JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE DUHEM

Sur le diamagnétisme

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 9 (1913), p. 89-164.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1913_6_9__89_0>

Sur le diamagnétisme;

PAR PIERRE **DUHEM**.

INTRODUCTION.

L'étude thermodynamique des corps diamagnétiques a suscité un certain nombre de paradoxes embarrassants.

Dès 1888, nous avions annoncé que, lorsque l'équilibre magnétique est établi sur un corps diamagnétique placé en présence d'un aimant permanent, le potentiel interne du système n'est pas toujours un minimum; nous avions attiré l'attention sur quelques conséquences étranges qui paraissaient découler de cette proposition.

En 1889, M. J. Parker montrait qu'à l'aide d'un corps diamagnétique, on peut réaliser un cycle isothermique fermé durant lequel les actions extérieures effectuent un travail négatif, tandis qu'une proposition bien connue de Clausius exigerait que ce travail fût nul ou positif.

En 1889, à la suite du travail de M. Parker, nous reprenions la proposition que nous avions établie l'année précédente et nous en tirions ce corollaire que, sur un corps diamagnétique, l'équilibre magnétique pourrait être instable; nous étions amenés, par là, à penser que l'existence de corps diamagnétiques est une impossibilité physique; nous proposions de reprendre une supposition due à Faraday et à Edmond Becquerel : le diamagnétisme serait une apparence qu'offrent certains corps moins magnétiques que le milieu où ils sont plongés.

Quelques semaines avant la publication de notre note, dans une lettre à E. Cesàro, lettre dont, alors, nous ignorions l'existence,

E. Beltrami formulait cette proposition, qui n'est d'ailleurs pas exacte : L'équilibre d'aimantation sur un corps diamagnétique correspond toujours à un maximum du potentiel interne. De cette proposition il déduisait, au sujet de l'instabilité de l'équilibre diamagnétique et de l'impossibilité du diamagnétisme véritable, des conséquences semblables de tout point à celles que nous allions formuler peu de jours après.

Ces diverses recherches semblaient concourir à cette conséquence, importante au point de vue de la Physique : Le diamagnétisme ne peut se rencontrer dans la nature; pour expliquer le diamagnétisme apparent, il est nécessaire de recourir à l'hypothèse de Faraday et d'Edmond Becquerel.

Or, aujourd'hui, nous croyons pouvoir affirmer que toutes les objections élevées contre l'existence des corps diamagnétiques reposaient sur un fondement dénué de solidité; les déductions qui paraissaient les justifier se rattachaient toutes à une manière incorrecte de raisonner sur le magnétisme; on pensait pouvoir traiter du mouvement du magnétisme sur un corps en faisant abstraction des courants électriques dont ce corps est le siège; c'était, assurément, une supposition illégitime; tout raisonnement correct sur le mouvement du magnétisme (et les problèmes de stabilité d'équilibre sont des problèmes de mouvement) exige qu'on recoure aux lois de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme; l'emploi de ces lois a tôt fait de montrer l'inexactitude des raisonnements qui prétendaient s'en passer, et de faire évanouir les propositions paradoxales auxquelles ces raisonnements avaient conduit.

Le présent travail a pour objet de prouver ce que nous venons d'énoncer.

CHAPITRE I.

L'INSTABILITÉ DU DIAMAGNÉTISME, DÉDUITE DE LA CONSIDÉRATION DU POTENTIEL INTERNE.

1. Soient :

(x_1, y_1, z_1) un point d'un corps aimanté;

A_1, B_1, C_1 les composantes de l'aimantation en ce point;

$d\varpi_1$ un élément de volume entourant ce point;
(x, y, z) un point quelconque de l'espace;
r la distance mutuelle des deux points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1).

La fonction potentielle magnétique au point (x, y, z) est la quantité

$$(1) \qquad V(x, y, z) = \int \left(A_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + C_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\varpi_1,$$

où l'intégration s'étend au volume entier du corps aimanté que l'on considère.

Considérons un espace en tout point (x, y, z) duquel des corps immuables, extérieurs à cet espace, engendrent un champ magnétique de composantes données L, M, N. En cet espace, plaçons un corps susceptible de s'aimanter. Ce corps sera dit *parfaitement doux* si l'aimantation qu'il prend en cette circonstance vérifie la loi suivante :

Si $\mathfrak{M}$ est l'intensité d'aimantation au point (x, y, z) du corps aimanté, A, B, C les composantes de cette aimantation et T la température au même point, il existe une *fonction magnétisante* $K(\mathfrak{M}, T)$ telle qu'on ait

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= K(\mathfrak{M}, T)\left(L - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right), \\ B &= K(\mathfrak{M}, T)\left(M - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}\right), \\ C &= K(\mathfrak{M}, T)\left(N - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

ε est un coefficient *positif* dont la valeur dépend de l'unité choisie pour mesurer les intensités d'aimantation.

Lorsque la fonction magnétisante $K(\mathfrak{M}, T)$ est positive, le corps est dit *magnétique;* il est dit *diamagnétique* lorsque cette fonction est négative.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons au cas simple où la fonction magnétisante ne dépend pas de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$. En outre, nous n'aurons pas à faire varier la température T. La fonction magnétisante $K(\mathfrak{M}, T)$ se réduira alors à un *coefficient d'aimantation* K, constant, positif pour un corps magnétique et négatif pour un corps diamagnétique.

La quantité

$$(3)\qquad \mathrm{Y} = \frac{\varepsilon}{2}\int\int\left(\mathrm{AA}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x'} + \mathrm{AB}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y'} + \mathrm{AC}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z'} + \mathrm{BA}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x'} + \mathrm{BB}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial y'} + \mathrm{BC}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z'} + \mathrm{CA}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x'} + \mathrm{CB}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y'} + \mathrm{CC}'\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z'}\right) d\varpi\, d\varpi',$$

où chacune des deux intégrations s'étend à l'aimant tout entier, prend le nom de *potentiel de la distribution magnétique sur elle-même*. On démontre aisément que cette quantité peut se mettre sous la forme :

$$(4)\qquad \mathrm{Y} = \frac{\varepsilon}{2}\int\left(\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right) d\varpi$$

ou encore sous la forme

$$(5)\qquad \mathrm{Y} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi.$$

Cette dernière forme montre que la quantité Y est forcément positive, à moins que l'intensité d'aimantation ne soit nulle en tout point du corps considéré.

2. Nous n'avons rien supposé jusqu'ici au sujet des corps extérieurs qui engendrent le champ magnétique donné (L, M, N); admettons, dorénavant, que ces corps soient des aimants permanents absolument immuables de position et d'état; le système formé par l'ensemble de ces aimants permanents et du corps parfaitement doux soumis à leur influence aura alors pour potentiel interne, à une constante près, la quantité suivante :

$$(6)\qquad \mathfrak{F} = -\int(\mathrm{LA} + \mathrm{MB} + \mathrm{NC})\, d\varpi + \mathrm{Y} + \int \frac{\mathfrak{M}^2}{2\mathrm{K}}\, d\varpi,$$

où les intégrations s'étendent toutes deux au volume occupé par le corps parfaitement doux.

On reconnaît sans peine que les équations (2) de l'équilibre magnétique équivalent à la proposition suivante :

Toute variation infiniment petite $(\delta A, \delta B, \delta C)$ *imposée à l'aimantation, en chaque point d'un corps parfaitement doux, annule la variation première du potentiel interne :*

$$\delta \mathfrak{F} = 0. \tag{7}$$

3. Par analogie avec des propositions de Dynamique dont l'exactitude est démontrée, on est conduit à admettre le POSTULAT suivant :

1° *Toute distribution du magnétisme sur le corps soumis à l'aimantation, qui rend minimum le potentiel interne* $\mathfrak{F}$ *du système, définit un état d'équilibre magnétique stable.*

2° *Si une distribution magnétique vérifie la condition* (7), *mais ne rend pas minimum le potentiel interne* $\mathfrak{F}$, *et si, pour reconnaître qu'elle ne le rend pas minimum, il suffit de considérer le signe pris par la variation seconde* $\delta^2 \mathfrak{F}$, *cette distribution correspond à un état d'équilibre magnétique instable.*

LA GÉNÉRALISATION QUI FOURNIT CE POSTULAT N'EST AUCUNEMENT JUSTIFIÉE. Pour établir les propositions correspondantes de Dynamique, on applique les équations de la Dynamique aux mouvements des systèmes qu'on a l'intention d'étudier. Dans le système qui nous occupe en ce moment, le mouvement magnétique, constitué par une distribution magnétique variable d'un instant à l'autre, ne reçoit point ses lois des équations de la Dynamique, mais des équations de l'Électromagnétisme et de l'Électrodynamique qui en sont toutes différentes. En admettant le postulat précédemment énoncé, on peut fort bien être conduit à des conséquences que l'Électromagnétisme viendra ensuite contredire. C'est ce que nous aurons occasion de constater au cours du présent écrit.

Provisoirement, *en tout ce Chapitre I*, nous regarderons comme exact le postulat qui vient d'être énoncé et nous en déduirons divers corollaires.

4. Faisons croître respectivement de α, β, γ les composantes A, B, C de l'aimantation sur le corps qui se trouve soumis à l'action de l'aimant permanent. Le potentiel interne du système, qui avait la valeur $\mathcal{J}$, prendra la valeur $(\mathcal{J} + \varphi)$. Si nous observons que

$$\mathfrak{M}^2 = A^2 + B^2 + C^2 \tag{8}$$

et si nous posons

$$\begin{aligned} w = \frac{\varepsilon}{2} \iint \Bigg(& \alpha\alpha' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial x'} + \alpha\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y'} + \alpha\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z'} \\ & + \beta\alpha' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x'} + \beta\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial y'} + \beta\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z'} \\ & + \gamma\alpha' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x'} + \gamma\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial y'} + \gamma\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial z'} \Bigg) d\varpi\, d\varpi', \end{aligned} \tag{9}$$

nous trouverons sans peine qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi = -\int \Bigg[& \left(L - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{A}{K} \right) \alpha + \left(M - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{B}{K} \right) \beta \\ & + \left(N - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{C}{K} \right) \gamma \Bigg] d\varpi \\ & + w + \frac{1}{2K} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi. \end{aligned} \tag{10}$$

Cette égalité est générale. Dans le *cas particulier où la distribution magnétique initiale est une distribution d'équilibre*, l'égalité (10), en vertu des égalités (2), se réduit à la forme extrêmement simple

$$\varphi = w + \frac{1}{2K} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi. \tag{11}$$

La quantité w est susceptible de transformations toutes semblables à celles qu'on a fait subir à la quantité Y.

Introduisons, en effet, la fonction potentielle $v(x, y, z)$ de la distribution additionnelle α, β, γ :

$$v(x, y, z) = \int \left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\varpi_1, \tag{12}$$

et nous aurons les égalités suivantes, analogues aux égalités (4) et (5),

$$w = \frac{\varepsilon}{2} \int \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\varpi, \tag{13}$$

$$w = \frac{\varepsilon}{2} \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi. \tag{14}$$

Cette dernière expression de ϖ entraîne la conséquence suivante qui joue un rôle essentiel en tout ce qui va suivre :

Si la distribution additionnelle (α, β, γ) *n'est pas nulle en tout point du corps soumis à l'aimantation, la quantité* ϖ *est positive.*

5. Ce corollaire, joint à l'égalité (11), nous montre que, pour tout corps magnétique ($K > 0$), la quantité φ est positive, à moins que la distribution additionnelle (α, β, γ) ne soit nulle en tout point de ce corps. D'où cette proposition :

Sur un corps magnétique, la distribution d'équilibre correspond à un minimum absolu du potentiel interne du système.

Partant, en vertu du Postulat énoncé au n° **3**, *sur un corps magnétique, tout équilibre magnétique est stable.*

6. En une lettre adressée à Ernesto Cesàro, Eugenio Beltrami s'exprimait de la manière suivante [1] :

« ... L'energia d'un corpo diamagnetico avrebbe dunque un valore *negativo.*

» Questo risultato ne trae con sè un altro, che non è meno inverosimile. È noto che se alla distribuzione indotta in un corpo da azioni magnetiche esterne, date ed invariabili, si sovrappone un' altra distribuzione magnetica qualunque, il potenziale di tutto il sistema se accresce d'une quantità che è semplicemente eguale al potenziale della distribuzione sovrapposta all' indotta. Risulta di qui, tenendo conto del risultato precedente, che se il corpo indotto è paramagnetico, il potenziale totale aumenta quando cessa l'equilibrio d'induzione, mentre, se il corpo è diamagnetico, il potenziale diminuisce; nel primo caso dunque il potenziale totale sarebbe minimo nello stato d'equilibrio, nel secondo invece sarebbe massimo, cioè l'equilibrio d'induzione diamagnetica sarebbe instabile.

» Queste incongruenze mi sembrano tali di rendere sempre piu

---

(1) E. Beltrami, *Note fisico-matematiche* (*Lettera al Prof. Ernesto Cesàro*) [*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, Adunanza del 10 Marzo 1889, t. III (1889)].

probabile la nota ipotesi di Faraday, d'una polarizzabilità di tutto lo spazio, con coefficiente positivo per questo come per ogni corpo in esso immerso; merce quest' ipotesi l'induzione diamagnetica viene ridotta, com'è noto, ad una mera apparenza. »

Le théorème que Beltrami a énoncé tout d'abord, et d'où il a déduit ces diverses conséquences, n'est point exact; on trouverait sans peine l'inadvertance qui a induit en erreur l'illustre géomètre. Sans nous attarder à cette recherche, nous allons établir une proposition manifestement contradictoire du théorème de Beltrami.

Sur un corps de figure donnée, plaçons une distribution magnétique quelconque (α, β, γ). La quantité w prendra une valeur positive qui ne dépendra aucunement de la nature de la matière qui forme ce corps; il en sera de même de la quantité

$$m = \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi. \tag{15}$$

Si alors nous supposons ce corps taillé dans une matière diamagnétique dont le coefficient d'aimantation surpasse en valeur absolue $\frac{m}{2w}$,

$$|K| > \frac{m}{2w}, \tag{16}$$

il est bien clair que, pour ce corps et pour la distribution additionnelle (α, β, γ), la quantité φ, donnée par l'égalité (11), sera positive, contrairement à la proposition énoncée par Beltrami. Sur un tel corps diamagnétique, une distribution d'équilibre ne correspondra peut-être pas à un minimum du potentiel interne du système, mais, à coup sûr, elle ne correspondra pas à un maximum de ce même potentiel. Les considérations de Beltrami ne sauraient donc être conservées.

7. Comme au numéro précédent, imaginons un corps de figure déterminée et, sur ce corps, une distribution magnétique (α, β, γ); calculons les valeurs correspondantes des quantités w et m, puis taillons ce corps en une matière diamagnétique dont le coefficient d'aimantation soit, en valeur absolue, inférieur à $\frac{m}{2w}$:

$$|K| < \frac{m}{2w}. \tag{17}$$

Sur un corps de telle figure et de telle matière, la distribution magnétique additionnelle considérée fera prendre à la quantité φ, donnée par l'égalité (11), une valeur négative. D'où cette conclusion :

Il existe des corps diamagnétiques sur lesquels aucune distribution d'équilibre ne peut rendre minimum le potentiel interne du système; si, sur ces corps, à partir d'une distribution d'équilibre, on impose à l'aimantation un changement infiniment petit convenablement choisi, la variation seconde du potentiel interne prend une valeur négative.

Dès lors, si l'on admet le Postulat qui a été énoncé au n° **5**, *sur un tel corps diamagnétique, tout équilibre magnétique est instable.*

Ces résultats reproduisent, sous une forme à la fois plus élémentaire et plus précise, ceux auxquels nous étions jadis parvenus ([1]).

8. Rien ne nous empêche, dans le raisonnement précédent, de supposer que l'aimantation (α, β, γ) soit une aimantation uniforme; or, en faisant cette supposition, nous allons obtenir des conclusions plus détaillées.

Désignons par ϖ le volume du corps soumis à l'aimantation et posons

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} P_x\varpi &= \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial x_1}\, d\varpi\, d\varpi_1, & P_y\varpi &= \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial y_1}\, d\varpi\, d\varpi_1, & P_z\varpi &= \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial z_1}\, d\varpi\, d\varpi_1, \\ T_x\varpi &= \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z_1}\, d\varpi\, d\varpi_1, & T_y\varpi &= \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x_1}\, d\varpi\, d\varpi_1, & T_z\varpi &= \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y_1}\, d\varpi\, d\varpi_1, \end{aligned}\right.$$

les intégrations s'étendant toutes au corps considéré.

([1]) P. Duhem, *Sur l'aimantation des corps diamagnétiques* (*Comptes rendus*, t. CVI, 1888, p. 736); *Sur l'aimantation par influence* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1888, pp. 47 et suiv.); *Sur l'impossibilité des corps diamagnétiques* (*Comptes rendus*, t. CVIII, 1889, p. 1042); *Des corps diamagnétiques* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. I, n° 2; 1889); *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, Livre IX, Chap. VI, t. II, pp. 221 et suiv.

Les six quantités P_x, P_y, P_z, T_x, T_y, T_z dépendent uniquement de la figure du corps considéré; de plus, elles ne changent pas si l'on remplace ce corps par un corps semblable et semblablement placé.

Il est clair que, dans ces conditions, nous avons

$$(19) \qquad w = \frac{\varepsilon}{2}(P_x\alpha^2 + P_y\beta^2 + P_z\gamma^2 + 2T_x\beta\gamma + 2T_y\gamma\alpha + 2T_z\alpha\beta)\varpi,$$

$$(20) \qquad m = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\varpi.$$

Par un changement convenable d'axes de coordonnées, nous pourrons toujours faire que

$$P_x\alpha^2 + P_y\beta^2 + P_z\gamma^2 + 2T_x\beta\gamma + 2T_y\gamma\alpha + 2T_z\alpha\beta$$

se transforme en

$$S_1\alpha'^2 + S_2\beta'^2 + S_3\gamma'^2,$$

S_1, S_2, S_3 étant trois quantités qui, comme les quantités P et T, dépendent exclusivement de la figure du corps étudié et qui, de plus, sont les mêmes pour tous les corps semblables.

En même temps, la somme $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ se transformera en la somme $(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$.

On voit alors que toute distribution additionnelle uniforme, déposée sur un corps de telle figure et de coefficient d'aimantation K, fera prendre à φ la valeur suivante :

$$(21) \qquad \varphi = \frac{\varepsilon}{2}(S_1\alpha'^2 + S_2\beta'^2 + S_3\gamma'^2)\varpi + \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{2K}\varpi.$$

Si les trois coefficients S_1, S_2, S_3 sont inégaux, soit S_1 le plus grand d'entre eux; d'une manière plus générale, soit S_1 un de ces coefficients choisi de telle sorte qu'aucun des deux autres ne lui soit supérieur. Si K est une quantité négative, inférieure, en valeur absolue, à l'inverse de εS_1,

$$(22) \qquad \varepsilon|K| < \frac{1}{S_1},$$

la valeur (21) de φ sera négative; l'addition, sur le corps considéré, à partir d'un état d'équilibre magnétique, de la distribution uniforme $(\alpha', \beta', \gamma')$ aura pour effet de faire décroître le potentiel interne du système.

Si donc on taille un corps dont la figure, donnée d'avance, correspond à une valeur bien déterminée de la quantité S_1, *dans une substance diamagnétique de coefficient d'aimantation assez petit pour que l'inégalité* (22) *soit vérifiée, l'équilibre magnétique d'un tel corps, placé en présence d'aimants permanents donnés, quelconques d'ailleurs, ne pourra jamais correspondre à un minimum du potentiel interne du système; le signe de la variation seconde de ce potentiel suffira à nous assurer qu'il n'est pas minimum.*

Dès lors, si l'on admet le Postulat formulé au n° **3**, on obtiendra cette proposition :

Sur un tel corps diamagnétique, l'équilibre magnétique sera toujours instable.

9. Appliquons ces considérations au cas particulier d'un ellipsoïde dont les trois axes, $2a$, $2b$, $2c$, soient respectivement dirigés suivant Ox, Oy, Oz.

Les formules données par Lejeune-Dirichlet conduisent sans peine au résultat suivant (¹) :

Si l'on pose

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi &= \pi abc\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},\\ X &= \pi abc\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},\\ \Psi &= \pi abc\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},\end{aligned}\right.$$

on a, en tout point intérieur à l'ellipsoïde,

$$(24)\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\Phi\alpha,\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2X\beta,\qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 2\Psi\gamma.$$

La formule (13) donne alors

$$w = \varepsilon(\Phi\alpha^2 + X\beta^2 + \Psi\gamma^2)\varpi$$

(¹) P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, p. 132, égalités (10).

ou bien

$$(25)\qquad w = \frac{\varepsilon}{2}(S_1\alpha^2 + S_2\beta^2 + S_3\gamma^2)\varpi,$$

si l'on pose

$$(26)\qquad S_1 = 2\Phi, \qquad S_2 = 2X, \qquad S_3 = 2\Psi.$$

La quantité S_1 sera, d'ailleurs, comme il en a été convenu au numéro précédent, au moins égale à chacune des deux quantités S_2, S_3 si l'on a eu soin de placer l'ellipsoïde de telle manière que l'axe $2a$ soit au plus égal à chacun des deux autres $2b$, $2c$:

$$(27)\qquad a \leqq b, \qquad a \leqq c.$$

On voit donc que, *sur un ellipsoïde taillé dans une substance diamagnétique et placé en présence d'aimants permanents quelconques, aucune distribution magnétique ne peut correspondre à un minimum du potentiel interne du système, si le coefficient d'aimantation est assez petit en valeur absolue pour qu'on ait l'inégalité*

$$(28)\qquad \frac{1}{\varepsilon|K|} > 2\pi abc\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

l'axe $2a$ de l'ellipsoïde n'étant supérieur à aucun des deux autres, $2b$, $2c$.

Si l'on admet le Postulat énoncé au n° **5**, on pourra dire que, *sur un tel ellipsoïde diamagnétique, tout équilibre magnétique serait instable.*

10. Quelle figure faut-il donner à l'ellipsoïde pour que la limite supérieure imposée par l'inégalité (28) à la quantité $\varepsilon|K|$ ait la plus grande valeur possible?

On reconnaît sans peine que, pour des ellipsoïdes homothétiques, le second membre de l'inégalité (28) a même valeur. Dès lors, pour résoudre le problème posé, il nous suffit de faire varier b et c en laissant a invariable.

Écrivons le second membre de l'inégalité (28) sous la forme

$$(29)\qquad 2\pi a\int_0^{+\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)}},$$

et nous reconnaissons immédiatement que cette quantité prend sa plus petite valeur lorsque les demi-axes b et c prennent, eux aussi, les valeurs les plus petites dont ils soient susceptibles; or, en vertu des conditions (27), ces valeurs sont

$$b = a, \qquad c = a.$$

Le second membre de l'inégalité (28) prend donc sa plus petite valeur lorsque l'ellipsoïde considéré a la figure d'une sphère. Cette valeur est, d'ailleurs,

$$(30) \qquad 2\pi a^3 \int_0^{\infty} (a^2+\lambda)^{-\frac{5}{2}} d\lambda = \frac{4}{3}\pi.$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante :

Si une sphère, taillée dans une substance diamagnétique dont le coefficient d'aimantation vérifie la condition

$$(31) \qquad \varepsilon |K| < \frac{3}{4\pi},$$

est placée en présence d'aimants permanents, aucune distribution magnétique ne peut, sur cette sphère, correspondre à un minimum du potentiel interne; partant, sur cette sphère, tout équilibre magnétique est instable, si l'on admet le Postulat formulé au n° **3**.

Ce théorème peut, d'ailleurs, s'établir directement, sans recourir aux formules de l'attraction des ellipsoïdes. En tout point intérieur à une sphère qui porte une aimantation uniforme (α, β, γ), on a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4}{3}\pi\alpha, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4}{3}\pi\beta, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{4}{3}\pi\gamma,$$

en sorte que l'égalité (13) donne

$$(32) \qquad w = \frac{2}{3}\pi\varepsilon(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\varpi$$

et, par conséquent,

$$(33) \qquad S_1 = S_2 = S_3 = \frac{4}{3}\pi.$$

11. Si l'on écrit le second membre de la condition (28) sous la forme (29), on voit qu'il est toujours inférieur à la quantité

$$2\pi a \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi,$$

dont on peut, d'ailleurs, en prenant un ellipsoïde suffisamment aplati, le rendre aussi voisin que l'on voudra. Si donc, on a l'inégalité

$$\varepsilon |K| < \frac{1}{4\pi}, \tag{34}$$

l'inégalité (28) se trouvera vérifiée pour tous les ellipsoïdes possibles.

D'où la conclusion suivante :

Si le coefficient d'aimantation d'une substance diamagnétique vérifie la condition (34), *aucun ellipsoïde, taillé en une telle substance, ne pourra, en présence d'aimants permanents, se recouvrir d'une distribution magnétique qui rende minimum le potentiel interne du système.* Si l'on admet le postulat énoncé au n° **3**, *aucun ellipsoïde taillé en une telle substance ne pourra être le siège d'un équilibre magnétique stable.*

12. De ce théorème il nous est maintenant facile de conclure cette autre proposition, qui est entièrement générale :

Sur un corps diamagnétique DE FORME QUELCONQUE, *placé en présence d'aimants permanents, aucune distribution magnétique ne peut rendre minimum le potentiel interne du système, si le coefficient d'aimantation de ce corps vérifie la condition* (34). Si donc on admet le Postulat formulé au n° **3**, *un tel corps ne saurait, en aucun cas, être le siège d'un équilibre magnétique stable.*

En effet, l'emploi de la formule (11) n'impose aucune restriction, *pas même la continuité*, à la distribution additionnelle (α, β, γ). Il nous est permis de supposer que cette distribution, généralement différente de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ en une partie du corps, soit nulle en tous les points de l'autre partie. Dès lors, l'intégration qui figure au second membre de l'égalité (11) et les deux intégrations qu'il faut, selon la formule (9), effectuer pour obtenir la valeur de w, s'étendront simplement, toutes trois, à la partie du corps pour laquelle la distribution additionnelle n'est pas identiquement nulle.

Cette remarque faite, dessinons à l'intérieur du corps considéré un ellipsoïde de figure quelconque; supposons que la distribution additionnelle, nulle en tout point extérieur à l'ellipsoïde, soit uniforme à l'intérieur de l'ellipsoïde; le théorème démontré au numéro **11** nous donnera la proposition que nous venons d'énoncer.

13. *La proposition précédente demeure vraie même pour un corps diamagnétique dont le coefficient d'aimantation vérifie seulement la condition*

$$\varepsilon |K| < \frac{3}{4\pi}. \tag{31}$$

On le reconnaît en reprenant la démonstration précédente, mais en donnant la figure d'une sphère à la partie du corps pour laquelle la distribution additionnelle n'est pas nulle.

En vertu de ce qui a été dit à la fin du nº **10**, cette dernière démonstration peut être présentée sans qu'il soit fait usage de formules relatives à l'attraction des ellipsoïdes.

14. Si donc, on admet la légitimité de la seconde partie du Postulat énoncé au nº **3**, l'existence de substances diamagnétiques pour lesquelles on aurait à la fois

$$\left\{\begin{array}{l} K < 0, \\ 1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K > 0, \end{array}\right. \tag{31 bis}$$

apparaît comme une impossibilité naturelle.

Or, ces conditions (31 *bis*) sont précisément vérifiées par toutes les substances diamagnétiques connues. Le bismuth est, de tous les corps diamagnétiques, celui pour lequel le coefficient d'aimantation K a la plus grande valeur absolue; or, pour ce corps,

$$\varepsilon K = -146 \times 10^{-7}.$$

On se trouve donc en présence de l'alternative suivante :

Ou bien l'existence de corps faiblement diamagnétiques, tels que ceux dont la nature semble nous fournir des exemples, est une impossibilité; les corps naturels ne sont diamagnétiques qu'en apparence; l'éther du vide est, lui-même, magnétique; les corps qui nous paraissent diamagnétiques sont simplement ceux qui sont moins magnétiques que l'éther du vide.

Ou bien le Postulat formulé au n° **3** n'est pas exact.

Dans ces conditions, il est évidemment fort important de demander à l'Électrodynamique et à l'Électromagnétisme toutes les raisons, propres à confirmer ou à infirmer ce Postulat, que ces sciences peuvent nous fournir.

CHAPITRE II.

LA STABILITÉ DU DIAMAGNÉTISME SELON LES LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME.

15. Pour les corps magnétiques, le Postulat énoncé au n° **3** entraîne la stabilité de tout équilibre magnétique. En imitant la méthode suivie par Lejeune-Dirichlet dans l'étude de la stabilité des systèmes purement mécaniques, et en généralisant une démonstration que Helmholtz avait développée au sujet de la stabilité de l'équilibre électrique, nous avons déduit ailleurs, des équations de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme, un théorème tout à fait général [1]. Ce théorème renferme, en particulier, la justification de ce qui, en notre postulat, concerne les corps magnétiques. Nous allons, sans reprendre la démonstration, reproduire ici l'énoncé de ce corollaire du théorème général. En cet énoncé, nous introduirons certaines précisions qui ne sont pas indiquées en notre ancienne exposition. Ces précisions, qui visent la définition même de la stabilité de l'équilibre magnétique,

---

(1) P. Duhem, *Sur la propagation des actions électrodynamiques*, Chap. IV; *Stabilité de l'équilibre électrique et magnétique sur les corps immobiles* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1896, pp. B.41-B.49). En cette démonstration, nous supposions que les corps susceptibles de prendre l'aimantation ou la polarisation diélectrique sont laissés à eux-mêmes et non point, comme nous l'admettrons ici, soumis à l'influence d'un corps permanent dont l'aimantation, l'électrisation, la polarisation diélectrique, les courants électriques sont invariables; mais il suffit d'apporter à notre démonstration une modification insignifiante et que le lecteur trouvera sans peine pour qu'elle s'étende à un système où figure un tel corps permanent.

sont rendues nécessaires par les difficultés qu'on rencontre toutes les fois qu'on veut appliquer la méthode de Lejeune-Dirichlet à un système qui ne dépend pas simplement d'un nombre limité de paramètres variables.

Venons donc à cette définition.

Un ou plusieurs corps susceptibles d'être aimantés, d'être électrisés, de subir une polarisation électrique, d'être parcourus par des courants électriques, sont mis en présence de corps immobiles et permanents; sur ces derniers, distribution magnétique, distribution électrique, polarisation diélectrique, courants électriques sont supposés donnés et rigoureusement invariables.

Sur les corps non permanents, s'est établi, par hypothèse, un certain état d'équilibre magnétique et diélectrique.

A cet état d'équilibre on apporte, d'une façon qu'on n'a pas à indiquer, une certaine perturbation initiale. Cette perturbation consiste à superposer certaines distributions additionnelles aux distributions magnétique, électrique et diélectrique qui caractérisent l'état d'équilibre, et à lancer, dans la masse des corps non permanents, certains courants électriques.

L'aimantation, l'électrisation, la polarisation du système se mettent à varier; considérons, en particulier, l'aimantation; à un instant t postérieur à la perturbation, en un point (x, y, z) d'un corps non permanent, on n'a plus l'aimantation (A, B, C) qu'on avait tant que durait l'équilibre, mais une aimantation $(A+\alpha, B+\beta, C+\gamma)$, α, β, γ variant avec le temps t.

Une constante positive D étant donnée, arbitrairement d'ailleurs, supposons qu'aux valeurs absolues des intensités d'aimantation, des densités électriques, des intensités de polarisation diélectrique, des densités de courant électrique qui caractérisent la perturbation initiale, on puisse, en chaque point des corps non permanents, imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t,

$$\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\varpi < \mathrm{D}.$$

On dira que *l'équilibre magnétique est stable* sur le système considéré.

Or, le théorème général dont nous avons parlé renferme le corollaire suivant :

La stabilité de l'équilibre magnétique sur un système quelconque est assurée à trois conditions :

1° *La constante qu'Helmholtz a introduite en Électrodynamique et qu'il a désignée par la lettre k n'est pas négative;*

2° *Sur aucun corps non permanent, le coefficient de polarisation diélectrique n'est négatif;*

3° *Aucun de ces corps n'a un coefficient d'aimantation négatif.*

Or : 1° Helmholtz avait annoncé qu'on ne pouvait, sans impossibilité physique, attribuer à la constante k une valeur négative; la démonstration qu'il avait donnée à l'appui de cette affirmation ne pouvait être, assurément, regardée comme convaincante; mais nous en avons donné une autre (¹) qui ne laisse rien à désirer, croyons-nous, au point de vue de la rigueur.

2° En même temps, nous avons démontré, d'une manière entièrement générale, que l'existence d'une substance diélectrique dont le coefficient de polarisation serait négatif constituerait une autre impossibilité physique.

Nous pouvons donc énoncer sans restriction le théorème suivant : *La stabilité de l'équilibre magnétique est assurée sur un système où les aimants non permanents ont tous des coefficients d'aimantation positifs.*

L'Électrodynamique et l'Électromagnétisme justifient ainsi la proposition à laquelle nous avions été conduits, au n° **5**, en appliquant à des corps magnétiques le Postulat qui avait été énoncé au n° **3**. Reste à examiner si l'application de ce Postulat aux corps diamagnétiques est légitime.

16. Les raisonnements que nous allons développer supposent que le corps capable de s'aimanter soit placé dans des conditions toutes différentes de celles qui ont été considérées jusqu'ici.

(¹) P. Duhem, *Sur la stabilité électrique d'un milieu homogène et illimité* (*Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechszigsten Geburtstage*, 20 Februar 1904, pp. 13-27).

Jusqu'ici, nous supposions que ce corps était soumis à l'action d'autres corps que nous nommions *permanents*. Les corps permanents, invariables de figure et de position, portent une aimantation donnée et sont traversés par des courants électriques également donnés. En tout point de l'espace qui leur est extérieur et, en particulier, en tout point du volume occupé par le corps soumis à l'aimantation, ces corps engendrent un champ magnétique donné, auquel se superpose un second champ magnétique produit par l'aimantation qui s'est développée sur le corps considéré. En aucun point, ce dernier champ n'est donné; le problème posé revient à la détermination de la grandeur et de la direction prises par ce champ en tous les points du corps soumis à l'aimantation.

Nous allons supposer maintenant de tout autres conditions. Nous supposerons les corps extérieurs, dont le corps que nous voulons étudier subit l'action, tellement disposés que la proposition suivante soit véritable :

En tout point intérieur au corps soumis à l'aimantation, et infiniment voisin de la surface qui borne ce corps, le CHAMP TOTAL (L, M, N) *a une grandeur et une direction données.*

Ce champ total résulte de la superposition du champ engendré par les courants et par les aimants extérieurs, et du champ créé par l'aimantation qui s'est développée sur ce corps et par les courants qui le traversent. Si cette aimantation et ces courants viennent à changer, ils amèneront, en général, des variations dans la grandeur et la direction du second champ en tous les points de l'espace. Les aimants et les courants extérieurs devront alors éprouver des changements tellement combinés qu'ils aient pour effet, aux divers points intérieurs au corps soumis à l'aimantation, mais infiniment voisins de la surface de ce corps, de compenser exactement les variations du champ de ce corps, et de maintenir au champ total la grandeur et la direction qui lui ont été assignées. On voit bien que les aimants et les courants extérieurs ne pourront plus être, en général, des corps permanents.

Les corps extérieurs capables de donner les conditions que nous venons de définir constituent évidemment une abstraction, une pure fiction; il ne saurait être question de chercher une disposition pratique qui permît de réaliser à peu près ces conditions. Mais on peut remarquer que l'aimant permanent est déjà, lui aussi, une fiction. En l'étude de la conductibilité de la chaleur, on introduit des corps extérieurs fictifs fort analogues à ceux que nous venons de définir, lorsqu'on suppose ces corps capables de maintenir une valeur donnée à la température, en chaque point de la surface de la masse à l'intérieur de laquelle on recherche la distribution des températures.

En tout point (x, y, z) intérieur au corps qui est soumis à l'aimantation, l'intensité d'aimantation (A, B, C) est liée au champ total (L, M, N) par les égalités

$$A = KL, \qquad B = KM, \qquad C = KN.$$

La condition précédemment formulée peut donc être remplacée par la suivante :

Le corps étudié est soumis à des influences telles qu'en tout point qui lui est intérieur et qui est infiniment voisin de la surface qui le borne, l'aimantation garde une grandeur et une direction données.

17. Considérons d'abord le cas où le corps étudié est conducteur de l'électricité, mais se trouve privé de tout pouvoir diélectrique. En ce cas, la composante A de l'intensité d'aimantation varie selon la loi que voici [1] :

$$\Delta A - \frac{4\pi(1 + 4\pi\varepsilon K)}{\rho} \frac{a^2}{2} \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \tag{35}$$

dans laquelle ρ est la résistance spécifique (résistivité) du milieu, et $\frac{a^2}{2}$ la constante fondamentale des actions électrodynamiques.

Les composantes B et C vérifient des équations semblables.

Supposons qu'on se donne :

1° A l'instant $t = 0$, les valeurs A_0, B_0, C_0 de A, B, C, en tout point du corps;

---

(1) P. DUHEM, *Sur la propagation des actions électrodynamiques*, équations (181) et (182) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, pp. B.62-B.63).

2° A tout instant t, les valeurs prises par A, B, C, en tout point qui est intérieur au corps et infiniment voisin de la surface terminale S.

Le mouvement magnétique se trouvera-t-il entièrement déterminé par l'équation (35) et par les équations analogues?

Imaginons que ces équations comportent deux solutions distinctes. Selon l'une de ces solutions, au point (x, y, z) et à l'instant t, l'aimantation a des composantes A, B, C; selon l'autre, au même point et au même instant, elle a des composantes $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$. Les conditions données nous enseignent :

1° Qu'à l'instant $t = 0$, on a, dans toute la masse du corps étudié,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0; \tag{36}$$

2° Qu'en tout point de la surface S, on a, quel que soit t,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0. \tag{37}$$

Les deux quantités A et $A + \alpha$ vérifient également l'équation (35); leur différence α doit aussi vérifier cette équation; on a ainsi

$$\Delta\alpha - \frac{4\pi(1 + 4\pi\varepsilon K)}{\rho}\frac{a^2}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0. \tag{38}$$

Multiplions par $\alpha\, d\varpi$ les deux membres de cette équation (38), et intégrons pour le volume entier du corps étudié; nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \alpha^2\, d\varpi = \frac{\rho}{\pi a^2(1 + 4\pi\varepsilon K)}\int \alpha\,\Delta\alpha\, d\varpi.$$

L'emploi du théorème de Green et de la première condition (37) nous permet de transformer cette égalité en la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \alpha^2\, d\varpi = -\frac{\rho}{\pi a^2(1 + 4\pi\varepsilon K)}\int \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi. \tag{39}$$

Si $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif, le second membre de cette égalité (39) ne peut jamais être positif. La quantité $\int \alpha^2 d\varpi$, qui ne peut pas être négative, ne peut non plus être fonction croissante de t. Or, pour $t = 0$, elle est nulle, en vertu des conditions (36). Elle est donc constamment nulle, ce qui exige qu'on ait, en tout point du corps et à tout instant,

$$\alpha = 0.$$

On démontrerait de même qu'on a, en tout point du corps et à tout instant,

$$\beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

ce qui justifierait la proposition suivante :

Quel que soit le signe du coefficient d'aimantation K, *si le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif, le mouvement magnétique sur un corps est déterminé sans ambiguïté par la connaissance, à l'instant initial, de l'aimantation en toute la masse du corps et, à tout instant, de l'aimantation aux points infiniment voisins de la surface de ce corps.*

18. Étudions maintenant la stabilité d'un tel mouvement.

Un premier mouvement est déterminé sans ambiguïté par une certaine aimantation initiale dont nous désignerons par A_0, B_0, C_0 les composantes en un point quelconque de l'aimant, et par une aimantation, à chaque instant connue, en tout point de la surface limite de l'aimant. En ce premier mouvement, les composantes de l'aimantation, au point (x, y, z) et à l'instant t, sont désignées par A, B, C.

Un second mouvement est déterminé en gardant à chaque point infiniment voisin de la surface, en chaque instant, une aimantation identique à celle que possédait le même point au même instant, au cours du premier mouvement, mais en prenant une autre aimantation initiale $A_0 + \alpha_0$, $B_0 + \beta_0$, $C_0 + \gamma_0$. Au cours de ce second mouvement, l'aimantation au point (x, y, z) et à l'instant t aura pour composantes $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$.

Soit D *une constante positive arbitrairement choisie; si l'on peut, aux valeurs absolues de* α_0, β_0, γ_0, *imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit* t,

$$\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi < D, \tag{40}$$

on dira que le premier mouvement est un mouvement stable.

Les conditions (37) sont, ici encore, vérifiées quel que soit t, ce qui nous permet de récrire l'égalité (39). Or, si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif, cette égalité nous démontre que la quantité $\int \alpha^2 d\varpi$ ne peut être fonction croissante de t, en sorte qu'elle ne peut jamais surpasser sa valeur initiale $\int \alpha_0^2 \, d\varpi$. Les quantités $\int \beta^2 \, d\varpi$, $\int \gamma^2 \, d\varpi$ justifient des propositions analogues. La condition (40) sera donc assurément vérifiée, quel que soit t, si l'on a

$$\int (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2) \, d\varpi < D.$$

D'où le théorème suivant :

Quel que soit le signe du coefficient d'aimantation K, *tout mouvement magnétique est assurément stable sur un corps pour lequel le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif :*

$$1 + 4\pi\varepsilon K > 0. \tag{41}$$

19. Imaginons qu'au lieu d'être des fonctions données du temps, les composantes A, B, C de l'aimantation, en tout point infiniment voisin de la surface du corps, soient des constantes. Le mouvement magnétique compatible avec ces données, mouvement que nous savons être déterminé sans ambiguïté, est l'équilibre magnétique. Or, ce mouvement doit être stable. Donc :

Imaginons que, sur un corps, on maintienne invariables la grandeur et la direction de l'aimantation en tout point infiniment voisin de la surface qui limite ce corps. Quel que soit le signe du coefficient d'aimantation K, *si le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif, tout équilibre magnétique réalisé en de telles conditions est stable.*

20. Voyons maintenant ce qu'on peut dire au sujet de la stabilité du mouvement magnétique ou de l'équilibre magnétique sur un corps diamagnétique pour lequel la condition

$$1 + 4\pi\varepsilon K < 0 \tag{42}$$

est vérifiée.

Gardons toutes les notations employées au n° **18**, et différentions par rapport à t les deux membres de l'égalité (39); nous trouvons

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \alpha^2 \, d\varpi = - \frac{2\rho}{\pi a^2 (1 + 4\pi\varepsilon K)} \int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \, \partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \, \partial t} \right) d\varpi.$$

Mais l'emploi des égalités (37) permet d'écrire

$$\int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi=-\int\Delta\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

A son tour, le second membre de cette égalité peut, en vertu de l'équation (38), s'écrire

$$-\frac{\rho}{2\pi a^2(1+4\pi\varepsilon K)}\int(\Delta\alpha)^2\,d\varpi.$$

Nous trouvons donc, tout calcul fait,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\alpha^2\,d\varpi=\frac{\rho^2}{\pi^2a^4(1+4\pi\varepsilon K)^2}\int(\Delta\alpha)^2\,d\varpi. \tag{43}$$

Cette égalité (43), dont le second membre ne peut pas être négatif, nous apprend que la quantité $\frac{\partial}{\partial t}\int\alpha^2\,d\varpi$ ne peut jamais être fonction décroissante de t; elle garde, quel que soit t, une valeur au moins égale à la valeur δ qu'elle avait pour $t=0$.

Or, l'égalité (39) nous donne

$$\delta=-\frac{\rho}{\pi a^2(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi. \tag{44}$$

Les quantités α_0, β_0, γ_0 doivent vérifier les conditions (37); α_0 est donc nul en tout point infiniment voisin de la surface S; d'autre part, parmi les trois quantités α_0, β_0, γ_0, il en est assurément au moins une qui n'est pas nulle en tous les points du corps aimanté; nous pouvons toujours supposer qu'on ait choisi les axes de coordonnées de telle sorte que α_0 ne soit pas nul en tout point du corps aimanté; dès lors, on ne pourra pas avoir, en tout point de ce corps,

$$\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}=0,\qquad\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}=0,\qquad\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}=0.$$

La quantité

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$

aura une valeur positive et, si l'inégalité (42) est vérifiée, δ aura aussi, en vertu de l'égalité (44), une valeur positive.

Par conséquent, $\frac{\partial}{\partial t}\int\alpha^2\,d\varpi$ demeure, quel que soit t, au moins égal à une valeur positive δ et $\int \alpha^2 d\varpi$ croît au delà de toute limite avec t.

D'où la conclusion suivante :

Si, pour un corps diamagnétique, le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est négatif, tout mouvement magnétique et, en particulier, tout équilibre magnétique, obtenus sur ce corps dans les conditions indiquées, sont instables.*

21. Nous allons reprendre maintenant les problèmes que nous avons traités aux n^os^ **17, 18, 19** et **20**, en supposant que le corps susceptible d'aimantation soit également capable de polarisation diélectrique; K' sera le coefficient de cette polarisation diélectrique; en tout ce Chapitre, *nous le supposerons positif.*

Pour laisser aux problèmes traités leur entière généralité, nous supposerons que le corps étudié soit conducteur de l'électricité; si l'on voulait qu'il fût isolant, on n'aurait qu'à biffer, en toutes nos équations, les termes qui renferment en facteur l'inverse $\frac{1}{\rho}$ de la résistance spécifique.

Des trois équations du mouvement magnétique, voici, alors, quelle est la première (¹) :

$$\frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)} \Delta A - \frac{1}{\rho K'} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{45}$$

Les deux autres s'en déduisent en remplaçant A par B ou par C.

Supposons qu'on se donne :

1° A l'instant $t = 0$, les valeurs de A, B, C, $\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial B}{\partial t}, \frac{\partial C}{\partial t}$ en tous les points du corps soumis à l'aimantation;

2° A chaque instant t, les valeurs de A, B, C en tout point intérieur au corps et infiniment voisin de la surface qui borne ce corps.

Demandons-nous si, dans ces conditions, le mouvement magnétique sera entièrement déterminé sur ce corps.

(¹) P. Duhem, *loc. cit.* Les deux constantes que nous représentions alors par $\mathfrak{A}^2$ et par $\mathfrak{C}^2$, doivent être prises identiques entre elles et à a^2.

Gardons les notations qui ont été employées au n° **17**.

D'après les conditions qui viennent d'être posées, on aura :

1° A l'instant initial $t = 0$, en tout point du corps,

$$(46)\qquad \begin{cases} \alpha = 0, & \beta = 0, & \gamma = 0, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial \beta}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

2° Quel que soit t, en tout point du corps infiniment voisin de la surface qui le borne,

$$(37)\qquad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

En outre, en vertu de l'égalité (45), on aura constamment

$$(47)\qquad \frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)} \Delta\alpha - \frac{1}{\rho K'} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0.$$

Multiplions par $2\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}$ les deux membres de cette égalité et intégrons, pour le volume entier du corps, les résultats obtenus; nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi - \frac{1}{\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}\int \frac{\partial \alpha}{\partial t}\Delta\alpha\, d\varpi = -\frac{2}{\rho K'}\int\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

A l'aide du théorème de Green et des conditions (37), cette égalité devient

$$(48)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\int\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varpi \\ &\qquad = -\frac{2}{\rho K'}\int\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Le second membre de l'égalité (48) ne peut jamais être positif. La quantité

$$(49)\qquad U = \int\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varpi$$

ne peut donc jamais être fonction croissante de t.

D'après les conditions (46), cette quantité est nulle pour $t = 0$.

Enfin, si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif, cette quantité ne peut jamais être négative.

Dès lors, on doit avoir, quel que soit t,

$$U = 0,$$

ce qui exige qu'on ait, à tout instant et en tout point du corps,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

$$(50) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0.$$

En vertu des égalités (37), pour que les égalités (50) aient lieu à tout instant et en tout point du corps, il faut et il suffit qu'on ait aussi à tout instant et en tout point du corps,

$$\alpha = 0.$$

On démontrerait de même qu'on a, à tout instant et en tout point du corps,

$$\beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

ce qui justifierait le théorème suivant:

Si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est positif, tout mouvement magnétique sur le corps considéré est déterminé, sans aucune ambiguïté, par les conditions qui lui ont été imposées.*

22. Nous allons maintenant nous occuper de la stabilité d'un tel mouvement. Dans ce but, nous garderons les notations dont nous avons fait usage au n° **18**, mais nous changerons la définition de la stabilité qui a été donnée en cet endroit.

Soient E *et* F *deux constantes positives données d'avance, arbitrairement d'ailleurs. Si, aux valeurs absolues initiales de*

$$\alpha_0, \qquad \beta_0, \qquad \gamma_0,$$

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \alpha_0}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \alpha_0}{\partial z}, \qquad \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)_0,$$

on peut, en tout point du corps, imposer des limites supérieures *telles qu'on ait, quel que soit t,*

$$(51)\quad \int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2 +\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi < \mathrm{E},$$

$$(52)\quad \int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi = \mathrm{F},$$

le mouvement considéré sera un mouvement stable.

Pour reconnaître la grande différence qui existe entre cette définition de la stabilité et celle qui a été donnée au n° **18**, il suffit de faire la remarque suivante :

En vertu de la première condition (37), aucune des deux intégrales

$$\int\alpha^2\,d\varpi,\qquad \int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi,$$

ne peut s'annuler à moins que l'autre ne s'annule en même temps; mais il n'est pas permis d'affirmer qu'elles sont infiniment petites ensemble ni qu'elles sont infiniment grandes ensemble.

L'égalité (48) nous permet d'écrire, quel que soit t,

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2\pi a^2\mathrm{K}'(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi$$
$$\leqq\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0^2+\frac{1}{2\pi a^2\mathrm{K}'(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})}\left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi$$

Si le binome $(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})$ est positif, nous en déduisons les deux conditions, vérifiées quel que soit t,

$$(53)\quad \int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi\leqq\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0^2+\frac{1}{2\pi a^2\mathrm{K}'(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})}\times\left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi,$$

$$(54)\quad \int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$
$$\leqq\int\left[2\pi a^2\mathrm{K}'(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

Pour chacune des deux quantités β et γ, on peut établir deux conditions analogues aux conditions (53) et (54).

Dès lors, désignons par G la plus petite des deux quantités positives

$$\frac{E}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \quad \text{et} \quad F.$$

Il est clair qu'aux valeurs absolues de

$$\begin{array}{cccc} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0, & \\ \dfrac{\partial\alpha_0}{\partial x}, & \dfrac{\partial\alpha_0}{\partial y}, & \dfrac{\partial\alpha_0}{\partial z}, & \ldots, \\ \left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0, & \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial t}\right)_0, & \left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right)_0, & \end{array}$$

nous pouvons assigner des limites supérieures telles que nous ayions l'inégalité

$$(55) \quad \int \left\{ \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \left[\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}\right)^2 \right] + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0^2 + \ldots \right\} d\varpi < G,$$

dans laquelle $+\ldots$ désigne des termes qui se déduisent de ceux qui sont explicitement écrits en remplaçant α d'abord par β, puis par γ.

Cela fait, les conditions (53) et (54) nous assurent que les inégalités (51) et (52) seront vérifiées quel que soit t.

D'où la conclusion suivante :

Si le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$ est positif, tout mouvement magnétique obtenu sur le corps considéré est stable dans les conditions indiquées.

Cette proposition est vraie, en particulier, de l'équilibre magnétique qu'on obtient en maintenant invariables la grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point intérieur au corps et infiniment voisin de la surface de ce corps.

23. Nous allons montrer maintenant que, *dans les conditions indiquées, tout mouvement magnétique et, en particulier, tout équilibre magnétique est instable si le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$ est négatif.*

Considérons la quantité

$$(56)\qquad U=\int\left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2\pi a^2K'(1+4\pi\varepsilon K)}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi.$$

L'égalité (48) nous donne

$$(57)\qquad \frac{dU}{dt}=2\int\left(\frac{1}{\rho K'}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

En vertu de l'équation (47), cette dernière égalité peut encore s'écrire

$$(58)\qquad \frac{dU}{dt}=4\int\left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi a^2K'(1+4\pi\varepsilon K)}-\frac{1}{\rho K'}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right]\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

L'égalité (57) nous donne

$$\frac{d^2U}{dt^2}=4\int\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)^2d\varpi+4\int\left(\frac{1}{\rho K'}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+\frac{\partial^3\alpha}{\partial t^3}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Si l'on compare cette égalité à celle qu'on obtient en différentiant l'égalité (47) par rapport à t, on voit qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{d^2U}{dt^2}=4\int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)^2+\frac{1}{2\pi a^2K'(1+4\pi\varepsilon K)}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right]d\varpi$$

que l'emploi du théorème de Green et des conditions (37) transforme en

$$(59)\qquad \frac{d^2U}{dt^2}=4\int\left\{\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)^2-\frac{1}{2\pi a^2K'(1+4\pi\varepsilon K)}\left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]\right\}d\varpi.$$

Si le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$ est négatif, cette égalité nous montre que $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne peut jamais être négatif. La fonction $\frac{dU}{dt}$ ne peut donc, à aucun moment, être fonction décroissante de t; quel que soit t, elle demeure au moins égale à sa valeur initiale $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$.

Or, on voit aisément qu'on peut, sans franchir les limites supérieures imposées aux valeurs absolues de α_0 et de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$, faire en sorte que la quantité $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ soit positive.

En effet, en sus des conditions qui imposent des limites supérieures à leurs valeurs absolues, les quantités α_0 et $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ sont assujetties seulement à s'annuler en tout point infiniment voisin de la surface qui limite le corps.

Sans nous occuper tout d'abord des limites supérieures imposées aux valeurs absolues de α_0, de $\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}$, $\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}$ et de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$, prenons pour valeur de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ le produit d'une constante λ par une fonction continue quelconque de x, y, z, $f(x, y, z)$, assujettie seulement à s'annuler en tout point de la surface qui limite le corps. Choisissons ensuite une autre fonction continue $g(x, y, z)$, nulle à la surface du corps, et telle que

$$\frac{g(x, y, z)}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)} - \frac{f(x, y, z)}{\rho K'}$$

ait, en chaque point, le signe de $f(x, y, z)$; puis déterminons α_0 par les conditions de s'annuler à la surface du corps et de vérifier, en tout point du corps, l'équation

$$\Delta\alpha_0 = \lambda g(x, y, z).$$

Toutes choses égales d'ailleurs, α_0 sera proportionnel à λ.

On pourra maintenant donner à λ une valeur absolue assez petite pour que les valeurs absolues de α_0, de $\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha_0}{\partial y}$, $\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}$ et de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ ne surpassent, en aucun point, les limites supérieures qui leur ont été assignées.

Mais, d'autre part, en vertu de l'égalité (58), on aura

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 4\lambda^2 \int \left[\frac{g(x, y, z)}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)} - \frac{f(x, y, z)}{\rho K'}\right] f(x, y, z)\, d\varpi$$

et le second membre de cette égalité est assurément positif.

Comme nous l'avons vu, $\frac{dU}{dt}$ ne pourra jamais devenir inférieur à cette valeur positive initiale. Donc U croîtra au delà de toute limite avec t.

Si l'on se reporte alors à l'expression (56) de U, on voit que, quelque petites que soient les limites supérieures imposées aux valeurs absolues des quantités

$$\alpha_0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial z}, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial t},$$

on peut toujours disposer de ces quantités de telle sorte que l'une au moins des quantités

$$\int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi, \qquad \int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t, ce qui établit l'instabilité annoncée.

24. On peut reprendre les problèmes traités aux deux numéros précédents, mais en adoptant une nouvelle définition de la stabilité qui n'est équivalente ni à celle dont il a été fait usage en ces deux numéros ni à celle qui a été donnée au n° **18**. Voici cette définition :

e et f étant deux quantités positives arbitrairement choisies d'avance, si l'on peut, aux valeurs absolues de α_0, β_0, γ_0 et de leurs dérivées premières et secondes par rapport à x, y et z, de $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)_0$ et de leurs dérivées premières par rapport à x, y et z, imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t,

$$\int [(\Delta\alpha)^2 + (\Delta\beta)^2 + (\Delta\gamma)^2]\, d\varpi < e, \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\int \Bigg[& \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \\ & \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \\ & \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \Bigg] d\varpi < f,\end{aligned} \tag{61}$$

le mouvement magnétique est stable.

On reconnaîtra la différence qu'il y a entre cette nouvelle définition de la stabilité et celles qui ont été données précédemment en observant :

1° Qu'en vertu des conditions (37), l'intégrale

$$\int (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\varpi,$$

l'intégrale qui forme le premier membre de l'inégalité (51) et l'intégrale

$$\int [(\Delta\alpha)^2+(\Delta\beta)^2+(\Delta\gamma)^2]\,d\varpi$$

s'annulent en même temps, mais qu'il n'est permis de dire ni qu'elles sont infiniment petites en même temps ni qu'elles sont infiniment grandes en même temps;

2° Qu'en vertu des mêmes conditions (37), l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi$$

et l'intégrale qui forme le premier membre de l'inégalité (61) s'annulent toujours ensemble, sans qu'il soit permis de dire qu'elles sont infiniment petites en même temps ou infiniment grandes en même temps.

25. Nous allons prouver d'abord que, *selon cette nouvelle définition, tout mouvement magnétique et, en particulier, tout équilibre magnétique est encore stable sur un corps magnétique ou diamagnétique pour lequel le binôme* $(1+4\pi\varepsilon K)$ *est positif.*

Multiplions, en effet, les deux membres de l'égalité (47) par

$$2\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,d\varpi$$

et intégrons pour le volume entier du corps soumis à l'aimantation. Nous trouvons l'égalité

$$\frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\frac{d}{dt}\int(\Delta\alpha)^2\,d\varpi - 2\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,d\varpi = \frac{2}{\rho K'}\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,\partial\varpi.$$

L'emploi des conditions (37) et du théorème de Green transforme cette égalité là en la suivante :

$$\frac{d}{dt}\int\left[\frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}(\Delta\alpha)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi$$
$$= -\frac{2}{\rho K'}\int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Le second membre de cette égalité ne peut jamais être négatif; l'intégrale qui figure au premier membre ne peut jamais être fonction croissante de t; à aucun instant, sa valeur ne surpasse celle qu'elle avait prise à l'instant initial. Ce résultat acquis, la démonstration du théorème énoncé s'achève par une méthode semblable à celle qui a été employée au n° **22**.

26. *Selon la nouvelle définition, tout mouvement magnétique et, en particulier, tout équilibre magnétique est instable sur un corps diamagnétique pour lequel le binôme* $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ *est négatif.*

Nous allons prouver, en effet, que, quelles que soient les limites supérieures imposées aux valeurs absolues des quantités α_0, $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ et de leurs dérivées premières par rapport à x, y et z, on pourra toujours disposer de ces quantités de telle sorte que l'une au moins des intégrales

$$I = \int (\Delta\alpha)^2 \, d\varpi, \tag{62}$$

$$J = \int \left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi \tag{63}$$

croisse au delà de toute limite avec t [1].

Nous trouvons, tout d'abord,

$$\frac{dI}{dt} = 2\int \Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,d\varpi; \tag{64}$$

puis

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\int \left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi + 2\int \Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\,d\varpi.$$

Au moyen de l'équation (47), qui donne $\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$, cette égalité devient

$$\begin{aligned}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\int \left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi - \frac{2}{\rho K'}\int \Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\,d\varpi \\ + \frac{1}{\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}\int \Delta\alpha\,\Delta\Delta\alpha\,d\varpi.\end{aligned}$$

[1] Cette démonstration est analogue à celle que nous avons donnée au paragraphe 3 de notre travail *Sur la stabilité électrique d'un milieu homogène et illimité*. Certaines fautes de calcul, qui s'étaient glissées en ce travail, sont corrigées ici.

L'emploi du théorème de Green et des conditions (37) permet de mettre cette dernière égalité sous la forme

$$(65)\quad \begin{aligned}\frac{d^2 I}{dt^2} &= 2\int\left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi\\ &+\frac{2}{\rho K'}\int\left(\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial z}\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi\\ &-\frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left[\left(\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.\end{aligned}$$

D'autre part, en vertu du théorème de Green et des conditions (37), l'égalité (63) peut s'écrire

$$J = -\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Nous en tirons l'égalité

$$\frac{dJ}{dt} = -\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi - \int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}d\varpi$$

que l'emploi du théorème de Green et des conditions (37) transforme en l'égalité

$$\frac{dJ}{dt} = -2\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

En vertu de l'équation (47), cette dernière égalité devient

$$(66)\quad \frac{dJ}{dt} = \frac{2}{\rho K'}\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi - \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Nous tirons de là

$$\begin{aligned}\frac{d^2 J}{dt^2} &= \frac{2}{\rho K'}\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi + \frac{2}{\rho K'}\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}d\varpi\\ &-\frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi\\ &-\frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}d\varpi.\end{aligned}$$

Le théorème de Green, joint aux conditions (37), nous permet d'écrire

$$\int\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}d\varpi = \int\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Moyennant cette remarque et l'équation (47), l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}\frac{d^2 J}{dt^2} = &- \frac{4}{\rho^2 K'^2}\int \frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi \\ &+ \frac{3}{\pi a^2\rho K'^2(1+4\pi\varepsilon K)}\int \Delta\alpha\,\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi \\ &- \frac{1}{2[\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)]^2}\int \Delta\alpha\,\Delta\Delta\alpha\,d\varpi \\ &- \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi.\end{aligned}$$

Un nouvel emploi du théorème de Green et des conditions (37) donne

$$(67)\quad \begin{aligned}\frac{d^2 J}{dt^2} = &\frac{4}{\rho^2 K'^2}\int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi \\ &- \frac{3}{\pi a^2\rho K'^2(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left(\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial y}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial z}\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi \\ &+ \frac{1}{2[\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)]^2}\int\left[\left(\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi \\ &- \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la quantité

$$(68)\qquad W = J - \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}.$$

Les égalités (64) et (66) nous donneront

$$(69)\qquad \frac{dW}{dt} = 2\int\left[\frac{1}{\rho K'}\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\Delta\alpha\right]\frac{\partial\alpha}{\partial t}d\varpi.$$

Quant aux égalités (65) et (67), elles nous donneront

$$(70)\quad \begin{aligned}\frac{d^2 W}{dt^2} = &- \frac{2}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\int\left(\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\ &+\int\Bigg\{\left[\frac{2}{\rho K'}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial x}\right]^2 \\ &\quad+\left[\frac{2}{\rho K'}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial t} - \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial y}\right]^2 \\ &\quad+\left[\frac{2}{\rho K'}\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\,\partial t} - \frac{1}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\frac{\partial\,\Delta\alpha}{\partial z}\right]^2\Bigg\}d\varpi.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité nous montre que, si le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$ est négatif, $\frac{d^2W}{dt^2}$ ne peut jamais prendre de valeurs négatives, en sorte que $\frac{dW}{dt}$ garde, quel que soit t, une valeur au moins égale à celle que cette quantité avait à l'instant initial.

Nous allons montrer maintenant que, sans transgresser aucune des limites supérieures qu'on aura imposées aux valeurs absolues de α_0, de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ et de leurs dérivées partielles par rapport à x, y et z, on peut disposer de ces quantités de telle sorte que $\left(\frac{dW}{dt}\right)_0$ soit positif.

Soit, en effet, $f(x, y, z)$ une fonction finie et continue quelconque, nulle en tout point de la surface qui limite le corps et différente de zéro en tout autre point de ce corps; soit λ une constante provisoirement quelconque. Prenons

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0 = \lambda f(x, y, z).$$

Prenons ensuite, pour α_0, une fonction de x, y, z qui s'annule en tout point de la surface qui limite le corps et qui vérifie, en tout point du corps, l'équation

$$\Delta\alpha_0 = \lambda\mu^2 f(x, y, z),$$

μ étant une quantité indépendante de x, y, z.

Cela fait, nous pourrons prendre la constante λ assez voisine de zéro pour que les valeurs absolues de α_0, de $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_0$ et de leurs dérivées partielles ne surpassent assurément pas les limites supérieures qui leur ont été assignées.

Mais, en vertu de l'égalité (69), nous aurons

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_0 = 2\lambda^2 \int \left[\frac{1}{\rho K'} - \frac{\mu^2}{\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\right] [f(x, y, z)]^2 d\varpi,$$

quantité essentiellement positive.

Puisque $\frac{dW}{dt}$ garde, quel que soit t, une valeur positive au moins égale à $\left(\frac{dW}{dt}\right)_0$, W croît au delà de toute limite avec t. D'après l'égalité (68), cela ne peut être que si l'une au moins des deux intégrales I et J croît au delà de toute limite avec t. Le théorème énoncé est donc démontré.

27. Les diverses méthodes fondées sur l'emploi des équations de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme conduisent donc à ce résultat : Sur un corps diamagnétique, qu'il soit, d'ailleurs, capable ou non de polarisation diélectrique, l'équilibre magnétique est stable si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif et instable si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est négatif. Or, le Postulat formulé au n° **3** annonce que, sur un corps diamagnétique, l'équilibre magnétique est instable toutes les fois que le binôme $\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K\right)$ est positif. Il apparaît donc que le Postulat dont nous venons de parler reçoit un démenti de la part des équations de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme.

A la vérité, on pourrait essayer, de la manière que voici, d'éviter cette contradiction :

Le corps diamagnétique pour lequel on discute de la stabilité de l'équilibre magnétique, n'est pas, lorsqu'on lui applique des équations de l'Électromagnétisme, placé dans les conditions où il se trouve lorsqu'on fait usage du postulat relatif au potentiel interne; en cette circonstance-ci, on le suppose soumis à l'influence de corps permanents; en cette circonstance-là, on maintient invariable le champ magnétique en chaque point intérieur au corps diamagnétique et infiniment voisin de la surface de ce corps; on pourrait, sans absurdité, admettre que l'équilibre magnétique, stable dans un cas, ne l'est pas dans l'autre.

On fermera cette échappatoire si l'on peut définir un cas où les deux dispositifs dont nous venons de parler cessent d'être différents l'un de l'autre. Or, voici comment on peut, fort simplement, imaginer un tel cas :

Concevons un milieu magnétique ou diamagnétique, homogène, illimité en tout sens, soustrait à l'action de tout corps étranger. Admettons simplement qu'à l'infini, les composantes α, β, γ de l'aimantation s'annulent comme $\frac{1}{r^2}$, et leurs dérivées partielles par rapport à x, y, z, comme $\frac{1}{r^3}$, r étant la distance du point qui s'éloigne à l'infini à un point fixe situé dans la région où nous étudions l'aimantation. Dans ces conditions, on pourra encore, comme on le voit aisément, faire usage de toutes les formules que nous avons précédemment écrites pour un corps aimanté de dimensions finies.

Si un tel milieu est entièrement désaimanté, il est évidemment à l'état d'équilibre magnétique. Cet équilibre est-il stable ou instable?

Traitons d'abord la question au moyen du Postulat énoncé au n° **3**.

Si le milieu est diamagnétique et si, cependant, la valeur absolue de son coefficient d'aimantation est assez petite pour que le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ soit positif, ce postulat nous avertit que l'équilibre magnétique considéré n'est pas stable.

En effet, le potentiel interne du milieu désaimanté est nul.

Au sein de ce milieu, dessinons un ellipsoïde quelconque et, en cet ellipsoïde, imaginons une distribution magnétique uniforme quelconque, sans concevoir aucune aimantation dans le milieu extérieur à l'ellipsoïde. Le potentiel interne du système, qui se réduit au potentiel interne de l'ellipsoïde aimanté, est maintenant négatif.

Donc, en l'état d'équilibre, ce potentiel n'était pas minimum.

On arriverait encore à cette conclusion, même si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ était négatif, pourvu seulement que le binôme

$$\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K\right)$$

fût positif; il suffirait, dans la démonstration précédente, de remplacer l'ellipsoïde par une sphère.

Reprenons maintenant le même problème au moyen des équations de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme. Les considérations développées au cours du présent Chapitre nous apprennent que, pour un milieu diamagnétique capable ou non de polarisation diélectrique, l'équilibre est stable si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est positif et instable si le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ est négatif.

Ainsi, *appliqués à ce même problème, le Postulat énoncé au n°* **3** *et les lois de l'Électromagnétisme conduisent à des résultats concordants si le milieu est magnétique. Ils conduisent encore à des résultats concordants si le milieu est diamagnétique et si l'on a les deux inégalités*

$$1 + 4\pi\varepsilon K < 0, \qquad 1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K > 0.$$

Mais ils conduisent à des résultats qui se contredisent si le milieu est diamagnétique et si l'on a l'inégalité

$$1 + 4\pi\varepsilon K > 0.$$

De là cette première conclusion :

Le Postulat, énoncé au n° 5, justifié pour les systèmes dont le mouvement dépend des seules lois de la Dynamique, ne l'est plus pour les systèmes où figurent des corps magnétiques et dont, par conséquent, le mouvement dépend des lois de l'Électromagnétisme.

28. De là aussi cette seconde conclusion :

L'existence d'un corps assez fortement diamagnétique pour que le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ soit négatif, apparaît comme une impossibilité physique. Mais les objections formulées contre l'existence de corps diamagnétiques s'évanouissent si ces corps sont assez faiblement diamagnétiques pour qu'aucun d'entre eux ne rende négatif le binôme $(1 + 4\pi\varepsilon K)$.

CHAPITRE III.

COMPARAISON ENTRE LES CORPS DIÉLECTRIQUES ET LES CORPS DIAMAGNÉTIQUES.

29. Il est intéressant de reprendre, au sujet des corps diélectriques, des considérations semblables à celles que nous venons de développer au sujet des corps diamagnétiques, et de comparer entre eux les résultats que donnent ces deux études.

La Statique des corps diélectriques est absolument semblable à la Statique des corps magnétiques, en sorte qu'on peut répéter textuellement, au sujet des corps diélectriques, tout ce qui, au Chapitre I, a été dit des corps magnétiques. Il suffit de remplacer l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$ et ses composantes A, B, C par l'intensité de la polarisation diélectrique $\mathfrak{M}'$ et ses composantes A', B', C'; le coefficient d'aimantation K par le coefficient de polarisation K'; la constante ε des actions magnétiques par la constante ε' des actions électrostatiques; la fonction potentielle magnétique V par la fonction potentielle électrostatique V'; enfin, les composantes L, M, N du champ magnétique par les composantes X, Y, Z du champ électrique.

Le potentiel interne d'un système formé par un corps électrisé d'une manière permanente et par un corps diélectrique se calcule de la même manière que le potentiel interne d'un système formé d'un aimant permanent et d'un corps magnétique.

Dès lors, si l'on admet la généralité du Postulat énoncé au n° **3**, on peut formuler les propositions suivantes :

Si le coefficient de polarisation K′ *d'un corps diélectrique est positif, ce corps, placé en présence d'un corps électrisé d'une manière permanente, parviendra à un état d'équilibre de polarisation qui sera assurément stable.*

Cet état d'équilibre, au contraire, serait assurément instable si le coefficient de polarisation K′ *était négatif, tandis que le pouvoir inducteur spécifique* $(1 + 4\pi\varepsilon' K')$ *ou même simplement le binôme* $\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon' K'\right)$ *serait positif.*

Mais rien ne nous autorise, jusqu'ici, à étendre aux systèmes qui renferment des corps diélectriques le Postulat qui a été formulé au n° **3**; la justification de ce Postulat suppose l'emploi des équations de la Dynamique; or, lorsqu'un système contient des corps diélectriques, l'étude du changement de la polarisation prise par ces corps ne dépend pas des équations de la Dynamique, mais bien des équations de l'Électrodynamique; c'est donc à ces dernières qu'il faut demander la démonstration ou la réfutation des propositions qui viennent d'être formulées.

30. En premier lieu, pour les corps diélectriques dont le coefficient de polarisation est positif, on peut répéter exactement ce que nous avons dit, au n° **15**, des corps magnétiques dont le coefficient d'aimantation est positif. Le théorème général dont nous avons parlé en cet endroit s'applique à un système qui contient à la fois des corps magnétiques et des corps diélectriques; il suppose seulement que le coefficient d'aimantation des uns et le coefficient de polarisation des autres soient positifs. Si donc, nous définissons la stabilité d'un équilibre de polarisation exactement comme au n° **15**, nous avons défini la stabilité d'un équilibre d'aimantation, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

L'équilibre de polarisation qui s'établit, sous l'influence de corps électrisés et polarisés d'une manière permanente, sur un corps diélectrique dont le coefficient de polarisation est positif, est un équilibre stable.

31. Imaginons maintenant un corps diélectrique placé dans des conditions telles qu'*en tout point intérieur à ce corps et infiniment voisin de la surface qui le limite, le champ électrique et, par conséquent, l'intensité de la polarisation diélectrique gardent une grandeur et une direction invariables.* Proposons-nous d'étudier, sur un tel corps, la stabilité de l'équilibre de polarisation.

Considérons, tout d'abord, le cas où le corps dont il s'agit est privé de conductibilité électrique.

Les équations qui régissent, sur un tel corps, les changements de la polarisation diélectrique ont été données par Helmholtz (¹); voici la première :

$$(71)\quad \begin{aligned}\frac{\partial^2 A'}{\partial t^2} &= \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)}\Delta A' \\ &+ \frac{(1+4\pi\varepsilon K)(1+4\pi\varepsilon K')-k}{2\pi a^2 k K'(1+4\pi\varepsilon K)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A'}{\partial x}+\frac{\partial B'}{\partial y}+\frac{\partial C'}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Les deux autres se déduisent de celle-là en remplaçant successivement x par y et z, et A' par B' et C'.

k représente la constante que Helmholtz a introduite en Électrodynamique et que nous savons ne pas pouvoir être négative.

Voici le théorème que nous nous proposons de démontrer :

Si l'on admet que la constante k de Helmholtz est positive;

Que le binôme $(1+4\pi\varepsilon K)$, *relatif au coefficient d'aimantation, est positif;*

Que le pouvoir inducteur spécifique $(1+4\pi\varepsilon' K')$ *est également positif;*

(¹) H. Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* [*Borchardt's Journal*, Bd. LXXII, 1870, p. 57; *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, 1882, p. 545; équations (21 *c*)].

Mais que le coefficient de polarisation diélectrique K′ *est négatif :*
La polarisation diélectrique ne peut, sur le corps considéré et dans les conditions indiquées, être en équilibre stable.

Nous prendrons les lettres A'_0, B'_0, C'_0 pour désigner les valeurs des composantes de la polarisation diélectrique en l'état d'équilibre.

En un autre état quelconque, nous poserons

$$A' = A'_0 + \alpha', \qquad B' = B'_0 + \beta', \qquad C' = C'_0 + \gamma'.$$

En tout point intérieur au corps et infiniment voisin de la surface de ce corps, nous devrons avoir, quel que soit t,

$$\alpha' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \gamma' = 0. \tag{72}$$

En outre, les quantités α', β', γ' devront vérifier trois équations qui se tirent des équations (71), et dont voici la première :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} = {} & \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \Delta\alpha' \\ & + \frac{(1+4\pi\varepsilon K)(1+4\pi\varepsilon' K') - k}{2\pi a^2 k K'(1+4\pi\varepsilon K)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right).\end{aligned} \tag{73}$$

De là nous allons déduire les formules fondamentales de notre analyse.

Considérons la quantité

$$U = \frac{1}{2}\int (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, d\varpi. \tag{74}$$

Nous trouvons

$$\frac{dU}{dt} = \int \left(\alpha' \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right) d\varpi, \tag{75}$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{d^2 U}{dt^2} = {} & \int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ & + \int \left(\alpha' \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \beta' \frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2} + \gamma' \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2}\right) d\varpi.\end{aligned} \tag{76}$$

Mais les égalités (73) donnent

$$\begin{aligned}& \int \left(\alpha' \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \beta' \frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2} + \gamma' \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2}\right) d\varpi \\ & = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \int (\alpha' \Delta\alpha' + \beta' \Delta\beta' + \gamma' \Delta\gamma')\, d\varpi \\ & \quad + \frac{(1+4\pi\varepsilon K)(1+4\pi\varepsilon' K') - k}{2\pi a^2 k K'(1+4\pi\varepsilon K)} \int \left[\alpha' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right) + \ldots\right] d\varpi,\end{aligned}$$

$+\ldots$ désignant deux termes qui se déduisent par permutation du terme explicitement écrit.

Mais, en vertu des conditions (72), on a

$$\int\left[\alpha'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial x}+\frac{\partial\beta'}{\partial y}+\frac{\partial\gamma'}{\partial z}\right)+\ldots\right]d\varpi=-\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial x}+\frac{\partial\beta'}{\partial y}+\frac{\partial\gamma'}{\partial z}\right)^2 d\varpi,$$

$$\int\alpha'\,\Delta\alpha'\,d\varpi=-\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$

et deux égalités analogues à cette dernière.

L'égalité (76) peut donc s'écrire

$$(77)\quad \begin{aligned}\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2}&=\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi\\&-\frac{1}{2\pi a^2\mathrm{K}'(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})}\int\Big[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial z}\right)^2\\&\qquad+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial z}\right)^2\\&\qquad+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial z}\right)^2\Big]d\varpi\\&-\frac{(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})(1+4\pi\varepsilon'\mathrm{K}')-k}{2\pi a^2k\mathrm{K}'(1+4\pi\varepsilon\mathrm{K})}\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial x}+\frac{\partial\beta'}{\partial y}+\frac{\partial\gamma'}{\partial z}\right)^2 d\varpi.\end{aligned}$$

Les formules (75) et (77) nous permettront de démontrer le théorème énoncé lorsque nous aurons établi quatre lemmes.

Premier lemme. — Posons

$$(78)\qquad \theta=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}.$$

On peut, à l'instant $t=0$, choisir, dans tout le corps, les valeurs de

$$\alpha'_0,\quad \beta'_0,\quad \gamma'_0,\quad \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)_0,\quad \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)_0,\quad \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)_0,$$

de telle sorte :

1° Que les valeurs absolues de ces quantités soient inférieures à telles limites supérieures qu'il aura plu de leur imposer;

2° Que les conditions (72) soient vérifiées;

3° Que l'on ait, à cet instant,

$$(79)\qquad \theta_0=0,\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_0=0;$$

4° Que l'intégrale

$$V_0 = \int \left(\alpha' \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)_0 d\varpi \tag{80}$$

ait une valeur positive.

Prenons, en effet, ce qui est évidemment possible d'une infinité de manières, trois fonctions de x, y, z, désignées par p, q, r, qui soient assujetties aux conditions suivantes :

1° Dans l'étendue occupée par le corps,

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz$$

n'est pas une différentielle totale;

2° Les dérivées partielles du premier ordre de p, q, r s'annulent en tout point de la surface qui limite le corps.

Prenons ensuite

$$\begin{aligned}
\alpha'_0 &= \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y}\right), & \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0 &= \mu\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y}\right),\\
\beta'_0 &= \lambda\left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}\right), & \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)_0 &= \mu\left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}\right),\\
\gamma'_0 &= \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right), & \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)_0 &= \mu\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right),
\end{aligned}$$

λ et μ étant deux quantités quelconques indépendantes de x, y, z, t.

La deuxième et la troisième conditions seront vérifiées quelles que soient les valeurs imposées à λ et μ.

L'égalité (80) prend maintenant la forme

$$V_0 = \lambda\mu \int \left[\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] d\varpi.$$

Pour que la quatrième condition soit vérifiée, il suffit que λ et μ soient deux quantités de même signe.

En donnant enfin à chacune de ces deux quantités des valeurs absolues suffisamment petites, on satisfera à la première condition.

Deuxième lemme. — Si le rapport

$$P = \frac{1 + 4\pi\varepsilon' K'}{2\pi a^2 k K'} \tag{81}$$

est nul ou positif, et si l'on a, à l'instant initial, en tout le volume occupé par le corps,

$$(79)\qquad \theta_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_0 = 0,$$

θ demeure nul quel que soit t.

En effet, différentions respectivement les équations (73) par rapport à x, y, z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de la définition (78) de θ. Nous trouvons, moyennant l'égalité (81), l'équation

$$(82)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \mathrm{P}\,\Delta\theta = 0.$$

Si P est nul, cette équation se réduit à

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0.$$

$\frac{\partial\theta}{\partial t}$ garde alors une valeur indépendante de t, qui est zéro, en vertu de la seconde condition (79); θ est donc indépendant de t et, partant, constamment nul en vertu de la première égalité (79).

Supposons maintenant que P soit négatif. L'équation (82) se ramène à une équation de Laplace à quatre variables. En vertu d'un théorème bien connu d'Axel Harnack, toute intégrale de l'équation (82), continue ainsi que ses dérivées premières en x, y, z, t, est fonction analytique de x, y, z, t.

D'autre part, l'équation (82), jointe aux conditions (79), nous montre qu'on a, à l'instant initial, $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0$.

De même, en différentiant 1, 2, ..., n, ..., fois l'équation (82) par rapport à t, nous démontrerons de proche en proche que les dérivées

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^4\theta}{\partial t^4}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n+2}\theta}{\partial t^{n+2}}, \quad \ldots$$

sont, à l'instant initial, nulles dans tout le corps.

Puisque θ est fonction analytique de t et que, pour $t = 0$, ses dérivées des divers ordres par rapport à t sont toutes nulles, θ est nul quel que soit t.

TROISIÈME LEMME. — Posons

$$(83)\qquad \frac{\partial\beta'}{\partial z}-\frac{\partial\gamma'}{\partial y}=\omega_x,\qquad \frac{\partial\gamma'}{\partial x}-\frac{\partial\alpha'}{\partial z}=\omega_y,\qquad \frac{\partial\alpha'}{\partial y}-\frac{\partial\beta'}{\partial x}=\omega_z.$$

On peut, à l'instant initial, choisir, dans tout le corps, les valeurs de

$$\alpha'_0,\quad \beta'_0,\quad \gamma'_0,\quad \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)_0,\quad \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)_0,\quad \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)_0.$$

de telle sorte :

1° Que les valeurs absolues de ces quantités soient inférieures à telles limites positives qu'il aura plu de leur assigner;

2° Que les conditions (72) soient vérifiées;

3° Que l'on ait, à cet instant,

$$(84)\qquad \begin{cases} \omega_{x0}=0, & \omega_{y0}=0, & \omega_{z0}=0,\\ \left(\dfrac{\partial\omega_x}{\partial t}\right)_0=0, & \left(\dfrac{\partial\omega_y}{\partial t}\right)_0=0, & \left(\dfrac{\partial\omega_z}{\partial t}\right)_0=0; \end{cases}$$

4° Que l'intégrale

$$(80)\qquad V_0=\int\left(\alpha'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)_0 d\varpi$$

soit positive.

Prenons, en effet, une fonction $u(x,y,z)$ qui ne se réduise pas à une constante, mais dont les dérivées partielles du premier ordre s'annulent en tout point de la surface du corps.

Prenons ensuite

$$\alpha'_0=\lambda\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)_0=\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\beta'_0=\lambda\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)_0=\mu\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\gamma'_0=\lambda\frac{\partial u}{\partial z},\qquad \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)_0=\mu\frac{\partial u}{\partial z},$$

les quantités λ et μ étant deux quantités quelconques indépendantes de x, y, z, t. La deuxième et la troisième conditions seront évidemment vérifiées.

L'égalité (80) prendra la forme

$$V_0=\lambda\mu\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi,$$

en sorte que V_0 sera positif pourvu seulement qu'on attribue à λ et à μ deux valeurs de même signe.

Enfin, on pourra toujours limiter supérieurement les valeurs absolues de ces deux quantités λ et μ de telle sorte que la première condition soit vérifiée.

Quatrième lemme. — Si le rapport

$$Q = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)} \tag{85}$$

est négatif et si l'on a choisi les données initiales de telle sorte qu'on ait

$$\omega_{x0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial t}\right)_0 = 0,$$

ω_x demeure nul quel que soit t.

Pour chacune des deux quantités ω_y, ω_z, on peut formuler une proposition analogue.

Différentions en effet la seconde équation (73) par rapport à z et, du résultat obtenu, retranchons membre à membre la troisième équation (73) différentiée par rapport à y; moyennant les égalités (83) et (85), nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = Q\,\Delta\omega_x. \tag{86}$$

Les quantités ω_y, ω_z vérifient des équations semblables.

Pour établir le lemme énoncé, il suffit de reprendre le raisonnement qui a donné le second lemme.

Nous voici maintenant en état d'établir le théorème énoncé et cela par deux démonstrations équivalentes.

Première démonstration. — Choisissons les données initiales comme le premier lemme nous a permis de le faire.

D'après nos hypothèses, le rapport

$$P = \frac{1+4\pi\varepsilon' K'}{2\pi a^2 k K'} \tag{81}$$

est négatif; dès lors, comme les équations (79) sont vérifiées à l'instant initial, le second lemme nous apprend qu'on a, quel que soit t,

$$\theta = \frac{\partial\alpha'}{\partial x} + \frac{\partial\beta'}{\partial y} + \frac{\partial\gamma'}{\partial z} = 0.$$

Moyennant cette égalité et l'égalité (85), l'égalité (77) devient

$$\begin{aligned}\frac{d^2U}{dt^2} = & \int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ & - Q\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial z}\right)^2\right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi.\end{aligned}$$

Or, d'après les hypothèses faites, le rapport

$$(85) \qquad Q = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}$$

est négatif. $\frac{d^2U}{dt^2}$ ne peut donc jamais prendre de valeur négative.

D'autre part, les égalités (75) et (80) donnent l'égalité

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 2V_0,$$

et le choix des données initiales a assuré à V_0 une valeur positive.

Nous voyons donc que la quantité U, définie par l'égalité (74), croît au delà de toute limite avec t. L'équilibre du système est instable.

Seconde démonstration. — Choisissons les données initiales comme le troisième lemme nous a appris à le faire.

En vertu des hypothèses faites, le rapport

$$(85) \qquad Q = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1 + 4\pi\varepsilon K)}$$

est négatif.

Le quatrième lemme nous apprend alors que les conditions (84), vérifiées à l'instant initial, entraînent, quel que soit t,

$$\omega_x = \frac{\partial\beta'}{\partial z} - \frac{\partial\gamma'}{\partial y} = 0,$$

$$\omega_y = \frac{\partial\gamma'}{\partial x} - \frac{\partial\alpha'}{\partial z} = 0,$$

$$\omega_z = \frac{\partial\alpha'}{\partial y} - \frac{\partial\beta'}{\partial z} = 0.$$

Il existe donc une fonction $v(x, y, z, t)$ telle qu'on ait

$$\alpha' = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \beta' = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma' = \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{87}$$

Les conditions (72) nous apprennent qu'en tout point de la surface du corps et à tout instant, on a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \tag{88}$$

En vertu des équations (87), on a

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} = \Delta v$$

et, par conséquent,

$$\int \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} \right)^2 d\varpi = \int (\Delta v)^2 \, d\varpi,$$

ce que le théorème de Green, joint aux égalités (88), permet d'écrire

$$\int \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} \right)^2 d\varpi = -\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\varpi. \tag{89}$$

D'autre part, le théorème de Green, joint aux conditions (72), permet d'écrire

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi = -\int \alpha' \Delta \alpha' \, d\varpi$$

ou bien, en vertu des égalités (87),

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi = -\int \frac{\partial v}{\partial x} \Delta \frac{\partial v}{\partial x} \, d\varpi. \tag{90}$$

Cette égalité (90) et deux égalités analogues, comparées à l'égalité (89), nous donnent :

$$\begin{aligned} \int \Bigg[& \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial z} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial z} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial z} \right)^2 \Bigg] d\varpi = \int \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z} \right)^2 d\varpi. \end{aligned} \tag{91}$$

Moyennant cette égalité (91) et l'égalité

$$(81)\qquad P = \frac{1+4\pi\varepsilon' K'}{2\pi a^2 k K'},$$

l'égalité (77) prend la forme suivante :

$$(92)\qquad \frac{d^2 U}{dt^2} = \int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi - P \int \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z}\right)^2 d\varpi.$$

D'après les hypothèses faites, P est négatif; $\frac{d^2 U}{dt^2}$ ne peut donc jamais prendre de valeurs négatives.

D'autre part, les égalités (75) et (80) donnent l'égalité

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = V_0,$$

et le choix des données initiales a assuré à V_0 une valeur positive.

Nous voyons donc que la quantité U, définie par l'égalité (74), croît encore au delà de toute limite avec t, en sorte que l'équilibre du système ne peut être stable.

Par deux voies distinctes, le théorème énoncé est démontré.

32. Nous allons nous proposer maintenant de démontrer le même théorème en supposant que le corps diélectrique soit doué de conductibilité. Plus exactement, voici l'énoncé du théorème que nous allons établir :

Désignons toujours par A'_0, B'_0, C'_0 les composantes de la polarisation que prend le corps considéré, en un point déterminé, lorsque l'équilibre est établi; par A', B', C' les composantes de la polarisation, au même point, en un mouvement quelconque; posons

$$A' = A'_0 + \alpha', \qquad B' = B'_0 + \beta', \qquad C' = C'_0 + \gamma'.$$

Quelque petites que soient les limites supérieures imposées aux valeurs absolues initiales de

$$(93)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \dfrac{\partial \alpha'}{\partial t}, & \dfrac{\partial \beta'}{\partial t}, & \dfrac{\partial \gamma'}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2}, \end{array}\right.$$

si K' *est négatif tandis que* $(1+4\pi\varepsilon' K')$, $(1+4\pi\varepsilon K)$ *et* k *sont positifs, on pourra toujours disposer des valeurs initiales des quantités* (93) *de telle manière que la quantité*

$$(94) \qquad W = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi,$$

croisse au delà de toute limite avec t.

De cette proposition, nous donnerons deux démonstrations qui procéderont comme les deux démonstrations relatives au corps diélectrique dénué de conductibilité; mais, pour des raisons que nous signalerons en leur temps, elles n'auront pas la même rigueur.

Les trois quantités α', β', γ' vérifient trois équations aux dérivées partielles du troisième ordre [1]. Si nous posons, comme précédemment,

$$(78) \qquad \theta = \frac{\partial\alpha'}{\partial x} + \frac{\partial\beta'}{\partial y} + \frac{\partial\gamma'}{\partial z},$$

$$(81) \qquad P = \frac{1+4\pi\varepsilon' K'}{2\pi a^2 k K'},$$

$$(85) \qquad Q = \frac{1}{2\pi a^2 K'(1+4\pi\varepsilon K)},$$

et si nous continuons à désigner par ρ la résistance spécifique (résistivité) de la substance, la première de ces équations sera

$$(95) \qquad \frac{\partial^3\alpha'}{\partial t^3} = Q\Delta\frac{\partial\alpha'}{\partial t} + (P-Q)\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{K'\rho}\left(\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right).$$

Les deux autres se déduisent de celle-là par des permutations aisées.

L'égalité (94) nous donne

$$(96) \qquad \frac{dW}{dt} = \int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2} + \frac{\partial\beta'}{\partial t}\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2} + \frac{\partial\gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right) d\varpi,$$

puis, en tenant compte des égalités (95),

$$(97) \qquad \frac{d^2 W}{dt^2} = \Pi + \Phi,$$

---

[1] P. Duhem, *Sur la propagation des actions électrodynamiques*, équations (155).

avec

$$\Pi = \int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right)^2\right]d\varpi$$
$$+\,Q\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\,\Delta\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\,\Delta\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\,\Delta\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)d\varpi$$
$$+\,(P-Q)\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi,$$

$$\Phi = \frac{2\varepsilon'}{a^2kK'\rho}\int\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\,\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\,\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\,\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)d\varpi$$
$$-\frac{1}{K'\rho}\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right)d\varpi.$$

Mais l'emploi du théorème de Green, des conditions (72) et de l'égalité (78) transforme ces expressions de Π et de Φ et permet d'écrire

$$\Pi = \int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right)^2\right]d\varpi \tag{98}$$
$$-\,Q\int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right.$$
$$+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial z\,\partial t}\right)^2$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi$$
$$+\,(Q-P)\int\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi,$$

$$\Phi = -\frac{1}{K'\rho}\int\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\,\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}+\frac{2\varepsilon'}{a^2k}\,\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)d\varpi. \tag{99}$$

Considérons maintenant la quantité

$$X = \frac{1}{2K'\rho}\int_0^t\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2+\frac{2\varepsilon'}{a^2k}\,\theta^2\right]d\varpi\,dt. \tag{100}$$

Nous trouvons

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{2K'\rho}\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2+\frac{2\varepsilon'}{a^2k}\,\theta^2\right]d\varpi, \tag{101}$$

puis

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\Phi. \tag{102}$$

Formons la somme

$$Y = W + X. \tag{103}$$

Les égalités (96) et (101) nous donneront

$$(104)\quad \frac{dY}{dt} = \int \left\{ \frac{\partial \alpha'}{\partial t} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \frac{\partial \beta'}{\partial t} \frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2} + \frac{\partial \gamma'}{\partial t} \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2} + \frac{1}{2K'\rho} \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t} \right)^2 + \frac{2\varepsilon'}{a^2 k} \theta^2 \right] \right\} d\varpi.$$

tandis que les égalités (97) et (102) nous donneront

$$(105)\quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = \text{II}.$$

Ces formules une fois établies, nous allons démontrer quatre lemmes analogues à ceux que nous avons démontrés au numéro précédent.

Premier lemme. — On peut, à l'instant $t = 0$, choisir, dans tout le corps, les valeurs de

$$\alpha'_0, \quad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} \right)_0, \quad \ldots,$$

de telle sorte :

1° Que les valeurs absolues de ces quantités soient inférieures aux limites supérieures qui leur ont été assignées;

2° Que les conditions (72) soient vérifiées;

3° Que l'on ait, à cet instant,

$$(106)\quad \theta_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_0 = 0;$$

4° Que l'intégrale

$$(107)\quad Z_0 = \int \left\{ \frac{\partial \alpha'}{\partial t} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \frac{\partial \beta'}{\partial t} \frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2} + \frac{\partial \gamma'}{\partial t} \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2} + \frac{1}{2K'\rho} \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t} \right)^2 \right] \right\}_0 d\varpi$$

ait une valeur positive.

Définissons, en effet, les fonctions p, q, r comme au premier lemme du numéro précédent, et posons

$$\alpha_0 = \lambda \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y} \right), \qquad \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_0 = \mu \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} \right), \qquad \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right)_0 = \mu\nu \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} \right), \qquad \ldots;$$

λ, μ, ν sont trois quantités indépendantes de x, y, z et, jusqu'ici, arbitraires. La deuxième et la troisième conditions sont désormais vérifiées.

L'égalité (107) deviendra

$$Z_0 = \mu^2\left(\nu + \frac{1}{2K'\rho}\right)\int\left[\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] d\varpi.$$

Il suffira de donner à ν une valeur positive plus grande que la valeur absolue de $\frac{1}{2K'\rho}$ pour être assuré que Z_0 est positif.

Cela fait, on pourra donner aux constantes λ et μ qui, jusqu'ici, sont demeurées arbitraires, des valeurs absolues assez petites pour que la première condition soit sûrement vérifiée.

Deuxième lemme. — Si P est négatif et si, à l'instant $t = 0$, on a

$$(106) \qquad \theta_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right)_0 = 0,$$

θ demeure nul quel que soit t.

Différentions la première égalité (95) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutons membre à membre les égalités obtenues, en tenant compte de la définition (78) de θ. Nous trouvons que θ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(108) \qquad \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3} = P\Delta\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{K'\rho}\left(\frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\Delta\theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right).$$

S'il était établi que toutes les intégrales de cette équation sont, lorsque P *est négatif, fonctions analytiques de x, y, z, t,* la démonstration du lemme s'achèverait comme s'est achevée, au numéro précédent, la démonstration du second lemme. Mais pour l'équation (108), on n'a pas démontré, du moins à notre connaissance, un théorème analogue à celui qu'Axel Harnack a démontré au sujet de l'équation de Laplace.

La seule proposition que nous puissions affirmer avec assurance au sujet de l'équation (108) est la suivante :

Si P *est négatif, il ne peut pas exister de surface, fixe ou variable avec t, qui séparerait deux intégrales analytiques différentes de l'équation* (108), *au travers de laquelle θ et toutes ses* *dérivées jusqu'à l'ordre n ($n \geqq 2$) seraient continues, tandis que les dérivées d'ordre ($n+1$) ou l'une au moins d'entre elles seraient discontinues.*

Appliquons, en effet, la méthode de Christoffel et d'Hugoniot à la détermination de la vitesse normale de propagation $\mathfrak{N}$ d'une telle onde. Nous trouvons

$$\mathfrak{N}^2 = \text{P},$$

en sorte que $\mathfrak{N}$ est imaginaire lorsque P est négatif.

Ce résultat rend vraisemblable, mais ne suffit pas à transformer en vérité démontrée le postulat suivant :

Postulat. — *Lorsque* P *est négatif, toute intégrale de l'équation* (108) *est fonction analytique de t, même pour $t = 0$.*

Si l'on admet ce postulat, la démonstration du deuxième lemme se fait sans aucune difficulté.

Troisième lemme. — Posons, comme au numéro précédent,

$$(83)\qquad \frac{\partial \beta'}{\partial z} - \frac{\partial \gamma'}{\partial y} = \omega_x, \qquad \frac{\partial \gamma'}{\partial x} - \frac{\partial \alpha'}{\partial y} = \omega_y, \qquad \frac{\partial \alpha'}{\partial y} - \frac{\partial \beta'}{\partial x} = \omega_z.$$

On peut, à l'instant initial, choisir, dans tout le corps, les valeurs de

$$\alpha'_0, \quad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}\right)_0, \quad \ldots,$$

de telle sorte :

1° Que les valeurs absolues de ces quantités soient inférieures aux limites qui leur ont été assignées;

2° Que les conditions (72) soient vérifiées;

3° Que l'on ait, à cet instant initial,

$$(109)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \omega_{x0} = 0, & \left(\dfrac{\partial \omega_x}{\partial t}\right)_0 = 0, & \left(\dfrac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}\right)_0 = 0, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array} \right.$$

4° Que l'intégrale

$$(110)\qquad \text{T}_0 = \int \left\{ \frac{\partial \alpha'}{\partial t}\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2} + \frac{\partial \beta'}{\partial t}\frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2} + \frac{\partial \gamma'}{\partial t}\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2} + \frac{1}{2\text{K}'\rho}\left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)^2 + \frac{2\varepsilon'}{a^2 k}\theta^2\right]\right\}_0 d\varpi$$

soit positive,

Définissons la fonction $u(x, y, z)$ comme au troisième lemme du numéro précédent, et posons

$$\alpha'_0 = \lambda\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}\right)_0 = \mu\nu \frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

λ, μ, ν étant trois quantités, indépendantes de x, y, z, qui sont provisoirement arbitraires.

Quelles que soient les valeurs de ces quantités, la seconde et la troisième conditions sont vérifiées.

En vertu de ces déterminations de α'_0, $\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}\right)_0$, $\ldots$, l'égalité (110) devient

$$T_0 = \mu^2 \int \left\{ \left(\nu + \frac{1}{2K'\rho}\right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\varepsilon'\lambda^2}{a^2 k K'\rho} (\Delta u)^2 \right\} d\varpi.$$

On pourra toujours, après avoir fixé arbitrairement la valeur de λ, donner à ν une valeur positive assez grande pour que T_0 soit positif quel que soit μ.

Il suffira alors de donner à μ une valeur absolue assez petite pour que l'exécution des premières conditions soit assurée.

Quatrième lemme. — Si Q est négatif et si l'on a, à l'instant initial,

$$\omega_{x0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial t}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}\right)_0 = 0, \tag{111}$$

ω_x demeure égal à 0 quel que soit t.

Différentions, en effet, la seconde équation (95) par rapport à z, et retranchons-en membre à membre la troisième équation (95), différentiée par rapport à y; en tenant compte de la définition (83) de ω_x, nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} - Q\,\Delta\omega_x + \frac{1}{K'\rho}\frac{\partial \omega_x}{\partial t}\right) = 0.$$

En vertu des conditions (111), cette équation entraîne cette autre :

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = Q\,\Delta\omega_x - \frac{1}{K'\rho}\frac{\partial \omega_x}{\partial t}. \tag{112}$$

ω_y et ω_z vérifient des équations semblables.

Au sujet de cette équation (112), la méthode de Christoffel et d'Hugoniot nous permet d'établir bien aisément le théorème suivant :

Si Q est négatif, il ne peut exister aucune surface, fixe ou variable avec t, qui séparerait deux intégrales analytiques différentes de l'équation (112), *au travers de laquelle ω_x et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n $(n \geqq 1)$ seraient continues, tandis que les dérivées d'ordre $(n+1)$ ou l'une au moins d'entre elles seraient discontinues.*

Ce théorème rend vraisemblable, mais ne suffit pas à transformer en vérité démontrée le postulat suivant :

Postulat. — *Si Q est négatif, toute intégrale de l'équation* (112) *est fonction analytique de t, même pour $t = 0$.*

Si l'on admet ce postulat, la démonstration de notre quatrième lemme s'achève sans aucune difficulté.

Ces lemmes établis, nous allons donner deux démonstrations différentes du théorème énoncé.

Première démonstration. — Choisissons les données initiales comme le premier lemme nous apprend à le faire.

Selon les hypothèses faites, le rapport P, défini par l'égalité (81), est négatif. Dès lors, en vertu du second lemme, on a, quel que soit t, $\theta = 0$.

L'égalité (98) se réduit alors à

$$\begin{aligned}
\Pi = & \int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi \\
& - Q\int\left[\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right. \\
& \qquad + \left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\beta'}{\partial z\,\partial t}\right)^2 \\
& \qquad \left. + \left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\gamma'}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi.
\end{aligned}$$

Or, en vertu des hypothèses faites et de l'égalité (85) qui définit Q, ce coefficient est négatif. La quantité Π ne peut donc jamais être négative et, en vertu de l'égalité (105), il en est de même de $\frac{d^2Y}{dt^2}$.

D'autre part, θ étant constamment nul, les égalités (104) et (107) permettent d'écrire

$$\left(\frac{dY}{dt}\right)_0 = Z_0.$$

Le choix des données initiales nous assure que $\left(\frac{dY}{dt}\right)_0$ a une valeur positive. $Y = W + X$ croît donc au delà de toute limite avec t.

Considérons maintenant la quantité X, définie par l'égalité (100). Puisque θ est constamment nul, elle se réduit ici à

$$X = \frac{1}{2K'\rho}\int_0^t \int \left[\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi\, dt.$$

La quantité qu'on intègre de o à t ne peut jamais être négative; l'intégrale obtenue ne peut donc pas être fonction décroissante de t; comme K′ a été supposé négatif, X ne peut jamais être fonction croissante de t.

Dès lors, pour que $Y = W + X$ croisse au delà de toute limite avec t, il faut que W croisse au delà de toute limite avec t. C'est ce qu'on se proposait de démontrer.

Seconde démonstration. — Choisissons les données initiales comme il est possible de le faire selon le troisième lemme.

En vertu des hypothèses faites, Q est négatif. Dès lors, le quatrième lemme nous apprend que nous aurons, quel que soit t,

$$\omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0.$$

Une démonstration toute semblable à celle qui a fourni l'égalité (91) donnera l'égalité

$$(113) \quad \begin{aligned}\int\Big[& \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial^2 \beta'}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta'}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta'}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial z\, \partial t}\right)^2\Big] d\varpi = \int \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi.\end{aligned}$$

En vertu de cette égalité (113), l'égalité (98) se réduira à

$$\Pi = \int \left[\left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta'}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \gamma'}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi - P\int \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

Or, en vertu des hypothèses faites, P est négatif. La quantité Π ne peut donc jamais être négative et, d'après l'égalité (105), il en est de même de $\frac{d^2 Y}{dt^2}$.

Les égalités (104) et (110) nous donnent

$$\left(\frac{dY}{dt}\right)_0 = T_0.$$

Or, les données initiales ont été choisies de telle manière que T_0 soit positif. Il en est donc de même de $\left(\frac{dY}{dt}\right)_0$. Dès lors, la quantité $Y = W + X$ croît certainement au delà de toute limite avec t.

X est défini par l'égalité (100). Comme la constante k de Helmholtz a été supposée positive, la quantité qui figure sous le signe $\int_0^t$ ne peut jamais être négative et l'intégrale ne peut être fonction décroissante de t. D'ailleurs, le coefficient K' a été supposé négatif; X n'est donc jamais une fonction croissante de t. Pour que $Y = W + X$ croisse au delà de toute limite avec t, il faut, comme on l'avait annoncé, que W croisse au delà de toute limite avec t.

33. Il nous faut revenir maintenant sur les diverses définitions de la stabilité qui ont été admises au cours du présent Chapitre.

Aux nos **30** et **31**, nos définitions reposaient sur la considération de la quantité

$$(74) \qquad U = \frac{1}{2}\int (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, d\varpi.$$

Peut-on, aux perturbations initiales, assigner des limites supérieures assez petites pour que l'intégrale U ne surpasse jamais une valeur positive arbitrairement donnée d'avance? L'équilibre est stable. Quelque étroites, au contraire, que soient les limites imposées aux perturbations initiales, peut-on disposer de ces perturbations de telle sorte que l'intégrale U croisse au delà d'une limite imposée d'avance, si grande soit-elle? L'équilibre est instable. A la stabilité et à l'instabilité ainsi définies, nous donnerons le nom de *stabilité* et d'*instabilité électrostatiques intégrales*. L'épithète *électrostatique* est introduite ici pour rappeler que les quantités

$$A' = A'_0 + \alpha', \qquad B' = B'_0 + \beta', \qquad C' = C'_0 + \gamma'$$

sont celles dont la connaissance importe au calcul des actions électrostatiques exercées, à chaque instant, par le corps polarisé.

La stabilité électrostatique intégrale ainsi définie est, selon ce qui a été dit au n° **15**, la seule au sujet de laquelle on puisse démontrer, par une méthode inspirée de Lejeune-Dirichlet ([1]), le théorème général dont il est fait usage au n° **15** et au n° **30**.

A côté de cette stabilité et de cette instabilité, on en peut considérer d'autres que nous nommerons *stabilité* et *instabilité électrostatiques ponctuelles*, et que nous définirons de la manière suivante :

Si l'on peut toujours, aux perturbations initiales, assigner des limites supérieures assez petites pour que les valeurs absolues de α', β', γ' demeurent, *en tout point* et quel que soit t, inférieures à des valeurs positives données d'avance, l'équilibre considéré possède la stabilité électrostatique ponctuelle.

Si, au contraire, quelque petites que soient les limites supérieures assignées aux perturbations initiales, on peut disposer de ces perturbations de telle manière qu'*en certains points* (ou, au moins, *en un certain point*) du corps polarisé, la valeur absolue de l'une au moins des quantités α', β', γ' croisse au delà d'une limite assignée d'avance, si grande soit-elle, l'équilibre considéré est affecté d'instabilité électrostatique ponctuelle.

Il est bien évident que la stabilité électrostatique ponctuelle entraîne la stabilité électrostatique intégrale, *mais que la réciproque n'est pas vraie;* que l'instabilité électrostatique intégrale entraîne l'instabilité électrostatique ponctuelle, *mais que la réciproque n'est pas vraie.*

De la seconde de ces deux propositions découle cette conséquence : *Le diélectrique non conducteur considéré au n°* **31** *possède non seulement l'instabilité électrostatique intégrale, mais encore l'instabilité électrostatique ponctuelle.*

Lorsque l'équilibre électrique n'est pas établi sur le diélectrique considéré, ce corps exerce des actions électrodynamiques. Le calcul de ces actions exige simplement que l'on connaisse, en chaque point

---

([1]) Le lecteur pourra trouver, au sujet de cette question, une discussion complète dans notre *Traité d'Énergétique*, Chap. XVI, paragraphe 6, t. II, pp. 304 et suiv.

du corps, les composantes φ, ψ, χ de ce qu'on nomme la *densité de courant*.

Nous pourrons alors définir des *stabilités* et des *instabilités électrodynamiques*, *intégrales* ou *ponctuelles*, tout à fait analogue aux stabilités et instabilités électrostatiques; il suffira, dans les définitions précédentes, de substituer aux composantes α', β', γ' de l'intensité de polarisation, les composantes φ, ψ, χ de la densité de courant.

En particulier, si, quelque petites que soient les limites supérieures assignées à la perturbation initiale, on peut disposer de cette perturbation de telle sorte que l'intégrale

$$(114) \qquad S = \frac{1}{2}\int(\varphi^2+\psi^2+\chi^2)\,d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t, le système possède l'instabilité électrodynamique intégrale; il possède seulement l'instabilité électrodynamique ponctuelle si, en certains points, la valeur absolue de l'une au moins des quantités φ, ψ et χ croît au delà de toute limite avec t.

La densité de courant se compose, en général, de deux parties : la densité du *courant de conduction* u, v, w et la densité du *courant de déplacement* $\frac{\partial\alpha'}{\partial t}$, $\frac{\partial\beta'}{\partial t}$, $\frac{\partial\gamma'}{\partial t}$, en sorte qu'on a

$$\varphi = u + \frac{\partial\alpha'}{\partial t}, \qquad \psi = v + \frac{\partial\beta'}{\partial t}, \qquad \chi = w + \frac{\partial\gamma'}{\partial t},$$

et que l'égalité (114) devient

$$(115) \qquad S = \frac{1}{2}\int\left[\left(u+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2+\left(v+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2+\left(w+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

En ces formules, on doit biffer u, v, w si le corps n'est point conducteur, et $\frac{\partial\alpha'}{\partial t}$, $\frac{\partial\beta'}{\partial t}$, $\frac{\partial\gamma'}{\partial t}$ si le corps n'est pas diélectrique.

Il apparaît maintenant que l'instabilité démontrée, au n° **32**, pour un système à la fois conducteur et diélectrique, n'est comprise par aucune des définitions qui viennent d'être données, puisque la quantité dont nous avons établi la croissance indéfinie n'est pas la quantité S, définie par l'égalité (115), mais seulement la quantité

$$(94) \qquad W = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi.$$

Nous allons donc compléter ce qui a été établi au sujet de ce système en démontrant le théorème suivant :

*L'équilibre du système étudié au n° **32** est affecté soit d'instabilité électrodynamique intégrale, soit d'instabilité électrostatique intégrale.*

Pour démontrer cette proposition, transformons l'expression de S.

Si X, Y, Z sont, en un point, les composantes du champ électrique, nous avons

$$\rho u = X, \qquad \rho v = Y, \qquad \rho w = Z,$$
$$\alpha' = K'X, \qquad \beta' = K'Y, \qquad \gamma' = K'Z.$$

De ces égalités nous tirons

$$u = \frac{\alpha'}{\rho K'}, \qquad v = \frac{\beta'}{\rho K'}, \qquad w = \frac{\gamma'}{\rho K'}.$$

En vertu de ces égalités et des égalités (74) et (94), l'expression (115) de S se transforme aisément en la suivante

$$(116) \qquad S = W + \frac{U}{\rho^2 K'^2} + \frac{1}{\rho K'}\frac{dU}{dt}.$$

Supposons que l'équilibre du système ne soit pas affecté d'instabilité électrodynamique intégrale. Si l'on assigne aux valeurs absolues des perturbations initiales des limites supérieures suffisamment petites, on sera assuré que, de quelque manière qu'on choisisse les perturbations initiales, S ne croîtra pas au delà d'une certaine limite positive. Soit D cette limite. On aura donc, quelles que soient les perturbations initiales et quel que soit t,

$$S \leqq D$$

ou bien, en vertu de l'égalité (116),

$$\frac{1}{\rho K'}\frac{dU}{dt} \leqq D - W - \frac{U}{\rho^2 K'^2}$$

et *a fortiori*, puisque U ne peut être négatif,

$$\frac{1}{\rho K'}\frac{dU}{dt} \leqq D - W$$

ou bien encore

$$-\frac{1}{\rho K'}\frac{dU}{dt} \geqq W - D.$$

Pour le corps considéré, $\rho K'$ est négatif; D est indépendant de t, tandis que, d'après la démonstration donnée au n° **32**, W croît au delà de toute limite avec t; il en est donc de même de $\frac{dU}{dt}$ et, partant, de U, en sorte que le système est atteint d'instabilité électrostatique intégrale, comme nous l'avions annoncé.

Ainsi le système étudié au n° **32** est affecté, soit d'instabilité électrostatique intégrale et, partant, d'instabilité électrostatique ponctuelle; soit d'instabilité électrodynamique intégrale et, partant, d'instabilité électrodynamique ponctuelle; soit enfin, simultanément, de ces deux sortes d'instabilité.

34. Pour les corps diamagnétiques, les lois de l'Électromagnétisme se sont montrées en contradiction avec le Postulat énoncé au n° **3**; pour les corps diélectriques, au contraire, les lois de l'Électrodynamique ne nous ont rien enseigné qui ne se pût accorder avec ce même Postulat.

Pour les corps magnétiques et pour les corps diélectriques, les lois de la Statique sont absolument les mêmes; au contraire, les lois qui régissent la stabilité de l'équilibre ne sont pas les mêmes pour l'une et pour l'autre de ces deux catégories de corps, et cela, parce que le mouvement de l'aimantation sur les uns et le mouvement de la polarisation diélectrique sur les autres ne dépendent pas d'équations de même forme.

Gustave Robin a écrit ([1]), au sujet d'une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre qu'il pensait avoir donnée :

« Il importe de remarquer que, grâce aux principes de Carnot, nous avons pu établir *complètement* cette proposition capitale, sans

([1]) Gustave Robin, *Œuvres scientifiques : Thermodynamique générale*, p. 83.

faire intervenir les lois de la Dynamique. Or, Lejeune-Dirichlet a seulement démontré que le minimum du potentiel est une condition *suffisante* pour l'équilibre stable, mais non qu'il en est la condition *nécessaire;* et sa démonstration s'appuie sur des résultats empruntés à la Dynamique, ce qui est un grave défaut : il n'est pas acceptable qu'on doive connaître les lois exactes du mouvement pour établir un théorème relatif à l'équilibre. »

A quel point cette dernière phrase exprime une pensée entachée d'erreur et capable de conduire à d'inacceptables conséquences, les théorèmes démontrés en ce qui précède en sont la preuve manifeste.

CHAPITRE IV.

LES CORPS DIAMAGNÉTIQUES ET LE PRINCIPE DE CARNOT.

35. En 1889, M. James Parker a publié, au sujet du diamagnétisme, un travail qui contenait d'importantes remarques (¹). Reproduisons ici quelques passages de ce travail :

« Soit A un morceau d'acier aimanté d'une manière permanente; soit B un morceau d'une substance diamagnétique quelconque, de bismuth par exemple, qui, lorsqu'on le place sous l'influence du corps A, est aimanté par influence et *repoussé* par A. Supposons qu'on effectue les cycles suivants d'opérations à température constante :

» *a.* Le corps B est amené d'une position P, éloignée de A, à une seconde position Q, voisine de A, et cela de manière que l'aimantation de ce corps B ait, à chaque instant, sa valeur maximum; soit W le *travail dépensé.* Supposons ensuite que le corps B retourne à sa position primitive P en suivant en ordre inverse la modification précédente. Le travail W, qui avait été dépensé dans la modification précédente, est recouvré dans celle-ci. Il n'y a donc, en somme, ni perte ni gain de travail.

» *b.* Le corps B est amené de P en Q si rapidement que l'aimanta-

(¹) J. Parker, *On Diamagnetism and the Concentration of Energy* (*Philosophical Magazine*, 5ᵉ série, t. XXVII, mai 1889, p. 403).

tion de ce corps B n'ait pas le temps de s'altérer d'une manière sensible. Le travail fourni à B sera inférieur à W. On laisse ensuite B dans la position Q assez longtemps pour qu'il atteigne l'aimantation qui convient à l'équilibre, puis on le ramène rapidement de Q en P par le premier chemin renversé. Le travail rendu par B est supérieur à W. Ce cycle fournit donc, à température constante, un gain de travail, contrairement au principe de Carnot.

» Trois voies se présentent pour résoudre cette difficulté :

» 1° On peut supposer que le travail qui a été obtenu a été créé de rien. Cette manière de voir est en contradiction à la fois avec le principe de la conservation de l'énergie et avec le principe de Carnot, et ces derniers sont, aujourd'hui, universellement acceptés;

» 2° Le développement du magnétisme sur les corps diamagnétiques est instantané, contrairement à ce qui arrive pour les autres phénomènes physiques qui exigent un certain *temps*.

» 3° Le travail qu'on a gagné a été produit aux dépens de la *chaleur;* dans ce cas, le principe de l'énergie demeure intact, mais le principe de Carnot est en défaut. Si nous employons le travail produit à transporter de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud, nous sommes en possession d'un moyen qui permet de produire des inégalités de température, c'est-à-dire une concentration d'énergie, sans aucune action extérieure. Il devient donc nécessaire de modifier le principe de Carnot. »

36. Pour décrire le cycle défini par M. J. Parker, il faut déplacer le corps magnétique. On peut imaginer un cycle analogue dont le parcours laisse le corps immobile; les principes et les résultats restent essentiellement les mêmes, mais la discussion en est rendue plus aisée.

Imaginons un corps magnétique immobile en une région de l'espace où certains autres corps qui seront, en notre analyse, les *corps extérieurs* au système étudié, engendrent un certain champ magnétique. Soient L, M, N les composantes, en un point, de ce *champ magnétique externe*. Soient A, B, C les composantes, au même point, de l'intensité d'aimantation prise par le corps magnétique qui constitue le système étudié.

Si ce corps n'est parcouru par aucun courant de conduction;
S'il ne porte point une polarisation diélectrique variable;
Si, enfin, il demeure immobile,

une modification élémentaire au cours de laquelle A, B, C varient respectivement de δA, δB, δC correspond à un certain travail effectué par les actions extérieures, et ce travail a pour expression :

$$\mathcal{T} = \int (L\,\delta A + M\,\delta B + N\,\delta C)\,d\varpi. \tag{117}$$

Cela posé, considérons le cycle suivant, que nous supposerons parcouru sans que le corps magnétique éprouve aucun changement de température :

1° Au début de la *première opération*, les corps extérieurs sont supposés dépourvus de tout courant électrique et de toute aimantation, en sorte que le champ extérieur est nul. Le corps magnétique est complètement désaimanté :

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,$$
$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0.$$

Brusquement, c'est-à-dire en un temps nul, nous établissons le champ extérieur; il prend, en chaque point (x, y, z), des composantes que nous désignerons par L_0, B_0, C_0; nous admettons qu'*aucune aimantation ne peut être instantanée*, en sorte que, pendant cette opération de durée nulle, l'aimantation du corps considéré demeure nulle. On a donc, à la fin de cette opération,

$$L = L_0,\quad M = M_0,\quad N = N_0,$$
$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0.$$

2° La *deuxième opération* consiste à laisser le corps magnétique sous l'action du champ externe (L_0, M_0, N_0), maintenu invariable, assez longtemps pour qu'il prenne l'aimantation d'équilibre (A_0, B_0, C_0) qui convient à ce champ. On a donc, à la fin de cette seconde opération,

$$L = L_0,\quad M = M_0,\quad N = N_0,$$
$$A = A_0,\quad B = B_0,\quad C = C_0.$$

3° En la *troisième opération*, nous anéantissons *brusquement* le champ magnétique externe; en vertu de la supposition formulée à propos de la première opération, l'aimantation du corps ne varie pas, en sorte qu'à la fin de cette troisième opération, nous avons

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$
$$A = A_0, \qquad B = B_0, \qquad C = C_0$$

4° La *quatrième opération* consiste à laisser le corps sous l'action du champ extérieur nul assez longtemps pour qu'il se désaimante totalement. A la fin de cette opération, nous avons

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$
$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Le corps magnétique a parcouru un cycle fermé et isothermique; ce cycle diffère de celui que M. Parker a considéré; mais au sujet de ces deux cycles, des suppositions semblables ont été faites; il est donc naturel qu'ils conduisent tous deux à des conclusions semblables.

Calculons le travail accompli, durant le parcours de ce cycle, par les actions extérieures.

Selon la formule (117), ce travail est nul aussi bien durant la première opération que durant la troisième, car, en chacune de ces deux opérations, l'aimantation du corps demeure invariable.

Ce travail est également nul durant la quatrième opération, puisqu'elle s'accomplit alors que le champ extérieur est constamment nul.

Le travail externe relatif au cycle total se réduit donc au travail relatif à la seconde opération. Pendant que celle-ci s'accomplit, L, M, N gardent les valeurs invariables L_0, M_0, N_0, tandis que A, B, C croissent respectivement de 0, 0, 0, à A_0, B_0, C_0. La formule (117) nous montre alors que le travail externe accompli dans la seconde opération et, partant, dans le cycle tout entier, a pour valeur

$$(118) \qquad \mathfrak{T} = \int (L_0 A_0 + M_0 B_0 + N_0 C_0)\, d\varpi.$$

Mais A_0, B_0, C_0 sont les composantes de l'aimantation d'équilibre qui correspond au champ externe L_0, M_0, N_0; elles sont donc données par les équations (2) où les diverses quantités devront être affectées de l'indice o; en d'autres termes, si K est le coefficient d'aimantation de la substance et V_0 la fonction potentielle magnétique due à la distribution A_0, B_0, C_0, nous aurons

$$(119)\quad \begin{cases} A_0 = K\left(L_0 - \varepsilon \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right), \\ B_0 = K\left(L_0 - \varepsilon \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right), \\ C_0 = K\left(L_0 - \varepsilon \dfrac{\partial V_0}{\partial z}\right) \end{cases}$$

et l'égalité (118) deviendra

$$(120)\quad \mathfrak{G} = \int \frac{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}{K}\, d\varpi + \varepsilon \int \left(A_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + B_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + C_0 \frac{\partial V_0}{\partial z}\right) d\varpi.$$

Cette égalité peut encore s'écrire un peu autrement. Conformément à l'égalité (4), posons

$$(121)\quad Y_0 = \frac{\varepsilon}{2} \int \left(A_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + B_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + C_0 \frac{\partial V_0}{\partial z}\right) d\varpi$$

et nous aurons

$$(122)\quad \mathfrak{G} = 2\left(Y_0 + \int \frac{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}{2K}\, d\varpi\right).$$

Ce résultat est indépendant de la nature du corps magnétique et de la figure qu'il affecte.

Imaginons maintenant que la substance considérée soit diamagnétique ($K < 0$), mais qu'elle soit assez faiblement diamagnétique pour que ($1 + 4\pi\varepsilon K$) soit positif. Donnons au corps étudié la figure d'un ellipsoïde quelconque, et supposons que le champ externe (L_0, M_0, N_0) soit un champ uniforme. On sait que, dans ces conditions, l'aimantation d'équilibre (A_0, B_0, C_0) sera une aimantation uniforme. Dès lors, ce qui a été établi au n° **11** nous apprend que

$$Y_0 + \int \frac{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}{K}\, d\varpi$$

est négatif. Ainsi, *pour un tel corps diamagnétique, le travail accompli par les actions extérieures durant le parcours du cycle isothermique considéré est négatif.*

On retrouverait la même conclusion en faisant usage d'un corps diamagnétique pour lequel $(1 + 4\pi\varepsilon K)$ serait négatif, pourvu, toutefois, que $\left(1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon K\right)$ fût positif; selon ce qui a été dit au n° **10**, il suffirait alors de donner au corps non plus la figure d'un ellipsoïde quelconque, mais la figure d'une sphère.

Nous arrivons ainsi, à l'aide d'un corps diamagnétique, à constituer un cycle isothermique qui contredit à cette proposition de Clausius : *Lorsqu'un système parcourt un cercle isothermique, le travail total accompli par les actions extérieures ne peut être que nul ou positif.*

C'est la conclusion que M. Parker avait également tirée du raisonnement que nous avons reproduit.

37. Ce raisonnement est vicieux, et M. Parker a entrevu ce en quoi il pèche.

Nous avons admis, d'une part, qu'une variation brusque du champ magnétique externe n'entraînait aucune variation brusque de l'aimantation.

Nous avons admis, d'autre part, qu'il n'y avait pas, en notre corps, de courants de conduction; qu'il n'y avait pas davantage de polarisation diélectrique variable, partant, pas de courants de déplacement.

Or, cette seconde supposition entraîne cette conséquence : les équations (2) sont, à chaque instant, applicables; la distribution de l'aimantation sur le corps magnétique considéré est, à chaque instant, celle qu'il faut faire correspondre au champ extérieur pour assurer l'équilibre. Dès lors, il est contradictoire d'imaginer qu'une variation brusque du champ ne soit pas accompagnée d'une variation brusque de l'aimantation. Le raisonnement précédent est illogique.

Si l'on veut qu'une variation d'aimantation ne se puisse produire brusquement, il faut que les équations (2) cessent d'être applicables au corps parfaitement doux que nous étudions; pour cela, il faut et il suffit que ce corps soit le siège de courants de conduction ou de courants de déplacement ou, à la fois, de ces deux sortes de courants. Mais alors, le travail externe doit s'évaluer tout autrement que nous ne l'avons évalué au n° **36**. Nous allons calculer exactement ce travail et montrer comment ce calcul fait disparaître tout paradoxe relatif aux corps diamagnétiques.

38. En chaque point du corps considéré, l'intensité d'aimantation a pour composantes A, B, C; l'intensité de polarisation diélectrique a pour composantes A', B', C'; la densité du courant de conduction a pour composantes u, v, w; la densité du courant de déplacement a pour composantes $\frac{\partial A'}{\partial t}$, $\frac{\partial B'}{\partial t}$, $\frac{\partial C'}{\partial t}$; la densité du courant total a donc pour composantes

$$\varphi = u + \frac{\partial A'}{\partial t'}, \qquad \psi = v + \frac{\partial B'}{\partial t'}, \qquad \chi = w + \frac{\partial C'}{\partial t'}. \tag{123}$$

En chaque point agit un champ magnétique externe dont les composantes sont L, M, N, et un champ électrique externe dont les composantes sont X, Y, Z.

Si, pendant un temps dt, le corps demeure immobile, le travail accompli pendant ce temps par les actions extérieures se compose de deux termes :

Le travail magnétique externe

$$\tau = dt \int \left(L \frac{\partial A}{\partial t} + M \frac{\partial B}{\partial C} + N \frac{\partial C}{\partial t} \right) d\varpi$$

et le travail électrique externe

$$\tau' = dt \int (X\varphi + Y\psi + Z\chi)\, d\varpi.$$

Le travail externe total a pour valeur

$$\mathfrak{T} = \tau + \tau'$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} = \; & dt \int \left(L \frac{\partial A}{\partial t} + M \frac{\partial B}{\partial t} + N \frac{\partial C}{\partial t} \right) d\varpi \\ & + dt \int (Xu + Yv + Zw)\, d\varpi \\ & + dt \int \left(X \frac{\partial A'}{\partial t} + Y \frac{\partial B'}{\partial t} + Z \frac{\partial C'}{\partial t} \right) d\varpi. \end{aligned} \tag{124}$$

Considérons, en un point du corps, le champ magnétique total. Ce champ se compose :

1° Du champ magnétique externe dont L, M, N sont les composantes.

2° Du champ magnétique produit par l'aimantation distribuée sur le corps; si l'on garde les notations posées au n° **1**, ce champ a pour composantes

$$-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x},\quad -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y},\quad -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}.$$

3° Du champ magnétique produit par les courants, tant de déplacement que de conduction, qui circulent dans la masse du corps.

Posons les formules

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{P}(x,y,z) &= \int\left(\psi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}-\chi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\right)d\varpi_1,\\ \mathfrak{Q}(x,y,z) &= \int\left(\chi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}-\varphi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)d\varpi_1,\\ \mathfrak{R}(x,y,z) &= \int\left(\varphi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}-\psi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\right)d\varpi_1,\end{aligned}\right.$$

où r est la distance mutuelle des deux points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1); désignons par $\frac{a^2}{2}$ la constante fondamentale de l'Électrodynamique; par $\frac{a}{\sqrt{2}}$ la racine carrée positive de cette quantité; par $\sqrt{\varepsilon}$ la racine carrée positive de la constante fondamentale du Magnétisme; les composantes du champ considéré seront

$$\frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\mathfrak{P},\quad \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\mathfrak{Q},\quad \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\mathfrak{R}.$$

Chacune des composantes A, B, C de l'aimantation au point (x, y, z) s'obtient en multipliant la composante correspondante du champ magnétique total par le coefficient d'aimantation K. Les équations de l'aimantation sont donc l'équation

$$(126)\qquad A = K\left(L-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\mathfrak{P}\right)$$

et deux équations analogues.

Considérons de même, au point (x, y, z), le champ électrique total. Il se compose :

1° Du champ électrique externe dont les composantes sont X, Y, Z.

2° Du champ électrostatique; si V' est la fonction potentielle électrostatique, ce champ a pour composantes

$$-\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial x}, \quad -\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial y}, \quad -\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial z}.$$

3° Du champ électrodynamique créé par les courants de conduction et de déplacement.

Désignons par k la constante numérique introduite par Helmholtz dans l'étude de l'Électrodynamique; posons, avec Helmholtz,

$$(127)\quad \mho(x, y, z) = \int\left[\frac{1+K}{2}\frac{\varphi_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r}\left(\frac{x_1-x}{r}\varphi_1 + \frac{y_1-y}{r}\psi_1 + \frac{z_1-z}{r}\chi_1\right)\right]d\varpi_1,$$

et désignons par $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ deux fonctions analogues; les composantes du champ considéré seront

$$-\frac{a^2}{2}\frac{\partial \mho}{\partial t}, \quad -\frac{a^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad -\frac{a^2}{2}\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

4° Du champ électromagnétique dû aux variations de l'aimantation sur le corps considéré.

Posons

$$(128)\quad \begin{cases} F(x, y, z) = \displaystyle\int\left(B_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - C_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right)d\varpi_1, \\ G(x, y, z) = \displaystyle\int\left(C_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} - A_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)d\varpi_1, \\ H(x, y, z) = \displaystyle\int\left(A_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - B_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\right)d\varpi_1. \end{cases}$$

Cette dernière partie du champ aura pour composantes

$$\frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\frac{\partial H}{\partial t}.$$

En chaque point, chacune des composantes u, v, w de la densité du courant de conduction s'obtient en divisant par la résistivité ρ la composante correspondante du champ électrique; on a donc

$$(129) \qquad \rho u = X - \varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{a^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \frac{\partial F}{\partial t}$$

et deux équations analogues.

En chaque point, chacune des composantes A′, B′, C′ de la polarisation diélectrique s'obtient en multipliant la composante correspondante du champ électrique par le coefficient de polarisation K′; on a donc

$$(130) \qquad \frac{A'}{K'} = X - \varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{a^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \frac{\partial F}{\partial t}$$

et deux équations analogues.

Au second membre de l'égalité (124), transformons le premier terme en tirant L, M, N des égalités (126); le second terme, en tirant X, Y, Z des égalités (129); le troisième terme, en tirant X, Y, Z des égalités (130); tenons compte, d'ailleurs, des égalités (123); nous trouvons

$$(131) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{T} = {} & dt \int \rho(u^2 + v^2 + w^2)\, d\varpi \\ & + dt \frac{d}{dt} \left(\int \frac{A^2 + B^2 + C^2}{2K} d\varpi + \int \frac{A'^2 + B'^2 + C'^2}{2K'} d\varpi \right) \\ & + dt\, \varepsilon \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial t} \right) d\varpi \\ & + dt\, \varepsilon' \int \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \varphi + \frac{\partial V'}{\partial y} \psi + \frac{\partial V'}{\partial z} \chi \right) d\varpi \\ & + dt \frac{a^2}{2} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \varphi + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} \psi + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} \chi \right) d\varpi \\ & - dt \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{\partial F}{\partial t} \varphi + \frac{\partial G}{\partial t} \psi + \frac{\partial H}{\partial t} \chi \right) d\varpi \\ & - dt \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \int \left(\mathfrak{P} \frac{\partial A'}{\partial t} + \mathfrak{Q} \frac{\partial B'}{\partial t} + \mathfrak{R} \frac{\partial C'}{\partial t} \right) d\varpi. \end{aligned}$$

Cette égalité suppose que K et K′ demeurent invariables pendant le temps dt, ce qui exige que la température ne varie pas; si elle variait de $\frac{dT}{dt}dt$, il faudrait ajouter au second membre

$$\left(\int \frac{A^2+B^2+C^2}{2K^2}\frac{dK}{dT}d\varpi + \int \frac{A'^2+B'^2+C'^2}{2K'^2}\frac{dK'}{dT}d\varpi\right)\frac{dT}{dt}dt.$$

Mais : 1° Si l'on garde à la quantité Y la signification que lui donne l'égalité (3), une démonstration connue donne

$$\varepsilon\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial t}\right)d\varpi = \frac{dY}{dt}.$$

2° Si l'on désigne par W le potentiel électrostatique total dû à toutes les charges électriques et à toute la polarisation diélectrique que porte le corps considéré, on sait qu'on a

$$\varepsilon'\int\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\varphi+\frac{\partial V'}{\partial y}\psi+\frac{\partial V'}{\partial z}\chi\right)d\varpi = \frac{dW}{dt}.$$

3° De même, si l'on désigne par Π le potentiel électrodynamique de tous les courants, tant de conduction que de déplacement, qui circulent dans le corps considéré, potentiel qui a pour expression

$$\Pi = -\frac{a^2}{4}\int(\mathfrak{U}\varphi+\mathfrak{V}\psi+\mathfrak{W}\chi)\,d\varpi, \tag{132}$$

on trouve sans peine l'égalité

$$\frac{a^2}{2}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\varphi+\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\psi+\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\chi\right)d\varpi = -\frac{d\Pi}{dt}.$$

Enfin, l'examen des formules (125) et (128) donne immédiatement

$$\frac{\partial F}{\partial t}\varphi+\frac{\partial G}{\partial t}\psi+\frac{\partial H}{\partial t}\chi+\mathfrak{P}\frac{\partial A}{\partial t}+\mathfrak{Q}\frac{\partial B}{\partial t}+\mathfrak{R}\frac{\partial C}{\partial t}=0.$$

Moyennant ces diverses formules, l'égalité (131) devient

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} = {} & dt\int\rho(u^2+v^2+w^2)\,d\varpi \\ & + dt\frac{d}{dt}\left(\int\frac{A^2+B^2+C^2}{2K}d\varpi+\int\frac{A'^2+B'^2+C'^2}{2K}d\varpi+Y+W-\Pi\right).\end{aligned} \tag{133}$$

Telle est l'expression du travail accompli par les actions extérieures pendant que le corps, maintenu immobile, éprouve une modification élémentaire, isothermique et réelle.

Si le corps parcourt un cycle isothermique à la fin duquel l'aimantation, la polarisation diélectrique, les courants, tant de déplacement que de conduction, sont les mêmes qu'au commencement, le travail accompli par les actions extérieures se réduit à

$$(134) \qquad \mathfrak{E} = \int_{t_0}^{t} \int \rho(u^2 + v^2 + w^2)\, d\varpi.$$

Positif si le système a été parcouru par des courants de conduction, ce travail est nul en tout autre cas, ce qui est conforme à la proposition de Clausius.

Ce résultat fait évanouir l'objection que, de la proposition de Clausius, on pouvait tirer, semble-t-il, contre l'existence des corps diamagnétiques.

On voit, par cet exemple, combien il est dangereux, en l'étude thermodynamique de phénomènes irréversibles, d'employer des raisonnements intuitifs et sommaires analogues à celui dont M. J. Parker a fait usage. Il est indispensable de suivre dans le détail la transformation réellement éprouvée par le système, en écrivant, à chaque instant, les équations qui régissent le mouvement de ce système. Cette méthode lente, mais sûre, est la seule qui nous puisse mettre en garde contre les conséquences paradoxales ou contradictoires auxquelles on est souvent conduit par l'emploi de procédés trop brefs et trop peu rigoureux.