JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. GONGGRŸP

Quelques théorèmes concernant la relation entre les zéros d'un polynôme et ceux d'un polynôme de degré inférieur

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 353-365.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__353_0>

Quelques théorèmes concernant la relation entre les zéros d'un polynome et ceux d'un polynome de degré inférieur;

Par B. GONGGRYP,

Docteur ès Sciences, à Amsterdam.

Plusieurs savants ont tâché d'étendre le théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations. L'extension de Liouville date de l'an 1864 (*Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 84). Elle donne une relation intéressante entre les zéros complexes de $f(z)$ et de $f'(z)$; aussi dans la démonstration la *griffe du lion* se manifeste. Pourtant le théorème exige l'étude des *courbes* $Q = 0$, qui sont en général du même degré que $f(z)$ [1]; en outre il faut admettre que deux zéros de $f(z)$ peuvent être liés par une telle courbe *d'un trait continu*. Mais ces courbes $Q = 0$ sont en général de nature hyperbolique, de sorte que le trait continu est souvent impossible; par conséquent l'application pratique du théorème devient illusoire.

En 1902, M. Ch.-J. de la Vallée-Poussin [2] a attaqué le problème de nouveau par des courbes, c'est-à-dire par des *cassinoïdes*, $\mathrm{mod} f(z) = a$, et des *trajectoires*, $\arg f(z) = 0$.

Le résultat principal de ses recherches est le théorème que voici :

La trajectoire qui réunit deux racines consécutives d'une équation passe au moins par une racine de la dérivée.

(1) Quand tous les coefficients de $f(z)$ sont réels, $Q = 0$ se décompose en l'axe des X et une courbe du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré.

(2) *Mathesis*, 3e série, t. II, 1902, supplément.

La trajectoire qui réunit deux racines quelconques d'une équation passe au moins par une racine de la dérivée et au moins par autant d'autres racines en plus que de racines intermédiaires de l'équation.

Dans le cas où une équation a ses coefficients réels et possède des racines réelles, la trajectoire qui réunit ces racines réelles n'est autre chose que l'axe réel et le théorème se réduit au théorème de Rolle.

Du point de vue pratique ce théorème a les mêmes défauts que celui de Liouville : l'étude des courbes $\arg f(z) = \theta$ est incompatible avec des applications simples.

C'est à Félix Lucas ([1]) qu'on doit un troisième théorème qui a fait quelque éclat. Voici ce théorème :

Dans tout contour convexe qui enferme tous les zéros de $f(z)$ se trouvent aussi tous les zéros de $f'(z)$.

La démonstration de F. Lucas est assez prolixe; lui aussi se sert de deux systèmes de courbes qu'il appelle *cassinoïdes* et *stelloïdes* et qui reviennent aux courbes $\operatorname{mod} f(z) = a$ et $\arg f(z) = \theta$ employées 23 ans après par M. de la Vallée-Poussin.

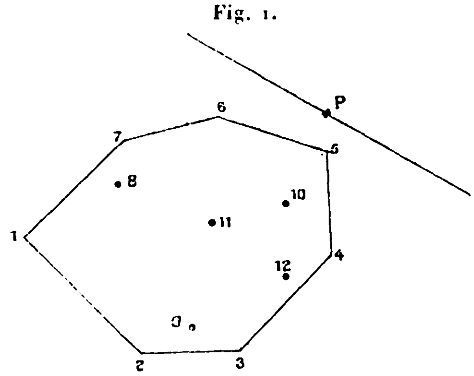
Outre ces systèmes de courbes orthogonales F. Lucas introduit encore quelques notations analytiques empruntées de la Mécanique. Aux points différents d'un groupe M il accorde l'unité de *masse;* il suppose que ces points repoussent un point arbitraire P avec des forces qui sont en raison inverse de leurs distances à ce point. La résultante de ces forces reçoit le nom d'*action algébrique du groupe sur ce point;* cette action possède un *potentiel,* etc. Il me paraît étrange d'introduire dans l'Analyse des notations et des raisonnements mécaniques. C'est pour ainsi dire le monde renversé. Au contraire, rien de plus naturel que d'employer dans les Mathématiques *appliquées* (Mécanique, Physique mathématique, etc.) les raisonnements de l'Analyse, par exemple de l'analyse des *vecteurs,* sœur jumelle de la théorie des fonctions de quantités complexes.

([1]) *Géométrie des polynomes* (*Journal de l'École Polytechnique*, 46e Cahier, 1879).

Dans les pages suivantes j'expose une démonstration très simple et purement analytique d'un théorème dont découle immédiatement celui de Lucas. J'y ajoute un théorème équivalent concernant une autre fonction du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré, méconnue jusqu'à présent, mais tout aussi digne de remarque que la dérivée. De ces théorèmes je tirerai quelques conséquences.

Lemme I. — Un ensemble de points séparés, situés dans un même plan et dont aucun ne s'éloigne à l'infini, s'arrange toujours de manière que quelques-uns de ces points occupent les sommets d'un polygone

Fig. 1.



convexe à *l'intérieur* duquel se trouvent les autres. Ce polygone nous l'appellerons *polygone limite* (*fig.* 1).

Lemme II. — Par un point qui se trouve à *l'extérieur* d'un polygone *convexe* on peut toujours mener une droite infinie, qui ne rencontre la circonférence nulle part (qui reste toute en dehors du polygone) (*fig.* 1).

THÉORÈME I. — *Aucun des zéros de la dérivée $f'(z)$ d'un polygone $f(z)$ ne peut se trouver en dehors du polygone limite des zéros de $f(z)$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $f(z)$ ne possède pas de zéros multiples. (Nous verrons après que ce théorème renferme ce cas.) Alors les zéros de $f'(z)$ sont en même temps les racines de l'équation

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0.$$

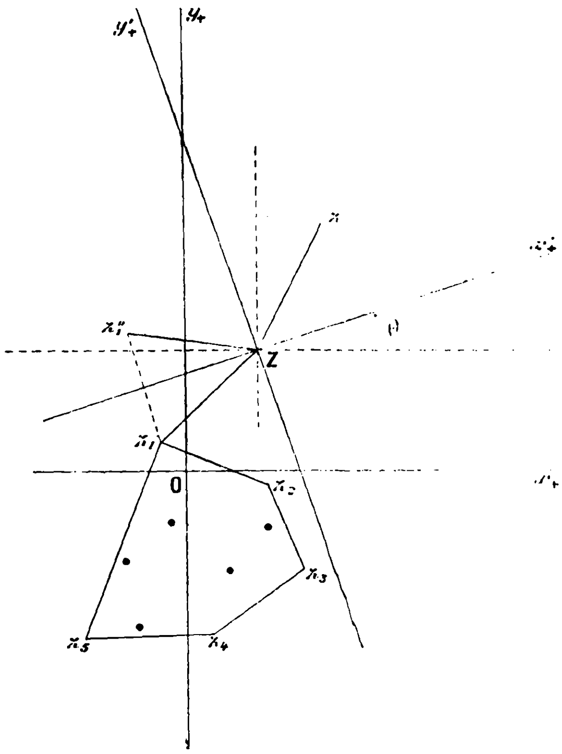
Soit ζ une de ces racines et supposons qu'elle soit située en dehors du polygone limite des zéros de $f(z)$.

Alors il faut que

$$(1) \qquad \frac{1}{z_1-\zeta} + \frac{1}{z_2-\zeta} + \ldots + \frac{1}{z_n-\zeta} = 0.$$

Transportez l'origine à ζ; faites tourner le système autour de ce point jusqu'à ce que l'axe des X (ou l'axe des Y) tombe tout en dehors du polygone limite des zéros de $f(z)$. Soit l'angle de rotation $= \theta$.

Fig. 2.



Regardez d'abord un point arbitraire z. Par rapport au nouveau système nous l'appellerons z'. Alors $\mathrm{mod}(z-\zeta)$ deviendra $\mathrm{mod}\, z'$;

mais

$$\arg(z-\zeta) \quad \text{sera} \quad \arg z' + \theta,$$

de sorte que

$$z - \zeta = z' e^{i\theta} \quad \text{ou} \quad z = \zeta + z' e^{i\theta}.$$

Par cette transformation nous aurons donc

$$z_k - \zeta = z'_k e^{i\theta}.$$

Par conséquent (1) se transforme en

$$(1'') \qquad \frac{1}{z'_1 e^{i\theta}} + \frac{1}{z'_2 e^{i\theta}} + \ldots + \frac{1}{z'_n e^{i\theta}} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \frac{1}{z'_k} = 0.$$

Le calcul du premier membre de cette équation revient à la composition des n vecteurs $\frac{1}{z'_k}$. Chacun d'eux est situé symétriquement avec un vecteur z'_k par rapport à l'axe des X (les modules ont des valeurs réciproques). Or, si le polygone limite est situé tout d'un côté de l'axe des X, alors tous les vecteurs $\frac{1}{z'_k}$ se trouveront de l'autre côté de cet axe. Les composantes $V_{y'_k}$ s'étendront toutes le long de la partie positive (ou négative) de l'axe des Y. Jamais la somme de ces $V_{y'_k}$ ne s'annulera; par conséquent le vecteur $\sum \frac{1}{z'}$ ne s'annulera pas non plus, car pour cela il est indispensable qu'à la fois $\Sigma V_{x'} = 0$ et $\Sigma V_{y'} = 0$.

Il s'ensuit immédiatement qu'il est impossible que ζ se trouve en dehors du polygone limite de $f(z)$.

Le théorème renferme le cas des zéros multiples; on sait qu'un zéro de multiplicité p de $f(z)$ est un zéro de multiplicité $p-1$ de la dérivée. Les $p-1$ racines égales de $f'(z)$ sont représentées par le même point que les p racines multiples de $f(z)$.

Le théorème de F. Lucas en est une conséquence immédiate : quand les zéros de $f'(z)$ sont enfermés tous dans le polygone limite de $f(z)$, ou bien dans les sommets de celui-ci, ils se trouvent à plus forte raison dans un contour convexe, qui entoure ce polygone.

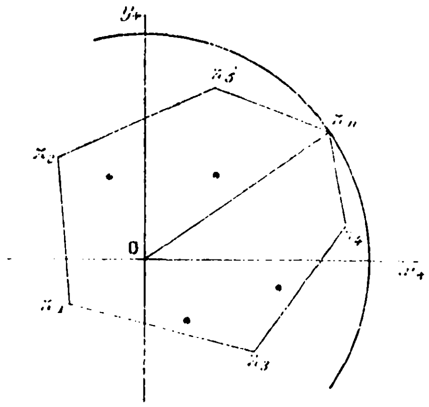
Maintenant, appelons un zéro plus grand qu'un autre, quand son module surpasse celui du second. Alors du théorème I découle comme corollaire :

THÉORÈME II. — *Le module du zéro maximum de la dérivée d'un polynome ne peut pas surpasser celui du zéro maximum du polynome.*

En effet, soit z_n le zéro maximum de $f(z)$. Alors Oz_n surpasse tous les autres modules Oz_1, Oz_2, etc.

Un cercle décrit du point O avec le rayon Oz_n embrasse tout le

Fig. 3.



polygone limite de $f(z)$ à l'exception du sommet z_n qui est située sur sa circonférence. Quand z_n est multiple, un zéro simple ou multiple de $f'(z)$ tombe sur ce point et possède le même module que celui-ci; autrement tous les zéros de $f'(z)$ sont situés à l'intérieur du cercle et par conséquent leurs modules sont moindres que celui de z_n.

A ce théorème nous rattacherons le suivant :

THÉORÈME III. — *Le module du zéro minimum d'un polynome $f(z)$ du degré n ne peut pas surpasser celui du zéro minimum de $nf(z) - zf'(z)$.*

Démonstration. — On peut obtenir l'équation $nf(z) - zf'(z) = 0$ de la manière suivante :

Formez la transformée en $\frac{1}{z}$ de l'équation $f(z) = 0$; elle peut être représentée par

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0. \tag{2}$$

Formez la dérivée de celle-ci

$$z^n f'\left(\frac{1}{z}\right) \times - \frac{1}{z^2} + n z^{n-1} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0. \tag{3}$$

Transformez cette dernière équation [du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré] encore une fois en remplaçant z par $\frac{1}{z}$; il vient

$$z^{n-1}\left[\frac{1}{z^n} f'(z) \times - z^2 + \frac{n}{z^{n-1}} f(z)\right] = 0$$

ou

$$-z f'(z) + n f(z) = 0. \tag{4}$$

L'équation (2) possède les racines $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$, desquelles $\frac{1}{z_1}$ a le module *maximum* (¹).

Appelons les racines de (3) $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_{n-1}$.

Alors nous aurons

$$|\zeta'_{n-1}| \leqq \left|\frac{1}{z_1}\right|. \tag{5}$$

Ensuite $\frac{1}{\zeta'_{n-1}}$ devient la racine *minimum* de (4).

De (5) il s'ensuit alors

$$\left|\frac{1}{\zeta'_{n-1}}\right| \geqq |z_1|$$

ou bien

$$|z_1| \leqq \zeta_1. \qquad \text{C. Q. F. D. (}^2\text{).}$$

Le cas $|z_1| = |\zeta_1|$ se présente, quand $f(z)$ a des zéros multiples; alors $f(z)$ et $f'(z)$ et par conséquent $nf(z) - zf'(z)$ s'annulent à la fois.

Pour l'équation $nf(z) - zf'(z) = 0$ nous proposons le nom de ***réduite;*** comme la dérivée elle est du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré; elle a des rapports analogues avec $f(z) = 0$.

Remarquons que cette réduite peut se mettre sous des formes

(¹) Nous supposons les zéros z_k ordonnés par rapport aux modules croissants.

(²) ζ_k sont les zéros de $nf(z) - zf'(z)$.

remarquables. De $nf(z) - zf'(z) = 0$ on tire

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = n;$$

$$\frac{z}{z - z_1} + \frac{z}{z - z_2} + \ldots + \frac{z}{z - z_n} = n;$$

$$\frac{z}{z - z_1} - 1 + \frac{z}{z - z_2} - 1 + \ldots + \frac{z}{z - z_n} - 1 = 0$$

$$\frac{z_1}{z - z_1} + \frac{z_2}{z - z_2} + \ldots + \frac{z_n}{z - z_n} = 0. \tag{6}$$

En posant

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

on trouve

$$\begin{aligned} (7) \qquad & nf(z) - zf'(z) \\ & = a_1 z^{n-1} + 2a_2 z^{n-2} + 3a_3 z^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-1} z + na_n = 0. \end{aligned}$$

Pour la réduite d'un polynome $f(z)$ nous pouvons énoncer un théorème comparable à celui de F. Lucas concernant la dérivée :

Théorème IV. — *Quand tous les zéros du polynome $f(z)$ sont situés en dehors d'un cercle, décrit de l'origine comme centre avec un rayon* R, *alors tous les zéros de $nf(z) - zf'(z)$ se trouvent aussi en dehors du même cercle.*

Démonstration. — La transformée en $\frac{1}{z}$ aura les zéros $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$. Quand $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont situés tous en dehors du cercle de rayon R, alors $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$ se trouvent à *l'intérieur* d'un cercle de rayon $\frac{1}{R}$. Formez maintenant la dérivée. Les zéros en sont situés tous à l'intérieur du même cercle. Formez enfin la transformée de cette dérivée en $\frac{1}{z}$: tous les zéros de celle-ci se trouveront *en dehors* du cercle de rayon R.

Les théorèmes précédents fournissent des limites pour les modules des zéros complexes des polynomes. Le théorème I donne une limite inférieure pour le module du zéro maximum, le théorème III procure une limite supérieure pour le module du zéro minimum; car on peut continuer aisément la dérivation ou la *réduction* jusqu'à ce qu'on ait obtenu une équation carrée ou linéaire.

Posons

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

On trouve

$$f^{(n-2)}(z) \equiv n(n-1)\ldots 3 a_0 z^2 + (n-1)\ldots 2 a_1 z + (n-2)\ldots 1 a_2;$$
$$f^{(n-1)}(z) \equiv n(n-1)\ldots 2 a_0 z + (n-1)(n-2)\ldots 1 a_1.$$

Quant aux réduites successives on a

$$f_1(z) \equiv a_1 z^{n-1} + 2 a_2 z^{n-2} + 3 a_3 z^{n-3} + \ldots + (n-1) a_{n-1} z + n a_n;$$
$$f_{n-2}(z) \equiv (n-2)(n-3)\ldots 1.a_{n-2} z^2 + (n-1)(n-2)\ldots 2 a_{n-1} z + n(n-1)\ldots 3 a_n;$$
$$f_{n-1}(z) \equiv (n-1)(n-2)\ldots 1.a_{n-1} z + n(n-1)\ldots 2 a_n.$$

On en déduit aisément

$$|z_n| \geqq \sqrt{\frac{2|a_2|}{n(n-1)a_0}}, \qquad |z_n| \geqq \frac{|a_1|}{n};$$
$$|z_1| \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)|a_n|}{2|a_{n-2}|}}, \qquad |z_1| \leqq \frac{n|a_n|}{a_{n-1}}.$$

Il y a plus : parce que le produit de tous les modules de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ est égal à $\left|\frac{a_n}{a_0}\right|$, il est évident que

$$|z_n| \geqq \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|}, \qquad |z_1| \leqq \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|}.$$

A l'aide des dérivées consécutives on trouve en général

$$|z_n| \geqq \sqrt[n-k]{\frac{k(k-1)\ldots 1\,|a_{n-k}|}{n(n-1)\ldots(n-k+1)\,|a_0|}}.$$

Les réduites procurent l'inégalité

$$|z_1| \leqq \sqrt[n-k]{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\,|a_n|}{k(k-1)\ldots 1\,|a_k|}}.$$

Pour des applications pratiques on peut choisir la valeur de k la plus favorable.

Par rapport aux racines réelles la réduite possède une propriété remarquable.

THÉORÈME V. — *Entre deux racines consécutives réelles et* de même signe *d'une équation algébrique se trouve toujours une racine réelle de la réduite.*

Démonstration. — Soit

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - n = \frac{z_1}{z - z_1} + \ldots + \frac{z_k}{z - z_k} + \frac{z_{k+1}}{z - z_{k+1}} + \ldots + \frac{z_n}{z - z_n} = 0.$$

Posez d'abord $z = z_k + \Delta$; alors

$$\frac{z_k}{z - z_k} = \frac{z_k}{+\Delta}.$$

Mettez ensuite $z = z_{k+1} - \Delta$; alors

$$\frac{z_{k+1}}{z - z_{k+1}} = \frac{z_{k+1}}{-\Delta}.$$

On peut toujours choisir Δ assez petit pour que les termes considérés déterminent le signe du premier membre de l'équation.

Or on voit que, quand z_k et z_{k+1} ont le même signe, les expressions $\frac{z_k}{+\Delta}$ et $\frac{z_{k+1}}{-\Delta}$ *seront de signes contraires.* Quand z_k et z_{k+1} sont des racines *consécutives* de $f(z)$, la fonction $\frac{zf'(z)}{f(z)} - n$ reste continue entre ces deux valeurs de z; par conséquent elle passera par zéro entre z_k et z_{k+1}.

Remarque I. — Par la transformation $z = \sqrt{z'}$, ou $z' = z^2$, on obtient une équation *du même degré* dont toutes les racines sont les *carrés* de celles de $f(z)$; les racines réelles de cette transformée seront toutes *positives* et par conséquent *de même signe* [abstraction faite des racines particulières de $f(z)$ de la forme ki].

De cette considération découle :

THÉORÈME VI. — *Entre deux racines consécutives réelles de la* *transformée en z^2 d'une équation algébrique se trouvent en général deux racines réelles, l'une de la dérivée, l'autre de la réduite.*

Remarque II. — Après un nombre très limité de transformations $z^2 = z'$ on obtient une équation *finale*, $F(z) = 0$, dans laquelle deux racines de modules différents de $f(z) = 0$ se sont transformées en deux autres d'*ordres* [1] différents, c'est-à-dire dont on peut négliger la plus petite par rapport à l'autre (entre les limites fixées du calcul). Pour cette équation finale nous pouvons énoncer :

THÉORÈME VII. — *Entre deux racines simples, consécutives, réelles ou complexes de l'équation finale d'une équation algébrique se trouvent toujours et une racine de la dérivée et une autre de la réduite (de cette équation finale).*

Démonstration. — Soit $F(Z) = 0$ l'équation finale de $f(z) = 0$. Considérons :

$$(8)\quad \frac{Z\,F'(Z)}{F(Z)} = \frac{Z}{Z - Z_1} + \ldots + \frac{Z}{Z - Z_k} + \frac{Z}{Z - Z_{k+1}} + \ldots + \frac{Z}{Z - Z_n} = 0.$$

Quand z_{k+1} et z_k étaient de modules différents, alors Z_{k-1} et Z_k [2] seront *d'ordres* différents; la même relation existera entre Z_{k-p} et Z_k; entre Z_k et Z_{k+q}; à plus forte raison entre Z_{k-p} et Z_{k+q}.

Posez

$$Z = \frac{k-1}{k} Z_k, \qquad \text{d'où} \qquad Z - Z_k = -\frac{Z_k}{k}.$$

Alors

$$\frac{Z}{Z - Z_k} = -k + 1.$$

Ensuite

$$\lim \frac{Z}{Z - Z_{k+p}} = \lim \frac{\frac{k-1}{k} Z_k}{\frac{k-1}{k} Z_k - Z_{k+p}} = \lim \frac{\frac{k-1}{k}\frac{Z_k}{Z_{k+p}}}{\frac{k-1}{k}\frac{Z_k}{Z_{k+p}} - 1} = 0.$$

---

(1) Méthode de Graeffe; *voir*, par exemple, E. CARVALLO, *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes;* B. GONGGRŸP, *Benadering van Nulpunten en Oneindigheidspunten.*

(2) Et à plus forte raison Z_{k-q} et Z_{k+p}; nous supposons toujours les Z_1, Z_2, etc. ordonnés par rapport aux modules croissants.

Au contraire

$$\lim \frac{Z}{Z - Z_{k-q}} = \lim \frac{\frac{k-1}{k} Z_k}{\frac{k-1}{k} Z_k - Z_{k-q}} = \lim \frac{1}{1 - \frac{k}{k-1}\frac{Z_{k-p}}{Z_k}} = 1.$$

Alors il y aura $k - 1$ termes précédant $\frac{Z}{Z - Z_k}$ qui tendent vers l'unité, tandis que ceux qui suivent après ce terme s'annulent. Par conséquent la valeur du premier membre de (8) est en effet égale à zéro, quand on prend

$$Z = \frac{k-1}{k} Z_k.$$

Or, quant au module de cette expression, on a évidemment

$$|Z_{k-1}| < \frac{k-1}{k} |Z_k| < |Z_k|.$$

Le facteur $\frac{k-1}{k}$ étant réel, l'argument de $\frac{k-1}{k} Z_k$ sera évidemment égal à $\arg Z_k$, ou, ce qui revient au même, à $\arg(Z_k - Z_{k-1})$ (1).

Par conséquent la racine en question de la dérivée, que nous appellerons ζ_{k-1}, est située sur la droite passant par Z_{k-1} et Z_k.

Regardons maintenant la réduite ou plutôt

$$\frac{Z_1}{Z - Z_1} + \dots + \frac{Z_k}{Z - Z_k} + \frac{Z_{k+1}}{Z - Z_{k+1}} + \dots + \frac{Z_n}{Z - Z_n} = 0.$$

Posons

$$Z = \frac{n-k+1}{n-k} Z_k, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Z_k}{Z - Z_k} = n - k.$$

Ensuite

$$\lim \frac{Z_{k-p}}{Z - Z_{k-p}} = \lim \frac{Z_{k-p}}{\frac{n-k+1}{n-k} Z_k - Z_{k-p}} = \lim \frac{\frac{Z_{k-p}}{Z_k}}{\frac{n-k+1}{n-k} - \frac{Z_{k-p}}{Z_k}} = 0.$$

Au contraire

$$\lim \frac{Z_{k+q}}{Z - Z_{k+p}} = \lim \frac{Z_{k+p}}{\frac{n-k+1}{n-k} Z_k - Z_{k+p}} = \lim \frac{1}{\frac{n-k+1}{n-k} \frac{Z_k}{Z_{k+p}} - 1} = -1.$$

---

(1) L'ordre de Z_k est supposé *supérieur* à celui de z_{k-1}.

On voit qu'il y aura $k - 1$ termes qui tendent vers zéro et $n - k$ autres qui tendent vers -1, tandis qu'un seul d'entre eux est égal à $n - k$; alors les n termes s'annulent ensemble.

Par conséquent les $n - 1$ racines de la réduite seront

$$z'_k = \frac{n-k+1}{n-k} Z_k.$$

Il est aisé de voir que ces racines sont situées également sur les droites qui lient les couples de racines consécutives de $F(Z) = 0$. Seulement une racine de la réduite se trouve dans le voisinage *de la plus petite*, tandis qu'une racine de la dérivée est toujours située auprès *de la plus grande* racine d'un tel couple.

Il va sans dire qu'à la rigueur ces propriétés n'appartiennent qu'à *l'équation finale* d'une équation algébrique. Cependant, rappelons qu'en général, après un nombre très limité de transformations $z^2 = z^1$ ([1]), l'état final est réalisé entre les limites fixées du calcul.

Il s'ensuit :

Après un nombre très limité de transformations $z^2 = z^1$, toute équation algébrique se transforme en une autre, dont deux racines consécutives comprennent entre elles toujours une racine de la dérivée aussi bien qu'une racine de la réduite; ces racines intermédiaires de $f'(z)$ et de $f_1(z)$ se trouvent approximativement sur la droite qui lie les deux zéros consécutifs de $f(z)$.

C'est ainsi que les propriétés de la dérivée et de la réduite des polynomes à zéros réels paraissent les limites vers lesquelles tendent les propriétés des polynomes plus généraux à zéros complexes.

Remarque. — Il est aisé de démontrer que le dernier théorème renferme le cas où Z_k et Z_{k+1} ou bien Z_{k+p} seraient de modules égaux, mais d'arguments différents.

([1]) Ou bien après la transformation $z^p = Z$, le nombre p étant supposé suffisamment élevé.