JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N.-E. NÖRLUND

Sur une classe d'intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 9 (1913), p. 77-88.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1913_6_9__77_0>

Sur une classe d'intégrales définies;

PAR N.-E. NÖRLUND.

à Lund (Suède).

On connaît le rôle qu'a joué la transformation d'Euler (¹)

$$y = \int (t-x)^{\xi-1} v(t)\,dt$$

dans la théorie des équations différentielles à coefficients rationnels. Cette transformation se prête particulièrement à l'étude de l'équation différentielle de Pochhammer (²)

$$\begin{aligned} 0 = Q(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \binom{\xi-n}{1} Q'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \binom{\xi-n}{2} Q''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots \\ - R(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \binom{\xi-n+1}{1} R'(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots, \end{aligned}$$

$Q(x)$ et $R(x)$ désignant des polynomes en x. On doit à M. Jordan (³) une étude complète et très élégante des solutions de cette équation.

Dans les pages suivantes nous allons nous occuper de deux classes d'équations aux différences finies, analogues à l'équation différentielle ci-dessus. Nous allons former des systèmes fondamentaux de solutions qui se représentent par certaines intégrales définies étendues sur des produits de fonctions gamma. Des intégrales de cette sorte ont été

(¹) *Voir* SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, t. II, Leipzig, 1897, p. 405.

(²) *Journal für die reine u. angewandte Mathematik*, t. LXXI, 1870, p. 317.

(³) *Cours d'Analyse*, t. III, Paris, 1896, p. 240.

rencontrées par MM. Mellin [1] et Pincherle [2] qui s'en sont occupés à différentes reprises. Ces auteurs ont notamment fait voir le rôle que jouent ces intégrales dans la théorie des équations différentielles hypergéométriques d'ordre supérieur.

CHAPITRE I.

1. Soit $Q(x)$ un polynome en x de degré n et soit $R(x)$ un polynome dont le degré est inférieur à n. Posons

$$\Delta_\omega u(x) = \frac{u(x+\omega)-u(x)}{\omega},$$

et considérons l'équation aux différences finies d'ordre n

$$(1)\qquad \begin{aligned} &Q(x)\Delta_{-1}^{n} u(x) + \binom{\xi+n}{1}\Delta_{+1} Q(x)\Delta_{-1}^{n-1} u(x) \\ &\quad + \binom{\xi+n}{2}\Delta_{+1}^{2} Q(x)\Delta_{-1}^{n-2} u(x) + \ldots \\ &\quad + \binom{\xi+n}{n}\Delta_{+1}^{n} Q(x) u(x) \\ &= R(x)\Delta_{-1}^{n-1} u(x) + \binom{\xi+n-1}{1}\Delta_{+1} R(x)\Delta_{-1}^{n-2} u(x) + \ldots \\ &\quad + \binom{\xi+n-1}{n-1}\Delta_{+1}^{n-1} R(x) u(x), \end{aligned}$$

ξ désignant un paramètre indépendant de x. Essayons de satisfaire à cette équation par une intégrale de la forme

$$(2)\qquad u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+1)} v(t)\,dt,$$

---

(1) *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XIV, 1885, p. 353; t. XV, 1888, p. 1; t. XX, n° 7, 1895; t. XXI, n° 1, 1896; t. XXII, n° 2, 1897; t. XXIII, n° 7, 1897; *Acta mathematica*, t. VIII, 1886, p. 37; t. IX, 1887, p. 137; t. XV, 1891, p. 317; t. XXII, 1898, p. 19; t. XXV, 1902, p. 139; *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, t. I, série A, n° 3, 1909.

(2) *Rendiconti del R. Ist. Lombardi*, t. XIX, 2e série, 1886; *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, t. IV, 1888, p. 694-700 et p. 792-799; *Giornale di Matematiche*, t. XXXII, 1894, p. 209-291.

$v(t)$ étant une fonction de t qui reste à déterminer ainsi que la ligne d'intégration. En formant la différence finie d'ordre s par rapport à x on trouve

$$\Delta^s_{-1}\, u(x) = \frac{(\xi+1)(\xi+2)\dots(\xi+s)}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+s+1)}\, v(t)\, dt.$$

Substituons ces expressions dans l'équation (1) et remarquons qu'on a

$$(3)\qquad Q(t) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(t-x)(t-x-1)\dots(t-x-s+1)}{s!}\,\Delta^s_{+1}\, Q(x),$$

on trouve

$$(4)\qquad \int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+n+1)}\, v(t)\,[(\xi+n)\,Q(t+n) - (t-x+n)\,R(t+n-1)]\, dt = 0.$$

Déterminons $v(t)$ comme une solution de l'équation aux différences finies de premier ordre

$$(5)\qquad Q(t+n)\, v(t) - Q(t+n-1)\, v(t-1) = R(t+n-1)\, v(t).$$

L'équation (4) se réduit à l'équation suivante

$$(6)\qquad \int \frac{\Gamma(t-x-\xi+1)}{\Gamma(t-x+n+1)}\, Q(t+n)\, v(t)\, dt = \int \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+n)}\, Q(t+n-1)\, v(t-1)\, dt.$$

Choisissons la ligne d'intégration de sorte que le premier membre de cette équation ne soit pas altéré quand on remplace t par $t-1$; l'intégrale (2) représente alors une solution de l'équation (1). Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines de l'équation $Q(x+n)=0$, et par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ les racines de l'équation $Q(x+\xi+n) = R(x+\xi+n-1)$, x étant la variable. On a par hypothèse

$$(5\ bis)\qquad v(t+1) = \frac{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\dots(t-\alpha_n)}{(t-\xi-\gamma_1+1)(t-\xi-\gamma_2+1)\dots(t-\xi-\gamma_n+1)}\, v(t).$$

Posons pour abréger

$$\frac{1}{\Phi(t)} = \Gamma(1+\alpha_1-t)\dots\Gamma(1+\alpha_n-t)\,\Gamma(1-\gamma_1-\xi+t)\dots\Gamma(1-\gamma_n-\xi+t);$$

$\Phi(t)$ est une fonction entière de t, et la solution la plus générale de l'équation (5 *bis*) est

$$v(t) = \Phi(t)\,\pi(t),$$

$\pi(t)$ désignant une fonction périodique avec la période 1. Posons maintenant

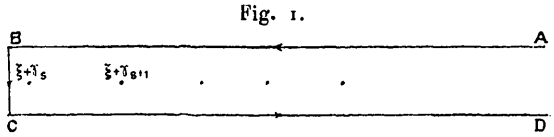
$$\pi(t) = \frac{\pi e^{\pi i(\xi+\gamma_s-t)}}{\sin\pi(\xi+\gamma_s-t)},$$

et supposons pour le moment qu'aucune des différences entre les nombres γ_s ne soit égale à un entier positif, nul ou négatif. $v(t)$ est une fonction méromorphe admettant pour pôles les points

$$\xi+\gamma_s,\quad \xi+\gamma_s+1,\quad \xi+\gamma_s+2,\quad \ldots.$$

Prenons pour chemin d'intégration la ligne brisée ABCD, comprenant à son intérieur les points $\xi+\gamma_s$, $\xi+\gamma_s+1$, $\xi+\gamma_s+2$, ...,

Fig. 1.



partant de l'infini le long de la droite AB et y revenant le long de la droite CD. Supposons que x ne soit pas situé sur la demi-droite qui passe par les points γ_s, γ_s+1, γ_s+2, ...; on peut dans l'intégrale au premier membre de (6) déplacer la ligne d'intégration d'une unité parallèlement à l'axe des nombres réels sans altérer la valeur de l'intégrale. L'intégrale (2) représente donc une solution de l'équation (1) pourvu qu'elle soit convergente. Pour déterminer la condition de convergence, il suffit de remarquer qu'on doit avoir, pour $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t=\infty} \Phi(t)\, t^{-k-\xi-\varepsilon} = 0,$$

t tendant vers l'infini le long de la ligne d'intégration, k étant égal à

$$k = \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n+(n-1)\xi-n.$$

L'intégrale est donc convergente si $\mathcal{R}(k) < 0$ et elle représente une solution de l'équation (1) qui est holomorphe pour toute valeur de x non située sur la demi-droite qui passe par les points γ_s, γ_s+1,

$\gamma_s + 2, \ldots$. En donnant à s successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, on trouve n solutions indépendantes.

2. Examinons maintenant le cas où une ou plusieurs des différences entre les nombres γ_s sont des entiers. Répartissons ces nombres en différents groupes de sorte que tous les nombres qui diffèrent par des entiers se trouvent dans un même groupe. Soit $\gamma_s, \gamma_{s+1}, \ldots, \gamma_{s+p}$ un tel groupe, où chaque nombre est répété autant de fois qu'il figure dans la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Supposons qu'ils aient été numérotés de sorte qu'on ait

$$\mathcal{R}(\gamma_s) \geqq \mathcal{R}(\gamma_{s+1}) \geqq \ldots \geqq \mathcal{R}(\gamma_{s+p}).$$

Au nombre γ_s correspond une solution $u_s(x)$ définie comme il a été dit plus haut, par la condition qu'aucun des autres nombres qui se trouvent dans le même groupe n'ait sa partie réelle supérieure à γ_s. Mais les solutions qui correspondent aux nombres $\gamma_{s+1}, \ldots, \gamma_{s+p}$ ne diffèrent de $u_s(x)$ que par un facteur constant. Pour obtenir un système fondamental de solutions, nous déterminerons dans le groupe de solutions $u_s(x), \ldots, u_{s+i}(x), \ldots, u_{s+p}(x)$ qui correspondent aux nombres $\gamma_s, \ldots, \gamma_{s+i}, \ldots, \gamma_{s+p}$, la fonction $v_{s+i}(t)$ comme il suit

$$v_{s+i}(t) = \Phi(t) \frac{\pi e^{\pi i(\xi+\gamma_s-t)}}{\sin\pi(\xi+\gamma_s-t)} \cdots \frac{\pi e^{\pi i(\xi+\gamma_{s+i}-t)}}{\sin\pi(\xi+\gamma_{s+i}-t)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

Les intégrales ainsi formées sont convergentes pour toute valeur de x qui ne se trouve pas sur la demi-droite passant par les points $\gamma_s, \gamma_s+1, \gamma_s+2, \ldots$, pourvu que $\mathcal{R}(k) < 0$, et elles représentent des solutions de l'équation (1) holomorphes pour toute valeur de x qui satisfait à cette condition.

En écrivant l'équation aux différences sous la forme

$$P_0(x)\,u(x) + P_1(x)\,u(x-1) + \ldots + P_n(x)\,u(x-n) = 0,$$

on trouve, par un calcul facile,

$$P_0(x) = Q(x+\xi+n) - R(x+\xi+n-1).$$

Les zéros de $P_0(x)$ sont donc les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. *On en conclut que les solutions $u_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ de notre système fondamental sont des fonctions méromorphes de x, et que la solution $u_s(x)$ n'ad-*

met d'autres pôles que les points γ_s, γ_s+1, γ_s+2, ... Si γ_s ne diffère d'aucun des autres nombres γ par un entier positif, nul ou négatif, les points γ_s, γ_s+1, γ_s+2, ... sont des pôles simples de $u_s(x)$.

5. En restant dans cette dernière hypothèse, nous allons former un développement en séries de $u_s(x)$.

Notre intégrale est égale à la somme des résidus de la fonction sous le signe dans les points $\gamma_s+\xi$, $\gamma_s+\xi+1$, $\gamma_s+\xi+2$, ...; on le vérifie sans peine à l'aide du théorème de Cauchy. En remarquant qu'on a

$$\lim_{t=-\nu}(t+\nu)\Gamma(t)=\lim_{t=-\nu}\frac{\Gamma(t+\nu+1)}{(t+\nu-1)\ldots(t+1)t}=\frac{(-1)^\nu}{\nu!},$$

on trouve

$$(7)\quad u_s(x)=c_s\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\Gamma(\gamma_s-x+\nu)\,\Gamma(\gamma_s+\xi-\alpha_1+\nu)\ldots\Gamma(\gamma_s+\xi-\alpha_n+\nu)}{\Gamma(\xi+\gamma_s-x+\nu+1)\,\Gamma(\gamma_s-\gamma_1+\nu+1)\ldots\Gamma(\gamma_s-\gamma_n+\nu+1)}(-1)^{\nu n},$$

où

$$c_s=-\frac{\sin\pi(\xi+\gamma_s-\alpha_1)}{\pi}\cdots\frac{\sin\pi(\xi+\gamma_s-\alpha_n)}{\pi},$$

la solution $u_s(x)$ *se représente donc par une série hypergéométrique.* Cette série est convergente pour toute valeur de x distincte des pôles γ_s, γ_s+1, γ_s+2, ... pourvu qu'on ait $\mathcal{R}(k)<0$.

Il peut arriver, par exception, qu'un ou plusieurs des nombres $\gamma_s+\xi-\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ soit égal à un entier non positif. Soit $-m$ le plus grand de ces nombres. La série (7) se réduit, en ce cas, aux m premiers termes, les termes suivants étant égaux à zéro. $u_s(x)$ est, par conséquent, égal à une fonction rationnelle de x, multipliée par un quotient de deux fonctions gamma.

Si $\gamma_s+\xi-\alpha_i$ est un entier positif, $u_s(x)$ est identiquement nul et la fonction

$$v_s(t)=\Phi(t)\frac{\pi e^{\pi i(\xi+\gamma_s-t)}}{\sin\pi(\xi+\gamma_s-t)},$$

est une fonction entière de t. On évite cette difficulté en remplaçant la fonction $v_s(t)$ par la fonction suivante

$$v_s(t)\frac{\pi}{\sin\pi(t-\alpha_i)};$$

la solution $u_s(x)$ est alors différente de zéro et elle se représente comme plus haut par une série de la forme (7) où le terme général a été multiplié par $(-1)^\nu$ pendant que le facteur s'évanouissant dans c_s a été supprimé. Une remarque analogue a lieu s'il y a plusieurs des nombres $\gamma_s + \xi - \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui soient des entiers.

4. On peut obtenir un autre système fondamental de solutions $\bar{u}_1(x), \ldots, \bar{u}_n(x)$ de la manière suivante. Répartissons les racines α_s en différents groupes de sorte que toutes les racines qui diffèrent par des entiers se trouvent dans un même groupe. Soit $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{s+p}$ un tel groupe où chaque racine est répétée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Supposons qu'elles aient été numérotées de sorte que

$$\mathcal{R}(\alpha_s) \leqq \mathcal{R}(\alpha_{s+1}) \leqq \ldots \leqq \mathcal{R}(\alpha_{s+p}).$$

Correspondant à ces racines, nous définissons une suite de solutions par les équations suivantes:

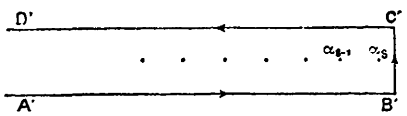
$$\bar{u}_{s+i}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(t - x - \xi)}{\Gamma(t - x + 1)} v_{s+i}(t)\, dt,$$

$$v_{s+i}(t) = \Phi(t) \frac{\pi}{\sin\pi(t - \alpha_s)} \cdots \frac{\pi}{\sin\pi(t - \alpha_{s+i})} \frac{\sin\pi(x + \xi - t)}{\sin\pi(x - t)}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, p),$$

où la ligne d'intégration est une ligne brisée A'B'C'D' partant de l'infini le long de la ligne A'B' et y revenant le long de la ligne C'D'

Fig. 2.



qui comprend à son intérieur les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \ldots$. En déformant convenablement la ligne d'intégration, on voit que l'intégrale reste convergente quand x reste à distance finie des points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \ldots$ pourvu que $\mathcal{R}(k) < 0$. Elle représente une solution méromorphe de l'équation (1), admettant pour pôles les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \ldots$ et étant d'ailleurs holomorphe. A chaque racine α_s correspond une solution et ces solutions forment un système fondamental. En remarquant que l'intégrale est égale à la somme des résidus de la fonction sous le signe d'intégrations dans les points α_s, $\alpha_s - 1$, $\alpha_s - 2, \ldots$, on trouve pour $i = 0$ le développement

$$\overline{u}_s(x) = c_s \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Gamma(x-\alpha_s+\nu)\Gamma(\gamma_1+\xi-\alpha_s+\nu)\ldots\Gamma(\gamma_n+\xi-\alpha_s+\nu)}{\Gamma(x+\xi-\alpha_s+\nu+1)\Gamma(\alpha_1-\alpha_s+\nu+1)\ldots\Gamma(\alpha_n-\alpha_s+\nu+1)}(-1)^{\nu n},$$

où

$$c_s = -\frac{\sin\pi(\xi+\gamma_1-\alpha_s)}{\pi}\cdots\frac{\sin\pi(\xi+\gamma_n-\alpha_s)}{\pi}.$$

Cette série hypergéométrique converge pour toute valeur de x différente des pôles α_s, $\alpha_s - 1$, $\alpha_s - 2$, ... pourvu que $\mathfrak{R}(k) < 0$.

5. Il y a quelques cas d'exceptions intéressants qu'il convient d'examiner de plus près. Supposons qu'on ait pour $s = 1, 2, \ldots, n$

$$\gamma_s + \xi - \alpha_s = 0;$$

la condition nécessaire et suffisante pour que cela arrive c'est que $R(x) = 0$. L'équation aux différences (1) se réduit à son premier membre qui doit être identiquement zéro. La fonction $\Phi(t)$ devient

$$\Phi(t) = \frac{\sin\pi(t-\xi-\gamma_1)}{\pi(t-\xi-\gamma_1)}\cdots\frac{\sin\pi(t-\xi-\gamma_n)}{\pi(t-\xi-\gamma_n)}.$$

On peut donc définir un système de solutions par les intégrales suivantes :

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_s}\frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+1)}\frac{dt}{(t-\xi-\gamma_1)\ldots(t-\xi-\gamma_n)},$$

où la ligne d'intégration C_s est un petit cercle autour de $\xi+\gamma_s$ parcouru dans le sens positif et laissant à son extérieur les autres pôles $\xi+\gamma_1, \ldots, \xi+\gamma_n$. Ces solutions ne diffèrent de celles définies plus haut que par des facteurs constants. On vérifie immédiatement qu'on a

$$u_s(x) = \frac{1}{Q'(\xi+\gamma_s+n)}\frac{\Gamma(\gamma_t - x)}{\Gamma(\xi+\gamma_s-x+1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n);$$

ces n solutions forment un système fondamental pourvu que les γ_s soient distincts. Mais si l'on a par exemple $\gamma_1 = \gamma_2 \ldots = \gamma_m$, nous pouvons, correspondant à ces racines, choisir les solutions suivantes :

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_b \frac{\Gamma(t-x-\xi)}{\Gamma(t-x+1)}\frac{[\sin\pi(t-\xi-\gamma_1)]^{s-1}\,dt}{\pi^{s-1}(t-\xi-\gamma_1)^m(t-\xi-\gamma_{m+1})\ldots(t-\xi-\gamma_n)}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans le cas extrême où $m = n$, c'est-à-dire où tous les γ prennent la même valeur, on obtient donc le système fondamental de solution suivant

$$u_s(x) = \frac{1}{(n-s)!} \frac{\partial^{n-s}}{\partial \gamma_1^{n-s}} \left[\frac{P(\gamma_1 - x)}{P(\gamma_1 + \xi - x + 1)} \right] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

et l'équation aux différences se réduit, en ce cas, à l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n} \binom{\xi + n}{i} \Delta_{+1}^{i} (x - \xi - \gamma_1 - n)^n \Delta_{-1}^{n-i} u(x) = 0.$$

6. Considérons enfin le cas où ξ est un entier. Si $0 > \xi \geqq - n$, un certain nombre des termes contenant $u(x)$, $\Delta_1 u(x)$, dans l'équation (1) disparaissent.

On peut donc réduire l'ordre de l'équation aux différences d'une ou plusieurs unités et par là trouver la solution générale de l'équation (1). Si $\xi < -n$, l'expression intégrale (2) montre immédiatement que $u(x)$ est un polynome en x. Si ξ est un entier non négatif, les expressions des solutions, trouvées plus haut, restent valables sans modifications. Mais on peut, dans ce cas, former une solution nouvelle particulièrement remarquable; il va sans dire que cette solution est une combinaison linéaire des solutions trouvées plus haut. Soit d'abord $\xi = 0$. L'expression (2) se réduit à

$$(8) \qquad u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{v(t)}{t - x} dt.$$

Je pose maintenant

$$v(t) = \frac{\Gamma(t - \alpha_1) \ldots \Gamma(t - \alpha_n)}{\Gamma(t - \gamma_1 - \xi + 1) \ldots \Gamma(t - \gamma_n - \xi + 1)},$$

et je prends, comme ligne d'intégration, un petit cercle autour du point $t = x$, parcouru dans le sens positif et laissant à son extérieur les pôles de $v(t)$. En limitant convenablement le domaine de variabilité de x, on voit que la condition (6) est satisfaite. On a, par conséquent, la solution suivante :

$$u(x) = \frac{\Gamma(x - \alpha_1) \ldots \Gamma(x - \alpha_n)}{\Gamma(x - \gamma_1 + 1) \ldots \Gamma(x - \gamma_n + 1)}.$$

Si ξ est égal à un entier positif m on trouve de même

$$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{v(t)\,dt}{(t-x)(t-x-1)\ldots(t-x-m)},$$

la ligne d'intégration est un contour fermé entourant les points x, $x+1$, ..., $x+m$ dans le sens positif et laissant à son extérieur les pôles de $v(t)$. Cette intégrale pourra s'obtenir en appliquant à l'intégrale (8) l'opération $\frac{1}{m!}\Delta^m_{+1}$; on a par conséquent la solution suivante :

$$u(x)=\frac{1}{m!}\Delta^m_{+1}\left[\frac{\Gamma(x-\alpha_1)\ldots\Gamma(x-\alpha_n)}{\Gamma(x-\gamma_1-m+1)\ldots\Gamma(x-\gamma_n-m+1)}\right].$$

CHAPITRE II.

7. Il y a plusieurs autres classes d'équations aux différences finies qui se placent à côté de l'équation (1) et qu'on peut résoudre d'une manière analogue. Considérons par exemple l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\Delta^i_{+1}Q(x)}{i!}u(x+i)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\Delta^{i-1}_{+1}R(x)}{(i-1)!}u(x+i). \tag{9}$$

On suppose que $Q(x)$ et $R(x)$ soient des polynomes en x respectivement du degré $n+1$ et n et de la forme

$$Q(x)=(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n),$$
$$R(x)=(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n),$$

où les α et les γ sont des constantes données. Nous considérons pour abréger seulement le cas, qu'on pourrait appeler général, où les γ et les α sont distincts et où aucunes des différences entre ces nombres ne sont des entiers. Essayons de satisfaire à cette équation par une intégrale de la forme

$$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{v(t)\,dt}{\Gamma(t-x+1)}, \tag{10}$$

$v(t)$ étant une fonction à déterminer qui soit indépendante de x. En substituant cette intégrale dans l'équation (9) on trouve, en vertu de (3),

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{v(t)}{\Gamma(t-x+1)}[Q(t)-(t-x)R(t-1)]\,dt = 0.$$

Déterminons $v(t)$ comme une solution de l'équation aux différences finies du premier ordre

$$(12) \qquad v(t+1) = \frac{Q(t)}{R(t)}v(t).$$

La condition (11) se réduit à l'équation suivante

$$(13) \qquad \int \frac{v(t)\,Q(t)}{\Gamma(t-x+1)}\,dt = \int \frac{v(t-1)\,Q(t-1)}{\Gamma(t-x)}\,dt.$$

L'intégrale (10) satisfait donc à l'équation (9) si $v(t)$ est une solution convenablement choisie de l'équation aux différences (12) et si le chemin d'intégration a été choisi de sorte que la valeur de l'intégrale, qui figure au premier membre de (13), ne soit pas altérée quand on déplace le chemin d'intégration d'une unité parallèlement à l'axe des nombres réels. On a

$$v(t) = \frac{\Gamma(t-\alpha_0)\,\Gamma(t-\alpha_1)\ldots\Gamma(t-\alpha_n)}{\Gamma(t-\gamma_1)\,\Gamma(t-\gamma_2)\ldots\Gamma(t-\gamma_n)}\pi(t),$$

$\pi(t)$ étant une fonction périodique avec la période 1. Soit s un des nombres $1, 2, \ldots, n$. Posons

$$\pi(t) = \frac{\pi e^{\pi i(t-\gamma_s)}}{\sin\pi(t-\gamma_s)},$$

et prenons pour ligne d'intégration, un contour ABCD (*fig.* 1) comprenant à son intérieur les points $\gamma_s+1, \gamma_s+2, \gamma_s+3, \ldots$ et laissant à son extérieur les pôles $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. L'intégrale ainsi définie est convergente pourvu que

$$\mathfrak{R}(x) < \mathfrak{R}(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n-\gamma_1-\ldots-\gamma_n),$$

et elle représente dans ce demi-plan une solution de l'équation (9) que nous désignons par $u_s(x)$. Il est facile de développer cette intégrale en série de facultés. La valeur de l'intégrale est, en effet, égale à la somme des résidus de la fonction sous le signe pour les pôles γ_s+1, γ_s+2, γ_s+3, ... Notre solution se représente donc par la série hypergéométrique

$$u_s(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{\Gamma(\gamma_s-\alpha_0+\nu)\,\Gamma(\gamma_s-\alpha_1+\nu)\ldots\Gamma(\gamma_s-\alpha_n+\nu)}{\Gamma(\gamma_s-x+\nu+1)\,\Gamma(\gamma_s-\gamma_1+\nu)\ldots\Gamma(\gamma_s-\gamma_n+\nu)},$$

qui est convergente dans le même demi-plan que l'intégrale. Des propriétés connues des séries de facultés permettent de conclure qu'on a uniformément

$$\lim_{|x|=\infty}\Gamma(\gamma_s-x+2)\,u_s(x)=\text{const.},$$

x tendant vers l'infini en restant à l'intérieur du demi-plan de convergence.

En donnant à s successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, on obtient n solutions différentes. La propriété asymptotique susdite permet immédiatement de conclure que ces solutions forment un système fondamental de solutions.

Dans un Mémoire intitulé : *Sur une classe de fonctions hypergéométriques* (¹), j'ai discuté le cas particulier où $n=2$, et montré comment on peut prolonger analytiquement les solutions dans tout le plan. Les équations (1) et (9) rentrent d'ailleurs comme cas particuliers dans deux classes générales d'équations aux différences finies que j'ai discutées avec détails dans deux autres Mémoires en me servant respectivement de la transformation de Laplace (²)

$$u(x)=\int t^{x-1}\,v(t)\,dt,$$

et des propriétés des séries de facultés (³). On trouve indiquées, dans ces Mémoires, les propriétés analytiques les plus importantes des solutions considérées plus haut.

(¹) *Bulletin de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark*, Copenhague, 1913.

(²) *Sur les équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels* (*Acta mathematica*, t. XXXVII, 1913.

(³) *Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXV, 1913.