

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

K. BOHLIN

**Sur le développement des intégrales du problème des
trois corps (première partie)**

Journal de mathématiques pures et appliquées 7^e série, tome 1 (1915), p. 367-400.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__367_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le développement des intégrales
du problème des trois corps.*

(PREMIÈRE PARTIE.)

PAR K. BOHLIN.

Arrivé à l'achèvement des recherches poursuivies dans plusieurs Mémoires et Notes insérés dans les *Annales de l'Observatoire* et dans les *Archives de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾, il me sera permis de donner, dans les pages suivantes, quelques renseignements, d'une part sur l'orbite de v. Hærdtl, soigneusement recalculée par M. S. Thye, et, d'autre part, sur la manière de déduire de l'orbite ainsi déterminée les expressions analytiques qui font représenter le mouvement dans le problème des trois corps dont il s'agit.

I. On sait qu'il s'agit, dans le problème considéré, du mouvement d'un corps C de masse nulle, attiré par deux autres corps A, B, dont chacun décrit autour de l'autre une orbite circulaire. En prenant pour origine des coordonnées le centre de gravité des corps A et B, et en désignant par r le rayon vecteur du corps C et par ν la longitude du rayon vecteur r par rapport à la situation de la ligne AB à l'origine du mouvement, par x, y les coordonnées rectilignes correspondantes, par ω la longitude du rayon vecteur AB ($r_1 = 1$) par rapport à

⁽¹⁾ Voir en particulier : *Développement des intégrales du problème des trois corps* (*Arkiv för Math. Astron. Physik, Vet. Akad. Stockholm*. Première Partie : Bd. VIII, n° 35. Deuxième Partie : Bd. IX, n° 23. Troisième Partie : Bd. IX, n° 34. Quatrième Partie : Bd. X, n° 8. Cinquième Partie : Bd. X, n° 26. Sixième Partie, Bd. X, n° 33).

la même direction initiale, M. Thye a calculé les valeurs de ces coordonnées, s'accordant, en effet, au moins à cinq décimales, avec le calcul de v. Hærdtl⁽¹⁾. Voici le Tableau des valeurs obtenues par M. Thye. L'unité du temps fut choisie de manière que⁽²⁾

$$t = \frac{C_0}{2,5} = \frac{2W}{2,5}.$$

TABLE I.

| w . | v . | $\log r$. | x . | y . |
|-------|---------------|------------|------------|------------|
| 0,0 | 0. 0. 0,00 | 0,3010300 | +2,0000000 | +0,0000000 |
| 2,5 | 3. 44. 57,01 | 3010444 | +1,9957791 | 1307808 |
| 5,0 | 7. 29. 36,17 | 3010755 | 9831276 | 2608507 |
| 7,5 | 11. 13. 39,89 | 3011313 | 9621797 | 3895097 |
| 10,0 | 14. 56. 51,13 | 3012073 | 9331140 | 5160796 |
| 12,5 | 18. 38. 53,66 | 3013012 | 8961830 | 6399138 |
| 15,0 | 22. 19. 32,23 | 3014096 | 8516979 | 7604041 |
| 17,5 | 25. 58. 32,83 | 3015285 | 8000234 | 8769888 |
| 20,0 | 29. 35. 42,77 | 3016596 | 7415675 | +0,9891556 |
| 22,5 | 33. 10. 50,74 | 3017751 | 6767705 | +1,0964442 |
| 25,0 | 36. 43. 47,11 | 3018881 | 6061006 | 1984485 |
| 27,5 | 40. 14. 23,66 | 3019822 | 5300438 | 2948151 |
| 30,0 | 43. 42. 33,87 | 3020465 | 4490952 | 3852409 |
| 32,5 | 47. 8. 12,69 | 3020685 | 3637561 | 4694711 |
| 35,0 | 50. 31. 16,58 | 3020340 | 2745265 | 5472943 |
| 37,5 | 53. 51. 43,42 | 3019274 | 1819023 | 6185401 |
| 40,0 | 57. 9. 32,64 | 3017313 | +1,0863700 | 6830744 |
| 42,5 | 60. 24. 44,75 | 3014269 | +0,9884093 | 7407942 |
| 45,0 | 63. 37. 21,69 | 3009935 | 8884862 | 7916250 |
| 47,5 | 66. 47. 26,32 | 3004087 | 7870572 | 8355144 |
| 50,0 | 69. 55. 2,73 | 2996484 | 6845668 | 8724317 |
| 52,5 | 73. 0. 16,01 | 2986866 | 5814490 | 9023627 |
| 55,0 | 76. 3. 12,13 | 2974948 | 4781280 | 9255053 |
| 57,5 | 79. 3. 57,79 | 2960425 | 3750228 | 9412705 |
| 60,0 | 82. 2. 40,64 | 2942962 | 2725448 | 9502775 |
| 62,5 | 84. 59. 28,97 | 0,2922193 | +0,1711044 | +1,9523505 |

(¹) E. v. HÆRDTL. *Skizzen zu einem speciellen Falle des Problems der drei Körper* (*Abh. d. bayer. Akad. d. Wissensch. II. Classe. Bd. XVII. III. Abth., München, 1890*). Dans le Mémoire de v. Hærdtl, les coordonnées x, y furent désignées par x_0, y_0 (*loc. cit.*, p. 45).

(²) $t = 0$ correspond à $w = 0$ et $t = 95,5$ à $w = 119^{\circ}.3750$.

TABLE I (suite).

| $w.$ | $v.$ | $\log r.$ | $x.$ | $y.$ |
|---------|--------------|-----------|------------|------------|
| 65,0 | 87.54.31,70 | 0,2897715 | +0,0711127 | +1,9475209 |
| 67,5 | 90.47.58,39 | 2869078 | -0,0270158 | 9358226 |
| 70,0 | 93.39.59,24 | 2835779 | 1228586 | 9172912 |
| 72,5 | 96.30.45,00 | 2797250 | 2159805 | 8919668 |
| 75,0 | 99.20.26,64 | 2752839 | 3059263 | 8598885 |
| 77,5 | 102. 9.15,41 | 2701793 | 3922147 | 8210987 |
| 80,0 | 104.57.23,08 | 2643234 | 4743344 | 7756429 |
| 82,5 | 107.45. 0,36 | 2576119 | 5517227 | 7235708 |
| 85,0 | 110.32.18,28 | 2499197 | 6237678 | 6649390 |
| 87,5 | 113.19.25,50 | 2410947 | 6897774 | 5998192 |
| 90,0 | 116. 6.28,12 | 2309486 | 7489660 | 5283025 |
| 92,5 | 118.53.26,70 | 2192449 | 8004217 | 4505147 |
| 95,0 | 121.40.12,45 | 2056803 | 8430683 | 3666371 |
| 96,25 | 123. 3.23,18 | 1980811 | 8606922 | 3224959 |
| 97,50 | 124.26.19,00 | 1898589 | 8756064 | 2769447 |
| 98,75 | 125.48.51,55 | 1809431 | 8876016 | 2300419 |
| 100,0 | 127.10.49,01 | 1712512 | 8964411 | 1818619 |
| 101,25 | 128.31.54,80 | 1606862 | 9018607 | 1325000 |
| 102,50 | 129.51.45,49 | 1491331 | 9035595 | 0820782 |
| 103,75 | 131. 9.48,06 | 1364557 | 9011952 | +1,0307567 |
| 105,00 | 132.25.15,51 | 1224912 | 8943756 | +0,9787464 |
| 106,25 | 133.37. 0,59 | 1070451 | 8826503 | 9263290 |
| 107,50 | 134.43.25,82 | 0898857 | 8655004 | 8738842 |
| 108,75 | 135.42. 8,14 | 0707404 | 8423328 | 8219334 |
| 110,00 | 136.29.34,33 | 0492982 | 8124733 | 7712008 |
| 110,625 | 136.47.29,44 | 0376125 | 7948056 | 7465937 |
| 111,250 | 137. 0.23,83 | 0252305 | 7751838 | 7227032 |
| 111,875 | 137. 7.11,32 | 0,0121188 | 7535143 | 6997228 |
| 112,500 | 137. 6.29,92 | 9,9982564 | 7297062 | 6778879 |
| 113,125 | 136.56.39,52 | 9836434 | 7036827 | 6574747 |
| 113,750 | 136.35.38,65 | 9683159 | 6753884 | 6388156 |
| 114,375 | 136. 1. 3,29 | 9523670 | 6448071 | 6223006 |
| 115,000 | 135.10. 8,15 | 9359754 | 6119799 | 6083817 |
| 115,625 | 133.59.53,38 | 9194442 | 5770334 | 5975740 |
| 116,250 | 132.27.23,87 | 9032434 | 5402164 | 5904393 |
| 116,875 | 130.30.22,50 | 8880455 | 5019326 | 5875577 |
| 117,500 | 128. 8. 3,01 | 8747282 | 4627738 | 5894729 |
| 118,125 | 125.22.13,51 | 8643084 | 4235280 | 5966139 |
| 118,750 | 122.18. 6,19 | 9,8577790 | -0,3851470 | +0,6092035 |

TABLE I (suite).

| w . | v . | $\log r$. | x . | y . |
|----------|---------------------------------------|------------|-----------|-----------|
| 119,0625 | 120. ⁰ 41.45. ⁶ | 9,856218 | -0,366606 | +0,617532 |
| 119,3750 | 119. 4.17,4 | 855869 | 348671 | 627173 |
| 119,6875 | 117.27. 4,0 | 856745 | 331465 | 638068 |
| 120,0000 | 115.51.27,4 | 858821 | 315097 | 650139 |
| 120,3125 | 114.18.46,8 | 862038 | 299669 | 663292 |
| 120,6250 | 112.50. 8,5 | 866305 | 285258 | 677419 |
| 120,9375 | 111.26.28,3 | 871510 | 271927 | 692411 |
| 121,2500 | 110. 8.27,2 | 877528 | 259719 | 708147 |
| 121,5625 | 108.56.33,9 | 884226 | 248660 | 724513 |
| 121,8750 | 107.51. 3,6 | 891473 | 238761 | 741387 |
| 122,1875 | 106.51.56,2 | 899145 | 230003 | 758667 |
| 122,5000 | 105.59.14,3 | 907129 | 222398 | 776244 |
| 122,8125 | 105.12.38,5 | 915323 | 215892 | 794028 |
| 123,1250 | 104.31.52,7 | 923641 | 210454 | 811935 |
| 123,4375 | 103.56.36,2 | 932009 | 206044 | 829888 |
| 123,7500 | 103.26.27,2 | 940367 | -0,202620 | +0,847824 |

Pour l'étude dont il s'agit, j'ai choisi dix-sept points de l'orbite correspondant aux valeurs de t indiquées dans le Tableau qui suit. Pour ces points nous avons interpolé les valeurs des coordonnées x et y . Mais, parce que c'est l'orbite relative à la ligne mobile AB qui relève le caractère de l'orbite plus clairement que l'orbite absolue par rapport au système fixe des coordonnées, nous avons formé les longitudes relatives

$$v - w,$$

en déterminant les coordonnées rectangulaires relatives de C par les formules

$$(1) \quad x_0 = r \cos(v - w), \quad y_0 = r \sin(v - w).$$

Ainsi, les valeurs suivantes viennent d'être déterminées :

TABLE II.

| Point. | t . | r . | x_0 . | y_0 . |
|--------|-------|-----------|------------|------------|
| 1... | 95,5 | 0,7175773 | +0,7175672 | -0,0038019 |
| 2... | 95,0 | 0,7207407 | +0,7193564 | +0,0446486 |
| 3... | 94,5 | 0,7316585 | +0,7258162 | +0,0922766 |
| 4... | 93,0 | 0,8002828 | +0,7684805 | +0,2233607 |
| 5... | 91,0 | 0,9296423 | +0,8567257 | +0,3609099 |
| 6... | 87,5 | 1,1490188 | +1,0260428 | +0,5171849 |
| 7... | 79,5 | 1,5003752 | +1,3353696 | +0,6840423 |
| 8... | 71,5 | 1,7124626 | +1,5386674 | +0,7516846 |
| 9... | 63,5 | 1,8444347 | +1,6732300 | +0,7760410 |
| 10... | 55,5 | 1,9251164 | +1,7644170 | +0,7700044 |
| 11... | 47,5 | 1,9713434 | +1,8287235 | +0,7361826 |
| 12... | 39,5 | 1,9946028 | +1,8771012 | +0,6744854 |
| 13... | 31,5 | 2,0035023 | +1,9163267 | +0,5845607 |
| 14... | 23,5 | 2,0046281 | +1,9494776 | +0,4669821 |
| 15... | 15,5 | 2,0027253 | +1,9762970 | +0,3242836 |
| 16... | 7,5 | 2,0007211 | +1,9941521 | +0,1619942 |
| 17... | 0,0 | 2,0000000 | +2,0000000 | 0,0000000 |

Il suffit de déterminer analytiquement deux coordonnées quelconques, et comme on peut supposer *a priori* que ce sont le rayon vecteur et la coordonnée x_0 qui sont assujettis aux expressions analytiques les plus simples, nous pouvons laisser de côté l'expression de la coordonnée y_0 , donnée par la relation

$$y_0 = \sqrt{r^2 - x_0^2}.$$

Ces considérations sont en accord avec les propriétés du problème de deux corps, où le rayon vecteur et la coordonnée x se trouvent donnés par les expressions

$$(2) \quad r = a(1 - e \cos u), \quad x = a(\cos u - e),$$

jouissant de la propriété remarquable d'être des fonctions entières soit par rapport à $\cos u$, soit par rapport aux constantes a et e , tandis que l'expression

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin u$$

se trouve déjà dérangée par la présence de la racine carrée d'une expression du second degré de l'excentricité.

J'ai de plus fait remarquer qu'en supposant

$$r = 0 \quad \text{pour} \quad u = ia_1,$$

on aura

$$r = a \left[1 - \frac{\cos u}{\operatorname{ch} a_1} \right], \quad x = b \left[1 - \frac{\cos u}{\operatorname{ch} a_1} \right] + b'.$$

En posant

$$\rho(\iota) = \cos u, \quad \bar{\rho}(\iota) = \cos ia_1,$$

nous aurons les formules simples

$$(3) \quad r = a \left[1 - \frac{\rho(\iota)}{\bar{\rho}(\iota)} \right], \quad x = b \left[1 - \frac{\rho(\iota)}{\bar{\rho}(\iota)} \right] + b',$$

appropriées à devenir généralisées pour le problème des trois corps. Les expressions (3) sont *autologues*, en ce que les dénominateurs sont donnés en valeurs spéciales des numérateurs. En posant de plus

$$(4) \quad \rho(\iota) = \frac{p(\iota)}{\bar{p}(\iota)},$$

les intégrales du problème de deux corps s'expriment par les formules

$$(5) \quad r = a[1 - p(\iota)], \quad x = b[1 - p(\iota)] + b',$$

mettant en évidence les racines de l'équation

$$r = 0$$

par la condition

$$p(\iota) = 1$$

ou bien

$$p(\iota) = \bar{p}(\iota),$$

ou encore

$$u = ia_1.$$

2. C'est par la généralisation des expressions ainsi formées que nous avons été conduits à poser, pour le problème des trois corps qui nous occupe, les formes analytiques primordiales suivantes :

1. *Rayon vecteur* :

$$(6) \quad r = A \left[1 - \frac{\cos u + \mu_1 \cos v}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1} \right] + A_3,$$

où les *coefficients de phase* sont

$$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = -1 + \frac{\text{ch } a_1^{-1}}{3},$$

les *modules d'excentricité* a_1, b_1 étant donnés numériquement par les relations

$$\begin{aligned} \text{ch } a_1 + \text{ch } b_1 &= 3, \\ \frac{(1 + \mu_1)^2}{\text{ch } a_1 + \mu_1 \text{ch } b_1} &= 10, \end{aligned}$$

donnant

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,0252961, & b_1 &= 0,8937462; \\ \text{ch } a_1 &= 1,5733055, & \text{ch } b_1 &= 1,4266945. \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues, dans le cours des recherches, pour le grand axe A et pour la constante libre Λ_3 , sont

$$\begin{aligned} A &= +1,3585744, & \log A &= 0,1330834, \\ \Lambda_3 &= +0,0001911. \end{aligned}$$

2. *Coordonnée x :*

$$(7) \quad x = B \left[1 - \frac{\cos u + \mu_2 \cos v}{\text{ch } a_2 + \mu_2 \text{ch } b_2} \right] + B_3,$$

où les *coefficients de phase* sont donnés par

$$\lambda_2 = 1, \quad \mu_2 = - \left[1 + \frac{\text{ch } b_2^{-1}}{3} \right],$$

les *modules d'excentricité* a_2, b_2 étant donnés par les formules

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1, \\ \text{ch } a_2 - \frac{1}{2} \text{ch } b_2 &= 1, \end{aligned}$$

donnant

$$\text{ch } a_2 = 1,7866527; \quad \text{ch } b_2 = 1,5733055.$$

Les valeurs obtenues pour B et B_3 sont

$$\begin{aligned} B &= 1,3560219; & \log B &= 0,1322667; \\ B_3 &= +0,0027435. \end{aligned}$$

3. *Arguments u, v.* — Les arguments u, v de ces formules, correspondant à l'anomalie excentrique u dans le problème de deux corps,

viennent d'être déterminés par les relations

$$(8) \quad \begin{cases} m_1 = u - \frac{\sin u + \mu'_1 \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_1 + \mu'_1 \beta \operatorname{ch} b_1}, \\ m_2 = v - \frac{\lambda''_1 \sin u + \sin v}{\lambda''_1 \alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1}, \end{cases}$$

correspondant à l'équation de Kepler

$$m = u - e \sin u.$$

Les différentielles d'époque α , β sont ici données par les formules

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 + \frac{\operatorname{ch} b_1^{-1}}{3}, & \alpha = +1,2458605, \\ \alpha - \beta = 1 + \frac{\operatorname{ch} a_1^{-1}}{2}, & \beta = -0,0339923, \end{cases}$$

et les coefficients de phase par

$$\mu'_1 = 1 - \frac{\operatorname{ch} a_1^{-1}}{2}, \quad \lambda''_1 = 2 + \frac{\operatorname{ch} b_1^{-1}}{3}.$$

5. Les expressions finies ainsi trouvées fournissent déjà une représentation de l'orbite satisfaisante pour ce qui concerne son caractère général (1). Cependant, en cherchant à se rapprocher de plus près de l'orbite actuelle, il s'est trouvé qu'il ne faut pas étendre ces expressions d'une manière directe par développement en séries (2), en retenant les coefficients de phase μ_1 , μ_2 , μ'_1 , λ''_2 et en procédant, de la manière indiquée, aux multiples successifs des arguments u , v . L'organisme du développement est autre et, on peut ajouter, plus simple. En effet, les quantités qu'il faut adjoindre aux expressions finies citées sont bien des séries infinies autologues, mais leurs coefficients de phase se réduisent à

$$\pm 1,$$

(1) Voir la figure reproduite ci-après.

(2) Voir *Integralentwicklungen des drei Körperproblemes* (Astron. iakt. och unders. Stockholms Observatorium, Bd. IX, n° 2, Stockholm et Upsala, 1908, p. 16).

au lieu des coefficients de phase λ, μ qui entrent dans nos formules primaires [(6), (7), (8)].

4. Remarquons d'abord la manière dont il faut compléter les formules finies données ci-dessus.

1. *Rayon vecteur.* — Les recherches poursuivies ont amené l'expression suivante du rayon vecteur mené du centre de gravité binaire (1) :

$$(10) \quad r = \Lambda e^{\Theta(u, v)} [1 - e_1 \cos u - \mu_1 e_1 \cos v + \eta(u, v)] + \Lambda_3,$$

c'est-à-dire l'expression primaire (6) avec les deux fonctions adjointes

$$\eta(u, v) \quad \text{et} \quad \Theta(u_1, v_1).$$

La première, $\eta(u, v)$, représente la variation de l'excentricité ou bien du paramètre de l'orbite, tandis que la seconde, $\Theta(u_1, v_1)$, peut être comprise comme la variation du grand axe de l'orbite. La dernière de ces fonctions dépend des arguments nouveaux

$$(11) \quad \begin{cases} u_1 = u + \rho(180^\circ + u), \\ v_1 = v + \rho(180^\circ + v), \end{cases}$$

le mouvement particulier de ces arguments étant donné par la quantité

$$(12) \quad \rho = z \left[c - \frac{z}{z + z_1} \right] \tau = -\frac{1}{2z} \frac{\tau^2}{(z + z_1)^2}, \quad \rho = -0,010397,$$

où l'on a à supposer

$$e = 2,555555 \dots,$$

et la quantité τ va être définie ci-après.

2. *Arguments u, v pour le rayon vecteur.* — Les équations com-

(1) Voir *Développement des intégrales du problème des trois corps* (Arkiv för Math. Astron. Phys. Vetenskaps Akademien. Stockholm, Bd. VIII, n° 35, p. 12). Pour simplifier l'écriture, nous avons posé

$$e_1 = \frac{1}{\text{ch } a_1 + \mu_1 \text{ch } b_1}.$$

plétées pour ces arguments sont de la forme suivante (1) :

$$(13) \quad \begin{cases} l + \varepsilon_1 - \pi = u - \tau(180^\circ + u) - e'_1 \sin u - \mu'_1 e'_1 \sin v, \\ l + \varepsilon_2 - \pi = v - \tau(180^\circ + v) - \lambda'_1 e''_1 \sin u - e''_1 \sin v, \end{cases}$$

c'est-à-dire les formules primaires (8) avec les additions suivantes.

On a posé

$$(14) \quad \begin{cases} m_1 = l + \varepsilon_1 - \pi, \\ m_2 = l + \varepsilon_2 - \pi, \end{cases}$$

où l'on suppose la longitude moyenne donnée par

$$(15) \quad l = n_0(1 + \nu_0)l - 180^\circ.$$

D'autre part, nous avons ajouté aux arguments u, v du second membre les termes

$$- \tau(180^\circ + u), \quad - \tau(180^\circ + v).$$

Les diverses constantes qui entrent dans ces expressions sont définies par

$$\begin{aligned} n_0 &= 1^\circ, 88888888 \dots, \\ \nu_0 &= \frac{\tau}{2c} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\tau^2}{e^2} \quad (\nu_0 = -0,0003726), \\ \tau &= \alpha \frac{e^2}{c}, \end{aligned}$$

où il faut supposer

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{180^\circ}, & \log \alpha &= 8,2418774; \\ c &= 2,555555 \dots, & \log c &= 0,4074853; \\ e &= \frac{1}{2} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, & \log e &= 9,7226746. \end{aligned}$$

De plus, nous voyons s'ajouter aux équations primaires (8) les fonctions

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(u, v), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2(u, v)$$

donnant les variations de la *longitude d'époque* et correspondant à la fonction $\eta(u, v)$ dans l'expression du rayon vecteur, et encore la

(1) Pour simplifier, nous avons posé

$$e'_1 = \frac{1}{\alpha \operatorname{ch} a_1 + \mu'_1 \beta \operatorname{ch} b_1}, \quad e''_1 = \frac{1}{\lambda'_1 \alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1}.$$

fonction

$$\pi = \pi(u_1, v_1)$$

donnant la variation de la *longitude du périhélie des arguments* et qui correspond à la fonction $\Theta(u_1, v_1)$ qui entre dans l'expression du rayon vecteur.

Les développements des fonctions

$$(A) \quad \begin{cases} \varepsilon_1(u, v), & \pi(u_1, v_1), \\ \varepsilon_2(u, v), & \vartheta(u_1, v_1), \\ \eta(u, v) \end{cases}$$

viennent d'être déterminés par l'étude des écarts Δr du rayon vecteur de l'orbite actuelle des formules primaires finies [(6), (8)].

3. *Coordonnée x.* — Quant à l'expression de cette coordonnée, il s'est trouvé que les cinq fonctions (A) employées pour la représentation du rayon vecteur ne sont plus suffisantes. Il faut au contraire appliquer à chacune d'elles des termes additifs, de manière qu'on aura pour la coordonnée x , à remplacer

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1(u, v) & \text{par} & \varepsilon_1(u, v) + \varepsilon(u, v), \\ \varepsilon_2(u, v) & \text{»} & \varepsilon_2(u, v) + \varepsilon(u, v), \\ \eta(u, v) & \text{»} & \eta(u, v) + \omega(u, v), \\ \pi(u_1, v_1) & \text{»} & \pi(u_1, v_1) + \overline{\omega}(u, v), \\ \Theta(u_1, v_1) & \text{»} & \Theta(u_1, v_1) - \Omega(u, v). \end{array}$$

Nous aurons ainsi à poser

$$(16) \quad x = B e^{(\cdot) - \Omega} [1 - e_2 \cos u - \mu_2 e_2 \cos v + \eta + \omega] + B_3.$$

Mais cette expression se rapportant à l'axe des x , qui en même temps est l'axe de symétrie momentanée de l'orbite, si l'on désigne par

$$\varphi = \pi + \chi$$

l'angle que cet axe des x forme avec l'axe des x_0 , c'est-à-dire la ligne AB joignant les corps A et B, nous aurons

$$(17) \quad x = x_0 \cos(\pi + \chi) + y_0 \sin(\pi + \chi).$$

L'angle φ nommé l'*axiale* contient, outre la longitude du périhélie

des arguments, la fonction adjointe

$$\chi = \chi(u, v).$$

Les fonctions

$$(B) \quad \begin{cases} \varepsilon(u, v), & \varpi(u, v), \\ \omega(u, v), & \Omega(u, v), \\ & \chi(u, v) \end{cases}$$

viennent d'être déterminées par l'étude des écarts Δx de la coordonnée x_0 de l'orbite actuelle de la formule primaire employée pour la représentation de cette coordonnée.

§. Pour les fonctions (A) et (B), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1(u, v); \quad \varepsilon_2(u, v); \quad \eta(u, v); \quad \pi(u, v); \quad \Theta(u, v); \\ & \varepsilon(u, v); \quad \omega(u, v); \quad \varpi(u, v); \quad \Omega(u, v); \quad \chi(u, v), \end{aligned}$$

nous avons adopté des développements autologues soit à *cosinus*, soit à *sinus*, après quoi les recherches ont abouti à la détermination de *certaines coefficients* et *des signes* appartenant respectivement aux termes de ces développements.

Considérons d'abord les développements à *cosinus*. Après avoir formé les *combinaisons élémentaires* (coefficients de phase $\lambda = +1$, $\mu = -1$)

$$(a) \quad \begin{aligned} p_0(00) &= 0, \\ p_0(10) &= \cos u & - \cos v; \\ p_1(00) &= \cos(u + v) - \cos(u - v), \\ p_1(10) &= \cos(2u + v) + \cos(u + 2v) \\ & \quad - \cos(2u - v) - \cos(u - 2v), \\ p_1(20) &= \cos(3u + v) + \cos(u + 3v) \\ & \quad - \cos(3u - v) - \cos(u - 3v), \\ p_1(11) &= \cos(2u + 2v) + \cos(2u + 2v) \\ & \quad - \cos(2u - 2v) - \cos(2u - 2v), \\ p_1(30) &= \cos(4u + v) + \cos(u + 4v) \\ & \quad - \cos(4u - v) - \cos(u - 4v), \\ p_1(21) &= \cos(3u + 2v) + \cos(2u + 3v) \\ & \quad - \cos(3u - 2v) - \cos(2u - 3v); \\ p_2(20) &= \cos(4u + 2v) + \cos(2u + 4v) \\ & \quad - \cos(4u - 2v) - \cos(2u - 4v). \\ & \dots \end{aligned}$$

en général,

$$\rho_l(m, n) = \cos[(l+m)u + (l+n)v] + \cos[(l+n)u + (l+m)v] \\ - \cos[(l+m)u - (l+n)v] - \cos[(l+n)u - (l+m)v],$$

avec les dénominateurs

$$(b) \quad \begin{aligned} \bar{\rho}_0(10) &= \operatorname{ch} a_1 && - \operatorname{ch} b_1; \\ \bar{\rho}_1(00) &= \operatorname{ch}(a_1 + b_1) - \operatorname{ch}(a_1 - b_1), \\ \bar{\rho}_1(10) &= \operatorname{ch}(2a_1 + b_1) + \operatorname{ch}(a_1 + 2b_1) \\ &\quad - \operatorname{ch}(2a_1 - b_1) - \operatorname{ch}(a_1 - 2b_1), \\ \bar{\rho}_1(20) &= \operatorname{ch}(3a_1 + b_1) + \operatorname{ch}(a_1 + 3b_1) \\ &\quad - \operatorname{ch}(3a_1 - b_1) - \operatorname{ch}(a_1 - 3b_1), \\ \bar{\rho}_1(11) &= \operatorname{ch}(2a_1 + 2b_1) + \operatorname{ch}(2a_1 + 2b_1) \\ &\quad - \operatorname{ch}(2a_1 - 2b_1) - \operatorname{ch}(2a_1 - 2b_1), \\ \bar{\rho}_1(30) &= \operatorname{ch}(4a_1 + b_1) + \operatorname{ch}(a_1 + 4b_1) \\ &\quad - \operatorname{ch}(4a_1 - b_1) - \operatorname{ch}(a_1 - 4b_1), \\ \bar{\rho}_1(21) &= \operatorname{ch}(3a_1 + 2b_1) + \operatorname{ch}(2a_1 + 3b_1) \\ &\quad - \operatorname{ch}(3a_1 - 2b_1) - \operatorname{ch}(2a_1 - 3b_1); \\ \bar{\rho}_2(20) &= \operatorname{ch}(4a_1 + 2b_1) + \operatorname{ch}(2a_1 + 4b_1) \\ &\quad - \operatorname{ch}(4a_1 - 2b_1) - \operatorname{ch}(2a_1 - 4b_1), \\ &\quad \dots\dots\dots; \end{aligned}$$

en général,

$$\rho_l(m, n) = \operatorname{ch}[(l+m)a_1 + (l+n)b_1] + \operatorname{ch}[(l+n)a_1 + (l+m)b_1] \\ - \operatorname{ch}[(l+m)a_1 - (l+n)b_1] - \operatorname{ch}[(l+n)a_1 - (l+m)b_1],$$

nous procédons à former les quotients

$$(c) \quad \rho_l(m, n) = \frac{\rho_l(m, n)}{\rho_l(m, n)},$$

après quoi les *fonctions élémentaires*

$$\rho_l(m),$$

desquelles nos développements se composent immédiatement, sont

formées d'après les relations

$$\begin{aligned}
 (d) \quad & p_0(0) = p_0(00), \\
 & p_0(1) = p_0(10); \\
 & p_1(0) = p_1(00), \\
 & p_1(1) = p_1(10), \\
 & p_1(2) = p_1(20) + p_1(11), \\
 & p_1(3) = p_1(30) + p_1(21); \\
 & p_2(2) = p_2(20) + p_2(11), \\
 & p_2(3) = p_2(30) + p_2(21), \\
 & \dots\dots\dots;
 \end{aligned}$$

et, en général,

$$p_l(m) = p_l(m, 0) + p_l(m-1, 1) + p_l(m-2, 2) + \dots$$

Abstraction faite des coefficients particuliers et des signes qu'on aura à attribuer aux fonctions élémentaires

$$p_l(m),$$

tout développement en *cosinus* aura alors la forme générale

$$(1) \quad f = \begin{vmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ p_1(2) \\ p_1(3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_2(2) \\ p_2(3) \\ p_2(4) \\ p_2(5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3(4) \\ p_3(5) \\ p_3(6) \\ p_3(7) \end{vmatrix} + \dots$$

Ce sont les développements qu'on doit attribuer aux fonctions (1)

$$\begin{aligned}
 & \eta(u, v), \quad \Theta(u_1, v_1), \\
 & \omega(u, v), \quad \Omega(u, v).
 \end{aligned}$$

Les développements en *sinus* sont de deux espèces.

Première catégorie. — Nous avons d'abord à former les combi-

(1) Quand les arguments employés sont u_1, v_1 , il faut pourtant appliquer les mêmes dénominateurs (b) que pour le cas des arguments u, v .

naisons élémentaires (coefficients de phase : $\lambda = +1, \mu = +1$)

(a)

$$\begin{aligned}
 q_0(00) &= 0, \\
 q_0(10) &= \sin u + \sin v; \\
 q_1(00) &= \sin(u + v) + \sin(u - v), \\
 q_1(10) &= \sin(2u + v) + \sin(u + 2v), \\
 &\quad + \sin(2u - v) + \sin(u - 2v), \\
 q_1(20) &= \sin(3u + v) + \sin(u + 3v) \\
 &\quad + \sin(3u - v) + \sin(u - 3v), \\
 q_1(11) &= \sin(2u + 2v) + \sin(2u + 2v) \\
 &\quad + \sin(2u - 2v) + \sin(2u - 2v), \\
 q_1(30) &= \sin(4u + v) + \sin(u + 4v) \\
 &\quad + \sin(4u - v) + \sin(u - 4v), \\
 q_1(21) &= \sin(3u + 2v) + \sin(2u + 3v) \\
 &\quad + \sin(3u - 2v) + \sin(2u - 3v); \\
 q_2(20) &= \sin(4u + 2v) + \sin(2u + 4v) \\
 &\quad + \sin(4u - 2v) + \sin(2u - 4v), \\
 &\dots\dots\dots;
 \end{aligned}$$

engénéral,

$$\begin{aligned}
 q_l(m, n) &= \sin[(l + m)u + (l + n)v] + \sin[(l + n)u + (l + m)v] \\
 &\quad + \sin[(l + m)u - (l + n)v] + \sin[(l + n)u - (l + m)v],
 \end{aligned}$$

avec leurs dénominateurs

(b)

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_0[10] &= \alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1; \\
 \bar{q}_1[00] &= (\alpha + \beta) \operatorname{ch}(a_1 + b_1) + (\alpha - \beta) \operatorname{ch}(a_1 - b_1), \\
 \bar{q}_1[10] &= (2\alpha + \beta) \operatorname{ch}(2a_1 + b_1) + (\alpha + 2\beta) \operatorname{ch}(a_1 + 2b_1) \\
 &\quad + (2\alpha - \beta) \operatorname{ch}(2a_1 - b_1) + (\alpha - 2\beta) \operatorname{ch}(a_1 - 2b_1), \\
 \bar{q}_1[20] &= (3\alpha + \beta) \operatorname{ch}(3a_1 + b_1) + (\alpha + 3\beta) \operatorname{ch}(a_1 + 3b_1) \\
 &\quad + (3\alpha - \beta) \operatorname{ch}(3a_1 - b_1) + (\alpha - 3\beta) \operatorname{ch}(a_1 - 3b_1), \\
 \bar{q}_1[11] &= (2\alpha + 2\beta) \operatorname{ch}(2a_1 + 2b_1) + (2\alpha + 2\beta) \operatorname{ch}(2a_1 + 2b_1) \\
 &\quad + (2\alpha - 2\beta) \operatorname{ch}(2a_1 - 2b_1) + (2\alpha - 2\beta) \operatorname{ch}(2a_1 - 2b_1), \\
 \bar{q}_1[30] &= (4\alpha + \beta) \operatorname{ch}(4a_1 + b_1) + (\alpha + 4\beta) \operatorname{ch}(a_1 + 4b_1) \\
 &\quad + (4\alpha - \beta) \operatorname{ch}(4a_1 - b_1) + (\alpha - 4\beta) \operatorname{ch}(a_1 - 4b_1), \\
 \bar{q}_1[21] &= (3\alpha + 2\beta) \operatorname{ch}(3a_1 + 2b_1) + (2\alpha + 3\beta) \operatorname{ch}(2a_1 + 3b_1) \\
 &\quad + (3\alpha - 2\beta) \operatorname{ch}(3a_1 - 2b_1) + (2\alpha - 3\beta) \operatorname{ch}(2a_1 - 3b_1), \\
 \bar{q}_2[20] &= (4\alpha + 2\beta) \operatorname{ch}(4a_1 + 2b_1) + (2\alpha + 4\beta) \operatorname{ch}(2a_1 + 4b_1) \\
 &\quad + (4\alpha - 2\beta) \operatorname{ch}(4a_1 - 2b_1) + (2\alpha - 4\beta) \operatorname{ch}(2a_1 - 4b_1), \\
 &\dots\dots\dots;
 \end{aligned}$$

en général,

$$\begin{aligned} \bar{q}_l[m, n] = & [(l+m)\alpha + (l+n)\beta] \operatorname{ch}[(l+m)a_1 + (l+n)b_1] \\ & + [(l+n)\alpha + (l+m)\beta] \operatorname{ch}[(l+n)a_1 + (l+m)b_1] \\ & + [(l+m)\alpha - (l+n)\beta] \operatorname{ch}[(l+m)a_1 - (l+n)b_1] \\ & + [(l+n)\alpha - (l+m)\beta] \operatorname{ch}[(l+n)a_1 - (l+m)b_1]. \end{aligned}$$

Ayant formé d'après ces formules les quotients

$$(c) \quad q_l(m, n) = \frac{q_l(m, n)}{q_l[m, n]},$$

nous aurons encore à former les fonctions élémentaires

$$\begin{aligned} (d) \quad q_0(0) &= q_0(00), \\ q_0(1) &= q_0(10); \\ q_1(0) &= q_1(00), \\ q_1(1) &= q_1(10), \\ q_1(2) &= q_1(20) + q_1(11), \\ q_1(3) &= q_1(30) + q_1(21); \\ q_2(2) &= q_2(20) + q_2(11), \\ q_2(3) &= q_2(30) + q_2(21); \end{aligned}$$

en général,

$$q_l(m) = q_l(m, 0) + q_l(m-1, 1) + q_l(m-2, 2) + \dots$$

Abstraction faite des coefficients et des signes qu'il faut apporter aux fonctions élémentaires

$$q_l(m),$$

tout développement en *sinus* aura la forme

$$(II) \quad f = \begin{vmatrix} q_0(0) \\ q_0(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ q_1(2) \\ q_1(3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_2(2) \\ q_2(3) \\ q_2(4) \\ q_2(5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_3(4) \\ q_3(5) \\ q_3(6) \\ q_3(7) \end{vmatrix} + \dots$$

C'est la même forme que (I), abstraction faite de la signification différente des quantités q . Ces développements se rapportent aux fonctions

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(u, v), & \quad \varepsilon(u, v), \\ \varepsilon_2(u, v), & \quad \chi(u, v). \end{aligned}$$

La *seconde catégorie* de développements en *sinus* se distingue des formules de la première catégorie seulement en ce point que nous avons à poser (coefficients de phase : $\lambda = + 1$, $\mu = - 1$)

$$\begin{aligned} (a) \quad & \eta_0(10) = \sin u - \sin v, \\ (b) \quad & \bar{\eta}_0(10) = \alpha \operatorname{ch} a_1 - \beta \operatorname{ch} b_1. \end{aligned}$$

Pour le reste, les formules précédentes demeurent inchangées. Ces développements se rapportent à la fonction

$$\pi(u_1, v_1).$$

6. APERÇU DE LA MÉTHODE EMPLOYÉE POUR LA DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS. — Considérons le cas du rayon vecteur r et ses fonctions adjointes

$$(18) \quad \eta(u, v); \quad \theta(u_1, v_1); \quad \varepsilon_1(u, v); \quad \varepsilon_2(u, v); \quad \pi(u_1, v_1).$$

Par les recherches poursuivies, nous avons déterminé les coefficients de ces développements, en commençant par les termes (c) de grande amplitude et en passant successivement aux termes d'un ordre de plus en plus élevé, qui reçoivent dans leurs dénominateurs des multiples croissants des modules d'excentricité a, b [voir les systèmes (b)].

Supposons qu'à un certain degré d'approximation les formules laissent encore des écarts déterminés

$$\Delta r$$

pour les dix-sept points considérés de l'orbite. En attribuant ces écarts à des variations

$$\Delta\eta, \quad \Delta\theta, \quad \Delta\varepsilon_1, \quad \Delta\varepsilon_2, \quad \Delta\pi,$$

des fonctions (18), il sera facile de former les équations de condition

$$(19) \quad \Delta r = a \Delta\eta + b \Delta\theta + c \Delta\varepsilon_1 + d \Delta\varepsilon_2 + e \Delta\pi,$$

par lesquelles on peut déterminer, à l'aide de la méthode des moindres carrés, les inconnues

$$\Delta\eta, \quad \Delta\theta, \quad \dots, \quad \Delta\pi.$$

En assignant à chacune de ces corrections la forme

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= k_{\eta} p_l(m), \\ \Delta\theta &= k_{\theta} p_l(m_1), \\ \dots\dots\dots\end{aligned}$$

où les $p_l(m)$, ... sont les *fonctions élémentaires* d'avance calculées et qu'on choisit d'après la comparaison des courbes construites d'une part pour les écarts Δr et, d'autre part, pour les diverses fonctions $p_l(m)$, $q_l(m)$, ..., c'est plutôt les coefficients constants

$$k_{\eta}, k_{\theta}, \dots,$$

qu'il faut alors déterminer d'après les équations de condition (19).

On réussit ainsi à trouver ces coefficients avec leurs signes propres, dès que le système des fonctions

$$p_l(m)$$

est formé. Pour le calcul de ces fonctions, j'ai employé les valeurs des arguments u , v données dans le Mémoire *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps* (¹).

Il est superflu de les répéter dans cet exposé, et il n'est pas non plus nécessaire de donner ici toutes les valeurs des *fonctions élémentaires* ainsi calculées. Il suffira de donner des exemples du calcul très facile dont il s'agit.

Exemple du calcul de $p_l(m, n)$ et $q_l(m, n)$.

$$l = 1, \quad m = 3, \quad n = 0.$$

| $4u + v.$ | $u + 4v.$ | $4u - v.$ | $u - 4v.$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| + 1,87 | + 1,73 | + 1,20 | - 0,96 |
| - 21,42 | - 19,82 | - 13,70 | + 11,04 |
| - 41,37 | - 41,08 | - 28,37 | + 22,89 |
| - 107,95 | - 100,09 | - 68,97 | + 55,86 |
| - 176,23 | - 163,85 | - 112,34 | + 91,70 |
| - 261,15 | - 244,11 | - 165,77 | + 137,37 |
| - 22,24 | - 1,06 | - 240,64 | + 205,34 |
| - 104,82 | - 82,84 | - 290,61 | + 253,97 |
| - 171,56 | - 150,32 | - 330,26 | + 294,86 |

(¹) *Arkiv för Math. Astr. Physik, Vetenskaps Akad. Stockholm*, Bd. VIII, n°35, p. 13-14.

Exemple du calcul de $p_l(m, n)$ et $q_l(m, n)$ (suite).

$$l = 1, \quad m = 3, \quad n = 0.$$

| | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| $4u + v.$ | $v + 4v.$ | $4u - v.$ | $u - 4v.$ |
| ⁰ -229,70 | ⁰ -210,19 | ⁰ - 4,22 | ⁰ +331,71 |
| -232,22 | -265,14 | - 34,45 | + 5,97 |
| -330,68 | -316,39 | - 62,03 | + 38,21 |
| - 16,14 | - 4,82 | - 87,73 | + 68,85 |
| - 59,43 | - 51,08 | -112,11 | + 98,19 |
| -101,22 | - 95,78 | -135,63 | +126,57 |
| -142,08 | -139,47 | -158,61 | +154,29 |
| -180,00 | -180,00 | -180,00 | +180,00 |

| I. | | II. | | I. | II. | $p_1(30).$ I - II. |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------|--------|-----------------------|
| $\text{Cos}(4u+v).$ | $\text{Cos}(u+4v).$ | $\text{Cos}(4u-v).$ | $\text{Cos}(u-4v).$ | | | |
| +1,000 | +1,000 | +1,000 | +1,000 | +2,000 | +2,000 | 0,000 |
| +0,931 | +0,941 | +0,971 | +0,982 | +1,872 | +1,953 | -0,082 |
| +0,714 | +0,754 | +0,880 | +0,921 | +1,468 | +1,801 | -0,333 |
| -0,307 | -0,175 | +0,358 | +0,561 | -0,482 | +0,919 | -1,401 |
| -0,998 | -0,960 | -0,380 | -0,036 | -1,558 | -0,410 | -1,548 |
| -0,155 | -0,437 | -0,970 | -0,736 | -0,592 | -1,706 | +1,114 |
| +0,926 | +1,000 | -0,491 | -0,504 | +1,926 | -1,395 | +3,321 |
| -0,255 | +0,125 | +0,352 | -0,276 | -0,130 | +0,076 | -0,206 |
| -0,989 | -0,869 | +0,869 | +0,421 | -1,858 | +1,290 | -3,148 |
| -0,647 | -0,864 | +0,997 | +0,880 | -1,511 | +1,877 | -3,388 |
| +0,211 | -0,084 | +0,825 | +0,994 | +0,127 | +1,819 | -1,692 |
| +0,872 | +0,724 | +0,468 | +0,786 | +1,596 | +1,254 | +0,342 |
| +0,961 | +0,996 | +0,040 | +0,362 | +1,957 | +0,402 | +1,555 |
| +0,509 | +0,628 | -0,376 | -0,143 | +1,137 | -0,519 | +1,656 |
| -0,194 | -0,101 | -0,714 | -0,596 | -0,295 | -1,310 | +1,015 |
| -0,789 | -0,760 | -0,931 | -0,901 | -1,549 | -1,832 | +0,283 |
| -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -2,000 | -2,000 | 0,000 |
| $\text{Sin}(4u+v).$ | $\text{Sin}(u+4v).$ | $\text{Sin}(4u-v).$ | $\text{Sin}(u-4v).$ | I. | II. | $q_1(30).$ I + II. |
| +0,033 | +0,030 | +0,021 | -0,017 | +0,063 | +0,004 | +0,067 |
| -0,365 | -0,339 | -0,237 | +0,191 | -0,704 | -0,046 | -0,750 |
| -0,700 | -0,657 | -0,476 | +0,389 | -1,357 | -0,087 | -1,444 |
| -0,952 | -0,984 | -0,933 | +0,828 | -1,936 | -0,105 | -2,041 |
| -0,066 | -0,278 | -0,925 | +1,000 | -0,344 | +0,075 | -0,269 |
| +0,988 | +0,900 | -0,246 | +0,677 | +1,888 | +0,431 | +2,319 |
| -0,379 | -0,018 | +0,872 | -0,428 | -0,397 | +0,444 | +0,047 |
| -0,967 | -0,992 | +0,936 | -0,961 | -1,959 | -0,025 | -1,984 |
| -0,147 | -0,495 | +0,495 | -0,907 | -0,642 | -0,412 | -1,054 |

| $\sin(\frac{1}{4}u+v)$ | $\sin(u+\frac{1}{4}v)$ | $\sin(\frac{1}{4}u-v)$ | $\sin(u-\frac{1}{4}v)$ | I. | II. | $q_l(30)$ I + II. |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|--------|--------|----------------------|
| +0,763 | +0,503 | -0,073 | -0,474 | +1,266 | -0,547 | +0,719 |
| +0,977 | +0,996 | -0,566 | +0,104 | +1,973 | -0,462 | +1,511 |
| +0,489 | +0,690 | -0,883 | +0,619 | +1,179 | -0,264 | +0,915 |
| -0,278 | -0,084 | -0,999 | +0,933 | -0,362 | -0,066 | -0,428 |
| -0,861 | -0,778 | -0,926 | +0,990 | -1,639 | +0,064 | -1,575 |
| -0,981 | -0,995 | -0,699 | +0,803 | -1,976 | +0,104 | -1,872 |
| -0,615 | -0,650 | -0,365 | +0,434 | -1,265 | +0,069 | -1,196 |
| -0,000 | -0,000 | -0,000 | +0,000 | -0,000 | +0,000 | 0,000 |

Exemple du calcul de $\bar{p}_l(m, n)$ et $\bar{q}_l(m, n)$.

$$l = 1, \quad m = 3, \quad n = 0.$$

$$\begin{aligned} 4a_1 + b_1 &= +4,99495, & 4\alpha + \beta &= +4,94945, \\ 4a_1 - b_1 &= +3,20745, & 4\alpha - \beta &= +5,01743, \\ a_1 + 4b_1 &= +4,60030, & \alpha + 4\beta &= +1,10990, \\ a_1 - 4b_1 &= -2,54970, & \alpha - 4\beta &= +1,38182; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(4a_1 + b_1) &= +73,837, & (4\alpha + \beta) \operatorname{ch}(4a_1 + b_1) &= +365,45, \\ -\operatorname{ch}(4a_1 - b_1) &= -12,378, & (4\alpha - \beta) \operatorname{ch}(4a_1 - b_1) &= +62,11, \\ \operatorname{ch}(a_1 + 4b_1) &= +49,762, & (\alpha + 4\beta) \operatorname{ch}(a_1 + 4b_1) &= +55,23, \\ -\operatorname{ch}(a_1 - 4b_1) &= -6,441, & (\alpha - 4\beta) \operatorname{ch}(a_1 - 4b_1) &= +8,90; \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \bar{p}_1(30) &= -104,780, & \bar{q}_1(30) &= +491,69. \end{aligned}$$

Après avoir déterminé de cette manière⁽¹⁾ les fonctions élémentaires

$$p_l(m, n) \quad \text{et} \quad q_l(m, n)$$

avec leurs dénominateurs

$$\bar{p}_l(m, n) \quad \text{et} \quad \bar{q}_l(m, n)$$

pour les indices

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

nous procédons à la construction des courbes pour les quotients

$$p_l(m, n) = \frac{p_l(m, n)}{p_l(m, n)}, \quad q_l(m, n) = \frac{q_l(m, n)}{q_l(m, n)}$$

(1) Il est avantageux d'employer, pour le calcul des fonctions hyperboliques, les Tables de George-F. Becker et C.-E. van Orstrand : *Smithsonian mathematical Tables Hyperbolic Functions*, publication n° 1871, Washington, 1909.

et comme ce sont ces courbes qui, plutôt que les valeurs numériques, sont propres à diriger les recherches, accomplies dans chaque cas individuel par le calcul numérique, ces courbes sont reproduites ci-après (Tableaux I-IV).

Les coefficients

$$R = \frac{\partial r}{\partial m_1} + \frac{\partial r}{\partial m_2},$$

$$D = \frac{\partial r}{\partial m_1} - \frac{\partial r}{\partial m_2},$$

qui sont employés pour réduire les corrections des arguments, c'est-à-dire $\Delta\pi$, $\Delta\varepsilon_1$, $\Delta\varepsilon_2$ à des écarts correspondants Δr , sont donnés dans le Mémoire cité : *Développement des intégrales du problème des trois corps.*

7. APERÇU DES DÉVELOPPEMENTS OBTENUS PAR LE PROCÉDÉ D'APPROXIMATION EXPOSÉ. RAYON VECTEUR. — Fonctions $\varepsilon_1(u, v)$ et $\varepsilon_2(u, v)$. — Les développements de ε_1 et ε_2 formés au premier abord sont les plus simples, donnés en effet par les formules

$$\varepsilon_1(u, v) = \kappa \frac{e}{c} \left[Q_0(0) + \frac{c}{e} Q_1(0) + \frac{c^2}{e^2} Q_2(2) + \dots \right],$$

$$\varepsilon_2(u, v) = \kappa \frac{e}{c} \left[Q_0(0) - \frac{c}{e} Q_1(0) + \frac{c^2}{e^2} Q_2(2) - \dots \right],$$

où l'on a désigné

$$Q_0(0) = +q_0(0) \\ - q_0(1),$$

et pour le reste

$$Q_i(m) = +q_i(m) \\ - q_i(m+1) \\ + q_i(m+2) \\ - q_i(m+3).$$

A chacun de ces développements s'adjoint un terme libre dans la combinaison

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_0, \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_0,$$

où

$$\varepsilon_0 = \kappa \frac{e}{c} (1-c) \frac{\sin u + \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1}.$$

Fonction $\eta(u, v)$. — L'expression de $\eta(u, v)$ est encore assez régulière et fut tantôt fixée sous la forme (1)

$$\begin{aligned}\eta(u, v) = & \frac{1+c}{2} \frac{1+x_1}{2} \eta_1(u, v)_1 \\ & - \frac{1+c}{2} \frac{1-x_1}{2} \eta_1(u, v)_2 \\ & + \frac{1-c}{2} \frac{1-x_1}{2} \eta_2(u, v)_1 \\ & - \frac{1-c}{2} \frac{1+x_1}{2} \eta_2(u, v)_2.\end{aligned}$$

Elle se trouve ainsi composée de quatre développements, savoir :

$$\begin{aligned}\eta_1(u, v)_1 = & + x \frac{e}{c} \left(P_0 - \frac{c}{e} P_1 - \frac{c^2}{e^2} P_2 + \dots \right) \\ \eta_1(u, v)_2 = & + x \frac{e}{c} \left(P_0 + \frac{c}{e} P_1 - \frac{c^2}{e^2} P_2 - \dots \right) \\ \eta_2(u, v)_1 = & + x \frac{e}{c} \left(P'_0 - \frac{c}{e} P'_1 + \frac{c^2}{e^2} P'_2 - \dots \right) \\ \eta_2(u, v)_2 = & + x \frac{e}{c} \left(P'_0 + \frac{c}{e} P'_1 + \frac{c^2}{e^2} P'_2 + \dots \right)\end{aligned}$$

Il faut supposer

$$\begin{aligned}P_0 = & p_0(0) & P'_0 = & + p_0(0) \\ & - p_0(1), & & + p_0(1); \end{aligned}$$

et, pour le reste,

$$\begin{aligned}P_l = & + p_l(m) & P'_l = & + p_l(m) \\ & - p_l(m+1) & & + p_l(m+1) \\ & + p_l(m+2) & & + p_l(m+2) \\ & - p_l(m+3), & & + p_l(m+3).\end{aligned}$$

Le terme libre adjoint à $\eta(u, v)$ est de la forme

$$\begin{aligned}\eta_0 = & - x \frac{1+c}{c} \frac{1-c}{c} \frac{\cos u - \cos v}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1} \\ & - 2x^2 \frac{1+c}{c} \frac{\cos u - \cos v}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}.\end{aligned}$$

(1) La quantité x_1 qui entre parfois dans les formules a la valeur

$$x_1 = -x \frac{1+c}{c} \frac{c}{e}.$$

Fonction $\Theta(u_1, v_1)$. — L'expression de $\Theta(u_1, v_1)$, déjà un peu plus compliquée, s'est trouvée de la forme préliminaire

$$\theta(u_1, v_1) = \frac{x h}{(4c)^2} \frac{c}{(c+1)(c-1)} \left\{ \left[P_0 + 4c \frac{e}{c} P_1 + (4c)^2 \frac{e^2}{c^2} P_2 + \dots \right] \right. \\ \left. + (4c)^2 \left[\frac{e^2}{c^2} P_3 + \dots \right] \right. \\ \left. + \dots \right\},$$

où nous avons obtenu

$$P_0 = -(c-1)p_0(0) \\ + (c-1)p_0(1), \\ P_1 = -c p_1(0) \\ + c p_1(2), \\ P_2 = -(c+1)p_2(2) \\ + (c-1)p_2(3) \\ + (c-1)p_2(4) \\ - (c+1)p_2(5), \\ P_3 = c p_3(5).$$

La valeur de la constante h est

$$h = (c+1) \frac{c}{e}.$$

Terme libre :

$$\theta_0 = x^2 (c+1) \frac{c}{e} \frac{\cos u_1 - \cos v_1}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}.$$

Fonction $\pi(u_1, v_1)$. — Pour la fonction $\pi(u_1, v_1)$, nous avons obtenu l'expression primaire (coefficients de phase : $\lambda = +1$, $\mu = -1$)

$$\pi(u, v) = 2h \left\{ \begin{array}{l} \star \\ -q_0(1) \end{array} \left| + \frac{e}{c} \right| + q_1(0) \right| + \frac{e^2}{c^2} \left| -q_2(3) \right| + \dots \left. \right\}.$$

Désormais, les termes supplémentaires ci-joints viennent d'être trouvés :

$$\Delta \pi(u_1, v_1) = \frac{c}{e} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{e}{c} q_1(1) - c \frac{e^2}{c^2} q_2(2) + [c(c+1)]^2 \cdot 2c \frac{e^3}{c^3} q_3(6) \\ - (c-2) \frac{e}{c} q_1(2) - c \frac{e^2}{c^2} q_2(4) - [c(c-1)]^2 \cdot 2 \frac{e^3}{c^3} q_3(4) \\ + (c-1) \frac{e}{c} q_1(3) - \dots \end{array} \right\}.$$

Terme libre à ajouter à $\pi + \Delta\pi$:

$$\begin{aligned} \pi_0 = & 2x^2(c+1)(c-1) \frac{c}{e} \frac{\sin u_1 - \sin v_1}{\alpha \operatorname{ch} a_1 - \beta \operatorname{ch} b_1} \\ & - 2x^2(c+1)(c-1) \frac{c}{e} \frac{\sin u - \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_1 - \beta \operatorname{ch} b_1}. \end{aligned}$$

8. APERÇU DES DÉVELOPPEMENTS OBTENUS PAR LE PROCÉDÉ D'APPROXIMATION EXPOSÉ. COORDONNÉE x . — Fonction $\omega(u, v)$. — Pour cette fonction, nous avons trouvé l'expression

$$\begin{aligned} \omega(u, v) = & x \left[p_0(10) + \frac{c}{e} p_1(v) + \frac{c-2}{2} \frac{c^2}{e^2} p_2(2) - x \frac{c^3}{e^3} p_3(4) \right. \\ & + x(c-2) \frac{c}{e} p_1(1) \quad \star \quad \star \\ & + x \frac{c}{e} p_1(2) + x(c+2) \frac{c^2}{e^2} p_2(4) + x(c+2) \frac{c^3}{e^3} p_3(5) \\ & \left. \star \quad \star \quad \star \right], \end{aligned}$$

le dernier terme étant presque insensible.

Le terme libre est

$$\omega_0 = 2x^2 p_0(10).$$

Fonction $\Omega(u, v)$. — Développement trouvé :

$$\begin{aligned} \Omega(u, v) = & x \left[x_1 p_1(0) + 1. \frac{c}{e} p_1(0) \right. \\ & + \star \\ & - 1. \frac{c}{e} p_1(2) \\ & \left. + x_1 \frac{c}{e} p_1(3) \right], \end{aligned}$$

sans terme libre.

Fonction $\chi(u, v)$. — L'expression trouvée pour cette fonction est

$$\begin{aligned} \chi(u, v) = & 2x \frac{c}{e} \left\{ 2c \frac{e}{c} q_1(0) + (2c)^2 \frac{e^2}{c^2} q_2(2) \right. \\ & \star \quad - (c-2)(2c)^2 \frac{e^2}{c^2} q_2(3) \\ & - 2c(c-2) \frac{e}{c} q_1(2) \quad \star \\ & - 2c \quad x_1 \frac{e}{c} q_1(3) \quad \star \\ & \left. + (2c)^3 \left[- (2c)^3 \frac{e^3}{c^3} q_3(6) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Fonction $\varepsilon(u, v)$. — L'expression trouvée que voici :

$$\varepsilon(u, v) = x \frac{e}{c} \left[\begin{array}{cc} * & * \\ * & -\frac{c^2}{e^2} q_2(3) \\ & \frac{c}{e} q_1(2) - \frac{c^2}{e^2} q_2(4) \\ * & * \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \right].$$

Fonction $\varpi(u, v)$ (1) :

$$\varpi(u, v) = x \frac{e}{c} \left[\begin{array}{cc} * & * \\ * & +\frac{c-2}{2} q_2(3) \\ & +(c-2) \frac{c}{e} q_1(2) + \frac{c+2}{2} q_2(5) \\ & -(c-2) \frac{c}{e} q_1(3) & * \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \right].$$

9. REMARQUES SUR LA FORME PRÉSUMABLE DES DÉVELOPPEMENTS DANS LE CAS GÉNÉRAL OU L'ORBITE DES DEUX CORPS A, B N'EST PLUS CIRCULAIRE OU HOMOPLANE. — Nous avons vu comment les fonctions

$$r(u, v), \theta(u_1, v_1), \dots,$$

considérées dans ce qui précède, s'obtiennent par les développements définis, assignés ci-dessus à chacune d'elles. Il faut seulement ajouter — et j'ai fait déjà cette remarque (2) — qu'il faut admettre, au lieu

(1) *Remarque.* — Si l'on fait supprimer le facteur x dans toutes les formules à sinus, ces fonctions seront immédiatement exprimées en degrés sexagésimaux.

(2) *Développements des intégrales du problème des trois corps. Rayon vecteur (loc. cit., p. 26, 27).*

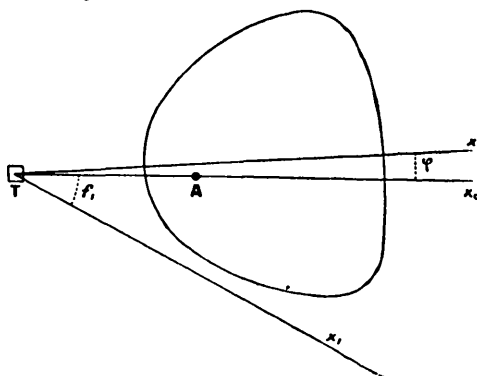
des développements immédiatement trouvés de la forme

$$(20) \quad f(u, v) = P_0 + \frac{c}{e} P_1 + \frac{c^2}{e^2} P_2 + \dots,$$

les développements plus généraux :

$$(20a) \quad f = P_0 + \frac{c}{e} P_1 \cos(\pi + \chi) + \frac{c^2}{e^2} P_2 \cos 2(\pi + \chi) + \dots,$$

où $\varphi = \pi + \chi$ est l'angle, nommé *l'axiale* ⁽¹⁾, formé du périhélie de l'orbite C avec le rayon $r_1 = AB$.



La fonction P_0 de ces formules contient le terme du *premier ordre*

$$P_0 = p_0(t) = k[\cos u - \cos v],$$

et P_1, P_2, \dots contiennent des *termes supérieurs* à multiples croissants des arguments u, v .

Reprenons d'un autre côté l'expression primaire finie du rayon vecteur

$$(21) \quad r = A \left[1 - \frac{\lambda \cos u + \mu \cos v}{\lambda \operatorname{ch} a_1 + \mu \operatorname{ch} b_1} \right] + A_3.$$

C'est encore une expression du *premier ordre* de la forme

$$P_0 = p_0(t) = 1 - e_1 \cos u - \mu_1 e_1 \cos v.$$

⁽¹⁾ Comme, dans le cas présent, l'angle $\pi + \chi$ est très petit, n'excédant guère 2° , l'application des facteurs $\cos(\pi + \chi) \dots$ dans la formule ci-dessus n'a pas d'effet sensible sur l'expression.

abstraction faite de la constante A_3 . Les coefficients de phase donnés ci-dessus (p. 373) diffèrent ici des valeurs

$$\pm 1.$$

Est-il possible de développer cette expression (21) en une série infinie, procédant suivant les multiples de

$$\pi + \chi,$$

pour en avoir une expression de la forme (20a) citée ci-dessus ? On aurait ainsi

$$(21 a) \quad r = A \left[P_0 + \frac{e}{e} P_1 \cos(\pi + \chi) + \dots \right]$$

ou bien approximativement

$$(21 b) \quad r = A \left(P_0 + \frac{e}{e} P_1 + \dots \right),$$

expression qui se trouve en contradiction avec l'expression (21), qui est l'expression de r délivrée de $\pi + \chi$, et qui satisfait à l'orbite actuelle.

Mais considérons le cas où l'orbite AB n'est plus un cercle. Nous pouvons alors assigner à cette orbite une *excentricité*

$$e_3$$

et une *anomalie* (soit l'*anomalie vraie*, soit l'*anomalie excentrique*)

$$f_1 \text{ ou } w$$

qui, pour le cas de l'anomalie vraie, n'est autre chose que l'angle formé par l'axe AB avec la direction du périhélie de r_1 (voir la figure). Ainsi les deux angles $\pi + \chi$ et f_1 se correspondent mutuellement, exprimant la distance angulaire de la ligne AB d'une part du périhélie de r et, d'autre part, du périhélie de r_1 .

Nous venons de remarquer que l'angle

$$\pi + \chi$$

ne peut pas être appliqué pour le développement de l'expression

finie (21) de r , en ajoutant des termes

$$\begin{aligned} & P_1 \cos (\pi + \gamma), \\ & P_2 \cos 2(\pi + \gamma), \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Mais, au contraire, dans le cas général, où l'excentricité e_3 n'est pas nulle, un tel développement est bien possible. Posons, en effet,

$$r = A(P_0 + e_3 P_1 \cos \omega + e_3^2 P_2 \cos 2\omega + \dots),$$

où P_0 est donnée par l'expression (21) et P_1, P_2, \dots sont les termes supérieurs (1) formés avec les coefficients de phase

$$\lambda = 1, \quad \mu = 1 - \frac{eh a_1^{-1}}{3},$$

appartenant à l'expression (21). Alors, pour

$$e_3 = 0,$$

l'expression (22) se réduit à l'expression primaire (20) qui correspond au mouvement circulaire de AB. Il s'ensuit que la formule est vraisemblablement un développement appartenant au cas général où l'orbite AB n'est plus circulaire (2). Mais ce développement, fondé sur les fonctions

$$P_n = P_n(u, v),$$

ne contient pas l'axiale ou l'angle $\pi + \gamma$. Mais, en faisant rentrer l'anomalie ω (*excentrique*) dans les fonctions P_n , on peut au contraire supposer la forme

$$(22) \quad r = A[P_0(u, v, \omega) + P_1(u, v, \omega) \cos(\pi + \gamma) + \dots].$$

En posant le troisième coefficient de phase

$$\nu = 0$$

(1) Voir *Integralentwicklungen des Dreikörperproblems* (*Astron. iakt. och unders. Stockholm Observatorium*, Bd. IX, n° 2, 1902, p. 16 et suiv.).

(2) Il faut supposer que ω soit, dans ce cas, l'anomalie *excentrique*, analogue aux arguments u, v .

et supposant le module de l'excentricité

$$c = \infty \quad \left(e_3 = \frac{1}{\operatorname{ch} c} \right)$$

pour $e_3 = 0$, l'expression (22) se réduit à la forme finie (21)

$$r = A P_0(u, v).$$

L'expression (22) paraît ainsi être une généralisation appropriée de la forme finie (6).

Ce que nous avons dit, à cet égard, de r s'applique également à la coordonnée x et aux équations des arguments u, v .

De plus, nous avons trouvé pour les diverses fonctions

$$\eta_1(u, v), \quad \theta(u_1, v_1), \quad \dots$$

de certains *termes libres*, qu'il faut ajouter aux développements réguliers de ces fonctions. Ces termes libres sont partout de la forme

$$\eta_0, \theta_0 \dots = P_0 = p_0(t)$$

ou bien

$$\varepsilon_0, \pi_0 \dots = Q_0 = q_0(t).$$

Il est par conséquent indiqué que ces termes libres soient les termes premiers de développements qui, dans le cas général, procèdent suivant les multiples de ω ou f_1 , c'est-à-dire des séries infinies de la forme

$$(23) \quad \eta_0, \theta_0 \dots = P_0 + e_3 P_1 \cos \omega + e_3^2 P_2 \cos 2\omega + \dots;$$

mais alors, avec les coefficients de phase

$$(24) \quad \frac{\lambda}{\mu} = +1.$$

Pour $e_3 = 0$, ces séries se réduisent aux termes libres actuellement trouvés dans le cas du mouvement circulaire des corps A, B.

Sur ce point nous pouvons nous demander s'il y a, dans le cas général, des développements à double entrée, procédant suivant les

multiples des deux angles

$$\varphi = \pi + \chi \quad \text{et} \quad \omega,$$

c'est-à-dire de la forme

$$(25) \quad \eta = P_{00} + P_{10} \cos \varphi + P_{20} \cos 2\varphi + \dots \\ + P_{01} \cos \omega + P_{11} \cos(\varphi + \omega) + \dots \\ + P_{02} \cos 2\omega + \dots$$

D'après les résultats obtenus, les fonctions η, Θ, \dots sont représentées par des séries régulières

$$(26) \quad \eta, \Theta, \dots = P_0 + \frac{c}{\rho} P_1 \cos \varphi + \frac{c^2}{\rho^2} P_2 \cos 2\varphi + \dots,$$

où les fonctions P_0, P_1, P_2, \dots forment une suite systématique, de manière que P_0 soit bien définie, dès que les fonctions suivantes P_1, P_2, \dots sont connues. En outre, le terme libre

$$(27) \quad \eta_0, \Theta_0, \dots = kP'_0$$

vient s'ajouter.

Si alors on voulait adopter la forme (25) à double entrée, il faudrait supposer, par comparaison avec le développement particulier (26),

$$P_{10} = \frac{c}{\rho} P_1,$$

$$P_{20} = \frac{c^2}{\rho^2} P_2,$$

$$\dots, \dots,$$

et, par suite de ces déterminations, aussi

$$(28) \quad P'_{00} = P_0.$$

Mais, d'autre part, et en considérant le développement (26) en soi avec son terme libre (27), on devrait s'attendre à avoir

$$(29) \quad P_{00} = P_0 + kP'_0.$$

Le terme libre serait cependant, selon (28), superflu. Par cette considération, l'hypothèse (25) paraît bien abrogée et il faut au con-

traire supposer

$$(30) \quad \eta = P_0 + P_1 \cos \varphi + P_2 \cos 2\varphi + \dots \\ + P'_0 + P'_1 \cos \omega + P'_2 \cos 2\omega + \dots,$$

c'est-à-dire une expression composée de deux séries indépendantes et parallèles correspondant à l'un et l'autre des arguments φ et ω .

Cette circonstance est d'autant plus remarquable qu'elle comporte une simplification notable de la représentation analytique du mouvement dans le cas général du problème qui nous occupe. La forme simple (30), assignée aux fonctions η , Θ , ..., se trouve encore confirmée par la considération de la difficulté de s'imaginer un développement à double entrée comme (25) appliqué pour la représentation de r [voir (21), (21a), (21b), (22)]. En cherchant la généralisation de l'expression (21) de r , c'est en effet seulement le développement (22) qui se donne conformément à la nature du problème, toute autre forme du développement paraissant bien exclue.

Toutefois, en adoptant l'expression (30), il faut bien substituer pour ω l'anomalie vraie

$$f_1$$

appartenant au rayon r_1 . En effet, les deux angles

$$\varphi \text{ et } f_1$$

se correspondent par rapport à la ligne AB (voir la figure) et il faut accepter l'expression

$$(31) \quad \eta = P_0(u, v) + P_1(u, v) \cos \varphi + P_2(u, v) \cos 2\varphi + \dots \\ + P'_0(u, v) + e_3 P'_1(u, v) \cos f_1 + e_3^2 P'_2(u, v) \cos 2f_1 + \dots$$

au lieu de (30). Comme on a

$$\varphi = \pi + \gamma,$$

il s'ensuit

$$(32) \quad \varphi + f_1 = \pi - \varpi_1,$$

où ϖ et ϖ_1 sont les longitudes des périhélie. Ainsi nous aurons

$$(33) \quad \varphi = -f_1 + \varpi - \varpi_1.$$

et l'axiale contient de cette manière la quantité

$$\varpi - \varpi_1$$

caractéristique pour les perturbations séculaires soit de e , soit de ϖ .

Si de plus nous désignons par

$$l, \quad l_1$$

les longitudes vraies, on aura de même

$$(33a) \quad \varphi = - (l_1 - \varpi).$$

Si l'orbite de C ne coïncide pas avec l'orbite AB, c'est-à-dire si l'inclinaison des deux orbites n'est pas nulle, il s'ensuit encore une généralisation des formules (31). Dans ce cas, il faut substituer à l'axiale les deux angles

$$\varpi - \Omega \quad \text{et} \quad f_1 + \varpi_1 - \Omega = l_1 - \Omega,$$

où Ω soit la longitude commune des nœuds au plan invariable. Le mouvement dépend alors des deux angles

$$\varphi = -f_1 + \varpi - \varpi_1 \quad \text{et} \quad \varphi_1 = f_1 + \varpi - \varpi_1 - 2\Omega,$$

ou bien

$$\varphi = l_1 - \varpi \quad \text{et} \quad \varphi_1 = l_1 + \varpi - 2\Omega,$$

ou encore de

$$\varphi = \lambda_1 - \omega \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \lambda_1 + \omega,$$

en posant

$$\lambda_1 = l_1 - \Omega, \quad \omega = \varpi - \Omega.$$

Il faut alors supposer, au lieu de (31),

$$(34) \quad \begin{aligned} \eta = & P_0(u, v) + P_1(u, v) \cos \varphi + \dots \\ & + P'_0(u, v) + e_3 P'_1(u, v) \cos f_1 + \dots \\ & + P''_0(u, v) + j^2 P''_1(u, v) \cos \varphi \cos \varphi_1 + \dots \\ & + P'''_0(u, v) + j^2 P'''_1(u, v) \cos f_1 \cos \varphi + \dots \\ & + P^{iv}_0(u, v) + j^2 P^{iv}_1(u, v) \cos f_1 \cos \varphi_1 + \dots \end{aligned}$$

C'est une généralisation de la formule primordiale

$$\eta = P_0(u, v) + P_1(u, v) \cos \varphi + \dots$$

contenant *quatre* développements adjoints.

L'expression (34) se trouve justifiée par la considération des termes libres trouvés ci-dessus, qui sont composés, en général, de *quatre* termes simples (¹), comme on trouve, en résolvant leurs coefficients. Si, au contraire, on cherchait à généraliser l'expression primordiale de η par l'introduction des fonctions à trois variables

$$P_n(u, v, w)$$

comme nous l'avons fait pour le rayon vecteur r , il serait difficile d'en tirer *quatre* développements adjoints. On en obtient, en effet, ou *trois* ou bien *cinq*.

Pour le mouvement AB, circulaire et uniforme dans le cas considéré, nous avons seulement

$$r_1 = \Lambda_1, \quad f_1 = w = n_3 t.$$

Dans le cas général, il faudrait supposer l'expression

$$(35) \quad r_1 = A_1 [P_0(u, v, w) + P_1(u, v, w) \cos \varphi + \dots]$$

qui se réduit, pour

$$\lambda = \mu = 0, \quad \nu = 1, \quad c = \infty, \quad e_3 = \frac{1}{\text{ch } c},$$

à

$$r_1 = \Lambda_1 = \text{const.}$$

Quant aux fonctions η , etc., elles n'existent pas dans notre cas pour r , et il n'y a pas, par conséquent, de *termes libres*. Il n'est pas possible d'en conclure que ces fonctions vont manquer dans le cas général, quoique cela puisse paraître à un certain degré vraisemblable.

Mais, si la masse de C n'est plus *zéro*, il faut s'attendre à des fonc-

(¹) Il fut dès lors prouvé que ces termes se réduisent à *deux* au plus (voir *Archives de l'Académie des Sciences*, Bd. X, n° 8, Stockholm, 1914, p. 29) et désormais (*Ibid.*, Bd. X, n° 26, p. 9) qu'ils se doivent même réduire à *un seul* terme, exclusivement lié à l'inclinaison mutuelle des orbites.

tions η , etc., appartenant au rayon r_1 , et en général analogues à celles qui valent pour le rayon r . Il y aura alors aussi des *termes libres*. Dans ce cas, on n'aura plus à supposer $c = \infty$.

Remarquons encore que les variations séculaires de e et de ϖ sont données par les équations connues

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \boxed{01} e' \sin(\varpi' - \varpi), \\ \frac{d\varpi}{dt} &= (01) - \boxed{01} \frac{e'}{e} \cos(\varpi' - \varpi).\end{aligned}$$

et que par conséquent les expressions de e et de ϖ doivent contenir l'argument

$$\varpi' - \varpi.$$

Cet argument n'est pas représenté par les expressions (34), ce qui peut paraître un défaut de la formule. Mais, par contre, l'argument $\varpi - \varpi'$ va être introduit par l'expression (22) de r et par les équations des arguments y correspondants.

Ces remarques rapides que nous venons de faire sur la forme présumable de la solution, dans le cas le plus général de notre problème, suffiront pour le moment pour guider la considération de ce cas par l'étude d'une orbite convenable. Il faut encore renvoyer à une recherche récemment publiée dans les *Archives de l'Académie des Sciences*, Bd. 33, Stockholm, 1915, sur la représentation, dans le problème dont il s'agit, du mouvement pendulaire et des mouvements séculaires ainsi que sur les développements suivant les puissances de l'inclinaison mutuelle des orbites.

(A suivre.)

TABLE I. — $\varepsilon(u, v)$.

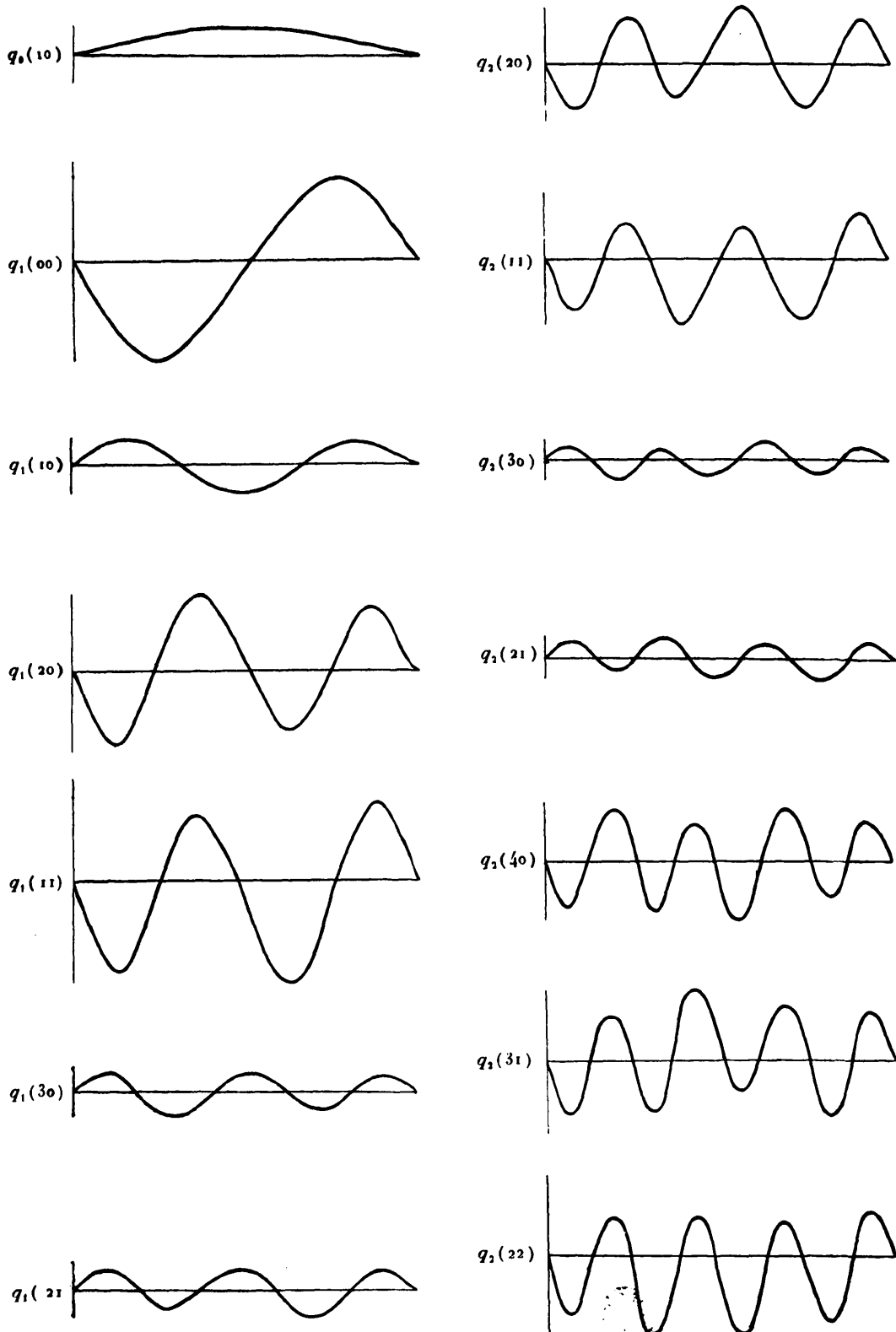


TABLE I. — $\varepsilon(u, v)$ (suite).

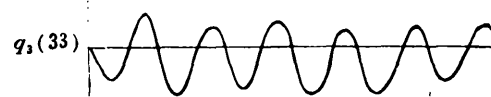
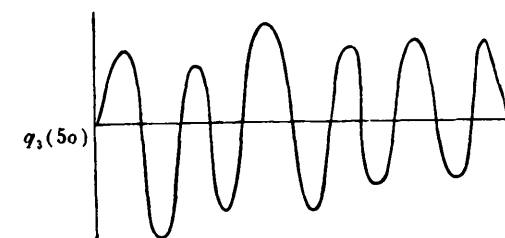
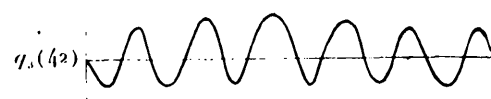
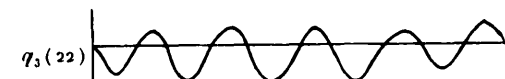
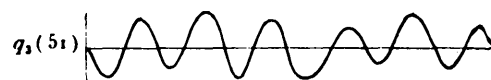
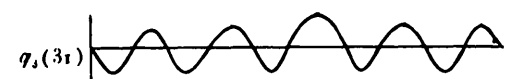
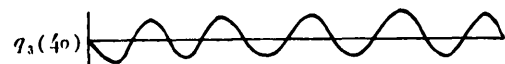
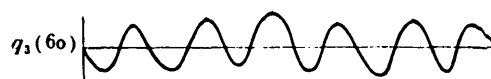
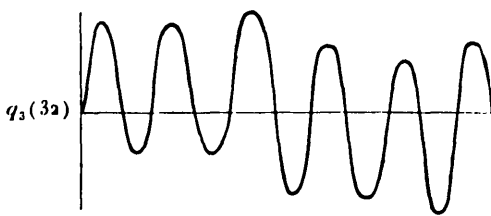
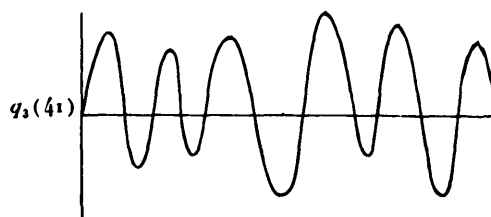


TABLE II. — $\eta(u, \nu)$.

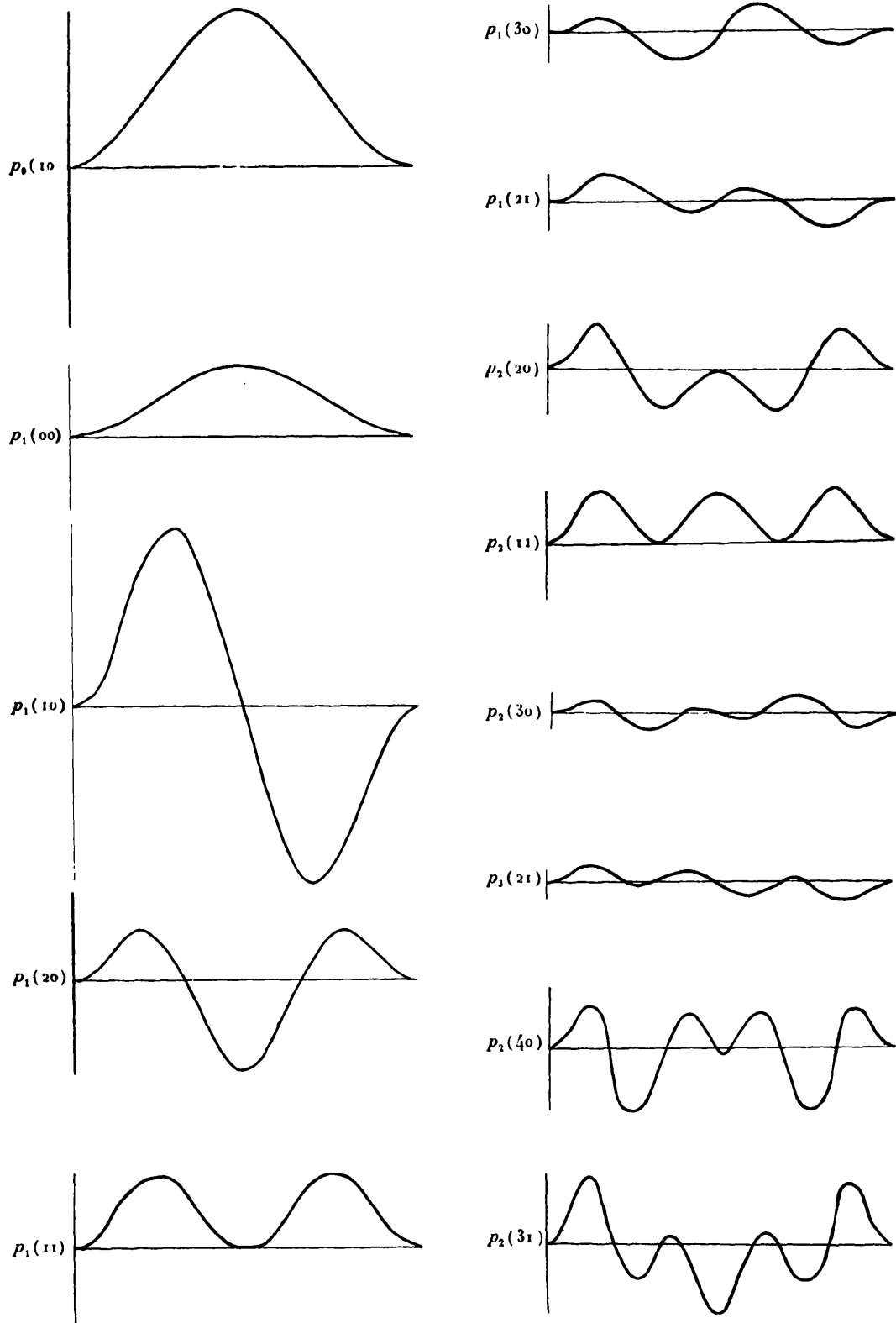


TABLE II. — $\eta(u, v)$ (suite).

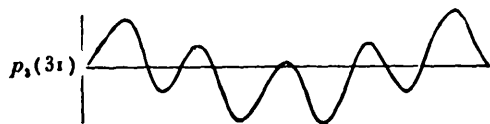
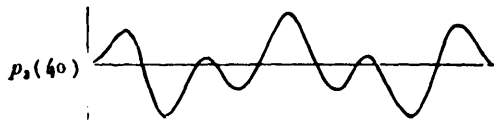
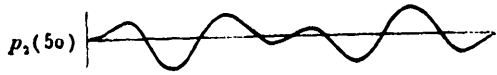
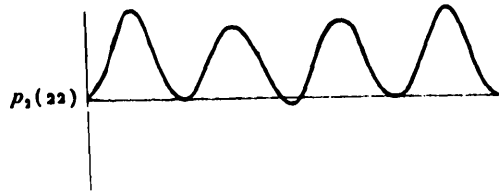


TABLE III. — $\pi(u_1, v_1)$.

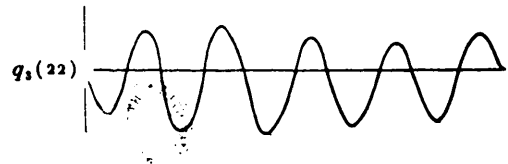
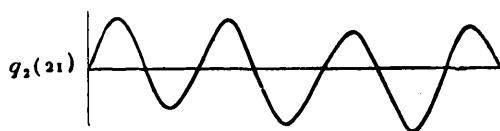
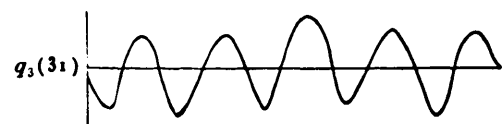
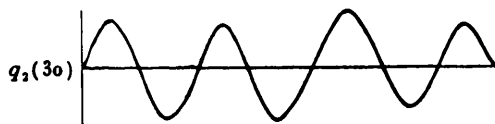
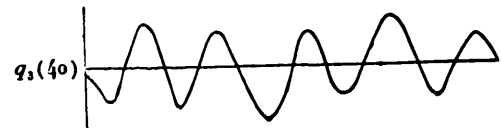
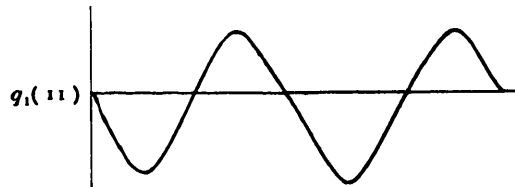
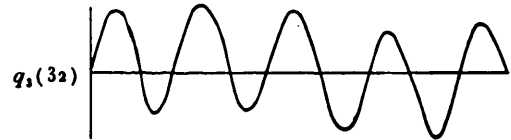
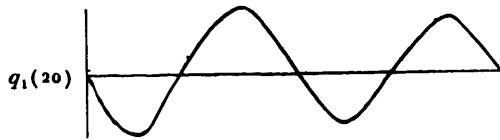
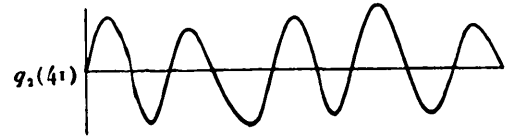
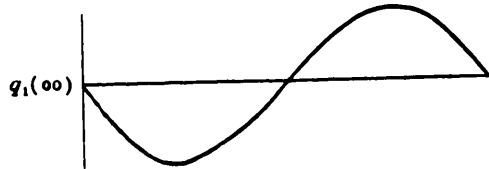
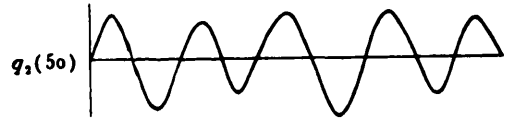
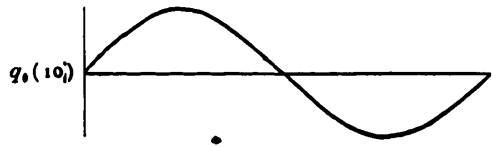


TABLE IV. — $\theta(u_1, v_1)$.

