JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. VESSIOT

Sur la propagation par ondes et sur le problème de Mayer

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 9 (1913), p. 39-76.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1913_6_9__39_0>

Sur la propagation par ondes et sur le problème de Mayer;

PAR E. VESSIOT.

1. Les pages qui suivent se rattachent aux articles (¹) que j'ai publiés sur les conséquences analytiques du principe d'Huygens considéré comme définissant la propagation infinitésimale des ondes dans un milieu à un nombre quelconque de dimensions, et de nature quelconque; et, en particulier, sur les rapports de cette propagation par ondes avec la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des systèmes canoniques, avec le calcul des variations et avec la dynamique analytique.

Le mode de propagation est défini quand on se donne la forme limite vers laquelle tend l'onde émise par un ébranlement produit en un point quelconque, quand la durée de propagation tend vers zéro : c'est ce que nous appelons la *multiplicité d'onde*. Nous appelons *onde élémentaire* l'homothétique de cette multiplicité d'onde, le centre d'homothétie étant le point ébranlé, et le rapport d'homothétie étant la durée infiniment petite dt de la propagation. Dans le cas général où le régime de la propagation est variable, ces multiplicités d'onde et ces ondes élémentaires dépendent de l'instant t de leur émission.

Dans les deux premiers des articles rappelés, j'ai étudié les cas où les ondes élémentaires ont ∞^{n-1} points et ∞^{n-1} plans tangents. Dans le

(¹) *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXXIV, 1906); *Essai sur la propagation par ondes* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXVI, 1909); *Sur la théorie des multiplicités et le Calcul des variations* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XL, 1912).

troisième, l'étude du problème isopérimétrique général, dit *de Lagrange*, m'avait conduit à considérer le cas où les ondes élémentaires ont $\infty^{n-\alpha-1}$ points, tout en ayant ∞^{n-1} plans tangents ; et j'avais énoncé seulement les résultats, relatifs à ce cas, dont j'avais besoin. Ce cas est le plus général, car, comme je l'avais déjà indiqué, et comme je le montre ici incidemment, si les ondes élémentaires avaient moins de ∞^{n-1} plans tangents, on n'aurait plus affaire à un milieu dans lequel une onde *quelconque* pût se propager.

2. Dans la première Partie du présent travail, je reprends l'analyse de ce cas général : il s'agit même ici du régime variable, tandis que le problème de Lagrange se rattache au cas du régime permanent.

Le système des ondes élémentaires est défini, au point de vue ponctuel, par un système de $(\alpha+1)$ équations, qu'on peut ramener à la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} F\,(t\,|\,x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,dx_1,\,\ldots,\,dx_n) = dt, \\ F_h(t\,|\,x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,dx_1,\,\ldots,\,dx_n) = 0 \qquad (h=1,2,\ldots,\alpha), \end{cases}$$

les premiers membres étant homogènes, de degré un, par rapport aux différentielles. L'origine d'émission de l'onde élémentaire a pour coordonnées x_1, ..., x_n ; l'instant ou date (¹) de l'émission est t ; un point courant de l'onde élémentaire a pour coordonnées

$$x_1+dx_1,\quad \ldots,\quad x_n+dx_n.$$

Au point de vue tangentiel, la multiplicité d'onde correspondante, considérée comme enveloppe du plan variable

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i(X_i-x_i)=1,$$

est définie par une seule équation

$$(3)\qquad G(t\,|\,x_1,\,\ldots,\,x_n\,|\,q_1,\,\ldots,\,q_n)=1,$$

(¹) Nous nous servirons souvent de ce mot *date*, dont l'emploi a été proposé par M. Fontené (*Géométrie dirigée*, Paris, Nony, 1897, p. 75; *Bull. des Sc. math. et phys.*, décembre 1906), et qui est commode pour distinguer les deux acceptions du mot *temps*, instant et durée.

et c'est ce qui fait que les résultats actuels sont analogues à ceux que j'avais obtenus autrefois.

Les *familles d'ondes*, c'est-à-dire les familles de multiplicités de la forme

$$(4) \qquad t = V(x_1, \ldots, x_n)$$

constituées par les états successifs par lesquels passe une onde quelconque dans sa propagation, sont fournies par les solutions de l'équation (3), où l'on interprète $q_1, \ldots, q_n$ comme les dérivées partielles de V,

$$(5) \qquad q_i = \frac{\partial t}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les ondes se propagent par éléments de contact, individuellement considérés; chaque élément de contact se propageant de la même manière, à partir d'un instant donné, quelle que soit l'onde initiale à laquelle il appartienne à cet instant. L'ensemble des positions successives que prend ainsi un élément de contact quelconque, avec les dates de ces positions successives, correspond à une *caractéristique* quelconque de l'équation aux dérivées partielles (3). Les variables $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$ sont alors interprétées comme les coordonnées homogènes de l'élément de contact constitué par le point $(x_1, \ldots, x_n)$ et le plan (2).

Le système différentiel des caractéristiques

$$(6) \qquad \partial x_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} dt, \qquad dq_i = -\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial G}{\partial t}\right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n$$

se présente de lui-même, comme définissant la transformation infinitésimale qui correspond à la propagation pendant le temps infiniment petit dt, à partir de l'instant t, transformation dont le symbole s'écrit, avec la notation du crochet de Poisson,

$$(7) \qquad T\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + [G, \mathcal{F}].$$

Quant à la *propagation finie*, entre deux instants quelconques t_0 et t, elle a son expression dans une *transformation de contact;* de sorte que le principe des ondes enveloppes peut s'appliquer à la propagation au sens fini du mot, sous la forme la plus générale, et non pas seulement au sens infinitésimal comme cela avait lieu par hypothèse. Ce résultat renferme, comme cas particulier, la théorie de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, au moyen des intégrales complètes.

Dans le cas du régime permanent, la transformation de contact en question ne dépend que de la durée $(t - t_0)$, et est la transformation générale d'un groupe à un paramètre.

Dans le cas général elle serait définie, suivant la théorie de Lie, par les relations entre $x_1, \ldots, x_n$; $X_1, \ldots, X_n$ qui représentent l'onde émise par un ébranlement produit, à l'instant t_0, au point unique $(x_1, \ldots, x_n)$, dans l'état de propagation où elle se trouve à l'instant t. Cette onde, dont l'onde élémentaire est la forme limite, pour $(t - t_0)$ infiniment petit, peut avoir plus de dimensions que l'onde élémentaire, et même a, en général, ∞^{n-1} points. Ce n'est que dans le cas où l'équation aux dérivées partielles (3) est, comme disait Lie, *semi-linéaire*, ou *pseudo linéaire*, c'est-à-dire où les courbes qui servent de supports aux caractéristiques dépendent seulement de $(2n - 1 - \gamma)$ paramètres arbitraires essentiels, que les ondes issues de points sont des multiplicités à $(n - 1 - \gamma)$ dimensions.

5. Au lieu de laisser l'ébranlement, produit en un point, se propager librement dans toutes les directions autour de ce point, on peut imaginer qu'on le guide dans sa propagation, par exemple au moyen d'un tuyau curviligne de section infiniment petite, dont on supposera que les parois amortissent toute propagation sauf dans le sens de la tangente à l'axe du tuyau. On a ainsi ce qu'on peut appeler *la propagation le long d'une courbe;* mais si $\alpha > 0$, on ne peut choisir arbitrairement ni la courbe, ni l'instant où l'ébranlement passe en un point arbitraire de la courbe; car la courbe et la date, à laquelle un quelconque de ses points se trouve ébranlé, doivent satisfaire au *système de Monge* (1), qui peut être quelconque.

Parmi les solutions de ce système figurent celles qui sont constituées par les *trajectoires de la propagation*, c'est-à-dire par le lieu que décrit le point d'un élément de contact quelconque et par la date qui est associée à chaque point de ce lieu. Il se trouve que ces trajectoires correspondent au *minimum de durée de la propagation le* *long d'une courbe*, entre deux points de cette courbe, l'ébranlement partant du premier de ces points à un instant donné.

C'est à l'étude de ce problème de minimum, qui n'est qu'un énoncé physique du problème général du calcul des variations, relatif à une seule variable indépendante, désigné généralement sous le nom de *problème de Mayer*, qu'est consacrée la seconde Partie de notre article.

Dans la mise en équations, nous avons suivi la méthode employée dans notre article sur le problème de Lagrange : elle est fondée sur la représentation paramétrique

$$dx_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

de l'onde élémentaire. On sait que cette méthode a, sur la méthode classique d'intégrations par parties, l'avantage de ne pas donner prise à l'objection de Du Bois Reymond relative à l'introduction, non justifiée, des dérivées secondes. Elle donne aussi la raison pour laquelle doivent intervenir les multiplicateurs de Lagrange : la propagation le long de la courbe, dans le cas du minimum, correspond à la propagation d'un élément de contact d'onde dont l'orientation se trouve précisément définie par ces multiplicateurs. La mise en équations se fait, du reste, indépendamment de ces multiplicateurs.

Pour établir des conditions suffisantes pour le minimum, nous avons fait usage de la méthode, équivalente à la méthode de Weierstrass-Hilbert, déjà utilisée dans nos deux précédents articles. Le champ d'extrémales de Weierstrass, et sa propriété de correspondre à un *Ünabhängigkeit Satz* analogue à ceux de Hilbert, se présentent d'eux-mêmes, quand on considère l'élément de contact d'onde qui se propage le long de la trajectoire considérée comme faisant partie d'une onde d'étendue finie : les trajectoires correspondant aux divers éléments de cette onde constituent le champ ; et la date qui correspond à un point quelconque de l'une de ces trajectoires étant une solution de l'équation aux dérivées partielles (3) s'obtient par une quadrature de différentielle totale qui peut être effectuée suivant toute autre courbe ayant la même origine (datée de même), et la même extrémité que cette trajectoire.

On est ramené ainsi à comparer les intégrales de deux équations différentielles de la forme

$$(7) \qquad dt = \mathfrak{F}(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n),$$

prises le long d'une même courbe située dans le champ (et voisine de la trajectoire étudiée), avec la même valeur initiale. Dans notre essai sur la propagation par ondes, nous avions introduit l'hypothèse qu'on avait affaire à des fonctions analytiques : nous donnons ici une méthode qui n'introduit que des hypothèses de continuité et de dérivabilité inhérentes au problème lui-même.

La condition s'exprime encore par la concavité de l'onde élémentaire qui a pour origine un point quelconque de la trajectoire, dans le domaine de celui de ses éléments de contact qui est parallèle à l'élément de contact se propageant le long de la trajectoire : cet élément de l'onde élémentaire a, du reste, pour point de contact le point de la trajectoire qui est infiniment voisin du point considéré, dans le sens de la propagation.

Relativement au problème de Mayer, notre exposition suppose que la fonction F, dans les équations (1), est essentiellement positive sur les courbes que l'on considère. Mais on pourrait lever cette restriction en ajoutant à F une différentielle totale convenablement choisie, comme nous l'avons fait dans l'étude du problème de Lagrange.

I. — Propriétés fondamentales de la propagation par ondes.

1. Imaginons un milieu élastique, de propriétés variables avec le temps t, remplissant l'espace à n dimensions, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; et admettons que dans ce milieu peuvent se propager des ébranlements de nature déterminée. L'ébranlement produit, à l'instant t, en un point $(x_1, \ldots, x_n)$, s'est transmis, à l'instant $(t + dt)$, à une infinité de points $(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$. Prenons les homothétiques de ces points, par rapport au point origine $(x_1, \ldots, x_n)$, et, avec le rapport d'homothétie $\left(\frac{1}{dt}\right)$, nous obtenons *à la limite*, lorsque dt tend vers zéro, la *multiplicité d'onde*, d'origine $(x_1, \ldots, x_n)$, relative à l'instant t.

Soit M l'origine $(x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{\mathrm{MA}}$ un vecteur quelconque, de composantes $a_1, \ldots, a_n$, issu de M. En séparant au besoin la multiplicité d'onde en arcs ou nappes, on peut admettre que sur la direction $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$, il y a *au plus* un point P de cette multiplicité, qui sera défini par le rapport positif $\rho = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MA}}$, et donné par une équation

$$\rho = \mathrm{F}(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_n), \tag{1}$$

les quantités $a_1, \ldots, a_n$ étant liées, si la multiplicité d'onde contient $\infty^{n-1-\alpha}$ points, par des équations de condition

$$\mathrm{F}_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{2}$$

Ces formules doivent subsister si l'on change le vecteur $\overline{\mathrm{MA}}$, sans changer sa direction, c'est-à-dire si l'on remplace $a_1, \ldots, a_n$ et ρ par $ma_1, \ldots, ma_n$ et $m\rho$, où m est un nombre *positif* quelconque. Donc F est une fonction positive (¹), *positivement homogène* par rapport à ses arguments $a_1, \ldots, a_n$; et les fonctions F_h sont positivement homogènes. Le degré d'homogénéité de F est 1; et l'on peut supposer qu'il en est de même pour les F_h (²).

Si l'on prend, pour point A, le point P lui-même, en désignant par $p_1, \ldots, p_n$ ses coordonnées dans le système de coordonnées, parallèle au système général $x_1, \ldots, x_n$, qui a le point M pour origine, on a $\rho = 1$, et l'on obtient les équations de la multiplicité d'onde sous la forme

$$\mathrm{F}(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1, \tag{3}$$

$$\mathrm{F}_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{4}$$

2. Ces équations étant supposées données, on a, *aux infiniment petits près du second ordre* (³), le lieu des points

$$(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$$

(¹) Au moins pour les directions que l'on aura à considérer.

(²) Il n'y a rien là d'essentiel. Dans notre article du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XL, 1912, nous avions supposé les F_h de degré zéro.

(³) Pour plus de précision sur ce point, *cf.* notre article : *Essai sur la propagation par ondes* (*Ann. Ec. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXVI, 1909, p. 409).

auxquels s'est transmis, à l'instant $(t + dt)$, l'ébranlement produit en $(x_1, \ldots, x_n)$, à l'instant t, si l'on reprend l'homothétique de la multiplicité d'onde, dans le rapport dt, par rapport à son origine $(x_1, \ldots, x_n)$. On obtient ainsi l'*onde élémentaire*, définie par les équations

$$\text{(5)} \qquad F\,(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,dx_1, \ldots, dx_n) = dt,$$

$$\text{(6)} \qquad F_h(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

où $dx_1, \ldots, dx_n$ peuvent être considérés comme des coordonnées courantes, dans le système de coordonnées d'origine $(x_1, \ldots, x_n)$.

Ces équations, au point de vue différentiel, constituent un système de Monge, qui, à part la condition de signe imposée à F, et le caractère positif de l'homogénéité de F et de F_h, peut être quelconque, pourvu qu'il soit résoluble par rapport à dt. La variable t y doit jouer en effet, un rôle spécial.

Une solution quelconque de ce système est constituée par une courbe

$$\text{(7)} \qquad x_i = \psi_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

et par une correspondance entre les points de cette courbe et les valeurs correspondantes du temps t

$$\text{(8)} \qquad t = \psi(u).$$

C'est ce qu'on pourra appeler une courbe *datée* (1). Nous désignerons par la lettre (C) l'une quelconque de ces courbes.

Une courbe (C) étant considérée comme un tube infiniment mince, dont les parois amortissent instantanément les ébranlements considérés, un ébranlement produit en un point $u = u_0$ de cette courbe pourra se propager dans ce tube, c'est-à-dire *le long de cette courbe* (C), pourvu qu'il soit produit précisément à l'instant $t_0 = \psi(u_0)$. Et la formule (8) donnera la loi numérique de cette propagation.

Si cependant les équations (6) sont indépendantes de t, la courbe (C)

---

(1) Ces courbes satisfont au système différentiel obtenu en éliminant t entre les équations (5) et (6). Ce système comprend, en général, $(\alpha - 1)$ équations de Monge, et une équation du second ordre. Il se réduit au système de Monge (6), dans le cas particulier où t ne figure pas dans ces équations (6).

sera capable de conduire un ébranlement produit en un quelconque de ses points à un instant quelconque. Dans ce cas la valeur de t, pour un point courant de la courbe, s'obtiendrait en intégrant l'équation différentielle (5), et sa valeur initiale sera arbitraire, lorsqu'on se donne la courbe elle-même. Dans tout autre cas, cette valeur t est donnée sans intégration par l'une des équations (6).

Observons encore qu'il ne sera pas loisible, en général, de changer, dans les équations (5) et (6), $dx_1, \ldots, dx_n$, en $-dx_1, -dx_2, \ldots, -dx_n$. De sorte que l'ébranlement ne pourra se propager sur la courbe (C) que dans un sens déterminé. Analytiquement, c'est le sens dans lequel doit varier u, dans la formule (8), pour que $t = \psi(u)$ aille en croissant : il résulte, du reste, de l'hypothèse faite sur F (à savoir qu'elle reste positive pour les déplacements considérés), que la fonction t varie effectivement en croissant sur (C).

3. Supposons, maintenant, qu'à l'instant t tous les points d'une multiplicité (S) soient simultanément ébranlés : on a ainsi une *onde*, qui se propagera, par une nouvelle hypothèse, conformément au *principe infinitésimal des ondes enveloppes* (¹). Nous entendons par là que l'enveloppe (Σ') des ondes élémentaires issues des divers points de (S), (à l'instant t), représente, aux infiniment petits près d'ordre supérieur, l'état (S′) de l'onde à l'instant $(t + dt)$.

Le terme d'enveloppe doit être pris ici au sens général de la théorie des multiplicités, c'est-à-dire que les éléments de contact de l'enveloppe sont empruntés aux éléments de contact des enveloppées.

Cherchons cette enveloppe (Σ'). Soit, à cet effet, $(x_1, \ldots, x_n)$ un point quelconque M de (S). A un point quelconque

$$x_1 + X_1, \quad \ldots, \quad x_n + X_n$$

de l'onde élémentaire qui a ce point M pour origine correspond, par les formules

$$X_i = P_i\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

un point $(x_1 + P_1, \ldots, x_n + P_n)$ de la multiplicité d'onde (3), (4). En

(¹) Cf. *loc. cit.*, p. 409-412.

ces deux points homologues de l'onde élémentaire et de la multiplicité d'onde, les éléments de contact sont parallèles, et l'on peut définir (¹) leur direction commune par les formules

$$(10) \qquad Q_i = \frac{\partial f}{\partial P_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on pose

$$(11) \quad f(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n) = F(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n) + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n).$$

On peut ainsi considérer $(P_1, \ldots, P_n; Q_1, \ldots, Q_n)$ comme les coordonnées d'un élément de contact quelconque de l'onde élémentaire; et ces coordonnées satisfont à l'équation

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i = 1.$$

L'un au moins de ces éléments de contact appartient à l'enveloppe (Σ'); et nous réservons maintenant la notation

$$(P_1, \ldots, P_n; Q_1, \ldots, Q_n),$$

pour un tel élément. Alors, à toute variation $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ du point M sur (S), correspondent des variations $(\delta P_1, \ldots, \delta P_n)$ telles que le point de coordonnées $(x_i + P_i dt) + \delta(x_i + P_i dt)$ reste sur l'élément de contact $(P_1, \ldots, P_n; Q_1, \ldots, Q_n)$, c'est-à-dire qui satisfont à la condition

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} Q_i(\delta x_i + \delta P_i . dt) = 0.$$

Mais, d'autre part, puisque le point $(x_1 + P_1, \ldots, x_n + P_n)$ est sur la multiplicité d'onde, il satisfait aux équations (3) et (4), d'où l'on

(¹) Pour ce qui concerne la Géométrie analytique des multiplicités, nous renverrons à notre article du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XL, 1912, plus spécialement ici page 78.

tire, par différentiation, les relations

$$(14)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial F}{\partial P_i}\,\delta P_i\right) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_h}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial F_h}{\partial P_i}\,\delta P_i\right) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha), \end{cases}$$

et en combinant ces relations on obtient

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial P_i}\,\delta P_i\right) = 0,$$

ce qu'on peut écrire, à cause des formules (10),

$$(16)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\delta x_i + Q_i\,\delta P_i\right) = 0.$$

En multipliant cette équation par dt et la retranchant de (13), il reste

$$(17)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dt\right)\delta x_i = 0.$$

Une telle équation a donc lieu, dès que la variation $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ se fait dans un élément de contact de (S), contenant le point

$$(x_1, \ldots, x_n).$$

Désignons par $(q_1, \ldots, q_n)$ les coefficients de direction d'un tel élément. Le résultat obtenu équivaut à dire qu'il lui correspond un élément de contact de (Σ') tel que l'équation (17) soit conséquence de l'équation de condition

$$(18)\qquad \sum_{i=1}^{n} q_i\,\delta x_i = 0,$$

c'est-à-dire tel qu'on ait, m désignant un facteur convenable,

$$(19)\qquad Q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dt + m q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

4. Ces formules montrent d'abord que, si dt tend vers zéro, cet élément de contact de (Σ') tend vers l'élément de contact considéré de (S). Car, à cause de la relation (12), on ne peut supposer que m devienne nul. Or, cet élément de contact de (Σ') est parallèle à un élément de contact de la multiplicité d'onde qui a M pour origine. Donc, il ne peut y avoir propagation de l'onde considérée que si tout élément de contact de (S) est parallèle à un élément de contact de la multiplicité d'onde correspondante. Si donc on veut que l'onde origine (S) puisse être quelconque, c'est-à-dire qu'en chaque point M l'orientation $(q_1, \ldots, q_n)$ de l'élément de contact considéré ne soit restreinte par aucune équation de condition (homogène) entre ses coefficients $(q_1, \ldots, q_n)$, il faut que la multiplicité d'onde ait des éléments de contact d'orientation arbitraire.

Or, les quantités $(Q_1, \ldots, Q_n)$ sont liées par les équations qu'on obtient en éliminant $(P_1, \ldots, P_n)$ entre les équations (10) et les équations de condition

$$(20) \qquad \begin{cases} F\,(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n) = 1, \\ F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \end{cases}$$

Les équations ainsi obtenues définissent le *support tangentiel* [1] de la multiplicité d'onde. Une d'elles n'est pas homogène, et peut s'écrire [2]

$$(21) \qquad G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid Q_1, \ldots, Q_n) = 1,$$

G étant homogène, de degré 1, en $Q_1, \ldots, Q_n$. Mais les autres, s'il y en avait, pourraient s'écrire sous forme homogène en $Q_1, \ldots, Q_n$, et constitueraient une limitation à la liberté d'orientation des éléments de contact.

Nous concluons donc que *la propagation n'est possible pour une onde arbitraire que si le support tangentiel de la multiplicité d'onde est défini par une seule équation, c'est-à-dire si ce support tangentiel a $n - 1$ dimensions.*

C'est ce que nous supposerons désormais. Et nous supposerons, en

---

(1) Cf. *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XL, 1912, p. 74.

(2) Cf. *Ibid.*, p. 78.

outre, que les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n)$ de tout élément de contact, considéré à l'instant t, soient, par définition, liées par l'équation de condition

$$G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1. \tag{22}$$

5. Alors, quand dt tend vers zéro, Q_i tend vers q_i, et, dans les formules (19), m tend vers 1.

Il résulte, de plus, des équations (10) et (20), que $P_1, \ldots, P_n$ sont alors déterminés en fonction de $Q_1, \ldots, Q_n$; on peut même écrire les formules qui les donnent, quand on a introduit l'équation (21). Ce sont [1]

$$P_i = \frac{\partial G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid Q_1, \ldots, Q_n)}{\partial Q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Nous désignerons par $p_1, \ldots, p_n$ les quantités analogues

$$p_i = \frac{\partial G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

On voit alors que P_i tend aussi vers p_i, quand dt tend vers zéro.

En définitive, nous avons déterminé sur (Σ') un élément de contact qui tend, lorsque dt tend vers zéro, vers l'élément de contact

$$(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n)$$

de (S). La variation infinitésimale correspondante se déduit des équations (9), (19), en y remplaçant : X_i par dx_i, P_i par $p_i + dp_i$, Q_i par $q_i + dq_i$, m par $1 + dm$, et supprimant les termes infiniment petits du second ordre. On a donc le système de formules

$$dx_i = p_i\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

$$dq_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + q_i\, dm \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

où f doit désigner maintenant la fonction

$$f = F(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n). \tag{27}$$

---

[1] Cf. *loc. cit.*, p. 79.

Pour ne pas compliquer les notations, nous avons gardé les lettres λ_h pour désigner les valeurs limites des quantités représentées par les mêmes lettres dans les formules (10).

Enfin, les équations (20) et (10) donnent, à la limite,

$$F\,(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1, \tag{28}$$

$$F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha) \tag{29}$$

et

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{30}$$

Il ne reste plus qu'à calculer dm, ce qui se fait en différentiant l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 1, \tag{31}$$

qui provient aussi de (12) par le même passage à la limite. Cela donne

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + dm + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i = 0, \tag{32}$$

en tenant compte de (26) et (30). Si l'on a égard aux équations (25), on en tire

$$dm = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i. \tag{33}$$

Or on tire encore des relations (28) et (29), en les différentiant, la combinaison

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i = 0. \tag{34}$$

Il reste donc simplement, pour dm, la valeur

$$dm = \frac{\partial f}{\partial t} dt, \tag{35}$$

qui permet d'écrire les équations (26) sous leur forme définitive

$$dq_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{36}$$

6. En résumé, *si la propagation est possible*, telle qu'elle a été définie au moyen du principe de Huygens, entendu au sens infinitésimal, elle se traduit par une variation continue des éléments de contact de l'espace, qui est définie par les formules (25), (28), (29), (30), (36).

Récrivons ici ces formules, en éliminant les quantités auxiliaires $p_1, \ldots, p_n$; et en désignant par f, ce que devient la fonction (27) quand on y remplace les p_i par les dx_i. Nous avons le système différentiel

$$F\,(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = dt, \tag{37}$$

$$F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha), \tag{38}$$

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial\, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

$$dq_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{40}$$

avec

$$f \equiv F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h. \tag{41}$$

Ce système contient les α inconnues auxiliaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, et les inconnues $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$. Il est donc surabondant, car il contient $(2n + \alpha + 1)$ équations. Mais la relation (20), qu'il entraîne, est vérifiée, d'après la manière dont nous sommes arrivé aux équations (36), dès qu'elle se trouve satisfaite par les valeurs initiales de $x_1, \ldots, x_n$; $q_1, \ldots, q_n$ et t. Elle disparaît donc en fait; et après élimination de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, on doit obtenir un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre à $2n$ inconnues.

On y arrive en se servant des relations connues entre les équations qui définissent une même multiplicité, suivant qu'on part de son *support ponctuel* ou de son *support tangentiel* (¹). Le support tangentiel étant défini par l'équation (22), les formules (28), (29) et (30) se remplacent par l'équation (22) et les équations

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

(¹) Cf. *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XL, 1912, p. 78-80.

et l'on a de plus

$$(43)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial G}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On obtient donc le système différentiel cherché sous la forme résolue

$$(44)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(45)\qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} - q_i\frac{\partial G}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut le considérer comme définissant une *transformation infinitésimale* en $t, x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_n$ qui est l'expression définitive de la propagation considérée, à savoir

$$(46)\qquad \mathrm{T}\mathfrak{f} \equiv \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + q_i\frac{\partial G}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial q_i}\right].$$

On vérifie immédiatement qu'elle laisse invariante l'équation (22), car on a l'identité

$$(47)\qquad \mathrm{T}(G-1) = -\frac{\partial G}{\partial t}(G-1).$$

Il suffit d'observer que, G étant homogène de degré *un* en $q_1, \ldots, q_n$, on peut lui appliquer l'identité d'Euler.

Comme on ne doit opérer que sur des valeurs des variables vérifiant cette équation (22), on pourrait encore substituer à la transformation (46), la suivante

$$(48)\qquad \mathrm{T}'\mathfrak{f} = [G, \mathfrak{f}] \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial G}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x_i} + q_i\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + q_i\frac{\partial G}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial q_i}\right];$$

où le second membre est le crochet de Poisson.

7. On démontre que la propagation est possible, en vérifiant que *la transformation* T *est une transformation de contact.* Cela résulte de l'identité suivante [1] :

$$\mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i \delta x_i\right) = -\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} q_i \delta x_i. \tag{49}$$

Il résulte de plus de ce fait que *le principe des ondes enveloppes est vrai, non seulement au sens infinitésimal, mais au sens fini du mot*, et sous sa forme la plus générale [2]. En particulier une onde qui, à l'instant t, occupait une position (S), est, à un instant ultérieur quelconque t', l'enveloppe des ondes qui auraient été émises [3], au bout de cet intervalle de temps t à t', par les divers points de (S).

8. Nous appelons *famille d'ondes* l'ensemble des divers états successifs par lesquels passe une onde dans la propagation. Une telle famille est représentée par une équation

$$t = \mathrm{V}(x_1, \ldots, x_n). \tag{50}$$

Les éléments de contact de l'onde sont, en même temps, donnés par les formules

$$q_i = q_0 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{51}$$

où q_0 est un facteur déterminé par la condition (22). Posons

$$\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\left(\mathrm{V} \mid x_1, \ldots, x_n \mid \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_n}\right), \tag{52}$$

et nous obtenons, à cause de l'homogénéité de G, la condition

$$q_0 \overline{\mathrm{G}} = 1. \tag{53}$$

Cela posé, nous allons exprimer que le système (50), (51) admet

---

(1) Le calcul de cette identité est indiqué dans notre Mémoire, cité plus haut, des *Annales de l'École Normale*, p. 422.

(2) C'est ce que nous avons expliqué dans le Mémoire cité dans la Note précédente, (p. 429). Nous y avons développé les conséquences de ce fait, au point de vue des théories d'intégration des équations aux dérivées partielles.

(3) Observons que ces dernières ondes, dont les ondes élémentaires donnent la forme limite, peuvent avoir plus de $\infty^{n-1-\alpha}$ points. Cf. *Bull. Soc. math.*, p. 131.

la transformation T : cela nous donnera le caractère analytique des familles d'ondes (50).

En appliquant d'abord la transformation à l'équation (50), nous obtenons la condition nécessaire

$$(54)\qquad 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}=0,$$

qui, à cause de l'homogénéité (de degré zéro) des dérivées $\frac{\partial G}{\partial q_i}$, peut s'écrire

$$(55)\qquad 1-\sum_{i=i}^{n}\frac{\partial \overline{G}}{\partial \frac{\partial V}{\partial x_i}}\frac{\partial V}{\partial x_i}=0,$$

c'est-à-dire simplement

$$(56)\qquad G\left(V\,|\,x_1,\ldots,x_n\,|\,\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=1.$$

On voit alors, par (53), que q_0 doit avoir la valeur *un*, et que les équations (51) se réduisent à

$$(57)\qquad q_i=\frac{\partial V}{\partial x_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Or, si l'on applique maintenant la transformation T aux équations (57), on obtient les équations

$$(58)\qquad \frac{\partial G}{\partial x_i}+q_i\frac{\partial G}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}=0\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

qui doivent être des conséquences des équations (50) et (57). Cela s'exprime par les identités

$$(59)\qquad \frac{\partial \overline{G}}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial \overline{G}}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \overline{G}}{\partial \frac{\partial V}{\partial x_j}}\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial x_j}}{\partial x_i}=0\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

qui sont des conséquences de (56).

L'équation aux dérivées partielles (56) *est donc la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (50) *soit celle d'une* *famille d'ondes;* et les coordonnées des éléments de contact des ondes de cette famille sont données par les formules (57).

9. Nous appelons *caractéristique* toute solution du *système canonique* (44), (45), qui vérifie aussi la condition (22). Une caractéristique est constituée par une courbe (C), datée (*cf.* n° **2**), à chaque point de laquelle est associé un élément de contact. Nous appelons *trajectoire* toute courbe datée qui sert de support à une caractéristique.

Les trajectoires satisfont au système différentiel qu'on déduirait du système (37), (38), (39), (40) en éliminant les q_i et les λ_h. On peut facilement éliminer les q_i, ce qui donne les équations

$$d\frac{\partial f}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial f}{\partial\, dx_i}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{60}$$

Ce système caractérise les trajectoires, parmi toutes les solutions du système (5), (6), considéré au n° 2.

Remarquons que la détermination du mouvement de propagation qui est défini par une famille donnée de multiplicités d'ondes équivaut à la détermination des caractéristiques. Celle-ci entraîne par suite la connaissance de toutes les familles d'ondes; ce fait équivaut à la méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles (56) au moyen de ses caractéristiques.

Toute caractéristique intervient dans la construction d'une infinité de familles d'ondes; car il suffit pour cela que l'un de ses éléments de contact fasse partie de l'onde, à l'instant correspondant.

Inversement toute famille d'ondes fournit, par l'intégration du système

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial x_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{61}$$

[où $\overline{G}$ représente la fonction (52)], une famille de trajectoires auxquelles les ondes de la famille sont dites *transversales*. Les formules (57) achèvent de définir la famille des caractéristiques correspondantes, c'est-à-dire qui serviraient à la génération de cette famille d'ondes. Les valeurs de $x_1, \ldots, x_n, t$, pour chacune de ces trajectoires, doivent, de plus, satisfaire à l'équation (50), qui est, à cause de l'équation (56), compatible avec le système (61).

Signalons enfin l'équation

$$dt - \sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i = 0, \tag{62}$$

combinaison des équations (44), quand on tient compte de l'équation (22), à laquelle, par conséquent, satisfont les caractéristiques.

II. — Le problème de Mayer.

10. On retrouve les trajectoires et les caractéristiques de la propagation quand *on cherche les courbes* (C) — [*cf.* n° **2**] — *le long desquelles un ébranlement se propage le plus rapidement.* C'est ce problème de minimum, qui n'est autre que celui qu'on désigne, dans le Calcul des variations, sous le nombre de *problème de Mayer* [1], que nous allons étudier. Précisons-en d'abord l'énoncé.

Nous considérons une solution (7), (8) du système de Monge (5), (6), et nous la faisons varier sans qu'elle cesse d'être une solution de ce système, de manière que la courbe (C) représentée par les équations (7) passe toujours par les deux mêmes points M_0 et M_1, de coordonnées $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$; nous pouvons supposer que ces points correspondent, sur les différentes courbes ainsi obtenues, à des valeurs fixes, u_0 et u_1, du paramètre u. Nous supposons, de plus, que la fonction (8) garde, dans cette variation, une valeur constante t_0, au point M_0 ; et que, de M_0 en M_1, t aille en croissant. Au contraire la valeur t_1, qui correspond au point M_1 variera en général. La différence $(t_1 - t_0)$ représente le temps que met un ébranlement produit en M_0 au temps t_0, pour se propager, le long de la courbe (C), jusqu'en M_1. Cette durée sera minima en même temps que t_1 : et ce sont les conditions de ce minimum qu'il s'agit de chercher.

Nous chercherons d'abord les conditions qui expriment que la variation de t_1 est nulle, dans les conditions indiquées.

---

[1] *Cf.* HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des variations*, t. I, p. 223.

Nous poserons, à cet effet,

$$(63)\qquad \frac{dt}{du}=\omega,$$

$$(64)\qquad \frac{dx_i}{du}=\omega p_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que les variables $p_1, \ldots, p_n$; $x_1, \ldots, x_n$; t sont liées par des équations de condition

$$(67)\qquad F\,(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,p_1, \ldots, p_n)=1,$$

$$(68)\qquad F_h(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,p_1, \ldots, p_n)=0 \qquad (h=1, 2, \ldots, \alpha).$$

Ces équations représentent, en $p_1, \ldots, p_n$, la multiplicité d'onde — [*cf.* n° **1**, équations (3) et (4)] —. Et, si nous introduisons l'équation qui en représente le support tangentiel — [*cf.* n° **4**, équation (21) ou (22)] —, nous pouvons les remplacer par des équations paramétriques — [équations (23) ou (24) du n° **5**]. Posons, pour plus de clarté,

$$(69)\qquad G'\equiv G(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,\gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

et ces équations paramétriques s'écriront

$$(70)\qquad p_i=\frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Comme les seconds membres sont homogènes, de degré zéro, en $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, on peut considérer ces paramètres comme complètement indépendants[1].

Nous avons donc, en définitive, des fonctions de u : t ; $x_1, \ldots, x_n$; ω ; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, liées par les équations différentielles

$$(71)\qquad \frac{dt}{du}=\omega,$$

$$(72)\qquad \frac{dx_i}{du}=\omega\frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

---

(1) Cf. *Bulletin de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 79-80. Remarquons que ($p_1, \ldots, p_n$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$) sont les coordonnées *homogènes* d'un élément de contact de la multiplicité d'onde, rapportée à son origine ($x_1, \ldots, x_n$). L'expression générale des γ_i serait donnée par les seconds membres des formules (99); où l'on considérerait $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ comme des fonctions de u, arbitrairement choisies. Dans le calcul qui suit, on doit supposer qu'on a fait un choix particulier, *quelconque*, pour ces fonctions auxiliaires.

Leurs variations sont, par suite, définies par le système linéaire

$$(73)\qquad \frac{d\,\delta t}{du} = \delta\omega,$$

$$(74)\qquad \frac{d\,\delta x_i}{du} = \omega\frac{\partial^2 G'}{\partial y_i\,\partial t}\delta t + \omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial y_i\,\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial G'}{\partial y_i}\delta\omega + \omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial y_i\,\partial y_j}\delta y_j.$$

Pour intégrer ce système, nous considérons le système homogène (1)

$$(75)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_0}{du} = 0, \\ \dfrac{du_i}{du} = \omega\dfrac{\partial^2 G'}{\partial y_i\,\partial t}u_0 + \omega\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial y_i\,\partial x_j}u_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

et, introduisant $(n+1)$ solutions, indépendantes, de ce système,

$$(76)\qquad u_k = u_{l,k} \qquad (k, l = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

nous posons :

$$(77)\qquad \delta t = \sum_{l=0}^{n} y_l u_{l,0},$$

$$(78)\qquad \delta x_i = \sum_{l=0}^{n} y_l u_{l,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous obtenons ainsi le système linéaire simplifié,

$$(79)\qquad \sum_{l=0}^{n} u_{l,0}\frac{dy_l}{du} = \delta\omega,$$

$$(80)\qquad \sum_{l=0}^{n} u_{l,i}\frac{dy_l}{du} = \frac{\partial G'}{\partial y_i}\delta\omega + \omega\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G'}{\partial y_i\,\partial y_j}\delta y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

---

(1) L'existence des intégrales de ce système suppose seulement la continuité des fonctions $t, x_1, \ldots, x_n$, de u, et de leurs dérivées $\omega, p_1, \ldots, p_n$; ainsi que la continuité des dérivées de la fonction G qui interviennent. Car cela suffit pour que les conditions de Lipschitz soient vérifiées par les seconds membres.

On ne suppose donc pas que les fonctions t et x aient des dérivées secondes; et le raisonnement ne prête pas prise, par suite, à *l'objection classique de Du Bois Reymond.*

Les formules (97) montrent, au contraire, que, *pour les extrémales,* ces dérivées secondes existent nécessairement.

que l'on résout en employant les multiplicateurs — (*système adjoint* des $u_{l,k}$) — définis par les relations

$$(81)\qquad \sum_{l=0}^{n} u_{l,k} v_{l,m} = \varepsilon_{k,m} \qquad (k, m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où $\varepsilon_{k,m}$ est égal à 1 ou à 0, suivant que $k = m$ ou $k \neq m$.

On obtient donc le système auxiliaire

$$(82)\qquad \frac{dy_l}{du} = \mathrm{Y}_l \equiv \left(v_{l,0} + \sum_{i=1}^{n} v_{l,i} \frac{\partial \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i} \right) \delta\omega + \omega \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_{l,i} \frac{\partial^2 \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i \, \partial \gamma_j} \delta \gamma_j.$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

De plus, d'après les formules (77) et (78), où le déterminant des $u_{l,k}$ n'est pas nul, la condition nécessaire et suffisante pour que $\delta t, \delta x_1, \ldots, \delta x_n$ s'annulent pour $u = u_0$ est qu'il en soit de même des y_l. On a donc, pour les variations $\delta t, \delta x_1, \ldots, \delta x_n$, les formules

$$(83)\qquad \begin{cases} \delta t = \displaystyle\sum_{l=0}^{n} u_{l,0} \int_{u_0}^{u} \mathrm{Y}_l \, du, \\ \delta x_i = \displaystyle\sum_{l=0}^{n} u_{l,i} \int_{u_0}^{u} \mathrm{Y}_l \, du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

qui deviennent, pour $u = u_1$, en désignant les valeurs que prennent alors les fonctions de u par un indice (1),

$$(84)\qquad \begin{cases} (\delta t)^{(1)} = \displaystyle\int_{u_0}^{u_1} \sum_{l=0}^{n} u_{l,0}^{(1)} \mathrm{Y}_l \, du, \\ (\delta x_i)^{(1)} = \displaystyle\int_{u_0}^{u_1} \sum_{l=0}^{n} u_{l,i}^{(1)} \mathrm{Y}_l \, du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

11. Nous avons donc à écrire que la première de ces intégrales est nulle, pour tout choix des fonctions de u : $\delta\omega, \delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$, pour lequel les n dernières intégrales s'annulent. Comme les quantités placées devant du, sous les signes d'intégration, sont des formes linéaires en $\delta\omega, \delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$ dont les coefficients sont des fonctions connues de u, cela s'exprime [1] par une identité — (en $u, \delta\omega, \delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_n$) —, à coefficients constants $c_0, c_1, \ldots, c_n$, où c_0 ne doit pas être nul,

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{l=0}^{n} u_{l,k}^{(1)} \mathrm{Y}_l = 0. \tag{85}$$

Si l'on pose

$$\sum_{k=0}^{n} c_k u_{l,k}^{(1)} = c'_l \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{86}$$

$$\sum_{l=0}^{n} c'_l v_{l,m} = v_l \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{87}$$

cette identité se décompose en

$$v_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i} = 0, \tag{88}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial^2 \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i \, \partial \gamma_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{89}$$

De plus, les constantes c_k se calculent en fonction des constantes c'_l, en employant pour multiplicateurs les valeurs $v_{l,m}^{(1)}$ que prennent les fonctions $v_{l,m}$ de u, pour $u = u_1$. Cela donne, en tenant compte des formules (89),

$$c_k = \sum_{l=0}^{n} c'_l v_{l,k}^{(1)} = v_k^{(1)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{90}$$

L'hypothèse $c_0 \neq 0$ se traduit donc par $v_0^{(1)} \neq 0$.

Enfin les formules (89) expriment que $v_0, v_1, \ldots, v_n$ constituent une solution du *système linéaire adjoint* au système (75), qui est

$$\frac{dv_0}{du} + \omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i \, \partial t} v_i = 0, \tag{91}$$

$$\frac{dv_j}{du} + \omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{G}'}{\partial \gamma_i \, \partial x_j} v_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{92}$$

---

[1] Cf. *Bull. de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 120.

Nous obtenons donc pour condition que *ce système adjoint doit admettre une* (¹) *solution qui satisfasse aux équations* (88), (89), *et telle que la valeur de* v_0 *ne s'annule pas pour* $u = u_1$.

12. Eu égard à l'équation (71), le système (91), (92) s'écrit

$$\frac{dv_0}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial t} v_i = 0 \tag{93}$$

$$\frac{dv_j}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial x_j} v_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{94}$$

Quant aux équations (88) et (89), elles expriment que le plan qui a pour équation, dans le système de coordonnées d'origine $(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} v_i X_i + v_0 = 0 \tag{95}$$

est tangent à la multiplicité d'onde au point $(p_1, \ldots, p_n)$. Car, à cause des équations (70), l'équation (88) exprime que ce plan passe par ce point, et les équations (89) expriment que tout déplacement de ce point sur la multiplicité d'onde est parallèle à ce plan.

Au point de vue des inconnues auxiliaires $v_0, v_1, \ldots, v_n$, ces équations peuvent donc se remplacer par les suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i p_i + v_0 = 0 \qquad (v_0^{(1)} \neq 0), \tag{96}$$

$$p_i = \frac{\partial G''}{\partial v_i} \qquad [G'' \equiv G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid v_1, \ldots, v_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{97}$$

On peut alors se débarrasser des inconnues auxiliaires γ_i; car, en comparant (70) et (97), on a les équations

$$\frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial G''}{\partial v_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{98}$$

(¹) Il peut arriver qu'il en admette une infinité, dès qu'il en admet une. C'est le cas où l'équation aux dérivées partielles (56) admet moins de ∞^{2n-1} caractéristiques. Cf. *Bull. de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 110.

qu'on peut considérer comme définissant les v_i comme fonctions des γ_i, de $t, x_1, \ldots, x_n$, et de $(\alpha+1)$ variables auxiliaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, toutes ces variables étant considérées comme indépendantes. Car la solution générale des équations (97) serait

$$(99) \qquad v_i = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial p_i} + \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et il n'y aurait qu'à y remplacer les p_i par les valeurs (70) pour avoir les fonctions en question ([1]).

Nous pouvons donc différentier les équations (98) dans cette hypothèse, par rapport aux variables $t, x_1, \ldots, x_n$, et il viendra

$$(100) \qquad \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial t} = \frac{\partial^2 G''}{\partial v_i \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 G''}{\partial v_i \partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(101) \qquad \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 G''}{\partial v_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 G''}{\partial v_i \partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on porte ces expressions dans les équations (93) et (94), et si l'on tient compte des identités d'Euler, relatives aux dérivées premières et secondes de G'', il reste simplement les équations

$$(102) \qquad \frac{dv_0}{dt} + \frac{\partial G''}{\partial t} = 0,$$

$$(103) \qquad \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial G''}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

auxquelles il faut adjoindre les équations (96), (97), et les équations

$$(104) \qquad \frac{dx_i}{dt} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui résultent de (63) et (64).

13. *Les extrémales ainsi définies ne sont autre chose que les tra-*

([1]) Cf. *Bull. de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 107.

Nous avons ici, en plus, le paramètre λ_0, parce que nous opérons sur des coordonnées homogènes, $v_0, v_1, \ldots, v_n$, pour l'élément de contact général de la multiplicité d'onde, au point $(p_1, \ldots, p_n)$, qu'il s'agit de représenter.

jectoires de la propagation; et les inconnues auxiliaires $v_0, v_1, \ldots, v_n$ correspondent à l'introduction des éléments de contact qui font de chaque trajectoire le support d'une *caractéristique*. Il suffit, pour le constater, de poser

$$(105) \qquad v_i = -q_i v_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela supposera que v_0 ne s'annule en aucun point de l'arc de courbe (C) considéré, hypothèse qui s'était introduite déjà pour l'extrémité de l'arc. Géométriquement, elle signifie que le plan de l'élément de contact de la multiplicité d'onde $(p_1, \ldots, p_n; v_1, \ldots, v_n)$ ne doit pas passer par l'origine, c'est-à-dire ne doit pas contenir le rayon vecteur du point $(p_1, \ldots, p_n)$. Or ce rayon vecteur, d'après les équations (104), est la tangente à la courbe (C). *La condition que nous nous imposons est donc que l'élément de contact, associé, par la mise en équations précédente, à chaque point de la courbe datée* (C), *ne doit jamais appartenir à cette courbe.*

En ayant égard aux degrés d'homogénéité, on a, par le changement des variables (105),

$$(106) \qquad \frac{\partial G''}{\partial v_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial G''}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial G}{\partial t}, \qquad \frac{\partial G''}{\partial x_i} = -v_0 \frac{\partial G}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

On a, d'autre part,

$$(107) \qquad \frac{dv_i}{dt} = -v_0 \frac{dq_i}{dt} - q_i \frac{dv_0}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et, par suite,

$$(108) \qquad v_0 \frac{\partial G}{\partial x_i} = -v_0 \frac{dq_i}{dt} + v_0 q_i \frac{\partial G}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Et, par conséquent, sous l'hypothèse faite, on obtient les équations

$$(109) \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} - q_i \frac{\partial G}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui remplacent les équations (102) et (103). Quant aux équations (96) et (97), elles deviennent, à cause de (104),

$$(110) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$dt = \sum_{i=1}^{n} q_i \, dx_i. \tag{111}$$

Par comparaison de (110) et (111), on retrouverait enfin l'équation (22), à savoir

$$G(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1. \tag{112}$$

Nous retrouvons bien ainsi toutes les équations des caractéristiques [*cf.* n° **9**].

On peut remarquer que, $q_1, \ldots, q_n$ étant supposés calculés, l'inconnue v_0 est donnée par une quadrature, au moyen de

$$\frac{dv_0}{dt} = v_0 \frac{\partial G}{\partial t}, \tag{113}$$

et que les v_i sont alors donnés par les équations (105). Cette inconnue v_0 correspond à la quantité m qui s'était introduite aussi dans la théorie de la propagation [*cf.* n° **5**].

Sa valeur initiale reste arbitraire, et la forme linéaire de l'équation (113) montre qu'elle ne s'annulera certainement pas, tant que ne se produira pas la circonstance singulière que $\frac{\partial G}{\partial t}$ devienne infini. Or cette singularité est exclue déjà, implicitement, dans les considérations des n^{os} 6 et 7.

Observons enfin que si G était seulement *positivement* homogène, ce qu'on peut, dans certains cas, être obligé de supposer, nos transformations resteraient légitimes, pourvu que v_0 fût négatif. Or cela peut toujours se supposer, puisque nous lui imposons la condition de ne pas s'annuler : et que, d'autre part, $v_0, v_1, \ldots, v_n$ ne sont définis, dans tout ce qui précède, que par des équations homogènes, et, par conséquent, à un facteur constant près.

14. *Il reste à examiner si les trajectoires correspondent effectivement à un minimum dans la durée de la propagation* [*cf.* n° **10**]. Soit donc (T) une de ces trajectoires : M_0 et M_1 deux de ses points, datés t_0 et θ_1 ($\theta_1 > t_0$); et nous désignerons par $\overline{T}$ l'arc de cette trajectoire, compris entre M_0 et M_1, considéré indépendamment des valeurs de t associées à chaque point de la trajectoire, mais supposé parcouru de M_0 en M_1.

Soit, d'autre part, (C) une autre courbe datée, de l'espèce définie au n° **2**, qui passe aussi en M_0 et M_1, et soit datée t_0 en M_0. Elle sera datée t_1 en M_1 ; et il s'agira d'étudier le signe de $(t_1 - \theta_1)$ pour des solutions (C) du système de Monge (5), (6) qui soient suffisamment voisines de la solution (T). Nous représenterons encore par $\overline{C}$ l'arc géométrique M_0M_1 de (C), considéré indépendamment de toute date pour ses points, mais supposé parcouru de M_0 en M_1.

La date t_1 peut être considérée comme définie de la manière suivante. On prend l'équation différentielle (5), c'est-à-dire

$$dt = F(t \mid x, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{114}$$

et *on l'intègre le long de* $\overline{C}$, en prenant pour valeur initiale t_0. La valeur finale que prend cette intégrale en M_1 est t_1. Le mot d'intégration le long de $\overline{C}$ signifie qu'on remplace, dans l'équation (114), $x_1, \ldots, x_n$ et leurs différentielles au moyen des équations (7), c'est-à-dire

$$x_i = \psi_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{115}$$

qui définissent cet arc $\overline{C}$, quand u varie en croissant de u_0 à u_1. Comme du est ainsi positif, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dt}{du} = F\left[t \mid \psi_i(u), \ldots, \psi_n(u) \mid \frac{d\psi_1(u)}{du}, \ldots, \frac{d\psi_n(u)}{du}\right], \tag{116}$$

qu'on aurait à intégrer, avec la condition initiale $t = t_0$ pour $u = u_0$.

De même, θ_1 s'obtiendrait en intégrant l'équation (114) le long de $\overline{T}$, avec la même valeur initiale ; car (T) n'est qu'une courbe datée (C) particulière.

On peut, de plus, substituer à l'équation (114) une infinité d'autres équations qui donneront, pour le calcul de t_1 et de θ_1, les mêmes résultats. Car les courbes datées considérées satisfont aux équations (6), à savoir :

$$F_h(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{117}$$

On pourra donc utiliser, au lieu de (114), et de la même manière, toute équation

$$dt = f(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{118}$$

où, comme plus haut, — [par exemple, n° 6, équation (41)] —, f désigne une combinaison linéaire de la forme

$$f = F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h, \tag{119}$$

les λ_h étant ici des fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_n$.

15. Nous allons transformer ce résultat de manière à faire intervenir les multiplicités d'onde. Soit M le point de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; et $\Omega_{x,t}$ la multiplicité d'onde qui a, à l'instant t, ce point pour origine. Supposons M sur $\overline{C}$; et appelons P le point où la direction positive de la tangente, menée à $\overline{C}$ en M, perce $\Omega_{x,t}$. Alors les équations (114) et (117) expriment que, si M est daté t sur (C), le point P a pour coordonnées, quand on prend M pour origine, les dérivées

$$\frac{dx_i}{dt} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (Cf. \text{ n}^{\text{os}}\ 1 \text{ et } 2.) \tag{120}$$

Si l'on pose alors

$$q_i = \frac{\partial f}{d\,\partial x_i} = \frac{\partial f(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{121}$$

les quantités $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ sont, dans ce même système de coordonnées, les coordonnées d'un élément de contact (E) de $\Omega_{x,t}$, associé à ce point P; ces coordonnées étant assujetties à vérifier la relation de condition (1) suivante, qui équivaut, en effet, à (118),

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 1. \tag{122}$$

Avec ces notations, l'équation (118) peut se mettre sous la forme

$$dt = \sum_{i=1}^{n} q_i\, dx_i. \tag{123}$$

---

(1) Cf. *Bull. de la Soc math.*, t. XL, 1912, p. 78.

Pour plus de netteté, nous désignerons par

$$q_i = \mathrm{K}_i(t, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{124}$$

les fonctions qu'on obtient en remplaçant, dans les formules (121), les x_i et les dx_i au moyen des formules (115). La date t, relative à la courbe (C), s'obtiendrait donc par l'intégration de l'équation

$$\frac{dt}{du} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}_i(t, u) \frac{d\psi_i(u)}{du} \equiv \mathrm{K}(t, u), \tag{125}$$

avec la valeur initiale $t = t_0$, pour $u = u_0$.

16. Quand on applique ces résultats généraux à une trajectoire, il se présente deux particularités remarquables.

D'abord, cette trajectoire sert de support à au moins une caractéristique, qui s'obtient en adjoignant à chaque point M de la trajectoire un élément de contact, dont les coefficients de direction $q_1, \ldots, q_n$ satisfont aux équations (44) et (22), que nous récrivons :

$$p_i = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{126}$$

$$\mathrm{G}(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n) = 1. \tag{127}$$

Elles entraînent l'équation (122). Or l'équation (127) est l'équation tangentielle de $\Omega_{x,t}$; et ces équations (126) donnent le point de contact d'un plan tangent quelconque de cette multiplicité d'onde. Nous avons donc ainsi un élément de contact (E) particulier, qui se trouve associé au point P : il est parallèle à l'un de ceux que la trajectoire est susceptible de transporter, dans le mode de propagation considéré. Inversement, nous avons l'interprétation géométrique des équations (44) des caractéristiques : elles expriment la relation que nous venons de définir entre la direction de la tangente à la trajectoire et celle de l'élément de contact transporté, et qui porte le nom de *transversalité* [*cf.* n° **9**].

Il résulte de plus de la condition auxiliaire — ($v_0 \neq 0$) —, que nous nous sommes imposée au n° **13**, le fait que l'élément de contact transversal à la trajectoire, qui lui est associé dans une solution déterminée du système canonique des caractéristiques, ne passe jamais par la tangente à la trajectoire. On peut donc, et c'est la seconde particularité annoncée, introduire une famille d'ondes, transversales à la trajectoire (T) considérée — [*cf.* n° 9] —, qui rempliront un espace à n dimensions ($\mathcal{E}$), dans lequel l'arc $\overline{\mathrm{T}}$ sera contenu tout entier, de telle manière que par chaque point de cet espace ($\mathcal{E}$) passe une onde de cette famille, et une seule ([1]). Et nous supposerons, dorénavant, que l'arc $\overline{\mathrm{C}}$ lui-même est contenu dans cet espace ($\mathcal{E}$).

Reprenons donc les notations du n° 8, et soit

$$(128) \qquad t = \mathrm{V}(x_1, \ldots, x_n)$$

l'équation générale de cette famille d'ondes. A chaque point M de l'espace ($\mathcal{E}$), elle fait correspondre une valeur de t et les quantités

$$(129) \qquad q_i = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui satisfont à l'équation (127). Ces quantités définissent une direction d'élément de contact, qui est transversale à la direction correspondante, dont les coefficients sont fournis par les formules (126). On peut donc supposer les fonctions λ_h de $x_1, \ldots, x_n$, qui figurent dans la formule (119), choisies de telle manière que les formules (121), employées pour la courbe (C), redonnent inversement les valeurs (129), quand on y remplace t par la valeur (128), et $p_1, \ldots, p_n$ par les fonctions de $x_1, \ldots, x_n$,

$$(130) \qquad p_i = \varpi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

obtenues en portant dans les formules (126) les valeurs (128) et (129). Nous ferons, dorénavant, cette hypothèse sur le choix des fonctions λ_h.

Relativement à l'arc $\overline{\mathrm{T}}$ lui-même, pour obtenir la date θ_1 (à

([1]) Bien entendu, cela constitue néanmoins une hypothèse nouvelle sur l'arc $\overline{\mathrm{T}}$, puisque cela revient à supposer vérifiée la *condition de Jacobi*.
Cf. Hadamard, *Leçons sur le Calcul des variations*, t. I, p. 360.

laquelle arrive en M_1 l'ébranlement parti de M_0 à l'instant t_0, quand il se propage le long de $\overline{T}$), nous aurons, d'après les résultats du n° **15** à intégrer, le long de $\overline{T}$, l'équation (123), où nous pouvons supposer les q_i remplacés par les expressions (129).

Mais le second membre étant alors la différentielle totale dV, on obtiendra aussi θ, en faisant cette intégration le long de C. Cette remarque essentielle est la forme sous laquelle se présente ici l'*Unbhängigkeit Satz*, qu'Hilbert a mis en évidence dans la méthode, devenue classique, de Weierstrass.

17. Nous avons ainsi introduit, en chaque point M de l'arc $\overline{C}$, deux valeurs de t, l'intégrale de l'équation (125), et la valeur de la fonction V. Nous désignerons, dorénavant, cette dernière valeur par θ. Nous avons, par suite, deux multiplicités d'onde, ayant ce point pour origine, à considérer : $\Omega_{x,t}$ et $\Omega_{x,\theta}$. La direction positive de la tangente à $\overline{C}$ en ce point perce $\Omega_{x,t}$ au point P, dont les coordonnées sont données par les formules (120) ; ou, plus explicitement, par les formules

$$(131) \qquad p_i = \frac{d\psi_i(u)}{du} \frac{1}{K(t, u)} \equiv H_i(t, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Et, quand on associe à ces valeurs les quantités (124), c'est-à-dire

$$(132) \qquad q_i = K_i(t, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un élément de contact (E) de $\Omega_{x,t}$.

Mais ces formules sont absolument indépendantes de ce fait que la valeur de t est particulière. En laissant t absolument arbitraire, elles donnent toujours un élément de contact de $\Omega_{x,t}$, dont le point est sur la direction positive de la tangente à $\overline{C}$. Car les coordonnées d'un tel point sont *positivement* proportionnelles aux $\frac{d\psi_i}{du}$, qui interviennent seuls dans les formules (121) ; et, par suite, les fonctions (131) et (132) vérifient identiquement les équations (121). Comme, de plus, elles satisfont aussi à l'équation (122) identiquement, elles sont bien les coordonnées d'un élément de contact de $\Omega_{x,t}$.

En particulier, les quantités

$$(133)\qquad p_i = \mathrm{H}_i(\theta, u), \qquad q_i = \mathrm{K}_i(\theta, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont les coordonnées d'un élément de contact (H) de $\Omega_{x,0}$.

D'autre part, les formules (130) et (129) donnent, quand on y remplace les x_i par les fonctions $\psi_i(u)$, des fonctions de u et que nous désignerons par

$$(134)\qquad p'_i = \mathrm{H}'_i(u), \qquad q'_i = \mathrm{K}'_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et qui, d'après les explications du n° 16, sont les coordonnées d'un autre élément de contact (H′) de $\Omega_{x,0}$. Enfin, avec ces dernières notations, θ satisfait à l'équation différentielle

$$(135)\qquad \frac{d\theta}{du} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}'_i(u)\frac{d\psi_i(u)}{du} = \mathrm{K}'(u).$$

18. Ce sont les équations (125) et (135) qui vont nous permettre de comparer t_1 et θ_1. Mais quelques remarques préliminaires sont indispensables.

Nous supposons que les courbes datées (C) et (T) ont un voisinage d'ordre *un*. Donc, à chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$, ou M, de C, et à la date t qui lui est associée, correspond un point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ou M′, de T, et une date θ, tels que les différences

$$(136)\qquad x_i - \xi_i, \quad t - \theta, \quad \frac{dx_i}{dt} - \frac{d\xi_i}{d\theta} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

soient inférieures en valeur absolue à un nombre positif donné ε. A ces points, M et M′, les formules (120) et (121) font correspondre respectivement l'élément de contact (E) et (1) un élément de contact (E′), dont les coordonnées différeront d'aussi peu que l'on veut, dès que ε sera convenablement choisi.

Mais il résulte des explications du n° 16 que l'élément de contact (E′) est donné aussi par les formules (130) et (129), quand on y remplace les x_i par les ξ_i. Et il suit de là que les coordonnées des éléments (E′) et (H′) sont aussi voisines qu'on voudra.

---

(1) En changeant x_i en ξ_i, et t en θ_i.

Comme enfin (E) et (H) ont des coordonnées aussi voisines qu'on veut, dès que $|t-\theta|$ est suffisamment petit, nous concluons, en définitive, que *les éléments de contact* (H) et (H′), qui appartiennent tous deux à $\Omega_{x,0}$, *peuvent être supposés aussi voisins qu'on voudra.*

19. Ce point acquis, considérons la différence

$$K(\theta, u) - K'(u). \tag{137}$$

On peut l'écrire

$$K(\theta, u)\left[1-\sum_{i=1}^{n} K'_i(u)\,H_i(\theta, u)\right]. \tag{138}$$

Or le premier facteur est positif; car $\frac{dt}{du}$, qui est égal à $K(t, u)$, est positif le long de (C); et il en est de même, par suite, de $K(\theta, u)$, puisque θ est aussi voisin de t que l'on veut.

Quant à l'autre facteur, il s'écrit

$$1-\sum_{i=1}^{n} p_i q'_i, \tag{139}$$

en désignant, comme dans les formules (133) et (134) par $(p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n)$ et $(p'_1, \ldots, p'_n;\ q'_1, \ldots, q'_n)$ les coordonnées des deux éléments de contact (H) et (H′) de $\Omega_{x,0}$. Son signe est donc lié à la concavité (¹) des multiplicités d'onde $\Omega_{x,0}$, dans le voisinage des éléments (H); et, par conséquent, par raison de continuité, à celle des multiplicités d'onde $\Omega_{\xi,0}$, ayant pour origines les divers points M′ de $\overline{\mathrm{T}}$, dans le voisinage des éléments de contact (E′).

Si nous nous rappelons — [*cf.* n° **16**] — que ces éléments (E′) ont pour coordonnées les valeurs de $(p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n)$ fournies par une caractéristique ayant pour support la trajectoire considérée, nous pourrons énoncer le résultat suivant : *La différence* (137) *ne peut être, le long de* $\overline{\mathrm{C}}$, *que positive ou nulle, si, en chaque point de* $\overline{\mathrm{T}}$, *et à l'instant où l'ébranlement passe en ce point, la multiplicité d'onde ayant ce point pour origine est concave vers son origine dans*

(¹) Cf. *Bulletin de la Soc. math.*, t. XL, 1912, p. 92.

le voisinage de l'élément de contact qui a pour coordonnées les valeurs de ($p_1 = \frac{dx_1}{dt}, \ldots, p_n = \frac{dx_n}{dt}; q_1, \ldots, q_n$) *données par les équations de la caractéristique qui a fourni la trajectoire* (T).

Nous supposerons cette condition suffisante remplie.

Observons de plus que, la concavité ayant lieu, le facteur (141) ne peut s'annuler que si les éléments de contact (H) et (H′) correspondent au même point de $\Omega_{x,0}$. Or les points de ces éléments sont situés, l'un sur la direction positive de la tangente à $\overline{C}$, l'autre sur la direction à laquelle est transversale l'onde de la famille (128) qui passe au point de $\overline{C}$ considéré. Et il est impossible que ces deux directions coïncident en tous les points de $\overline{C}$; car, s'il en était ainsi, $\overline{C}$ serait l'une des trajectoires auxquelles les ondes de la famille (128) sont transversales — [*cf* n° **9** et n° **16**] —. Or cela est impossible, car, d'après les équations (61) qui définissent cette famille de trajectoires, il en passe une et une seule par chaque point de l'espace ($\mathcal{E}$), et, par le point M_0, d'où part $\overline{C}$, passe déjà la trajectoire $\overline{T}$, qui appartient à la famille considérée, et avec laquelle, par hypothèse, $\overline{C}$ ne se confond pas.

Donc, *la différence* (139) *n'est pas nulle en tous les points de* $\overline{C}$.

20. Ceci posé, considérons la différence

$$\Delta = t - \theta. \tag{140}$$

C'est, d'après les notations adoptées au n° 17, une fonction de u définie en tous les points de $\overline{C}$, c'est-à-dire dans l'intervalle de u_0 à u_1. Elle admet, dans tout cet intervalle, une dérivée continue [1], donnée par la formule

$$\frac{d\Delta}{du} = K(t, u) - K'(u), \tag{141}$$

qui résulte immédiatement des équations (125) et (135). Enfin, elle

---

[1] Cette continuité suppose, d'après la définition de la fonction K, que la tangente à $\overline{C}$ varie d'une manière continue. La nature des raisonnements qui suivent permettrait d'admettre des discontinuités consistant en variations brusques de cette direction, en des points isolés.

s'annule pour $u = u_0$, puisque alors t et θ ont, tous deux, la valeur t_0.

Écrivons la formule (143) sous la forme

$$\frac{d\Delta}{du} = [K(t, u) - K(\theta, u)] + [K(\theta, u) - K'(u)], \tag{142}$$

et observons que, d'après l'équation (125) qui définit $K(t, u)$, cette fonction possède une dérivée partielle par rapport à t, à condition seulement de supposer que les fonctions F et F_h, — [données au n° **1**] —, aient des dérivées secondes du type $\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial t}$. On peut donc poser

$$K(t, u) - K(\theta, u) = (t - \theta)A, \tag{143}$$

A étant une fonction de u, qui sera continue dans tout l'intervalle (u_0, u_1), que $(t - \theta)$ s'annule ou non. En effet, tant que $(t - \theta)$ ne s'annule pas, la continuité de A résulte de celle de la fonction $K(t, u)$, et des fonctions t et θ de u. Si $(t - \theta)$ s'annule, elle résulte de l'expression de A

$$A = \frac{\partial K(\bar\theta, u)}{\partial \bar\theta}, \tag{144}$$

que fournit le théorème des accroissements finis, et dans laquelle $\bar\theta$ est compris entre t et θ, pourvu qu'on suppose la continuité des dérivées de F et F_h dont nous venons de supposer l'existence.

Nous écrirons donc l'équation (142) sous la forme

$$\frac{d\Delta}{du} = A\Delta + B, \tag{145}$$

en désignant encore par B la différence (137), qui est une fonction de u, continue aussi, à cause des hypothèses précédentes. De plus, d'après le n° **19**, B est positive ou nulle, et n'est pas constamment nulle.

De cette équation, en tenant compte de ce que Δ s'annule pour pour $u = u_0$, on tire, pour Δ, l'expression

$$\Delta = e^{\int_{u_0}^{u} A\,du} \int_{u_0}^{u} B e^{-\int_{u_0}^{u} A\,du} du, \tag{146}$$

qui montre que Δ est positif, pour $u_0 < u \leqq u_1$. En particulier, on a, pour $u = u_1$, la conséquence

$$(147) \qquad t_1 - \theta_1 > 0.$$

Il est donc démontré que *sous l'hypothèse de la concavité des multiplicités d'onde*, précisée au n° **19**, *la trajectoire* $\overline{\mathrm{T}}$ *correspond à un minimum dans la durée de la propagation.*