la valeur V_0 sur l'ellipse E_0 car $(R_k)_{\rho=\rho_0} = R_k^0$ et $(S_k)_{\rho=\rho_0} = S_k^0$ et que si V_0 est conver-

gente sur E_0 (pour $\rho = \rho_0$), V_i est convergente pour $\rho < \rho_0$ et V_e est convergente pour $\rho > \rho_0$, car $R_k < R_k^0$ pour $\rho < \rho_0$ et $S_k < S_k^0$ pour $\rho > \rho_0$.

Si V représente le potentiel logarithmique, la fonction φ est facile à déterminer, sachant que V à l'infini doit prendre la valeur

$$A \log \frac{1}{R} + \text{const.},$$

A étant la masse des surfaces attirantes et R la distance. Dans ce cas la fonction φ est

$$\varphi = -A(u - u_0) = A \log \left[\frac{\sqrt{\rho_0^2 - a^2} + \sqrt{\rho_0^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}} \right].$$

Pour le vérifier il suffit de remarquer que $u = u_0$ sur l'ellipse et qu'à l'infini φ devient $\varphi = -A \log R + \text{const.}$

9° *Potentiel logarithmique d'une bande elliptique.* — Nous appellerons *bande elliptique* ou *bande ajoutée à l'ellipse* E_0 , la partie du plan comprise entre le périmètre de l'ellipse et une courbe quelconque, infiniment voisine à l'ellipse. Nous appellerons *largeur de la bande* la distance entre l'ellipse et la courbe suivant la normale à l'ellipse. Cela posé, proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Étant donnée une fonction harmonique

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_0^{\infty} \alpha_k S_k^0 R_k^0 M_k, \\ V_i &= \sum_0^{\infty} \alpha_k S_k^0 R_k M_k, \\ V_e &= \sum_0^{\infty} \alpha_k R_k^0 S_k M_k + \varphi, \end{aligned}$$

trouver la bande elliptique infiniment mince, homogène et de densité 1 qui ait la fonction V comme potentiel logarithmique. Désignant par A l'aire de la bande, on doit poser

$$\varphi = -A(u - u_0).$$

(Nous supposons que le coefficient de l'attraction universelle $f = 1$.)

Soit ζ la largeur de la bande; nous pouvons, en négligeant l'effet de

cette largeur, considérer la bande comme une masse linéaire de densité ζ , répandue sur le périmètre de l'ellipse. D'autre part V étant le potentiel logarithmique, elle vérifie l'équation

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 + \left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = -2\pi\zeta.$$

Mais

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 = \sum \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k \frac{du}{dn_e} - \Lambda \frac{du}{dn_e} = \sum \alpha_k l_0 R_k^0 S_k^0 M_k - \Lambda l_0,$$

de même

$$\left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = \sum \alpha_k (-l_0) R_k^0 S_k^0 M_k$$

et l'équation précédente s'écrit

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 + \left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = \sum \alpha_k M_k (R_k^0 S_k^0 - S_k^0 R_k^0) l_0 - \Lambda l_0 = -2\pi\zeta$$

et finalement

$$\sum 2n \alpha_k M_k + \Lambda = 2\pi \frac{\zeta}{l_0}.$$

Or ζ étant une fonction de μ , ainsi que l_0 , la fonction $\frac{\zeta}{l_0}$ peut être développée en série des fonctions M et nous aurons

$$\frac{\zeta}{l_0} = \sum_0^{\infty} \beta_k M_k = \beta_0 + \sum_1^{\infty} \beta_k M_k.$$

La formule précédente deviendra

$$\Lambda + \sum_1^{\infty} \alpha_k 2n M_k = 2\pi\beta_0 + 2\pi \sum_1^{\infty} \beta_k M_k.$$

En égalant les coefficients, nous aurons la solution de notre problème :

$$\beta_0 = \frac{\Lambda}{2\pi}, \quad \beta_k = \frac{n}{\pi} \alpha_k.$$

Si la masse totale de la couche est nulle, on a $\Lambda = 0$ et $\beta = 0$.

Pour résoudre le problème inverse : *Étant donnée une bande elliptique homogène, de densité 1 et de largeur ζ infiniment petite, trouver son potentiel logarithmique*, il suffit de former la fonction $\frac{\zeta}{l_0}$ et de la développer en série de fonctions M,

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{\Lambda}{2\pi} + \sum_1 \beta_k M_k.$$

Cherchant le potentiel de cette bande sous la forme

$$V_0 = \sum \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k,$$

nous aurons

$$\alpha_k = \frac{\pi}{n} \beta_k,$$

et le potentiel cherché sera

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_0 = \sum_0^{\infty} \frac{\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k^0 M_k, \\ V_t = \sum_0^{\infty} \frac{\pi}{n} \beta_k S_k^0 R_k^0 M_k, \\ V_c = \sum_0^{\infty} \frac{\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k^0 M_k - \Lambda(u - u_0). \end{array} \right.$$

Si le développement de $\frac{\zeta}{l_0}$ contient un nombre fini de termes, le potentiel V en contiendra le même nombre.

Pour obtenir le potentiel newtonien d'une couche homogène, répandue sur un cylindre elliptique indéfini, parallèle à l'axe OZ et ayant pour directrice l'ellipse E_0 , sachant que l'épaisseur de la couche, constante le long de chaque génératrice, est donnée par la formule

$$\zeta = l_0 \sum_1^{\infty} \beta_k M_k + l_0 \frac{\Lambda}{2\pi},$$

il suffit de multiplier par 2 les formules donnant le potentiel logarithmique d'une bande elliptique de largeur ζ , ajoutée à l'ellipse E_0 . Ce

qui nous donnera

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_0 = \sum_0^{\infty} \frac{2\pi}{n} \beta_k S_k^0 R_k^0 M_k, \\ V_i = \sum_0^{\infty} \frac{2\pi}{n} \beta_k S_k^0 R_k M_k, \\ V_e = \sum_0^{\infty} \frac{2\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k M_k - 2\Lambda(u - u_0). \end{array} \right.$$

Exemple. — Appliquons ces formules au cas le plus simple :

Soit $n = 0, \quad k = 0, \quad M_k = 1, \quad R_k = 1, \quad S_k = 1.$

$$\zeta = 2l_0 M_0 = \varepsilon l_0 = \frac{\Lambda}{2\pi} l_0.$$

Alors

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{\Lambda}{2\pi}$$

et le potentiel logarithmique

$$V_0 = \alpha_0 = \text{const.}, \quad V_i = \alpha_0, \quad V_e = \alpha_0 - \Lambda(u - u_0).$$

Le potentiel est donc constant à l'intérieur de cette bande qui est une couronne elliptique située entre deux ellipses homothétiques, infiniment voisines. Vérifions cela.

Soit

$$f = \frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} = C$$

une famille d'ellipses homothétiques. La formule connue nous donne

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dn} &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = 2 \sqrt{\frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2}} \\ &= \frac{2\alpha}{\rho} = \frac{2}{l_0 \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}} \end{aligned}$$

et

$$\zeta = dn = \frac{1}{2} dC l_0 \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}.$$

D'autre part, l'aire de l'ellipse étant

$$\pi C \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)},$$

l'aire de la couronne est

$$A = \pi dC \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)},$$

et nous aurons

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{dn}{l_0} = \frac{1}{2} dC \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)} = \frac{A}{2\pi}.$$

10° *Potentiel logarithmique de l'ellipse homogène et du cylindre elliptique indéfini et homogène.* — Soient E_0 l'ellipse en question et $V(x, y)$ son potentiel logarithmique au point $P(x, y)$. Ajoutons à cette ellipse une bande homogène de telle façon que l'ellipse se déplace parallèlement à l'axe OX , à la distance infiniment petite $OO' = \varepsilon$. Le nouveau potentiel au point P sera $V(x - \varepsilon, y)$ et, par conséquent, le potentiel logarithmique de la bande au même point P sera

$$V' = V(x - \varepsilon, y) - V(x, y) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x},$$

car nous prenons ε infiniment petit.

La largeur de la bande en un point quelconque de l'ellipse sera

$$\zeta = dn = \varepsilon \cos(dn, x)$$

ou, d'après la formule (23),

$$\zeta = \varepsilon h l_0 R_2^0 M_1$$

et son potentiel logarithmique sera

$$V'_0 = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1^0 M_1,$$

$$V'_i = \varepsilon \pi h R_2^0 S_1^0 R_1 M_1,$$

$$V'_e = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1 M_1,$$

car l'aire totale de la bande est évidemment nulle et $\varphi = 0$.

Comparant les deux expressions de V' nous trouvons

$$V'_i = -\varepsilon \frac{\partial V_i}{\partial x} = \varepsilon \pi h R_2^0 S_1^0 R_1 M_1 = \varepsilon \pi R_2^0 R_1^0 \frac{S_1^0}{R_1^0} x,$$

$$V'_e = -\varepsilon \frac{\partial V_e}{\partial x} = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1 M_1 = \varepsilon \pi R_2^0 R_1^0 \frac{S_1}{R_1} x,$$

et, finalement,

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -A \frac{S_1^0}{R_1^0} x, \quad \frac{\partial V_e}{\partial x} = -A \frac{S_1}{R_1} x.$$

De même, faisant la translation parallèlement à l'axe OY, nous obtenons

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = -A \frac{S_2^0}{R_2^0} y, \quad \frac{\partial V_e}{\partial y} = -A \frac{S_2}{R_2} y.$$

Ce qui nous donne, en tenant compte de la résolution du problème de Dirichlet (n° 8),

$$\begin{aligned} V_i &= -\frac{1}{2} A \left[\frac{S_1^0}{R_1^0} x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0} y^2 \right] + \text{const.}, \\ V_e &= -\frac{1}{2} A \left[\frac{S_1}{R_1} x^2 + \frac{S_2}{R_2} y^2 \right] - \Lambda(u - u_0) + \text{const.} \end{aligned}$$

Pour obtenir le potentiel newtonien d'un cylindre elliptique indéfini, homogène, parallèle à l'axe OZ, il suffit de multiplier par 2 les formules donnant le potentiel logarithmique de sa section droite. Ainsi nous aurons

$$(29) \quad \begin{cases} V_i = -A \left[\frac{S_1^0}{R_1^0} x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0} y^2 \right] + \text{const.}, \\ V_e = -A \left[\frac{S_1}{R_1} x^2 + \frac{S_2}{R_2} y^2 \right] - 2\Lambda(u - u_0) + \text{const.}, \end{cases}$$

A étant l'aire de la section droite.

II. — Figures d'équilibre infiniment voisines d'un cylindre elliptique indéfini.

1° *Conditions d'équilibre d'un cylindre elliptique en rotation.* — Supposons qu'une masse fluide homogène, ayant la forme d'un cylindre elliptique indéfini dont la surface a pour équation

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} = 1,$$

tourne avec la vitesse angulaire constante ω autour de OZ. Désignant par V son potentiel, la fonction des forces sera

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Remplaçant V par sa valeur, nous trouvons les surfaces de niveau

$$U = \left(\frac{\omega^2}{2} - A \frac{S_1}{R_1}\right)x^2 + \left(\frac{\omega^2}{2} - A \frac{S_2}{R_2}\right)y^2 = \text{const.}$$

Si le cylindre est une figure d'équilibre, sa surface est une surface de niveau, ce qui nous donne la condition

$$(\omega^2 R_2^2 - 2A S_1 R_1) = (\omega^2 R_1^2 - 2A S_2 R_2);$$

d'où nous tirons

$$(30) \quad \frac{\omega^2}{A} = \frac{2(R_2 S_2 - R_1 S_1)}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{4(\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2})}{(a^2 - b^2)(\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2})}.$$

Cette condition nous détermine, ω étant donnée, le rapport des axes de l'ellipse de la section droite. Substituant la valeur de $A = \pi R_1 R_2$, nous aurons

$$\frac{\omega^2}{\pi} = \frac{4 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2},$$

cette équation du deuxième degré en $\frac{R_1}{R_2}$ donne pour ce rapport deux valeurs inverses l'une de l'autre à condition que

$$\frac{\omega^2}{2\pi} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \omega^2 \leq \pi.$$

2° *Valeur de la pesanteur sur un cylindre elliptique en rotation et en équilibre relatif.*

Étant

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

la fonction des forces, la pesanteur g est la dérivée suivant la normale extérieure de la fonction U , prise avec le signe $-$,

$$g = - \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Or, le cylindre étant une figure d'équilibre, on a

$$U = f(x, y) = k \left(\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} \right) + \text{const.},$$

k étant une certaine constante. Donc

$$g = -\frac{\partial f}{\partial n} = -k \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = -2k \sqrt{\frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2}},$$

et, définitivement,

$$g = \frac{2k}{lA\rho}.$$

Mais sur le cylindre ρ et par conséquent A sont constants, et cela nous permet de formuler le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Sur la surface d'un cylindre elliptique homogène et indéfini, tournant autour de l'axe OZ avec une vitesse angulaire constante et se trouvant en équilibre relatif,*

$$gl = \text{const.}$$

Calculons la constante. Il suffit de la calculer pour n'importe quel point, par exemple pour le point $x = R_1$, $y = 0$. Nous aurons alors

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \frac{1}{R_2},$$

et, tenant compte de la formule (30), nous aurons

$$gl = \frac{1}{R_2} \left(2A \frac{S_1}{R_1} - \omega^2 \right) x = \frac{2\pi R_1 R_2}{a^2 - b^2} (S_1 R_2 - R_1 S_2).$$

Mais,

$$R_1 R_2 = R_3,$$

$$\begin{aligned} (S_1 R_2 - R_1 S_2) &= R_1 R_2 \int_{\infty}^u \frac{-2 du}{R_1^2} - \int_{\infty}^u \frac{-2 du}{R_2^2} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{2} R_3 \int_{\infty}^u \frac{-4 du}{R_3^2} = \frac{a^2 - b^2}{2} S_3 \end{aligned}$$

et, finalement,

$$(31) \quad gl = \pi R_3 S_3.$$

3° Recherche des cylindres de bifurcation. — **PROBLÈME.** — *Étant donné un cylindre elliptique fluide en rotation uniforme et en équilibre relatif, trouver s'il existe des figures d'équilibre infiniment voisines.*

Déformons le cylindre en ajoutant à sa surface une couche d'épaisseur ζ , constante le long de chaque génératrice, et dont la masse totale est nulle. Considérons l'ellipse E_0 de la section droite. Soit

$$\zeta = dn = P_0 P.$$

Pour que la nouvelle figure soit d'équilibre, il faut et il suffit que la nouvelle surface soit une surface de niveau. Soit U_0 la fonction des forces, relative au cylindre primitif, à sa surface (au point P_0); alors sur la nouvelle surface (au point P) cette fonction aura la valeur

$$U = U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 \zeta = U_0 - g\zeta.$$

D'autre part, désignant par V' le potentiel de la couche sur elle-même, la fonction totale des forces au point P sera

$$U + V' = U_0 + V' - g\zeta.$$

Pour que la nouvelle figure soit d'équilibre, il faut que cette fonction soit constante, mais comme U_0 est constante, la condition cherchée sera

$$(32) \quad V' - g\zeta = \text{const.}$$

Pour avoir le potentiel V' il faut développer en série de fonctions M la fonction $\frac{\zeta}{l_0}$. Soit

$$\frac{\zeta}{l_0} = \sum_1^{\infty} \beta_k M_k,$$

car le volume total de la couche étant nul, $\beta_0 = 0$.

Le potentiel de cette couche est donc

$$V'_0 = \sum_1^{\infty} \frac{2\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k^0 M_k$$

et notre condition (32) devient

$$\sum_1^{\infty} \beta_k \left[\frac{2\pi}{n} R_k S_k - gl \right] M_k = \text{const.}$$

et, finalement,

$$\sum_1 \beta_k 2\pi \left[\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} \right] M_k = \text{const.}$$

Cette condition doit avoir lieu sur toute l'ellipse E_0 , c'est-à-dire pour n'importe quel μ . C'est donc une identité, et comme le développement en série est unique, nous aurons, en égalant les coefficients, une série de conditions

$$(33) \quad \beta_k \left[\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} \right] = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, \infty).$$

La constante elle-même est nulle, car $\beta_0 = 0$.

Pour $k = 1$ la quantité entre crochets devient

$$\frac{R_1 S_1}{1} - \frac{R_3 S_3}{2},$$

et, comme elle est différente de zéro, nous devons avoir

$$\beta_1 = 0.$$

Pour $k = 2$ nous aurons le même résultat, ce qui nous donnera

$$\beta_2 = 0.$$

Pour $k = 3$ la quantité entre crochets est identiquement nulle, et nous aurons

$$b_3 \text{ est arbitraire.}$$

Pour $k > 3$ la quantité entre crochets en général n'est pas nulle, par conséquent nous aurons, en général,

$$\beta_k = 0 \quad \text{si} \quad k > 3.$$

La question revient donc à chercher les cylindres ou, ce qui revient au même, les ellipses E_0 pour lesquels

$$(34) \quad \frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} = 0.$$

Mais à un cylindre quelconque en équilibre relatif nous ne pouvons ajouter qu'une couche unique, d'épaisseur $\zeta = \beta_3 l_0 M_3$, pour que la nouvelle figure reste d'équilibre.

Montrons que ce procédé ne nous donnera pas de figure nouvelle, car cette couche ne fait que faire tourner le cylindre autour de l'axe OZ d'un certain angle $d\theta$. Soit $V(xy)$ le potentiel de notre cylindre en un point quelconque $P(xy)$. Tournons notre cylindre de l'angle $d\theta$. Le nouveau potentiel au même point P sera

$$V_1 = V(x - y d\theta, y + x d\theta),$$

il en résulte que le potentiel de la couche qu'il fallait ajouter pour effectuer ce déplacement est

$$V' = V_1 - V = d\theta \left(-y \frac{\partial V}{\partial x} + x \frac{\partial V}{\partial y} \right),$$

et, finalement, remplaçant les dérivées par leurs valeurs,

$$V' = 2 d\theta A \left(\frac{S_1}{R_1} - \frac{S_2}{R_2} \right) xy.$$

Mais

$$xy = h^2 R_3 M_3$$

et toutes les autres quantités sont constantes sur le cylindre, donc nous aurons

$$V' = \alpha_3 M_3$$

et l'épaisseur de la couche correspondante

$$\zeta = \beta_3 l_0 M_3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Par conséquent, il nous reste à chercher les cylindres pour lesquels la condition (34) est vérifiée. Nous trouverons ainsi une série discontinue de cylindres qui donneront naissance à de nouvelles figures d'équilibre.

Nous les nommerons les *cylindres de bifurcation*. Comme les cylindres se déterminent complètement par leur section droite E_0 , nous ne considérerons dorénavant que ces ellipses de section droite, et nous chercherons ainsi les ellipses de bifurcation qui déterminent les cylindres en question.

La question se ramène donc à la résolution de l'équation (34) qui nous donnera le rapport des axes de l'ellipse cherchée; nous trouverons l'ellipse elle-même en écrivant la condition que son aire doit avoir la valeur donnée.

4° *Discussion de l'équation*

$$\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} = 0.$$

Considérons l'équation plus générale

$$(35) \quad \frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_i S_i}{p} = 0.$$

Si nous posons

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = t \quad (0 \leq t \leq 1 \text{ pour } a^2 \leq \rho^2 < \infty),$$

l'équation (35) devient algébrique, rationnelle en t . Posant ensuite

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{1-t}{1+t} = x \quad (0 \leq x \leq 1 \text{ pour } a^2 \leq \rho^2 < \infty),$$

nous aurons

$$\frac{R_i S_i}{p} = \frac{1 \pm x^p}{p},$$

où il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que i est pair ou impair. L'équation (35) s'écrit alors

$$(36) \quad F = \frac{1 \pm x^p}{p} - \frac{1 \pm x^n}{n} = 0.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour que l'équation (35) ait une racine et une seule pour $a^2 < \rho^2 < \infty$, il faut et il suffit : 1° que $p \neq n$ et 2° que le plus petit indice (i) soit impair et le plus grand indice (k) soit pair.*

Si $p = n$, l'équation (36) devient $x^n \pm x^n = 0$, donc elle a la racine $x = 0$ ou elle est identiquement nulle. La deuxième condition est suffisante, car l'équation (35) s'écrit alors

$$nF = -\left(\frac{n}{p} x^p + x^n\right) + \frac{n}{p} - 1 = 0.$$

Or, pour $x = 0$,

$${}_2F = \left(\frac{n}{p} - 1\right) > 0,$$

et pour $x = 1$,

$${}_nF = -2 < 0;$$

et comme la dérivée conserve son signe (—), l'équation (36) et par conséquent l'équation (35) a une racine et une seule pour $0 \leq x < 1$ ou pour $a^2 < \rho^2 < \infty$.

Cette même condition est nécessaire. En effet, si cette condition n'est pas satisfaite, il peut se présenter deux cas : 1° i est pair et k impair, alors nous avons

$${}_nF = \left(\frac{n}{p} x^p + x^n \right) + \left(\frac{n}{p} - 1 \right) = 0$$

et la fonction F est positive pour toute valeur de x entre 0 et 1; 2° i et k sont simultanément pairs ou impairs. Dans ce cas, l'équation (35) s'écrit

$${}_nF = \left(\frac{n}{p} x^p - x^n \right) \pm \left(\frac{n}{p} - 1 \right) = 0.$$

La fonction F est positive ou négative dans tout l'intervalle (0 ... 1) suivant que nous prenons le signe (+) ou le signe (—) et ne s'annule que pour $x = 1$ si nous prenons le signe (—). Donc, elle n'a pas de racine pour $0 < x < 1$ et le théorème est démontré.

Dans notre équation (34),

$$\frac{R_3 S_3}{2} - \frac{R_k S_k}{n} = 0 \quad (k > 3),$$

$i = 3$ est impair, donc l'équation a une racine et une seule, à condition que k soit pair. Par conséquent, les fonctions R et M à considérer sont de la forme

$$R_k = f(\rho^2) \quad \text{ou} \quad R_k = \sqrt{\rho^2 - b^2} f(\rho^2), \quad M_k = \cos(n\rho),$$

et l'équation en x est toujours de la forme

$$(37) \quad \frac{1 - x^2}{2} - \frac{1 + x^n}{n} = 0 \quad (n > 2).$$

Cette équation admet des réductions. Soit n impair, alors l'équa-

tion divisée par $1 + x$ devient

$$(38) \quad -\frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2}x + x^2 - x^3 + \dots + x^{n-1} = 0.$$

Si n est pair, en posant $x^2 = y$, $m = 2n$, nous aurons

$$(39) \quad y^m + my - (m-1) = 0.$$

Donnant à n les valeurs $n = 3, 4, 5, \dots$ et résolvant les équations obtenues, nous aurons une série d'ellipses de bifurcation. La vitesse correspondante ω sera donnée par la formule (30) qui s'écrit

$$\frac{\omega^2}{A} = \frac{4x}{a^2 - b^2} = \frac{4x}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Substituant la valeur de A et introduisant les valeurs de t et de x , nous aurons les formules

$$(40) \quad \frac{\omega^2}{\pi} = \frac{4t}{(1+t)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\omega^2}{\pi} = 1 - x^2;$$

on voit ainsi que ω^2 croît avec t (si $t < 1$) et décroît avec x .

Les racines de l'équation (37) vont en croissant avec n , car, considérant x comme fonction de n , nous aurons

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1 - x^2 - 2x^n \lg x}{2nx(1 + x^{n-2})} > 0.$$

Nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1° L'aplatissement du cylindre et la vitesse angulaire varient en sens inverse, c'est-à-dire, plus la vitesse est grande, plus l'aplatissement est petit;

2° Si la vitesse ω , partant de son maximum, va en diminuant, la masse fluide passe successivement par toutes les figures de bifurcation dans l'ordre des n croissants.

Remarque. — La vitesse ω maximum correspond à $t = 1$, $x = 0$, c'est-à-dire au cylindre circulaire. Par conséquent le cylindre circulaire ne peut jamais devenir elliptique, car pour qu'il le devienne, il faut que ω atteigne la valeur $\sqrt{\pi}$ et, sans la dépasser, commence à dimi-

nuer. La figure d'un cylindre elliptique ne peut donc dériver que d'un fluide qui était, au moment de repos, dans un plan indéfini. S'il commence à tourner autour de la normale du plan, nous aurons les ellipsoïdes de Mac Laurin; si, au contraire, il commence à tourner autour d'un axe situé dans le plan même, nous aurons, si la vitesse augmente, tous les cylindres elliptiques depuis les plus aplatis, jusqu'au cylindre circulaire.

5° *Figures d'équilibre en forme de cylindre non elliptique.* — Nous considérerons toujours la section droite E_0 de notre cylindre. Nous avons vu que, quelle que soit la figure de bifurcation, la couche susceptible de donner une nouvelle figure d'équilibre est donnée par la formule

$$\zeta = \beta_{2n} l_0 \cos(n\nu).$$

On voit aisément que l'épaisseur ζ ne peut jamais s'annuler aux extrémités du grand axe $B(y = R_2)$ et $B'(y' = -R_2)$ et que si n est pair, le signe de ζ est le même en B et B' , positif ou négatif suivant le signe de β_{2n} . Nous aurons ainsi deux figures différentes, symétriques par rapport à OX . Si n est impair, ζ a des signes opposés aux points B et B' . Nous aurons une seule figure dissymétrique par rapport à l'axe OX . Le changement de signe de β_{2n} ne fait que faire tourner notre figure autour de son centre de l'angle π .

La première ellipse de bifurcation s'obtient en posant $n = 3$. L'équation (38) devient

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

Les racines sont

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1.$$

Donc la valeur cherchée de x est

$$x = \frac{1}{2}.$$

Le rapport des axes nous sera donné par la formule

$$x = \frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \frac{1}{3}.$$

La couche qu'on peut appliquer sur cette ellipse a une épaisseur :

$$\zeta = \beta_6 l M_6 = \beta_6 l \cos(3\nu) = -\beta_6 l \sin(3\theta).$$

On voit que ζ s'annule en six points,

$$\theta = 0, \quad \frac{1}{3}\pi, \quad \frac{2}{3}\pi, \quad \pi, \quad \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{5}{3}\pi$$

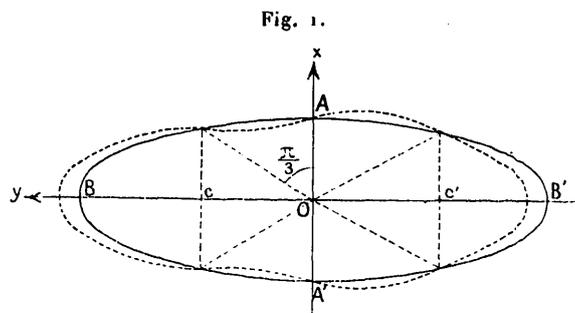
ou

$$\nu = \frac{1}{6}\pi, \quad \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{11}{6}\pi.$$

Remarquant qu'au point B ($x = 0, y = R_2$) $\nu = 0$ et $\cos 3\nu = 1$ nous voyons que si β_6 est positif, ζ est positive au point B et dans tout l'intervalle

$$-\frac{1}{6}\pi < \nu < \frac{1}{6}\pi.$$

Dans les autres intervalles, ζ est alternativement positive et négative, et nous aurons une figure analogue à la figure 1.



Ce cas correspond à la figure piriforme de Poincaré.

Il est utile de remarquer que l_0 varie sur l'ellipse de $(\rho^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}$ aux points A, jusqu'à $(\rho^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$ aux points B. Ces valeurs ont entre elles le rapport de 1 à 3. Par conséquent nous aurons le maximum de ζ aux points B et B'.

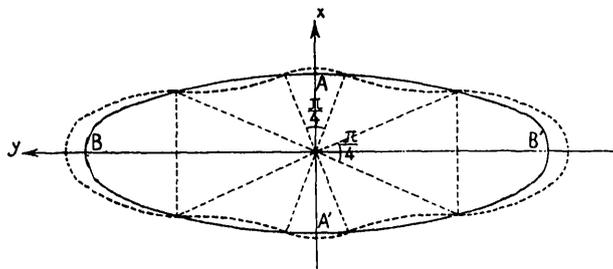
Les dimensions de cette première ellipse de bifurcation sont :

$$A = 3\pi, \quad OA = 1, \quad OB = 3, \quad OC = 1,5, \quad \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{3}{8}$$

ou encore

$$A = \pi, \quad OA = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad OB = \sqrt{3}, \quad OC = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{3}{8}.$$

Fig. 2.



Pour obtenir la deuxième ellipse de bifurcation, il faut, dans l'équation (39), poser $n = 4$, $m = 2$. Nous aurons

$$y^2 + 2y - 1 = 0.$$

D'où l'on tire

$$y = -1 \pm \sqrt{2},$$

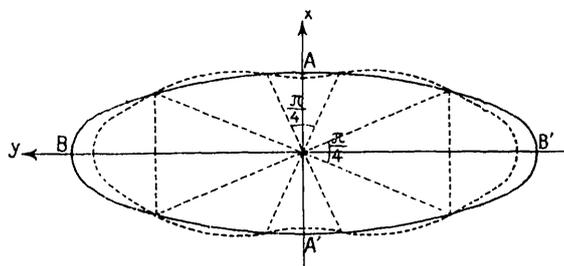
et, par suite,

$$x = \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0,64,$$

$$\frac{R_1}{R_2} = t = 0,22 = \frac{9}{41},$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 0,295.$$

Fig. 3.



L'épaisseur de la couche est donnée par la formule

$$\zeta = \beta_s l \cos(4\varphi),$$

donc ζ s'annule en huit points

$$\nu = \frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi.$$

Si β_n est positif, ζ est positive aux points B et B' et nous avons la figure 2.

Si β_n est négatif, ζ est aussi négative en B et B' et nous aurons la figure 3.

Et ainsi de suite.

Cylindre circulaire. — Si nous refaisons les mêmes calculs pour le cas du cylindre circulaire, nous obtenons sans difficulté que la condition $V' - g\zeta = \text{const.}$ s'écrit dans ce cas

$$\sum_1 \left[\frac{2\pi}{n} - (2\pi - \omega^2) \right] r_0^{n+1} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = \text{const.},$$

A_n et B_n étant les coefficients de développement de l'épaisseur ζ en série de Fourier,

$$\zeta = \sum_1^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Par conséquent, l'équation qui détermine la vitesse ω , relative à un cylindre de bifurcation, est

$$\frac{2\pi}{n} - (2\pi - \omega^2) = 0$$

ou

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 1 - \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots).$$

Les valeurs de $\frac{\omega^2}{2\pi}$ relatives aux cylindres de bifurcation, sont donc

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, 1$$

pour

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty.$$

L'épaisseur de la couche qui déterminera la nouvelle figure sera donnée alors par la formule

$$\zeta = \beta_n \cos n\theta.$$

Nous aurons le premier cylindre de bifurcation pour $n = 2$, $\omega^2 = \pi$. Ce cylindre donne naissance, comme d'ailleurs nous l'avons vu, aux cylindres elliptiques.

6° *Stabilité*. — Soit E_0 le cylindre elliptique en rotation et en équilibre relatif, et soit V_0 son potentiel à la surface. Alors, en un point, dont la distance au cylindre est λ (infiniment petite), son potentiel sera

$$V = V_0 - g\lambda.$$

Supposons que le cylindre subisse une déformation et calculons l'énergie de la figure déformée. Soient ζ l'épaisseur de la couche, produisant la déformation, $d\mu$ l'élément de son volume et V' son potentiel à la surface.

L'énergie totale se compose de deux parties :

- 1° L'énergie due à l'attraction;
- 2° L'énergie due à la force centrifuge.

Par conséquent, désignant par dm l'élément de volume du cylindre et par r la distance à l'axe OZ , l'énergie cherchée sera

$$W = \frac{1}{2} \int V dm + \int V d\mu + \frac{1}{2} \int V' d\mu + \int \frac{\omega^2 r^2}{2} dm + \int \frac{\omega^2 r^2}{2} d\mu.$$

Or l'énergie du système avant la déformation était

$$W_0 = \frac{1}{2} \int V dm + \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm;$$

en outre, la quantité $\int \frac{\omega^2 r^2}{2} d\mu$ est négligeable, car la masse totale de la couche est nulle. Cela posé, nous aurons

$$W = W_0 + \int V d\mu + \frac{1}{2} \int V' d\mu = W_0 + \int \left(V + \frac{1}{2} V' \right) d\mu.$$

Mais $V = V_0 - g\lambda$ et, par conséquent,

$$\int V d\mu = \int V_0 d\mu - \int g\lambda d\mu = - \int g\lambda d\mu.$$

Soit $d\omega$ l'élément de la surface, comprise entre deux génératrices infiniment voisines. Alors $d\mu = d\lambda d\omega$ et nous aurons

$$\int V d\mu = - \int \int g \lambda d\lambda d\omega = - \int g d\omega \int_0^{\lambda} \lambda d\lambda = - \int g \frac{\lambda^2}{2} d\omega,$$

de même

$$\frac{1}{2} \int V' d\mu = \int \frac{V' \zeta}{2} d\omega.$$

Écrivant

$$\zeta = \sum A_i l M_i,$$

nous aurons

$$V' = \sum \frac{2\pi}{n} A_i R_i^0 S_i^0 M_i,$$

ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^2}{2} &= \sum_i \frac{A_i^2}{2} l^2 M_i^2 + \sum_{ik} A_i A_k l^2 M_i M_k, \\ \frac{V' \zeta}{2} &= \sum \frac{\pi}{n} A_i^2 l S_i^0 R_i^0 M_i^2 + \sum \frac{\pi}{n} A_i A_k R_i^0 S_i^0 l M_i M_k. \end{aligned}$$

En tenant compte de ce que $\int l M_i M_k d\omega = 0$ et que $gl = \pi R_3^0 S_3^0$, nous aurons

$$W = W_0 - \pi \sum A_i^2 \left(\frac{S_3^0 R_3^0}{2} - \frac{R_i^0 S_i^0}{n} \right) \int l M_i^2 d\omega.$$

Nous pouvons considérer que la nouvelle surface soit définie par les coefficients A_i , alors les coefficients de stabilité sont

$$- \pi \left(\frac{R_3 S_3}{2} - \frac{R_i S_i}{n} \right) \int l M_i^2 d\omega.$$

Comme l'intégrale est toujours positive, la condition nécessaire et suffisante pour que la figure soit stable est

$$(41) \quad \frac{R_3 S_3}{2} - \frac{R_i S_i}{n} > 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \infty).$$

Écrivant cette condition sous la forme

$$\frac{1-x^2}{2} - \frac{1 \pm x^n}{n} > 0,$$

nous voyons qu'elle ne sera pas vérifiée pour $i = 1$, $i = 2$ et $i = 4$,

quel que soit x et que pour $i > 4$, c'est-à-dire pour $n > 2$, elle sera vérifiée si la valeur de x ne dépasse pas $\frac{1}{2}$. Si $x > \frac{1}{2}$ il y aura au moins une valeur de $i > 4$ pour laquelle la condition (41) ne sera pas vérifiée. La déformation relative à $i = 1$ ou à $i = 2$ n'est qu'une translation parallèle à l'un des axes coordonnés. Quant à la déformation relative à $i = 4$, la couche qui lui correspond sera de l'épaisseur

$$\zeta = \beta_i l M_i = \beta_i l \cos(2\nu).$$

Cette déformation accentue l'aplatissement du cylindre.

Par conséquent, tous les cylindres elliptiques sont instables, mais, pour $x < \frac{1}{2}$, le degré d'instabilité est 1. Le cylindre est stable pour toute déformation qui n'augmente pas son aplatissement. Pour $x > \frac{1}{2}$ le degré d'instabilité est plus grand que 1.

Pour les cylindres circulaires la condition (41) doit être remplacée par

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{\omega^2}{2\pi} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si ω^2 ne dépasse pas π , cette condition sera vérifiée si $n > 1$. Mais la déformation relative à $n = 1$ est une translation suivant une direction perpendiculaire à l'axe de rotation, qui ne modifie pas la figure du cylindre circulaire. Par conséquent, tous les cylindres circulaires sont stables pour n'importe quelle vitesse angulaire ω , pourvu qu'elle ne dépasse pas la valeur $\sqrt{\pi}$. Pour la vitesse angulaire plus grande que $\sqrt{\pi}$ l'équilibre est instable et le degré d'instabilité est d'autant plus grand que ω est plus grande.

Remarque I. — Les conditions de stabilité ne changent pas si, pour critérium de stabilité, nous prenons, avec Poincaré, la condition que $W - \omega^2 I$ est maximum, car, dans nos calculs, nous avons complètement négligé le moment d'inertie de la couche.

Remarque II. — Les résultats ne changent pas non plus si, dans l'énoncé du problème, nous prenons les conditions du problème que Poincaré appelle *problème naturel*, c'est-à-dire si nous prenons ω

variable, mais le moment de rotation $\mu = \omega^2 I$ constant. Nous aurons la formule

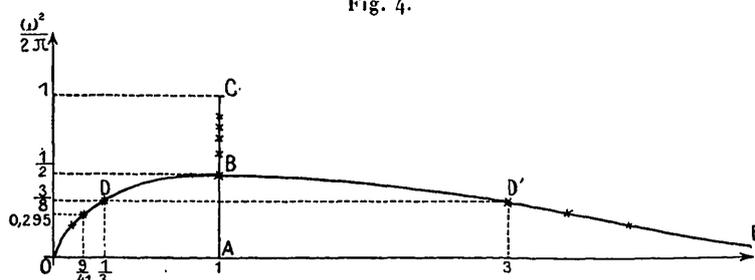
$$\omega^2 = k\mu \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

(k étant une constante), qui est absolument analogue à la formule (10)

$$\omega^2 = 4\pi \frac{t}{(1+t)^2}.$$

Pour résumer, faisons la représentation graphique (*voir POINCARÉ, Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation*). Portons sur l'un des axes coordonnés le rapport t des axes du cylindre et sur l'autre la quantité $\frac{\omega^2}{2\pi}$.

Fig. 4.



La droite ABC représente les cylindres circulaires et la courbe ODB tous les cylindres elliptiques. La courbe BD'E représente les mêmes cylindres, mais tournés de l'angle $\frac{\pi}{2}$. Quelques points de bifurcation sont marqués par de petites croix.

Comme les cylindres circulaires sont stables sur AB, ils sont instables sur BC, de même que les cylindres elliptiques sur ODBE. Le point D est le point de bifurcation où les cylindres, analogues aux figures piri-formes, prennent naissance. La courbe représentative de ces cylindres doit être tangente à ODB en D sans la couper et nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de ces figures. Le plus probable est qu'elles sont instables, quoique M. Jeans (*voir l'Introduction*) croie le contraire. Mais il croit de plus que les cylindres elliptiques sont aussi stables, ce qui n'est pas exact, comme nous venons de le voir.

DEUXIÈME PARTIE.

Figures d'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'action des forces newtoniennes et de la faible pression capillaire.

1° *Notations et formules.* — Au cours de cette deuxième Partie, j'emploierai les notations et les formules suivantes, empruntées à l'Ouvrage de Poincaré : *Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (leçons professées à la Sorbonne en 1900).

Prenant pour coordonnées elliptiques les racines positives ρ, μ, ν ($\rho > \mu > \nu$) de l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0,$$

on désigne par $R_i(\rho), M_i(\mu), N_i(\nu)$ les fonctions de Lamé, c'est-à-dire les fonctions de ρ , de μ et de ν , telles que leur produit (produit de Lamé)

$$R_i M_i N_i$$

soit une fonction harmonique, symétrique en ρ, μ, ν . Dans les coordonnées rectilignes, le produit de Lamé de degré n représente un polynôme harmonique de même degré en x, y, z (on entend par *degré du produit de Lamé* le degré de chacune des fonctions R, M, N).

Dans chaque degré n il y a $2n + 1$ différentes fonctions de Lamé et, par suite, $2n + 1$ différents produits de Lamé.

Les fonctions de Lamé peuvent être de quatre types et de huit

espèces. Désignant par $f(\rho^2)$ un polynome en ρ^2 , nous aurons :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Type I.} \quad 1^\circ R = f(\rho^2); \\ \text{Type II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2^\circ R = \sqrt{\rho^2 - a^2} f(\rho^2), \\ 3^\circ R = \sqrt{\rho^2 - b^2} f(\rho^2), \\ 4^\circ R = \sqrt{\rho^2 - c^2} f(\rho^2); \end{array} \right. \\ \text{Type III.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5^\circ R = \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2} f(\rho^2), \\ 6^\circ R = \sqrt{\rho^2 - c^2} \sqrt{\rho^2 - a^2} f(\rho^2), \\ 7^\circ R = \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} f(\rho^2); \end{array} \right. \\ \text{Type IV.} \quad 8^\circ R = \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2} f(\rho^2). \end{array} \right.$$

Les types I et III correspondent à n pair, les types II et IV correspondent à n impair. On aura les fonctions M et N en remplaçant ρ par μ et ν .

On démontre que $f(\rho^2)$ a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre a et c , et que, par conséquent, le produit de Lamé, type I : $f(\rho^2)f(\mu^2)f(\nu^2)$ est un polynome en x^2, y^2, z^2 . Cela découle immédiatement de l'identité fondamentale

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = \frac{(\lambda^2 - \rho^2)(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}$$

qui donne, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ les racines de $f(\rho^2)$,

$$(2) \quad f(\rho^2)f(\mu^2)f(\nu^2) = \text{const.} \prod_{i=1}^{i=k} \left[\frac{x^2}{\alpha_i - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_i - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_i - c^2} - 1 \right].$$

On admet les notations suivantes :

Pour $n = 0$, il y a une seule fonction de Lamé :

$$R_0 = M_0 = N_0 = 1.$$

Pour $n = 1$, il y a trois fonctions :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, & M_1 = \sqrt{\mu^2 - a^2}, & N_1 = \sqrt{\nu^2 - a^2}, \\ R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, & M_2 = \sqrt{\mu^2 - b^2}, & N_2 = \sqrt{\nu^2 - b^2}, \\ R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2}, & M_3 = \sqrt{\mu^2 - c^2}, & N_3 = \sqrt{\nu^2 - c^2}. \end{array} \right.$$

Pour $n = 2$, il y a cinq fonctions de Lamé :

$$(4) \quad \begin{cases} R_4 = \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2} = R_2 R_3, \\ R_5 = \sqrt{\rho^2 - c^2} \sqrt{\rho^2 - a^2} = R_3 R_1, \\ R_6 = \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} = R_1 R_2, \\ R_7 = \rho^2 - \alpha_1, \\ R_8 = \rho^2 - \alpha_2, \end{cases}$$

α_1 et α_2 étant les racines de l'équation

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0 \quad (a^2 > \alpha_1 > b^2 > \alpha_2 > c^2).$$

Pour $n = 3$, il y a sept fonctions, parmi lesquelles nous citerons

$$(6) \quad R_9 = \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

et ainsi de suite. Les fonctions M et N s'obtiennent en remplaçant, dans les formules (4) et (6), ρ par μ et ν .

Avec ces notations, posant

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}}, \\ h_3 = \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}},$$

on aura

$$(7) \quad \begin{cases} x = h_1 R_1 M_1 N_1, & y = h_2 R_2 M_2 N_2, & z = h_3 R_3 M_3 N_3, \\ yz = h_2 h_3 R_4 M_4 N_4, & zx = h_3 h_1 R_5 M_5 N_5, & xy = h_1 h_2 R_6 M_6 N_6. \end{cases}$$

Le volume de l'ellipsoïde sera

$$(8) \quad T = \frac{4}{3} \pi R_1 R_2 R_3.$$

Les cosinus directeurs de la normale seront

$$(9) \quad \begin{cases} \cos(n, x) = l h_1 M_1 N_1 R_4, \\ \cos(n, y) = l h_2 M_2 N_2 R_5, \\ \cos(n, z) = l h_3 M_3 N_3 R_6, \end{cases}$$

où l'on pose

$$(10) \quad l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}.$$

Comme sur un ellipsoïde ρ est constant, toute fonction à sa surface est fonction de μ et de ν seuls.

On démontre qu'une telle fonction peut être développée (si elle vérifie certaines conditions très larges) en une série de produits $M_i N_i$, qui sont absolument analogues aux fonctions sphériques P_i^m sur la sphère, aux fonctions M_i sur l'ellipse et aux fonctions $\sin(i\varphi)$ et $\cos(i\varphi)$ sur un cercle.

On démontre aussi que ce développement est unique et ne dépend pas du choix de l'ellipsoïde.

Les coefficients du développement

$$f(\mu, \nu) = A_0 + A_1 M_1 N_1 + A_2 M_2 N_2 + \dots + A_i M_i N_i + \dots$$

se calculent, comme dans la série de Fourier, à l'aide de la formule

$$\iint l M_i N_i M_k N_k d\sigma = 0$$

étant $k \neq i$ et l'intégrale étant étendue à toute la surface de l'ellipsoïde. Ce qui donne la formule pour les coefficients

$$(11) \quad A_i = \frac{\iint l f(\mu, \nu) M_i N_i d\sigma}{\iint l (M_i N_i)^2 d\sigma}.$$

On appelle S_i *fonction de Lamé de seconde espèce*, une fonction transcendante, jouissant des mêmes propriétés que R_i et donnée par la formule

$$(12) \quad S_i = R_i \int_{\infty}^{\rho} \frac{2n+1}{R_i^2} \frac{\rho d\rho}{-\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} = R_i \int_0^u \frac{2n+1}{R_i^2} du,$$

u étant une nouvelle variable, liée à ρ par la relation

$$du = \frac{-\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Le potentiel de l'ellipsoïde homogène de densité 1,

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} - 1 = 0$$

s'exprime par

$$(13) \quad V = -\frac{T}{2} \left[\frac{S_1}{R_1} x^2 + \frac{S_2}{R_2} y^2 + \frac{S_3}{R_3} z^2 \right] + \text{const.}$$

Le potentiel de la couche homogène de densité 1, répandue sur l'ellipsoïde et d'épaisseur

$$\zeta = l \sum \beta_k M_k N_k$$

est

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à la surface} \\ V'_0 = \sum \frac{4\pi}{2n+1} \beta_k R_k^0 S_k^0 M_k N_k; \\ \text{à l'intérieur} \\ V'_i = \sum \frac{4\pi}{2n+1} \beta_k S_k^0 R_k M_k N_k; \\ \text{à l'extérieur} \\ V'_e = \sum \frac{4\pi}{2n+1} \beta_k R_k^0 S_k M_k N_k. \end{array} \right.$$

Et enfin, désignant par g la pesanteur sur l'ellipsoïde en rotation et en équilibre relatif, nous avons les formules

$$(15) \quad gl = \frac{4}{3} \pi R_1^0 S_1^0 = \text{const.},$$

$$(16) \quad g = -\frac{\partial U}{\partial n},$$

U étant la fonction des forces.

Ajoutons ici encore une formule que j'ai donnée dans le numéro de juin 1915 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Avec les notations indiquées, la courbure moyenne de l'ellipsoïde est donnée par la formule suivante :

$$(17) \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -R_1 R_2 R_3 \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - x^2 - y^2 - z^2}{\left(\frac{R_2^2 R_3^2}{R_1^2} x^2 + \frac{R_3^2 R_1^2}{R_2^2} y^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^2} z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2° *Énoncé du problème. Hypothèses.* — Imaginons une masse liquide homogène en rotation uniforme autour d'un axe fixe (que nous

prenons pour axe OX) et qui, étant en équilibre relatif, affecte la figure d'un ellipsoïde E_0 .

Ajoutons maintenant à la surface de cet ellipsoïde une pression capillaire, c'est-à-dire une faible pression superficielle, proportionnelle à la courbure moyenne de la surface. Cette pression capillaire déformera la figure ellipsoïdale; et nous obtiendrons cette déformation en ajoutant à la surface de l'ellipsoïde une couche liquide infiniment mince, d'épaisseur ζ , tantôt positive, tantôt négative. La masse totale de cette couche doit évidemment être nulle. Nous supposons encore que cette déformation étant infiniment petite, la courbure moyenne de la surface reste la même fonction des angles polaires.

Si la nouvelle figure est une figure d'équilibre, les conditions d'équilibre s'écriront :

$$(18) \quad \left. \begin{array}{l} \text{à l'intérieur de la surface} \\ p = U + \text{const.}, \\ \text{à la surface} \\ p_0 = \alpha = U_0 + \text{const.}, \end{array} \right\}$$

U étant la fonction des forces et α la pression capillaire.

Pour résoudre le problème, nous développerons α et U_0 qui est une fonction de ζ , en une série de fonctions de Lamé; après quoi, identifiant les coefficients, nous calculerons ζ qui nous montrera en quoi la nouvelle figure diffère de l'ellipsoïde.

3° *Résolution du problème.* — Comme nous l'avons vu tout à l'heure, il nous faut, pour résoudre notre problème, développer en série de produits de Lamé U_0 et α , U_0 étant la fonction des forces à la surface de la couche et α étant la pression capillaire.

Or, U_0 se compose de deux parties

$$U_0 = U_E + v,$$

où U_E est la fonction des forces due à l'ellipsoïde, mais à la surface de la couche et v est le potentiel de la couche ajoutée. Mais, désignant par U_E^0 la fonction des forces due à l'ellipsoïde et à sa surface, nous

verrons que, négligeant le carré de ζ ,

$$U_E = U_E^0 + \frac{\partial U_E^0}{\partial n} \zeta,$$

ou en tenant compte de la formule (16)

$$(19) \quad U_E = U_E^0 - g\zeta.$$

Enfin,

$$U_0 = U_E + v = U_E^0 - g\zeta + v.$$

Par conséquent, la condition (18) s'écrira

$$\alpha = U_E^0 - g\zeta + v + \text{const.}$$

et comme U_E^0 est constant, car l'ellipsoïde était une figure d'équilibre, nous aurons définitivement la condition suivante :

$$(20) \quad -g\zeta + v = \alpha + \text{const.}$$

Comme ζ doit être une fonction de μ et ν , ainsi que l , nous nous représenterons la fonction $\zeta : l$ sous la forme de la série

$$\frac{\zeta}{l} = \sum a_i M_i N_i,$$

et, par conséquent, nous chercherons ζ sous la forme

$$(21) \quad \zeta = l \sum a_i M_i N_i.$$

Le problème consiste dans la recherche des coefficients a_i .

Reprenant l'équation (20), nous aurons

$$g\zeta = gl \sum a_i M_i N_i = \frac{4}{3} \pi R_1^0 S_1^0 \sum a_i M_i N_i,$$

d'après la formule (15).

Le potentiel v de la couche sera, d'après la formule (14),

$$v = \sum \frac{4\pi}{2n+1} a_i R_i^0 S_i^0 M_i N_i$$

et, par suite,

$$-g\zeta + v = -4\pi \sum \left(\frac{R_i^0 S_i^0}{3} - \frac{R_i^0 S_i^0}{2n+1} \right) a_i M_i N_i.$$

Si, enfin, nous développons α en série de produits de Lamé,

$$\alpha = \sum c_i M_i N_i,$$

l'équation (20) devient [en effaçant les indices (°)]

$$-4\pi \sum \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_l S_l}{2n+1} \right) a_i M_i N_i = \sum c_i M_i N_i.$$

L'identification des coefficients donne finalement

$$(22) \quad a_i = \frac{-c_i}{4\pi \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_l S_l}{2n+1} \right)}.$$

Ainsi nous avons ramené notre problème au développement en série de produits de Lamé d'une fonction donnée α . Mais ce développement se ramène de son côté au calcul des coefficients c_i qui, d'après la formule (11), seront donnés par la formule

$$(23) \quad c_i = \frac{\iint \alpha M_i N_i l d\sigma}{\iint (M_i N_i)^2 l d\sigma}.$$

4° *Coordonnées polaires.* — Pour calculer ces intégrales nous prendrons pour nouvelles variables les angles polaires θ et φ . Comme nous avons pris pour axe de rotation l'axe OX, nous poserons

$$(24) \quad \begin{cases} x = R_1 \cos \theta, \\ y = R_2 \sin \theta \sin \varphi, \\ z = R_3 \sin \theta \cos \varphi. \end{cases}$$

Nous savons que, désignant par f la tension superficielle, la pression capillaire sera donnée par la formule

$$\alpha = f \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right),$$

qui, d'après la formule (17) et en posant $-f \cdot R_1 R_2 R_3 = \varepsilon$, s'écrit

$$(25) \quad \alpha = \varepsilon \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2 \cos^2 \theta - R_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - R_3^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(R_2^2 R_3^2 \cos^2 \theta + R_3^2 R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

En tenant compte des formules (9) et de ce que

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1,$$

la même formule s'écrira

$$\alpha = \varepsilon(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2 \cos^2 \theta - R_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - R_3^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) l^3.$$

La comparaison de ces deux formules nous donne l'expression pour l :

$$(26) \quad l = (R_2^2 R_3^2 \cos^2 \theta + R_3^2 R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

La différentiation des formules (24) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -R_1 \sin \theta, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= R_2 \cos \theta \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= R_2 \sin \theta \cos \varphi, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= R_3 \cos \theta \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= -R_3 \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Désignant, comme on fait toujours, par

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = R_1^2 \sin^2 \theta + R_2^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + R_3^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = (R_2^2 - R_3^2) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = R_2^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R_3^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi,$$

et portant ces valeurs dans la formule classique,

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi,$$

nous aurons

$$d\sigma = \sin \theta \sqrt{R_2^2 R_3^2 \cos^2 \theta + R_3^2 R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} d\theta d\varphi.$$

Multipliant tout par l et en tenant compte de (26), nous aurons finalement

$$l d\sigma = \sin \theta d\theta d\varphi;$$

ce qui nous donnera l'expression suivante pour les coefficients c_i :

$$(27) \quad c_i = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \alpha M_i N_i \sin \theta d\theta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (M_i N_i)^2 \sin \theta d\theta}.$$

Calculons maintenant les produits de Lamé $M_i N_i$. En comparant les formules (24) avec les formules (3) et (7), nous aurons

$$(28) \quad \begin{cases} M_1 N_1 = \frac{1}{h_1} \cos \theta, \\ M_2 N_2 = \frac{1}{h_2} \sin \theta \sin \varphi, \\ M_3 N_3 = \frac{1}{h_3} \sin \theta \cos \varphi, \\ M_4 N_4 = \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_3} \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2h_4} \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \\ M_5 N_5 = \frac{1}{h_3} \frac{1}{h_1} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi = \frac{1}{2h_5} \sin 2\theta \cos \varphi, \\ M_6 N_6 = \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \cos \theta \sin \theta \sin \varphi = \frac{1}{2h_6} \sin 2\theta \sin \varphi, \\ \left. \begin{aligned} M_7 N_7 &= (\mu^2 - \alpha_1)(\nu^2 - \alpha_1) = h_7 \left[\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1 - c^2} - 1 \right], \\ M_8 N_8 &= (\mu^2 - \alpha_2)(\nu^2 - \alpha_2) = h_8 \left[\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2 - c^2} - 1 \right], \end{aligned} \right\} \end{cases}$$

où l'on pose

$$(29) \quad h_7 = \frac{(\alpha_1 - a^2)(\alpha_1 - b^2)(\alpha_1 - c^2)}{\rho^2 - \alpha_1}, \quad h_8 = \frac{(\alpha_2 - a^2)(\alpha_2 - b^2)(\alpha_2 - c^2)}{\rho^2 - \alpha_2},$$

et où α_1 , et α_2 sont les racines de l'équation (5). Enfin

$$M_9 N_9 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cos \theta \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{4h_9} \sin \theta \sin 2\theta \sin 2\varphi$$

et ainsi de suite.

En général, nous aurons huit espèces de produits de Lamé. Il est facile de les former. Désignant par Π le produit figurant dans la for-

mule (2), nous aurons ces huit espèces :

| | |
|----|---------------------|
| 1° | $MN = \Pi,$ |
| 2° | $MN = M_1 N_1 \Pi,$ |
| 3° | $MN = M_2 N_2 \Pi,$ |
| 4° | $MN = M_3 N_3 \Pi,$ |
| 5° | $MN = M_4 N_4 \Pi,$ |
| 6° | $MN = M_5 N_5 \Pi,$ |
| 7° | $MN = M_6 N_6 \Pi,$ |
| 8° | $MN = M_9 N_9 \Pi.$ |

5° *Calcul des coefficients c_i .* — Remarquant que α et Π sont des fonctions de $\cos^2 \theta$ et de $\cos^2 \varphi$ et que, par conséquent, elles reprennent les mêmes valeurs lorsque θ ou φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{2}$ à π , nous voyons que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \alpha M_i N_i \sin \theta d\theta$$

ne diffère de zéro que lorsque $M_i N_i$ est de la première espèce, c'est-à-dire que lorsqu'il est de la forme

$$M_i N_i = \prod_k \left(\frac{x^2}{\alpha_k - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_k - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_k - c^2} - 1 \right).$$

Cela montre que nous n'aurons de termes non nuls dans notre développement que pour n pair, et que, pour chaque degré n pair, nous aurons n termes non nuls. Ainsi, pour $n = 2$, nous aurons les termes avec les coefficients c_7 et c_8 . Comme tous les termes de notre développement sont infiniment petits, nous nous bornerons aux termes relatifs à $n = 2$ et nous prendrons approximativement

$$\alpha = c_0 + c_7 M_7 N_7 + c_8 M_8 N_8,$$

et, par suite, nous chercherons ζ sous la forme

$$(30) \quad \zeta = a_7 l M_7 N_7 + a_8 l M_8 N_8.$$

Si nous posons

$$(31) \quad A_i = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (M_i N_i)^2 \sin \theta d\theta,$$

la formule (27) nous donnera les expressions pour c_7 et c_8 ,

$$(32) \quad c_7 = \frac{\varepsilon h_7}{\Lambda_7} I_1, \quad c_8 = \frac{\varepsilon h_8}{\Lambda_8} I_2,$$

où l'on pose

$$(33) \quad I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2 \cos^2 \theta - R_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - R_3^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{[R_2^2 R_3^2 \cos^2 \theta + R_3^2 R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} \\ \times \left[\frac{R_1^2 \cos^2 \theta}{\alpha_1 - a^2} + \frac{R_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\alpha_2 - b^2} + \frac{R_3^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\alpha_1 - c^2} - 1 \right] \sin \theta d\theta.$$

On obtient I_2 en changeant α_1 en α_2 ; α_1 et α_2 étant les racines de l'équation (5).

Comme le calcul complet est extrêmement difficile, et comme nous ne voulons que déterminer dans quel sens la pression capillaire modifie la figure ellipsoïdale, il nous suffira de connaître le signe de α_7 et α_8 . Voilà pourquoi nous nous bornons à déterminer les signes de I_1 et I_2 .

6° *Signe de I_1 .* — Posant $R_3 = R_2$, ce qui entraîne $b^2 = c^2$, nous aurons

$$I_1 = I'_1 = \frac{2\pi}{R_2^3} \int_0^\pi \frac{(R_2^2 + R_1^2) + (R_2^2 - R_1^2) \cos^2 \theta}{[R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \\ \times \left[\frac{R_1^2 \cos^2 \theta}{\alpha_1 - a^2} + \frac{R_2^2 \sin^2 \theta}{\alpha_1 - b^2} - 1 \right] \sin \theta d\theta.$$

Posant $\cos \theta = x$, nous prenons pour nouvelle variable

$$z = \sqrt{R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)x^2} - \sqrt{R_2^2 - R_1^2}x.$$

Et, remarquant que pour $b = c$ l'équation (5) devient

$$\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{2}{\alpha - b^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2a^2 + b^2), \quad (\alpha_1 - a^2) = -\frac{1}{3}(R_2^2 - R_1^2), \quad (\alpha_1 - b^2) = \frac{2}{3}(R_2^2 - R_1^2),$$

nous aurons

$$I'_1 = -\frac{\pi(R_2^2 + 2R_1^2)}{4R_2^2(R_2^2 - R_1^2)^{\frac{5}{2}}} \int_{R_1 + \sqrt{R_2^2 - R_1^2}}^{R_2 - \sqrt{R_2^2 - R_1^2}} \frac{4R_2^2 z^2 + (R_1^2 + z^2)^2}{(R_1^2 + z^2)^2} \frac{4(R_2^2 - R_1^2)z^2 - 3(R_1^2 - z^2)^2}{z^2} \frac{dz}{z}.$$

Enfin, posant $y = z^2$, nous obtenons la formule définitive

$$I'_1 = - \frac{\pi(R_2^2 + 2R_1^2)}{8R_2^3(R_2^2 - R_1^2)^{\frac{5}{2}}} \int_{(R_1 + \sqrt{R_2^2 - R_1^2})^2}^{(R_1 - \sqrt{R_2^2 - R_1^2})^2} \frac{[4R_2^2 y + (R_1^2 + y)^2][4(R_2^2 + 2R_1^2)y - 3(R_1^2 + y)^2]}{(R_1^2 + y)^2 y^2} dy.$$

L'intégration s'effectue par la décomposition de la fonction sous l'intégrale en fractions simples. Effectuant cette intégration, on trouve :

$$I'_1 = \frac{8\pi(R_2^2 + 2R_1^2)(4R_2^2 - R_1^2)}{R_2^3(R_2^2 - R_1^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{2(R_2^2 + R_1^2)R_2\sqrt{R_2^2 - R_1^2}}{(4R_2^2 - R_1^2)R_1^2} - \lg \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 - R_1^2}}{R_1} \right],$$

et, désignant la quantité entre crochets par Φ , on a

$$I'_1 = \frac{8\pi(R_2^2 + 2R_1^2)(4R_2^2 - R_1^2)}{R_2^3(R_2^2 - R_1^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi.$$

Introduisons maintenant le rapport des axes

$$\frac{R_2}{R_1} = k > 1$$

et nous aurons

$$(34) \quad \Phi = \frac{(2k^3 + k)\sqrt{k^2 - 1}}{4k^2 - 1} - \lg(k + \sqrt{k^2 - 1}).$$

La dérivation donne

$$\frac{d\Phi}{dk} = \frac{16k^2(k^2 - 1)^2}{(4k^2 - 1)^2\sqrt{k^2 - 1}} > 0.$$

Par conséquent, Φ étant nulle pour $k = 1$, elle reste toujours positive pour $k > 1$ et devient infinie comme k^2 pour $k = \infty$. Et comme I'_1 ne diffère de Φ que par un facteur positif, nous voyons que I'_1 est toujours positive.

Par conséquent, comme

$$I'_1 = \lim_{R_3=R_2} I_1,$$

nous pouvons affirmer que I_1 est positive au moins pour les valeurs de R_3 voisines de R_2 .

Pour savoir comment se comporte I_1 lorsque le rapport $\frac{R_3}{R_2}$ devient

très grand, écrivons

$$I_1 = R_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{R_1^2 + \frac{R_2^2}{R_3^2} + 1 - \frac{R_1^2}{R_3^2} \cos^2 \theta - \frac{R_2^2}{R_3^2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left[R_3^2 \cos^2 \theta + R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right]^{\frac{3}{2}}} \\ \times \left[\frac{R_1^2}{R_3^2} \cos^2 \theta + \frac{R_2^2}{R_3^2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\alpha_1 - c_2} - \frac{1}{R_3^2} \right] \sin \theta d\theta.$$

Laissons maintenant R_1 et R_2 invariables, mais faisons croître R_3 au delà de toute limite. Nous aurons,

$$\lim_{R_3 \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{R_3 \rightarrow \infty} \frac{R_3}{\alpha_1 - c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{[R_3^2 \cos^2 \theta + R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta \\ = \frac{1}{R_3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{[R_3^2 \cos^2 \theta + R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta.$$

On voit ainsi que, l'intégrale étant finie et positive, I_1 s'annule comme $\frac{1}{R_3}$ pour R_3 très grand, mais reste toujours positive.

7^o *Signe de I_2 .* — Écrivons pour abrégier

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F \cdot P \sin \theta d\theta d\varphi,$$

où nous posons

$$F = \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2 \cos^2 \theta - R_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - R_3^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left[R_3^2 R_3^2 \cos^2 \theta + R_3^2 R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right]^{\frac{3}{2}}}, \\ P = \frac{R_1^2 \cos^2 \theta}{\alpha_2 - a^2} + \frac{R_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\alpha_2 - b^2} + \frac{R_3^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\alpha_2 - c^2} - 1;$$

on voit que F est une fonction essentiellement positive.

Pour trouver le signe de I_2 , calculons sa valeur au voisinage de $R_2 = R_3$. Dans ce but, posons

$$R_2^2 = R_3^2 + \varepsilon^2,$$

ce qui demande $c^2 = b^2 - \varepsilon^2$.

Alors il faut poser

$$\alpha_2 = b^2 - \lambda \varepsilon^2$$

et l'équation (5) devient

$$(35) \quad \frac{1}{b^2 - a^2 - \lambda \varepsilon^2} + \frac{1}{-\lambda \varepsilon^2} + \frac{1}{(1-\lambda)\varepsilon^2} = 0.$$

D'où, pour la première approximation on peut prendre $\lambda = \frac{1}{2}$.

Portant la valeur de α_2 dans P, on obtient

$$P = \frac{R_1^2 \cos^2 \theta}{b^2 - a^2 - \lambda \varepsilon^2} + \frac{R_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{-\lambda \varepsilon^2} + \frac{(R_2^2 + \varepsilon^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1-\lambda)\varepsilon^2} - 1.$$

Remplaçant $\frac{1}{-\lambda \varepsilon^2}$ par sa valeur tirée de (35), on a

$$P = \frac{R_1^2 \cos^2 \theta}{b^2 - a^2 - \lambda \varepsilon^2} + \frac{R_2^2 \sin^2 \theta}{(1-\lambda)\varepsilon^2} [\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi] \\ - \frac{R_2^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2 - a^2 - \lambda \varepsilon^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{1-\lambda} - 1$$

ou enfin, exprimant $\sin^2 \varphi$ et $\cos^2 \varphi$ en fonction de $\cos 2\varphi$,

$$P = \frac{-R_1^2 \cos^2 \theta}{a^2 - b^2 + \lambda \varepsilon^2} + \frac{R_2^2 \sin^2 \theta}{2(a^2 - b^2 + \lambda \varepsilon^2)} + \frac{\sin^2 \theta}{2(1-\lambda)} - 1 \\ + \sin^2 \theta \left[\frac{R_2^2}{(1-\lambda)\varepsilon^2} - \frac{R_2^2}{2(a^2 - b^2 + \lambda \varepsilon^2)} + \frac{1}{2(1-\lambda)} \right] \cos 2\varphi.$$

En tenant compte de ce que, pour $R_2 = R_3$, la fonction F ne dépend pas de φ , les termes en $\cos 2\varphi$ s'annuleront après l'intégration par rapport à φ , et nous aurons

$$\lim_{R_2=R_3} I_2 = 2\pi \int_0^\pi \lim_{R_2=R_3} F \left[\frac{R_2^2 \sin^2 \theta - 2R_1^2 \cos^2 \theta}{2(a^2 - b^2 + \lambda \varepsilon^2)} + \frac{\sin^2 \theta}{2(1-\lambda)} - 1 \right] \sin \theta d\theta.$$

Remplaçons, maintenant, λ par $\frac{1}{2}$ et ε par 0, et nous aurons finalement

$$I_2' = \lim_{R_2=R_3} I_2 = \frac{2\pi R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_0^\pi \frac{(R_2^2 + R_1^2) + (R_2^2 - R_1^2) \cos^2 \theta}{R_2^2 [R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta.$$

Il est facile de vérifier que I_2' ne diffère de I_1' que par un facteur positif et que, par suite, I_2 est positive au moins au voisinage de $R_2 = R_3$.

Nous trouverons aussi que, pour R_3 infiniment grand par rapport à R_1 et R_2 , I_2 devient nulle comme $\frac{1}{R_3}$.

En effet,

$$\lim_{R_3 = \infty} I_2 = \lim_{R_3 = \infty} \frac{R^3}{\alpha_2 - c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{[R_2^2 \cos^2 \theta + R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta.$$

Mais, supposant dans (34) ε^2 très grand, on trouve pour λ la valeur approchée $\lambda = \frac{2}{3}$. Alors $\alpha_2^2 - c^2 = \frac{2}{3} \varepsilon^2$ et comme

$$\lim_{\varepsilon = \infty} \frac{R_3^2}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon = \infty} \frac{R_2^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 1,$$

nous aurons définitivement

$$\lim I_2 = \frac{2}{3R_3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{[R_2^2 \cos^2 \theta + R_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta.$$

Par conséquent, les deux intégrales I_1 et I_2 sont positives au voisinage de $R_2 = R_3$ et s'annulent comme $\frac{1}{R_3}$ pour $R_3 = \infty$ (R_1 et R_2 restant finis). Mais comme F décroît constamment lorsque R_3 croît de R_2 à ∞ et s'annule comme $\frac{1}{R_3}$ pour $R_3 = \infty$, et que P est toujours une fonction dont la moyenne sur l'ellipsoïde est nulle, nous pouvons admettre que I_1 et I_2 étant égales à I'_1 et I'_2 pour $R_3 = R_2$ décroissent constamment lorsque R_3 croît de R_2 à ∞ et deviennent nulles pour $R_3 = \infty$ restant positives pour toutes les valeurs de R_3 .

L'intégration assez longue, mais ne présentant aucune difficulté théorique nous donne les valeurs de A_7 et A_8 :

$$A_7 = \frac{8}{15} \pi (\rho^2 - \alpha_1)^2 \left[\frac{1}{(\alpha_1 - a^2)^2} + \frac{1}{(\alpha_1 - b^2)^2} + \frac{1}{(\alpha_1 - c^2)^2} + \frac{1}{(\rho^2 - \alpha_1)^2} \right],$$

$$A_8 = \frac{8}{15} \pi (\rho^2 - \alpha_2)^2 \left[\frac{1}{(\alpha_2 - a^2)^2} + \frac{1}{(\alpha_2 - b^2)^2} + \frac{1}{(\alpha_2 - c^2)^2} + \frac{1}{(\rho^2 - \alpha_2)^2} \right].$$

8° *Calcul de ζ* . — Cela posé, passons à ζ . Comme nous nous sommes borné à deux termes du développement, nous cherchons ζ

sous la forme

$$\zeta = a_7 l M_7 N_7 + a_8 l M_8 N_8.$$

Remplaçant tout par sa valeur, nous aurons

$$\zeta = \frac{f R_1 R_2 R_3}{4 \pi} l \left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7 \omega_7} \left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1 - c^2} - 1 \right) + \frac{h_8^2 I_2}{A_8 \omega_8} \left(\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2 - c^2} - 1 \right) \right],$$

où l'on pose

$$\omega_7 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_7 S_7}{5} = \int_{\rho}^{\infty} \left(\frac{\rho^2 - a^2}{x^2 - a^2} - \frac{\rho^2 - \alpha_1}{x^2 - \alpha_1} \right) \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}},$$

$$\omega_8 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_8 S_8}{5} = \int_{\rho}^{\infty} \left(\frac{\rho^2 - a^2}{x^2 - a^2} - \frac{\rho^2 - \alpha_2}{x^2 - \alpha_2} \right) \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}}.$$

Comme $a^2 > \alpha_1 > \alpha_2$ et $x > \rho$, nous voyons que ω_7 et ω_8 sont négatives car tous les éléments de l'intégrale le sont. De plus nous avons vu que I_1 et I_2 sont positives et il est évident que l , h_7^2 , h_8^2 , A_7 et A_8 le sont aussi. Par conséquent le signe de ζ ne dépend que du signe des quantités entre les parenthèses.

9° *Discussion.* — On voit facilement que $h_8 = 0$, $a_8 = 0$ pour $R_3 = R_2$ et que par suite dans ce cas ζ se réduit à un seul premier terme. Pour R_3 très grand c'est le contraire, car c'est le second terme qui jouera le rôle principal.

En effet, posant comme avant

$$b^2 = c^2 + \varepsilon^2, \quad \varepsilon^2 \text{ très grand,}$$

$$a^2 = b^2 + k^2, \quad k^2 \text{ fini } (k^2 = R_2^2 - R_1^2),$$

on a

$$\alpha_1 = b^2 + \lambda' k^2,$$

λ' étant donnée par l'équation

$$\frac{1}{(\lambda' - 1)k^2} + \frac{1}{\lambda' k^2} + \frac{1}{\lambda' k^2 + \varepsilon^2} = 0,$$

d'où la valeur approchée de λ' est $\lambda' = \frac{1}{2}$.

Ceci posé on trouve facilement

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} h_7 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{(\lambda - 1) k^2 \lambda k^2 (\lambda k^2 + \varepsilon^2)}{R_2^2 - \lambda k^2} = \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{2(R_2^2 + R_1^2)} \varepsilon^2, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} A_7 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{8}{15} \pi \left[\left(\frac{R_2^2 - \lambda k^2}{(\lambda - 1) k^2} \right)^2 + \left(\frac{R_2^2 - \lambda k^2}{\lambda k^2} \right)^2 + \left(\frac{R_2^2 - \lambda k^2}{\lambda k^2 + \varepsilon^2} \right)^2 - 1 \right] \\ &= \frac{8}{15} \pi \frac{2 R_1^2}{(R_2^2 + R_1^2)^2}.\end{aligned}$$

Et comme I_1 est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon = \infty$, nous voyons que le coefficient $\frac{h_7^2 I_1}{A_7 \omega_7}$ est de l'ordre de $\frac{\varepsilon^3}{\omega_7}$. De même on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} h_8 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\left(b^2 - a^2 - \frac{2}{3} \varepsilon^2 \right) \left(-\frac{2}{3} \varepsilon^2 \right) \left(\frac{1}{3} \varepsilon^2 \right)}{R_3^2 - \frac{1}{3} \varepsilon^2} = \frac{2}{9} \varepsilon^4, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} A_8 &= \frac{8}{15} \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{R_2^2 - \frac{1}{3} \varepsilon^2}{b^2 - a^2 - \frac{2}{3} \varepsilon^2} \right)^2 + \left(\frac{R_3^2 - \frac{1}{3} \varepsilon^2}{-\frac{2}{3} \varepsilon^2} \right)^2 + \left(\frac{R_3^2 - \frac{1}{3} \varepsilon^2}{\frac{1}{3} \varepsilon^2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{4}{15} \pi.\end{aligned}$$

Ainsi nous voyons que le coefficient $\frac{h_8^2 I_2}{A_8 \omega_8}$ est de l'ordre de $\frac{\varepsilon^7}{\omega_8}$.

Et comme ω_7 et ω_8 sont du même ordre de grandeur que l'intégrale

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}},$$

on voit facilement que pour R_3 très grand, c'est le second terme qui joue le rôle principal.

Tout cela posé, nous pouvons discuter la nouvelle figure d'équilibre. Désignant par ζ_x , ζ_y et ζ_z l'épaisseur de la couche aux trois sommets de l'ellipsoïde, nous aurons

$$\begin{aligned}\zeta_x &= \frac{f R_1}{4 \pi} \left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7 \omega_7} \frac{(\rho^2 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - a^2)} + \frac{h_8^2 I_2}{A_8 \omega_8} \frac{(\rho^2 - \alpha_2)}{(\alpha_2 - a^2)} \right], \\ \zeta_y &= \frac{f R_2}{4 \pi} \left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7 \omega_7} \frac{(\rho^2 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - b^2)} + \frac{h_8^2 I_2}{A_8 \omega_8} \frac{(\rho^2 - \alpha_2)}{(\alpha_2 - b^2)} \right], \\ \zeta_z &= \frac{f R_3}{4 \pi} \left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7 \omega_7} \frac{(\rho^2 - \alpha_1)}{(\alpha_1 - c^2)} + \frac{h_8^2 I_2}{A_8 \omega_8} \frac{(\rho^2 - \alpha_2)}{(\alpha_2 - c^2)} \right].\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \alpha_1 - a^2 < 0, & \quad \alpha_1 - b^2 > 0, & \quad \alpha_1 - c^2 > 0, \\ \alpha_2 - a^2 < 0, & \quad \alpha_2 - b^2 < 0, & \quad \alpha_2 - c^2 > 0 \end{aligned}$$

et rappelant que ω_7 et ω_8 sont négatifs, nous verrons que sur le petit axe (OX) ζ est toujours positive. Sur l'axe moyen (OY) elle est négative pour l'ellipsoïde voisin de l'ellipsoïde de révolution et devient positive pour l'ellipsoïde assez allongé. Enfin, sur le grand axe (OZ) ζ est toujours négative. Par conséquent, quel que soit l'ellipsoïde, la pression capillaire tend à le faire approcher de la sphère.

Il est facile de vérifier que pour les ellipsoïdes infiniment minces ou infiniment allongés, les expressions de ζ deviennent infiniment grandes ce qui montre que, si petite que soit la tension superficielle, les figures infiniment minces ou infiniment allongées sont impossibles comme figures d'équilibre. Ce résultat est tout à fait évident, car pour ces figures la courbure moyenne devient infiniment grande en certains points et, si petite que soit la constante de la tension superficielle, la pression capillaire peut devenir aussi grande que l'on voudra.

10° *Ellipsoïde de révolution.* — Pour l'ellipsoïde de révolution il faut poser $R_2 = R_3$ dans toutes les formules précédentes. De cette manière on aura

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon \frac{(R_2^2 + R_1^2) + (R_2^2 - R_1^2) \cos^2 \theta}{R_2^3 [R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}}, \\ l &= 1 : R_2 \sqrt{R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cos^2 \theta}, \\ h_7 &= -\frac{4}{9} \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{2R_1^2 + R_2^2}, \\ M_7 N_7 &= -\frac{2}{9} (R_2^2 - R_1^2)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta), \\ A_7 &= \frac{4\pi}{15} \frac{R_2^4 + 16R_1^2 R_2^2 + 10R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2}, \\ \omega_7 &= \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_7 S_7}{5} = \int_{\rho}^{\infty} \left(\frac{\rho^2 - a^2}{x^2 - a^2} - \frac{\rho^2 - \alpha_1}{x^2 - \alpha_1} \right) \frac{x dx}{(x^2 - b^2) \sqrt{x^2 - \alpha^2}}, \\ a_7 &= -\frac{\varepsilon h_7 I_1'}{4\pi \omega_7 A_7}, \quad a_8 = 0, \end{aligned}$$

et enfin

$$\zeta = -\delta \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{\sqrt{R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cos^2 \theta}},$$

où l'on pose

$$\delta = \frac{f R_1 R_2 h_7 \frac{2}{3} (R_2^2 - R_1^2)^2}{4 \pi \omega_7 \Lambda_7}$$

qui est un petit facteur positif, constant sur l'ellipsoïde. On voit ainsi que ζ est positif, autour de l'axe de rotation et négatif autour de l'équateur. Posant $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on verra que sur le pôle

$$\zeta_p = \frac{2\delta}{R_2}$$

et sur l'équateur

$$\zeta_e = \frac{\delta}{R_1}.$$

La nouvelle figure restant de révolution devient moins aplatie : elle se rapproche de la sphère.

Le rapport

$$\frac{|\zeta_e|}{\zeta_p} = \frac{R_2}{2 R_1}$$

croît avec l'aplatissement de l'ellipsoïde et devient infiniment grand lorsque l'ellipsoïde devient infiniment mince. Il est facile de s'assurer que pour cette figure δ devient infiniment grand. En effet, posant

$$k = \frac{R_2}{R_1},$$

on aura

$$\delta = B \frac{R_1^2 (k^2 - 1)^{\frac{2}{3}} (4k^2 - 1)}{(k^5 - 16k^3 + 10k) \omega_7} \Phi,$$

B étant un facteur numérique et Φ la fonction donnée par la formule (34), nulle pour $k = 1$, et infinie comme k^2 , pour $k = \infty$. On voit ainsi que $\delta = 0$ pour la sphère ($k = 1$) et devient infini pour les ellipsoïdes infiniment plats.

Un calcul absolument analogue donne les mêmes résultats pour un

cylindre elliptique : sous l'action de la pression capillaire, un cylindre elliptique devient moins aplati.

11° *Conclusion.* — Nous avons vu que, quelle que soit la figure ellipsoïdale d'équilibre d'une masse liquide en rotation, la pression capillaire tend à l'arrondir. Cela tient à ce que la pression capillaire est d'autant plus grande que les parties de la figure sont plus saillantes. Par conséquent, il est très probable que la pression capillaire produira le même effet sur une surface quelconque (non ellipsoïdale) et d'autre part, si l'on imagine une pression non capillaire, mais d'autant plus grande que la partie de la figure est plus saillante, nous pouvons nous attendre à ce qu'elle produise le même effet, c'est-à-dire qu'elle tende à arrondir la surface. Par conséquent, on peut s'attendre à ce qu'un effet semblable soit produit par une membrane élastique, tendue à la surface du liquide (ce que j'espère démontrer ultérieurement).

Pour faire application des résultats obtenus, imaginons une planète à l'état encore liquide. Cette planète n'étant pas composée d'un liquide homogène, affectera une figure d'équilibre non ellipsoïdale (comme cela a été montré par M. Hamy dans sa thèse de doctorat). La planète en se refroidissant formera à sa surface une croûte plus ou moins épaisse. Cette croûte, avant de se solidifier complètement, et même solide, restera dans un état plus ou moins élastique et présentera une sorte de membrane élastique tendue à la surface de la planète. Comme nous l'avons vu, une pareille membrane tendra à arrondir notre planète. Et je me demande : ne pourrions-nous pas y voir une des causes qui font que toutes les planètes sont moins aplaties qu'elles ne le devraient être d'après les formules relatives à une masse liquide homogène et sans pression capillaire?

TROISIEME PARTIE.

Figures d'équilibre d'une masse liquide en rotation
sous l'action des seules forces capillaires.

1° *Énoncé du problème.* — Imaginons une masse liquide soumise uniquement à des forces capillaires, qui tourne autour d'un axe fixe (que nous prenons pour axe OZ) avec une vitesse angulaire constante ω , et cherchons les figures d'équilibre que pourra affecter cette masse.

Les seules forces agissant sur les éléments de masse de notre liquide sont les forces centrifuges, dont le potentiel est, en appelant ρ la densité,

$$\frac{\rho\omega^2}{2} (x^2 + y^2).$$

Quant aux forces capillaires, elles ne donneront qu'une pression superficielle, proportionnelle à la courbure moyenne de la surface et qui a, par conséquent, l'expression suivante

$$\alpha = f \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right),$$

f étant la tension superficielle et R, R' les rayons principaux de courbure de la surface. Ceci posé, nous voyons que dans notre cas les conditions d'équilibre sont :

A l'intérieur du liquide,

$$(1) \quad p = \frac{\rho\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + K;$$

à la surface libre,

$$p_0 = \frac{\rho\omega^2}{2} (x_0^2 + y_0^2) + K = f \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + H,$$

p étant la pression dans le sens ordinaire du mot, K une constante et H la pression extérieure constante.

Si nous écrivons la dernière condition sous la forme

$$(2) \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = a(x^2 + y^2) + b,$$

en posant

$$a = \frac{\rho\omega^2}{2f}, \quad b = \frac{K-H}{f},$$

nous aurons une équation différentielle qui déterminera la surface cherchée. Le problème consiste donc dans l'intégration de cette équation.

Il est facile de remarquer, d'après la formule (1), que les surfaces d'égale pression sont des cylindres de révolution autour de l'axe OZ . Par conséquent, les surfaces les plus réalisables sont celles de révolution. C'est de ces surfaces que je m'occuperai au cours de ce Mémoire.

2° *Résolution du problème.* — Comme la surface est de révolution il nous suffira, pour la connaître, de trouver l'équation de sa ligne méridienne.

Posant

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

nous chercherons cette équation sous la forme

$$z = f(r).$$

Nous savons que, pour des surfaces de révolution, un des rayons principaux de courbure se réduit au rayon de courbure de la ligne méridienne et l'autre à la longueur de la normale, tracée jusqu'à la rencontre avec l'axe de rotation. Ainsi l'équation (2) s'écrit

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z'}{r(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} = ar^2 + b.$$

Multipliant par rdr et remarquant que

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{rz'}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{z''r}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z'}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

nous intégrons une première fois et obtenons

$$\frac{r z'}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ar^4}{4} + \frac{br^2}{2} + c$$

et finalement

$$(3) \quad \frac{z'}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ar^3}{4} + \frac{br}{2} + \frac{c}{r},$$

c étant une constante d'intégration.

Désignant par φ l'angle entre la tangente et l'axe Or , nous aurons

$$(4) \quad \text{tang } \varphi = z' = \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{\pm \sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}},$$

$$(5) \quad \sin \varphi = \frac{z'}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ar^3}{4} + \frac{br}{2} + \frac{c}{r} = \frac{1}{4r} (ar^4 + 2br^2 + 4c).$$

On voit que r ne peut varier qu'entre certaines limites. De plus, si la constante c n'est pas nulle, r ne peut jamais s'annuler, ce qui prouve que dans ce cas la ligne méridienne ne rencontre pas l'axe de rotation. La surface n'est pas fermée, ou est engendrée par la rotation d'un contour fermé. Si, au contraire, $c = 0$, r peut s'annuler, la surface coupe l'axe de rotation et le coupe normalement, car d'après (5) $\sin \varphi = 0$ pour $c = 0$ et $r = 0$.

Enfin, l'intégration de l'équation (2) s'achève par une quadrature et la valeur de z est donnée par l'intégrale définie

$$(6) \quad z = \int_{r_0}^r \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{\sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}} dr.$$

Comme le second membre de (6) dépend des intégrales hyperelliptiques, nous analyserons la courbe d'après l'équation différentielle elle-même. Posant pour abrégier l'écriture

$$u = r^2,$$

u étant une nouvelle variable, forcément positive, la formule (6) s'écrira

$$(7) \quad z = \int_{u_0}^u \frac{au^2 + 2bu + 4c}{\sqrt{16u - (au^2 + 2bu + 4c)^2}} \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Considérons maintenant les différents cas qui peuvent se présenter suivant la valeur de la quantité $b^2 - 4ac$.

3° *Premier cas* : $b^2 - 4ac < 0$. — Dans ce cas, le trinôme du numérateur

$$au^2 + 2bu + 4c$$

reste toujours positif. Désignant la fonction sous le radical par $f(u)$

$$f(u) = 16u - (au^2 + 2bu + 4c)^2,$$

on voit facilement que cette fonction a deux et seulement deux racines réelles et positives, à condition que l'on ait

$$1 - bc > 0.$$

Soient u_1 et u_2 ces racines et r_1 et r_2 les valeurs de r leur correspondant. Alors, pour $r_1 < r < r_2$, $f(u)$ sera positive et z sera réel. En dehors de cet intervalle, z devient imaginaire.

Ainsi r_1 et r_2 sont les limites entre lesquelles r varie.

Si au contraire $1 - bc < 0$, $f(u)$ sera toujours négative et nous n'aurons aucune branche réelle de la ligne cherchée. La surface n'existe pas.

Supposons donc que les conditions

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{et} \quad 1 - bc > 0$$

soient vérifiées et considérons la forme de la courbe. Il est évident que notre courbe doit être comprise entre deux droites parallèles à l'axe OZ

$$AA'(r = r_1) \quad \text{et} \quad BB'(r = r_2).$$

Si nous prenons dans la formule (6) $r_0 = r_1$, nous devons commencer la courbe par le point A dont les coordonnées sont $r = r_1$, $z = 0$.

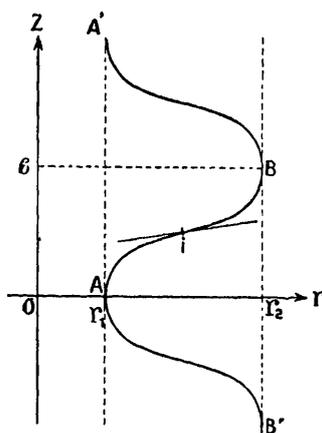
Pour étudier la branche supérieure de la courbe, prenons devant le radical le signe +.

Au point initial, la tangente est verticale. Lorsque r croît de r_1 à r_2 , z est croissante et reste finie. Comme $\tan \varphi$ ne s'annule pas entre r_1 et r_2 , la tangente ne devient jamais horizontale. Il est facile

de voir que $\text{tang } \varphi$, qui est infinie au point A, commence à décroître, atteint son minimum au point d'inflexion i , et croît ensuite jusqu'au point $r = r_2$, où elle redevient infinie.

Désignons le point correspondant de la courbe par la lettre B et

Fig. 5.



l'ordonnée de ce point par OC. Après B, r ne peut pas croître, donc il doit diminuer, et, si nous voulons suivre la courbe, nous devons changer le signe devant le radical, pour ne pas revenir sur nos pas. Par conséquent, nous devons maintenant prendre C pour origine et poser

$$z = \int_{r_2}^{r_1} \frac{ar^3 + 2br^2 + 4c}{-\sqrt{16r^2 - (ar^3 + 2br^2 + 4c)^2}} dr.$$

Alors z croîtra et nous aurons la portion suivante de notre courbe (BA'). Évidemment la tangente sera de nouveau verticale au point A' et nous pourrons continuer indéfiniment notre construction. Nous obtenons ainsi une ligne analogue à l'onduloïde de Plateau. On voit facilement que cette courbe est symétrique par rapport aux perpendiculaires abaissées des points A, B, A', ... sur l'axe de rotation.

Si la fonction f a une racine double, $r_1 = r_2$, les lignes AA' et BB' coïncident; l'onduloïde devient une droite et la surface en question devient un cylindre de révolution. On verra plus loin que cela aura

lieu si la condition suivante est vérifiée :

$$4c(k^2 + 18ab) - (2b^2 + 27a) = 0,$$

où l'on pose

$$k = b^2 - 4ac.$$

4° *Deuxième cas* : $b^2 - 4ac = 0$. — Étudions maintenant le cas où le numérateur

$$ar^4 + 2br^2 + 4c$$

a une racine double, ce qui s'exprime par la condition

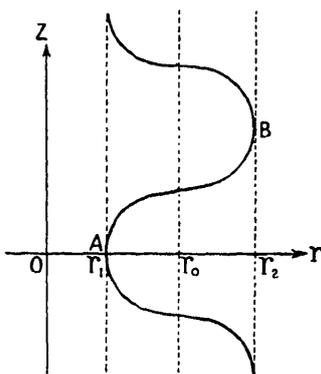
$$b^2 - 4ac = 0.$$

Désignant par r' cette racine double, nous aurons

$$z = \int \frac{a(r^2 - r'^2)^2}{\sqrt{16r^2 - a^2(r^2 - r'^2)^4}} dr.$$

Ensuite, pour que r' soit réelle, il faut avoir $b < 0$. Si $b > 0$, la fonction $a(r^2 - r'^2)$ ne s'annule pas pour $0 < r' < \infty$ et nous tombons sur

Fig. 6.



le cas précédent. Supposons donc que la condition $b < 0$ soit vérifiée. On verra facilement que, dans ce cas, $f(u)$ aura deux racines entre 0 et ∞ et que la racine r' du numérateur se trouvera entre les racines r_1 et r_2 du dénominateur.

Construisons maintenant notre courbe. Elle sera comprise, comme la précédente, entre deux droites parallèles à l'axe OZ et définies par $r = r_1$ et $r = r_2$.

Commençons la ligne par le point A ($r = r_1; z = 0$) où la tangente est verticale, et prenons devant le radical le signe +. Dans ces conditions, z croîtra de $r = r_1$ à $r = r_2$; mais au point $r = r'$, qui est en même temps le point d'inflexion, la tangente devient horizontale. Nous trouvons ainsi une ligne, toujours analogue à l'onduloïde de Plateau, avec la seule différence que la tangente au point d'inflexion sera horizontale.

Notons encore que cette ligne ne peut pas se transformer en une droite, car f ne peut pas avoir une racine double qui, forcément, serait égale à r' .

5° *Troisième cas* : $b^2 - 4ac > 0$. — Considérons maintenant le cas où le numérateur a deux racines distinctes, ce qui aura lieu pour $b^2 - 4ac > 0$.

Désignons ces racines par $u' = r'^2$ et $u'' = r''^2$. Si $c < 0$, ces racines sont de signes différents et le numérateur s'annule une seule fois entre $r = 0$ et $r = \infty$. Si $c > 0$, les racines sont de même signe; mais, pour que ce signe soit positif, il faut avoir $b < 0$.

Supposons d'abord que les conditions

$$b^2 - 4ac > 0, \quad b < 0, \quad c > 0$$

soient vérifiées. Appelant, comme d'habitude,

$$f(u) = 16u - (au^2 + 2bu + 4c)^2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} f'(u) &= 16 - 4(au^2 + 2bu + 4c)(au + b), \\ f''(u) &= -4a(au^2 + 2bu + 4c) - 8(au + b)^2, \\ f'''(u) &= -24a(au + b). \end{aligned}$$

Faisons le Tableau

| u . | 0 . | u' . | $-\frac{b}{a} - \alpha$. | $-\frac{b}{a} = \frac{u' + u''}{2}$. |
|-----------|-------|------------|---|---------------------------------------|
| $f(u)$ | < 0 | $16u' > 0$ | $+16\left(-\frac{b}{a} + \alpha\right) - \frac{4}{9a^2}(b^2 - 5ac)^2$ | $\frac{-16ab - (b^2 - 4ac)^2}{a^2}$ |
| $f'(u)$ | > 0 | $16 > 0$ | $16 - \frac{8}{3}\alpha(b^2 - 5ac)$ | $16 > 0$ |
| $f''(u)$ | < 0 | < 0 | 0 | > 0 |
| $f'''(u)$ | > 0 | > 0 | > 0 | 0 |

| | | | |
|-----------|--|--------------|-----------|
| $u.$ | $-\frac{b}{a} + \alpha.$ | $u''.$ | $\infty.$ |
| $f(u)$ | $16 \left(-\frac{b}{a} + \alpha \right) - \frac{4}{9a^2} (b^2 - 5ac)^2$ | $16 u'' > 0$ | < 0 |
| $f'(u)$ | $16 + \frac{8}{3} \alpha (b^2 - 5ac)$ | $16 > 0$ | < 0 |
| $f''(u)$ | 0 | < 0 | < 0 |
| $f'''(u)$ | < 0 | < 0 | < 0 |

où l'on pose

$$\alpha = \sqrt{\frac{b^2 - 2ac}{3a^2}}$$

et où l'on suppose

$$b^2 - 5ac > 0.$$

Nous voyons que $f(u)$ peut avoir au plus quatre racines et qu'elle en a au moins deux : une entre 0 et u' et l'autre entre u'' et ∞ . Quant aux deux autres, elles ne peuvent exister qu'entre u' et u'' .

Remarquant que $f'(u)$ a son maximum en $\left(-\frac{b}{a} + \alpha\right)$ et son minimum en $\left(-\frac{b}{a} - \alpha\right)$, nous voyons qu'elle ne peut avoir ses deux racines (en plus de celle qui est entre u'' et ∞) que dans l'intervalle $\left(u' \dots -\frac{b}{a}\right)$, et cela à condition que

$$16 - \frac{8}{3} \alpha (b^2 - 5ac) < 0 \quad \text{ou} \quad b^2 > 5ac + \frac{6}{\alpha}.$$

Désignant ces racines par β et γ ($u' < \beta < \gamma < -\frac{b}{a}$), nous voyons que, pour $u = \beta$, la fonction $f(u)$ a son maximum, et pour $u = \gamma$ son minimum. Par conséquent, $f(u)$ aura une racine double pour une certaine valeur de b et ensuite deux racines distinctes : l'une entre β et γ , et l'autre entre γ et $-\frac{b}{a}$.

En résumé nous voyons que, pour $b^2 - 4ac = 0$, le numérateur a une seule racine et le dénominateur en a deux (les deux extrêmes r_1 et r_2). Pour les valeurs positives, mais assez petites de $b^2 - 4ac$, le numérateur a déjà deux racines r' et r'' , mais le dénominateur en a toujours deux (r_2 et r_1) réparties de la manière suivante :

$$0 < r_1 < r' < r'' < r_2 < \infty.$$

Enfin pour a assez grand ou, autrement, pour b assez petit, le dénominateur $f(u)$ aura une racine double et ensuite deux racines distinctes qui seront situées entre r' et r'' . Pour trouver la condition que doivent vérifier a et b pour que $f(u)$ ait une racine double, cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que $f(u)$ et $f'(u)$ aient une racine commune. Dans ce but, cherchons leur commun diviseur par la méthode des divisions successives et égalons à zéro le dernier reste. Le dernier quotient, qui sera justement le commun diviseur, nous donnera la racine double. Effectuant l'opération, on trouve que le dernier quotient est

$$(8) \quad \frac{-k^2}{16a(bk+9a)} \left(ku + \frac{k^3 + b^2k^2 + 33abk + 108a^2}{abk + 9a^2} \right)$$

et que le dernier reste est

$$\frac{(4ack - 3ab)(k^3 + b^2k^2 + 33abk + 108a)}{(abk + 9a^2)^2} + \frac{4(b - ck)}{a}.$$

Par conséquent, la condition cherchée est

$$(4ck + 3b)(k^3 + b^2k^2 + 33abk + 108a^2) + 4(b - ck)(bk + 9a)^2 = 0.$$

Toutes simplifications faites, elle devient

$$(9) \quad 4c(k^2 + 18ab) - (2b^3 + 27a) = 0,$$

ou autrement

$$b = -\frac{4ck^2 + 27a}{64ac - 2k} = -\frac{4c(3a^2\alpha^2 - 2ac)^2 + 27a}{68ac - 6a^2\alpha^2},$$

où nous posons comme avant

$$k = b^2 - 4ac, \quad \alpha = \sqrt{\frac{b^2 - 2ac}{3a^2}}.$$

La condition (9) étant remplie, la fonction $f(u)$ a une racine double, que nous obtenons en égalant à zéro l'expression (8).

Si enfin la vitesse augmente encore, nous aurons

$$b < \frac{4ck + 27a}{64ac - 2k},$$

et la fonction $f(u)$ aura toutes ses quatre racines : une (r_1) entre 0 et r' , deux (r_2 et r_3) entre r' et r'' , et une (r_4) entre r'' et ∞ .

Étudions maintenant la courbure de notre courbe. Comme nous avons

$$\frac{dz}{dr} = \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{\pm \sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}},$$

nous aurons

$$\frac{d^2z}{dr^2} = \pm \frac{16r(3ar^4 + 2br^2 - 4c)}{[16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Quant au choix du signe, nous devons prendre le même signe dans les deux formules. Ainsi, pour la branche ascendante de la courbe, la courbure sera

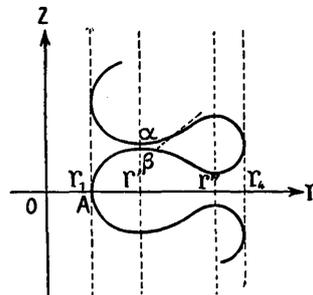
$$(10) \quad \frac{1}{R} = \frac{3ar^4 + 2br^2 - 4c}{4r^2} = \frac{3au^2 + 2bu - 4c}{4u}.$$

Écrivant

$$\frac{1}{R} = \frac{a \left[4r^2 \left(r^2 + \frac{b}{a} \right) - (r^2 - r'^2)(r^2 - r''^2) \right]}{4r^2},$$

et remarquant que le trinome $3ar^4 + 2br^2 - 4c$ a pour $c > 0$ toujours deux racines réelles mais de signes contraires, nous voyons que la courbe ne peut avoir qu'un point d'inflexion et que, si elle l'a, il se trouve nécessairement entre r' et r'' .

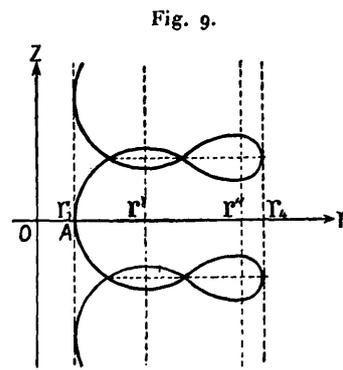
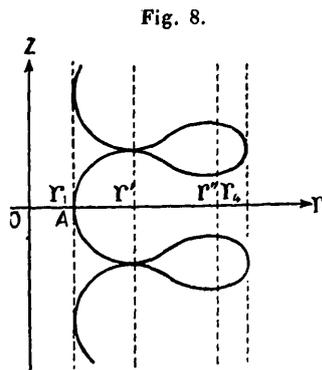
Fig. 7.



Maintenant, nous pouvons construire la ligne méridienne. Supposons d'abord que $b^2 - 4ac$ soit assez petit pour que $f(u)$ n'ait que deux racines extrêmes r_2 et r_4 . Partons comme toujours du point A

($r = r_1; z = 0$), où la tangente est verticale, et prenons devant le radical le signe $+$. A partir de ce point z croît jusqu'à $r = r'$, où la tangente devient horizontale et où z a son maximum. A partir de ce point $\frac{dz}{dr}$ change de signe, z décroît jusqu'au point $r = r''$, où la tangente est de nouveau horizontale et où z a son minimum. Dans ce point ($r = r''$), $\frac{dz}{dr}$ change encore une fois de signe et z croît jusqu'à $r = r_4$, où la tangente devient verticale. Ensuite faisons décroître r de r_4 à r_1 , et, pour ne pas retourner sur nos pas, changeons le signe devant le radical. Alors z croîtra de r_4 à r'' , où il aura son maximum, puis il décroîtra de r'' à r' , où il aura son minimum. Enfin, il croîtra de r' à r_1 , où la tangente sera de nouveau verticale. Là nous changeons de nouveau le signe devant le radical et répétons indéfiniment le même raisonnement. La figure 7 représente la ligne en question.

Si b décroît, le minimum en α et le maximum en β s'accroissent, et, pour une certaine valeur de b , notre courbe a pour $r = r'$ un point double avec une seule tangente horizontale (fig. 8). Ensuite, le minimum en α devient plus petit que le maximum en β et les deux branches de la courbe se coupent et donnent deux points doubles



avec deux tangentes symétriques par rapport à l'horizontale (fig. 9). Ensuite, lorsqu'on aura

$$b^2 = -\frac{4ck^2 + 27a}{64ac - 2k},$$

$f(u)$ aura une racine double. La tangente sera verticale en ce

point et la courbe prendra la forme suivante représentée sur la figure 10.

Et enfin, si b diminue encore, $f(u)$ aura toutes ses quatre racines et la courbe ne sera plus d'un seul tenant. Entre r_2 et r_3 $f(u)$ sera

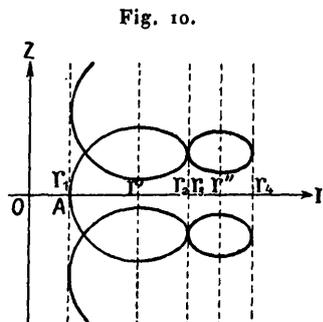


Fig. 10.

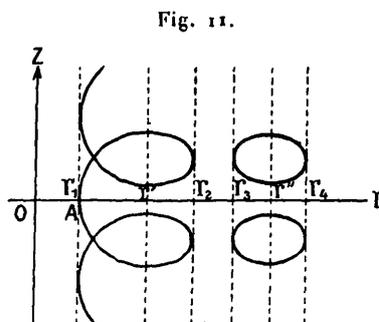


Fig. 11.

négative, par conséquent z sera imaginaire et la courbe sera composée de deux parties distinctes (fig. 11).

La racine de $\frac{1}{R}$ tombe entre r_2 et r_3 et la courbe n'a pas de points d'inflexion.

6° Cas de $c < 0$. — Supposons maintenant $c < 0$. Dans ce cas, dans l'expression de z ,

$$z = \int_{r_0}^{r'} \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{\pm \sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}} dr,$$

le numérateur a toujours une et unique racine positive r' comprise entre deux racines du dénominateur r_1 et r_2 .

La formule (10) nous montre encore que la courbe peut avoir deux points d'inflexion si $b < 0$ et n'en a pas du tout pour $b \geq 0$. Nous pouvons remarquer encore que si la courbe a des points d'inflexion, les abscisses de ces points sont plus petites que r' . En effet, les abscisses des points d'inflexion sont

$$r_i^2 = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + \frac{4c}{3a}},$$

tandis que

$$r'^2 = -\frac{b}{a} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}.$$

Pour $b > 0$, $f'''(u)$ n'a pas de racines, par conséquent $f(u)$ a au plus trois racines et, comme elle doit en avoir un nombre pair, elle en a exactement deux : r_1 et r_4 .

Quant au numérateur $ar^4 + 2br^2 + 4c$, il a une et une seule racine réelle et positive, qui se trouve entre r_1 et r_4 . Désignant cette racine par r' , nous voyons que pour $r < r'$ le numérateur est négatif et que, si nous voulons commencer par le point A ($r = r_1$; $z = 0$) et avoir z croissant, nous devons prendre devant le radical le signe $-$. Nous devons prendre le même signe dans la formule (10) et écrire pour la courbure

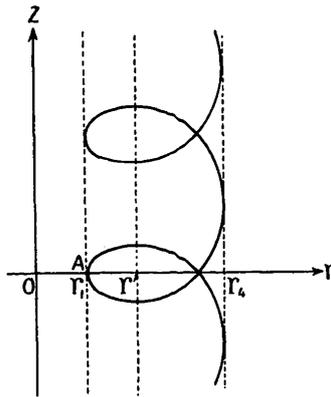
$$\frac{1}{R} = - \frac{3ar^4 + 2br^2 - 4c}{4r^2}.$$

On voit ainsi que la ligne n'a pas de point d'inflexion, mais que la valeur absolue de la courbure a un maximum pour r vérifiant l'équation

$$(11) \quad 3ar^4 + 4c = 0.$$

Pour $b < 0$, ce minimum peut devenir un point de courbure nulle

Fig. 12.



pour $b^2 + 12ac = 0$, et enfin il peut produire deux points d'inflexion dont les abscisses, comme nous l'avons vu, sont toujours plus petites que r' .

Par conséquent, pour a assez petit, la courbure sera toujours

décroissante (en valeur absolue) lorsque r variera de r_4 à r_1 et nous aurons la courbe analogue au nodoïde de Plateau (*fig. 12*).

Pour a suffisamment grand, la racine de l'équation (11) peut entrer dans l'intervalle $(r_1 \dots r_4)$ et passer successivement par toutes

Fig. 13.

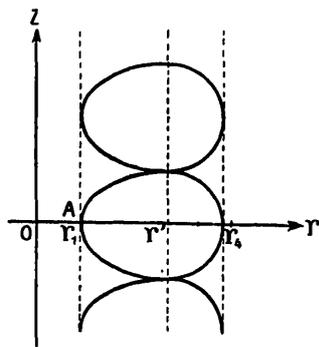
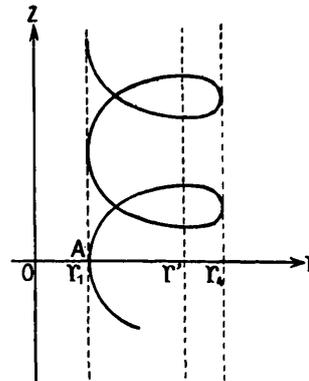


Fig. 14.



les valeurs de r_4 à r_1 . La courbure de la courbe aura alors un minimum entre r_1 et r_4 et enfin, lorsque la racine de (11) deviendra plus petite que r_1 , la courbure de la courbe sera croissante dans tout

Fig. 15.

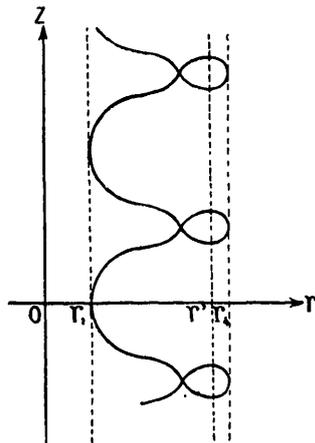
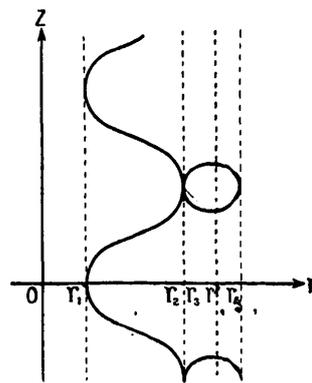


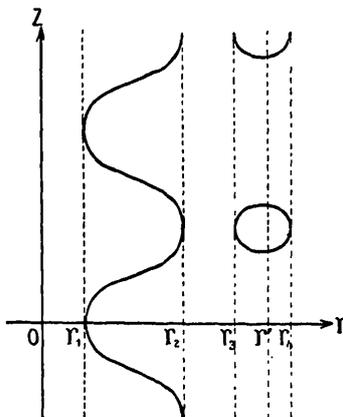
Fig. 16.



l'intervalle $(r_1 \dots r_4)$. La courbe affectera la figure 14 en passant, selon toute la probabilité, par la figure 13.

Si encore, pendant que la racine de (11) se trouve dans l'intervalle $(r_1 \dots r_4)$, la condition $b^2 + 12ac > 0$ est vérifiée et la fonction $f(u)$ a une racine double, la courbe subira les transformations suivantes (fig. 15 et 16).

Fig. 17.



Et enfin, lorsque $f(u)$ aura toutes ces quatre racines, la courbe donnera naissance à un anneau (fig. 17).

7° *Les surfaces fermées.* — Un cas tout particulier se présente lorsque nous avons $c = 0$.

Dans ce cas, les formules (5) et (6) deviennent

$$(12) \quad \sin \varphi = \frac{ar^3}{4} + \frac{br}{2},$$

$$(13) \quad z = \int_0^r \frac{(ar^3 + 2br) dr}{\sqrt{16 - (ar^3 + 2br)^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{r^2} \frac{(au + 2b) du}{\sqrt{16 - u(au + 2b)^2}}.$$

Nous avons déjà vu que dans ces conditions r peut s'annuler, la surface peut couper l'axe de rotation et, si elle le coupe, elle le coupe normalement.

Les résultats sont différents suivant que nous aurons

$$b > 0 \quad \text{ou} \quad b < 0.$$

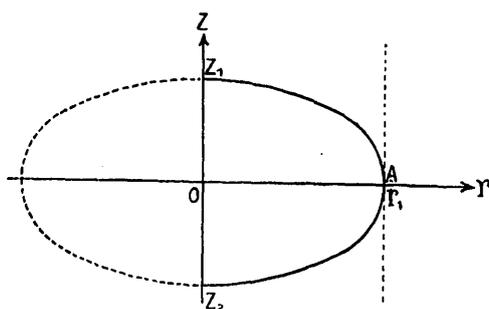
8° *Cas de $b > 0$.* — Dans ce cas, le numérateur de la formule (13) ne s'annule que pour $r = 0$ et le dénominateur a une seule racine

réelle et positive que nous désignerons par r_1 . Comme le dénominateur n'est réel que pour $0 \leq r \leq r_1$, toute la courbe sera comprise entre l'axe de rotation et la droite $r = r_1$.

Cela posé, la courbe qui est du genre de l'ellipse est facile à construire. Si nous commençons par le point A ($r = r_1; z = 0$), et si nous prenons le signe $-$ devant le radical, nous obtenons la partie supérieure de la courbe qui coupe l'axe au point $r = 0, z = z_1$.

Partant du même point, mais en prenant devant le radical le signe $+$

Fig. 18.



et en faisant décroître r de r_1 à 0 , nous obtenons la partie inférieure de la courbe qui coupe l'axe de rotation au point $z = z_2$. Il est facile de voir que la courbe est symétrique par rapport à l'axe Or et que, par conséquent, $z_2 = -z_1$.

Nous pouvons obtenir une infinité de courbes identiques à la précédente et se touchant mutuellement sur l'axe de rotation, en prenant pour point de départ les points z_1 et z_2 et en prenant les signes convenables devant le radical. En faisant tourner ces courbes, nous aurons une infinité de surfaces pareilles, analogues à l'ellipsoïde de révolution et se touchant mutuellement sur l'axe de rotation. Si nous considérons une masse liquide limitée, nous devons prendre une de ces surfaces.

9° Cas de $b < 0$. — Pour $b < 0$ le numérateur s'annule, non seulement pour $r = 0$, mais encore pour

$$\sqrt{\frac{-2b}{a}} = r',$$

tandis que le dénominateur peut avoir une ou deux racines (dont une double) ou enfin, trois racines distinctes. Il est facile de voir que, dans ce dernier cas, les trois racines sont réparties de la manière suivante :

$$0 < r_1^2 < -\frac{2}{3} \frac{b}{a} < r_2^2 < -\frac{2b}{a} = r'^2 < r_3 < \infty.$$

La formule (9), dans laquelle on fait $c = 0$, nous donne la condition nécessaire et suffisante pour que le dénominateur ait une racine double

$$2b^3 + 27a = 0.$$

Enfin, pour

$$2b^3 + 27a < 0,$$

nous aurons les trois racines.

Faisant $c = 0$, dans la formule (10), nous aurons l'expression suivante pour la courbure de notre courbe

$$\frac{1}{R} = \frac{3ar^2 + 2b}{4}.$$

Sur l'axe de rotation cette courbure se réduit à $\frac{b}{2}$. Par conséquent pour $b > 0$, la courbe n'a pas de point d'inflexion, pour $b = 0$, la

Fig. 19.

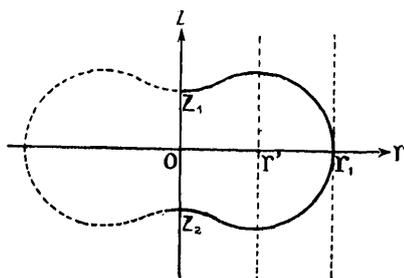
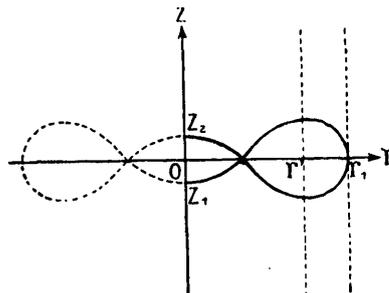


Fig. 20.



courbure sur l'axe devient nulle et pour $b < 0$, nous aurons un point d'inflexion pour $r = \sqrt{\frac{-2b}{3a}}$ et le changement de signe de la courbure sur l'axe de rotation. Ainsi, la surface est convexe pour $b > 0$, et a des cavités aux pôles pour $b < 0$ (fig. 19).

Lorsque la vitesse croît, ces cavités s'accroissent, les points z_1 et z_2 se rapprochent et à un certain moment se touchent au point O. La courbe y aura un point double avec une seule tangente horizontale. Si la vitesse augmente encore, les cavités s'approfondissent, z_1 devient négatif, z_2 positif, le point double se déplace à droite. Les deux branches de la courbe qui se coupent en ce point auront maintenant deux tangentes différentes (fig. 20).

Si la vitesse augmente encore jusqu'à ce qu'on ait $2b^3 + 27a = 0$, la fonction du dénominateur a une racine double, et ce point double coïncidera avec le point d'inflexion. Les deux tangentes deviennent verticales et coïncident (fig. 21).

Enfin pour $2b^3 + 27a < 0$ le dénominateur aura toutes ses trois

Fig. 21.

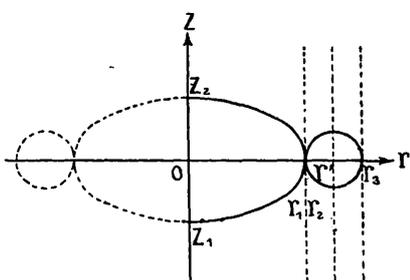
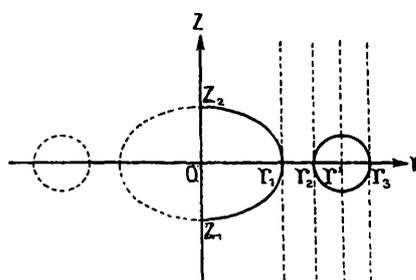


Fig. 22.



racines r_1, r_2, r_3 . Pour construire la courbe, il suffit de remarquer que pour $r_1 < r < r_2$, z devient imaginaire et que, par conséquent, la courbe n'est plus d'un seul tenant. Elle est composée de deux parties distinctes : l'une comprise entre 0 et r_1 et l'autre entre r_2 et r_3 . Comme l'abscisse du point d'inflexion tombe entre r_1 et r_2 , la courbe n'a pas de point d'inflexion. Nous la traçons en tenant compte de ce que pour $r = r_1, r = r_2$ et $r = r_3$ la tangente est verticale et pour $r = 0$ et $r = r'$ elle est horizontale et nous obtenons la courbe représentée sur la figure 22.

La surface engendrée par la rotation de cette courbe sera composée d'un corps central analogue à l'ellipsoïde de révolution et d'un anneau autour.

10° *Intégration à l'aide des fonctions elliptiques.* — L'inté-

grale (13) est une intégrale elliptique et peut être ramenée facilement à la forme normale de Weierstrass par la substitution classique

$$u = my + n,$$

où l'on pose

$$m^3 = -\frac{4}{a^2},$$

$$n = -\frac{4b}{3a}.$$

Posant ensuite

$$g_2 = 3a^2mn^2 + 8abmn + 4b^2m = -\frac{4}{3}mb^2,$$

$$g_3 = a^2n^3 + 4abn^2 + 4b^2n - 16 = -16\left(\frac{b^3}{a} + 1\right),$$

nous ramenons notre intégrale à la forme définitive

$$z = \frac{m}{2} \int \frac{amy + \frac{2}{3}b}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}} dy.$$

Enfin, si nous prenons

$$y = p\nu,$$

nous aurons

$$z = \frac{m}{2} \int \left(amp\nu + \frac{2}{3}b \right) d\nu = -\frac{am^2}{2} \zeta\nu + \frac{mb}{3} \nu + \text{const.},$$

$$r^2 = u = mp\nu + \frac{4b}{3a}.$$

Ces deux formules nous permettent de calculer r et z en fonctions uniformes d'un seul paramètre ν et d'effectuer ainsi la construction de la courbe.

Si nous voulons que le volume reste constant, a et b doivent vérifier la condition

$$\int_0^{r_1} \pi r^2 dz = \frac{m}{2} \int \left(amp\nu + \frac{2}{3}b \right) \left(mp\nu + \frac{4b}{3a} \right) d\nu = \text{const.}$$

Résumé. — Si nous faisons $a = 0$ dans toutes nos formules, nous aurons les figures d'équilibre statique correspondant à chacune de nos séries des figures d'équilibre relatif. D'après les travaux de

Plateau, ces figures d'équilibre statique sont : la sphère (pour $c = 0$), le nodoïde (pour $b > 0, c < 0$), le cylindre et l'onduloïde (pour $b > 0, c > 0$) et le caténoïde (pour $b = 0, c > 0$) (ce dernier ne joue aucun rôle particulier). Considérant ces figures comme figures de départ, je crois avoir obtenu les résultats suivants :

1° La sphère, en tournant de plus en plus vite, commence à s'aplatir, ensuite pour $b < 0$, il se forme des cavités aux pôles qui, en s'accroissant se rencontrent et forment un trou le long de l'axe. La figure devient annulaire, mais comme l'arête ne peut pas exister, cet anneau change brusquement de forme pour affecter la figure de l'anneau à deux tangentes verticales (*fig.* 22). Si la vitesse croît encore, l'anneau se modifie en s'élargissant et s'amincissant.

2° Un nodoïde se transforme d'abord en une figure analogue. Pour la vitesse angulaire assez petite, il affecte la figure 12 et si la vitesse croît, passe consécutivement par les figures 13 et 14, et même peut passer par les figures 15, 16 et 17 et donner naissance à un anneau. Il faut distinguer quelle partie de la surface limitait au début le liquide. La partie convexe du nodoïde se transforme en la partie convexe des figures 12, 13, 14, 15, 16 et 17 et peut donner naissance à un anneau. La partie concave reste concave. Si le liquide remplit le nœud, il y reste et définitivement se transforme en le nœud de la figure 14 et peut enfin donner naissance à un anneau libre.

3° Pour le cylindre, il est clair qu'il est une figure d'équilibre pour n'importe quelle vitesse si la somme de la pression extérieure et de la pression capillaire est suffisamment grande.

4° Quant à l'onduloïde, pour une vitesse assez petite, la figure conserve son genre (*fig.* 5) et cela jusqu'au moment où b , passant par zéro, devient négatif et assez petit pour avoir $b^2 - 4ac = 0$. En ce moment, le liquide affecte la forme de la figure 6. Si la vitesse croît toujours, b décroît encore et le liquide affecte les formes des figures 7 et 8. Mais ensuite la figure 9 devient impossible, car la partie entre les points doubles ne peut pas être remplie de liquide. Alors la figure se rompt suivant la circonférence tracée par le point double et l'anneau se détache. Une fois détaché l'anneau prend immédiatement la figure de l'anneau libre avec $c = 0$.

Quant au reste du liquide, la valeur de c change brusquement pour lui, il prend la forme de la figure 5 et le jeu recommence.

Ces dernières transformations présentent un intérêt tout particulier, parce qu'elles représentent le cas de la fameuse expérience de Plateau, qui devait illustrer l'hypothèse de Laplace sur la formation des corps célestes.

En effet, par le seul fait d'introduction d'une tige métallique, servant à faire tourner la sphère d'huile, Plateau transforma la sphère en une partie de l'onduloïde.

Par conséquent, l'anneau qu'il a obtenu, provenait, non pas d'une sphère libre, mais d'une masse liquide indéfinie. Une sphère libre se serait transformée en un seul anneau sans masse centrale.

Ainsi, une partie des résultats que j'ai obtenus se trouve déjà vérifiée expérimentalement. Quant aux autres résultats, j'espère les vérifier prochainement.

