JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

# Intéressant théorème de réciprocité dans les phénomènes permanents de filtration, dû à M. Umberto Puppini: rapport sur le prix Boileau d'hydraulique pour l'année 1915

*Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série*, tome 1 (1915), p. 285-289.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__285_0>

# *Intéressant théorème de réciprocité dans les phénomènes permanents de filtration, dû à M.* Umberto Puppini : *Rapport sur le prix Boileau d'Hydraulique pour l'année* 1915;

PAR J. BOUSSINESQ.

---

Un seul candidat, M. Umberto Puppini, de Bologne, s'est présenté en nous envoyant un ensemble de travaux connexes, imprimés (en italien), dont le principal et le plus récent, de 1914, a pour titre « *Le principe de réciprocité pour les nappes artésiennes* ».

Ce travail est relatif aux divers modes possibles d'écoulement *permanent*, par des sources ou des puits supposés contenir toujours une eau en repos ou presque en repos (avec surface libre à la pression atmosphérique), du liquide que fournit une vaste nappe aqueuse infiltrée ou dans le sol, ou sous le sous-sol imperméable, d'une contrée, et en équilibre aux grandes distances de la région des puits considérés. La *hauteur* $\varphi$ *de charge* de la nappe aqueuse, somme, en chaque point $(x, y, z)$, de *l'altitude* effective $\zeta$ de ce point et de la pression $p$ (évaluée en hauteur d'eau) qu'y supporte le liquide, est donc une quantité *constante loin des puits;* et elle l'est même près des puits si aucun d'eux ne débite de liquide, cas où $\varphi$ se réduit partout à sa valeur sur une quelconque des surfaces libres des puits, savoir à l'altitude, alors commune, de celles-ci. On prend comme plan horizontal de repère leur plan même dans cet état, plan au-dessus duquel se compteront les altitudes et dont les points situés dans les parties de la nappe aqueuse très éloignées sont, par suite, constamment à la pression atmosphérique ou, comme on dit, *sans pression.* On aura ainsi, dans la nappe, $\varphi = 0$ aux distances infinies de la région des puits.

Dès lors, dans tout régime d'écoulement permanent à étudier, la charge $\varphi$ à l'intérieur d'un quelconque des puits égale l'altitude (négative) de sa surface libre actuelle par rapport au plan de repère, c'est-à-dire la *dépression* fixe $h$ (prise avec le signe $-$) de son niveau, corrélative au mouvement effectif de la nappe; ce qui donnera, sur toute l'étendue des parois *mouillées* des puits, $\varphi = -h$.

Si K, fonction de $(x, y, z)$ censée donnée, désigne le coefficient de filtration du terrain au point $(x, y, z)$, et que $dn$ soit la normale à un élément plan quelconque mené par ce point, on sait que le volume liquide $q$ débité dans l'unité de temps par l'unité d'aire de cet élément plan, en venant du côté où l'on a tiré la normale $dn$, aura la valeur $K\frac{d\varphi}{dn}$ : principe d'où l'on déduit aisément, en l'appliquant aux six faces d'un parallélépipède rectangle élémentaire $dx\,dy\,dz$ et en exprimant la conservation des volumes liquides débités d'instant en instant à travers ces faces, l'équation indéfinie du phénomène,

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0.$$

Il y aura lieu de considérer celle-ci dans tout l'espace compris entre les deux limites suivantes : d'une part, l'ensemble $\sigma$ des parois *mouillées* des puits, où la charge $\varphi$ aura, dans chaque puits, la valeur $-h$, où, de plus, on aura mené les normales $dn$ vers l'intérieur du terrain aux éléments $d\sigma$ de paroi et où afflueront dans ces puits les débits $q = K\frac{d\varphi}{dn}$ (par unités d'aire et de temps); d'autre part, une grande surface fixe $\sigma_1$ coupant tous les filets liquides qui aboutissent aux puits et circonscrite à la région où ils sont groupés, mais l'entourant d'assez loin pour que les vitesses de filtration y soient insensibles ou, la charge $\varphi$, très voisine de zéro. Si $dn_1$ est la normale à chaque élément $d\sigma_1$ de cette surface, dirigée hors de $\sigma_1$, c'est-à-dire du côté d'où viennent les filets fluides, et que $q_1$ soit le débit *unitaire* $K\frac{d\varphi}{dn_1}$ de $d\sigma_1$, il est clair que le débit total de la nappe par unité de temps s'écrira indifféremment $\int q\,d\sigma$ ou $\int q_1\,d\sigma_1$; en sorte que ces deux intégrales auront une même valeur finie.

Cela posé, le théorème de réciprocité découvert par notre candidat, et démontré par lui au moyen de l'*Analyse vectorielle*, s'obtient en comparant deux modes quelconques distincts d'écoulement permanent, dont l'un sera, par exemple, un écoulement spontané ; l'autre, cet écoulement modifié par un jeu de pompes dans les puits (ou les sources), ou par une disposition différente des conduits d'évacuation, etc. Dans le passage d'un mode à l'autre, les surfaces libres souterraines, quand il en existe, se déplaceront assez peu et presque parallèlement à elles-mêmes en chaque endroit.

Soient : $\varphi$, $h$, $q$, $q_1$ les notations relatives au premier mode ; $\varphi'$, $h'$, $q'$, $q'_1$ les notations pour le second mode, où l'équation (1) devient

$$(1\ bis)\qquad \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi'}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{d\varphi'}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{d\varphi'}{dz}\right)=0$$

et où l'on aura

$$(\text{sur } \sigma)\quad K\frac{d\varphi'}{dn}=q',\qquad (\text{sur } \sigma_1)\quad K\frac{d\varphi'}{dn_1}=q'_1,\qquad \int q'\,d\sigma'=\int q'_1\,d\sigma'_1,$$

de même qu'on avait

$$(\text{sur } \sigma)\quad K\frac{d\varphi}{dn}=q,\qquad (\text{sur } \sigma_1)\quad K\frac{d\varphi}{dn_1}=q_1,\qquad \int q\,d\sigma=\int q_1\,d\sigma_1.$$

L'équation cherchée de réciprocité sera

$$(2)\qquad \int h'q\,d\sigma=\int hq'\,d\sigma'.$$

Pour la démontrer par l'Analyse ordinaire, ajoutons les équations (1) et (1 *bis*), après les avoir multipliées respectivement par $-\varphi'$ et par $\varphi$. Il viendra

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(\varphi.K\frac{d\varphi'}{dx}-\varphi'.K\frac{d\varphi}{dx}\right)\\&+\frac{d}{dy}\left(\varphi.K\frac{d\varphi'}{dy}-\varphi'.K\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\varphi.K\frac{d\varphi'}{dz}-\varphi'.K\frac{d\varphi}{dz}\right)=0.\end{aligned}$$

Multiplions celle-ci elle-même par $dx\,dy\,dz$, puis intégrons dans toute la partie mouillée de la nappe aquifère comprise entre les surfaces $\sigma_1$ et $\sigma$, partie à très peu près commune chez les deux modes d'écoulement et dont on pourra sans erreurs relatives sensibles supprimer, près des surfaces libres, les éléments non communs. Appliquons d'ailleurs à chaque terme la transformation habituelle, qui change en intégrales de surface les intégrales de volume où une intégration sur trois s'effectue d'elle-même. Enfin, observons qu'aucun débit appréciable ne sera fourni par les parties de la *frontière* qui se trouveront ou contiguës à des parois, ou même voisines d'une surface libre sur laquelle glissent les filets superficiels, tandis que les filets voisins, presque de même direction et traversant cependant la frontière en question, la perceront comme tangentiellement, sous des angles infiniment aigus, et ne constitueront d'ailleurs en tout qu'une fraction très faible, insensible, de l'ensemble des filets. Il viendra simplement, vu que $\varphi = -h$ et $\varphi' = -h'$ sur les parois mouillées des puits,

$$\int (hq' - h'q)\, d\sigma + \int (\varphi q'_1 - \varphi' q_1)\, d\sigma_1 = 0.$$

Ici, dans la seconde intégrale, les débits $\int q'_1\, d\sigma_1$, $\int q_1\, d\sigma_1$ ont très sensiblement mêmes valeurs finies que $\int q'\, d\sigma$, $\int q\, d\sigma$; mais leurs produits par les valeurs moyennes correspondantes, très petites, de $\varphi$ et de $\varphi'$ sont négligeables. Cette seconde intégrale s'évanouit par conséquent et il reste bien la formule (2) de réciprocité.

Le théorème de M. Umberto Puppini consiste donc en ce que *les produits respectifs des débits des divers puits dans le premier mode d'écoulement, par les dépressions $h'$ qui s'y observent dans le second mode, donnent même somme que les produits respectifs des débits dans le second mode, par les dépressions $h$ qui s'y observent dans le premier.*

L'auteur constate d'ailleurs la suffisante exactitude de cette formule dans des cas observés antérieurement à sa découverte, du moins pour une région du Piémont où sont trois puits servant à l'alimentation de Turin en eau potable; et il en fait l'application pratique, par exemple au cas où, ayant observé à la fois *débits* et *dépressions* lorsque chaque puits d'une région fonctionne seul à tour de rôle, on se contente de noter ensuite les dépressions produites dans chacun lors de leur fonctionnement simultané. La comparaison de ce cas plus complexe à chacun des précédents fournit précisément autant d'équations qu'il y a de puits et permet, par conséquent, le calcul théorique de leurs débits partiels.

Ce principe de réciprocité peut donc être d'autant plus utile, que l'équation indéfinie (1) du problème est absolument inintégrable, à raison non seulement de la fonction empirique et inconnue K qui y paraît, mais aussi de la figure, tout aussi difficile à déterminer et à exprimer, des parois imperméables limitant la nappe.

En 1874, Betti, dans les questions d'équilibre élastique (¹), et l'un de nous, dans celles de mouvements vibratoires (²), avaient, indépendamment l'un de l'autre, remarqué un théorème de réciprocité analogue, mais plus visible peut-être. Il y avait donc un très réel mérite à dégager celui-ci dans une question d'écoulement permanent. On voit que notre candidat en a, de plus, saisi l'utilité pratique et montré l'emploi, après en avoir contrôlé l'exactitude au moyen d'expériences faites antérieurement par d'autres. Aussi votre Commission est-elle unanime à vous proposer, comme lauréat du Prix Boileau d'Hydraulique pour 1915, M. l'ingénieur *Umberto Puppini*, professeur d'Hydraulique agricole à l'École Royale d'Agriculture de l'Université de Bologne.

---

(¹) *Teoria della Elasticita del professore Enrico Betti*, p. 40 (Pisa, 1874).

(²) *Sur deux lois simples de la résistance vive des solides* (*Comptes rendus* des Séances de l'Académie des Sciences, 7 et 14 décembre 1874). *Voir* le texte entre les deux formules (7) et (8).