JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE DUHEM

Note sur le problème général de l'Électrodynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 99-103.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__99_0>

Note sur le problème général de l'Électrodynamique;

PAR PIERRE **DUHEM**.

Deux erreurs se sont glissées dans notre Mémoire intitulé : *Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles* (¹). L'une est une inadvertance qui ne change aucune conclusion; l'autre, au contraire, exige que deux de nos conclusions soient restreintes au cas où le système ne contient qu'un seul corps homogène.

La première de ces erreurs consiste dans l'oubli du facteur $\frac{a}{\sqrt{2}}$ au second membre de l'égalité (30) et de celle qui la précède immédiatement; il en résulte que, dans toutes les équations qui, au Chapitre II, viennent après celle-là, et dans nombre d'équations des Chapitres IV et V, on doit remplacer le facteur $a\sqrt{2}$ par le facteur a^2. Cette correction, nous le répétons, n'altère aucune des propositions que nous avons énoncées.

La seconde erreur s'est introduite dans l'établissement de l'égalité (47). Pour que cette égalité pût se tirer de celle qui la précède, dans le cas où le système est formé de plusieurs corps séparément homogènes, il faudrait que, à la surface de séparation de deux tels corps, $\frac{\partial U}{\partial t}$ demeurât continu; or c'est ce qui n'a pas lieu. L'égalité (35) donne, en effet,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

De même que la fonction potentielle W, les quantités $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ demeurent continues à la traversée de la surface considérée; mais il n'en est pas de même de ρ et de K', en sorte qu'en général cette surface est, pour $\frac{\partial U}{\partial t}$, une surface de discontinuité.

(¹) *Journal de Mathématiques*, 6ᵉ série, t. X, 1914, pp. 347 et suiv.

L'égalité (47) doit donc être restreinte au cas où le système renferme un seul corps homogène; partant, il en est de même des conséquences qu'on en déduit, au n° **17** et au n° **19**, touchant la détermination de la fonction W et touchant la stabilité de l'équilibre électrostatique.

Touchant la stabilité de l'équilibre électrostatique, nous n'avons pas trouvé, jusqu'ici, de moyen propre à lever cette restriction; mais la démonstration suivante nous paraît la pouvoir lever en ce qui concerne l'absence d'ambiguïté dans la détermination de la fonction W.

Écrivons l'équation (36), en tenant compte de la définition (35) de la fonction U et de la correction indiquée au début de la présente Note; elle deviendra

$$(139)\qquad \Delta\left(D'\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}W\right)-2\pi a^2 k\left(K'\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)=0.$$

Multiplions-la par $\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi$, et intégrons le résultat pour le volume entier du système; nous trouvons

$$(140)\qquad \begin{aligned}&\int\frac{\partial W}{\partial t}\Delta\left(D'\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}W\right)d\varpi\\ &\quad-2\pi a^2 k\int K'\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}d\varpi-\pi a^2 k\frac{d}{dt}\int\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi=0.\end{aligned}$$

Si S_{12} est la surface de contact de deux corps distincts, 1 et 2, et Σ la surface terminale du système, on a, *en remarquant que* $\frac{\partial W}{\partial t}$ *est continu au travers de la surface* S_{12},

$$(141)\qquad \begin{aligned}&\int\frac{\partial W}{\partial t}\Delta\left(D'\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}W\right)d\varpi\\ &=-\int\left(D'\frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial N}\right)\frac{\partial W}{\partial t}d\Sigma\\ &\quad-\int\left(D'_1\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\frac{\partial W}{\partial n_2}+D'_2\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\frac{\partial W}{\partial n_2}\right)\frac{\partial W}{\partial t}dS_{12}\\ &\quad-\int D'\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi\\ &\quad-2\pi\varepsilon'\frac{d}{dt}\int\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.\end{aligned}$$

Mais, en tout point de la surface S_{12}, l'égalité (37) peut s'écrire :

$$(142)\qquad D'_1 \frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1}\frac{\partial W}{\partial n_1} = D'_2 \frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2}\frac{\partial W}{\partial n_2}.$$

Si nous posons

$$(143)\quad H = \int \frac{1}{\rho}\left\{2\pi\varepsilon'\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] + \pi a^2 k\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right\} d\varpi,$$

$$(144)\qquad J = \int D'\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi,$$

les égalités (140), (141) et (142) nous permettront d'écrire :

$$(145)\quad 2\pi a^2 k \int K' \frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\, d\varpi = -J - \frac{dH}{dt} - \int\left(D' \frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial N}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\, d\Sigma.$$

Supposons qu'on donne :

1° A tout instant, en tout point de la surface Σ, soit W, soit $\frac{\partial W}{\partial N}$;

2° A l'instant initial, en tout point du système, W, $\frac{\partial W}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Demandons-nous si W est alors déterminé sans ambiguïté.

Supposons qu'on en puisse donner deux déterminations distinctes, W', W'', et posons

$$(146)\qquad W = W'' - W'.$$

W vérifiera encore l'égalité (145). Mais alors, on aura :

1° A l'instant initial, en tout point du système,

$$(147)\qquad W = 0,\qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0;$$

2° A tout instant, en tout point de la surface Σ,

$$(148)\qquad \text{soit}\quad W = 0,\qquad \text{soit}\quad \frac{\partial W}{\partial N} = 0.$$

En vertu de ces égalités (148), l'égalité (145) deviendra

$$(149)\qquad 2\pi a^2 k \int K' \frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\, d\varpi = -J - \frac{dH}{dt}.$$

En chaque point du système, on peut écrire, en vertu des égalités (147) et de la formule de Mac Laurin,

$$\frac{\partial W(t)}{\partial t} = \frac{t^2}{2}\frac{\partial^3 W(\theta)}{\partial \theta^3},$$

θ étant un instant compris entre o et t, instant qui peut, d'ailleurs, varier d'un point à l'autre du système.

L'égalité (149) devient donc

$$\pi a^2 k t^2 \int K' \frac{\partial^3 W(\theta)}{\partial \theta^3}\frac{\partial^3 W(t)}{\partial t^3} d\varpi = -J - \frac{dH}{dt}. \tag{150}$$

Nous allons maintenant soumettre W *à la* RESTRICTION *suivante :*

On peut déterminer une valeur assez petite de τ, pour qu'entre $t = 0$ et $t = \tau$, $\frac{\partial^3 W(t)}{\partial t^3}$ n'éprouve de changement de signe en aucun point du système.

En un point donné, mais quelconque, du système, entre l'instant o et l'instant t, toutes les valeurs de $\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}$ qui ne sont pas nulles, sont de même signe; ce signe peut, d'ailleurs, changer d'un point à l'autre du système.

Considérons un instant t compris entre o et τ; θ est aussi compris entre o et τ; si donc les quantités $\frac{\partial^3 W(\theta)}{\partial \theta^3}$, $\frac{\partial^3 W(t)}{\partial t^3}$ sont, toutes deux, différentes de o, elles sont de même signe. A un tel instant t, le premier membre de l'égalité (150) est assurément nul ou positif.

D'après l'égalité (144), J ne peut être que nul ou positif.

Il en est de même de H, d'après l'égalité (143). Cette égalité, jointe aux égalités (147), montre, d'ailleurs, que H est nul à l'instant initial; si cette quantité n'est pas constamment nulle, elle commence par croître; on peut donc trouver une valeur assez petite de τ' pour que, entre $t = 0$ et $t = \tau'$, $\frac{dH}{dt}$ soit constamment nul ou positif. Ainsi, à tout instant compris entre $t = 0$ et $t = \tau'$, le second membre de l'égalité (150) est nul ou négatif.

Soit T la plus petite des deux quantités τ et τ'. A tout instant compris entre $t = 0$ et $t = T$, le premier membre de l'égalité (150) est nul ou positif et le second est nul ou négatif; l'égalité (150) ne peut donc être vraie, à moins que ses deux membres ne demeurent constamment nuls entre $t = 0$ et $t = T$.

Pour cela, il faut, en particulier, que J demeure constamment nul durant ce laps de temps, ce qui exige, en vertu de l'égalité (144),

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t} = 0.$$

Mais $\frac{\partial W}{\partial t}$ est supposé continu dans toute l'étendue du système; ces égalités exigent donc qu'à un même instant quelconque, compris entre $t = 0$ et $t = T$, $\frac{\partial W}{\partial t}$ ait même valeur dans tout le système. Or, sur la surface Σ, en vertu des égalités (148), W et, par conséquent, $\frac{\partial W}{\partial t}$ sont constamment nuls. Partant, en tout point du système et à tout instant compris entre $t = 0$ et $t = T$, on a

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

W est, en chaque point, indépendant du temps, et donc nul, puisque, d'après les égalités (147), sa valeur initiale est 0.

On peut ainsi trouver une durée finie T telle que les deux solutions W′ et W″ demeurent identiques entre elles entre $t = 0$ et $t = T$. Mais, en reprenant le même raisonnement à partir de $t = T$, on trouvera qu'elles demeurent identiques entre elles jusqu'à $t = 2T$, et ainsi de suite; elles ne peuvent donc jamais différer l'une de l'autre.

Sur la démonstration donnée au n° **17** de notre Mémoire : *Le problème fondamental de l'Électrodynamique*, cette démonstration présente un avantage ; elle n'est pas bornée au cas d'un corps homogène unique; mais elle a l'inconvénient de soumettre les propriétés de $\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}$ à une restriction que, peut-être, certaines intégrales ne vérifieraient pas.