JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES SIRE

Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini et à croissance régulière par rapport à l'une des variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 9 (1913), p. 1-37.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1913_6_9__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini et à croissance régulière par rapport à l'une des variables;

PAR JULES SIRE.

Introduction.

Le présent travail, qui est un premier complément à notre Thèse parue dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXI, p. 1-91, a pour objet la résolution du problème suivant :

Étant donnée une fonction entière en x et y, $F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ ordonnée suivant les puissances entières de y et d'ordre apparent total fini λ, étudier la variation de la régularité de la croissance de $F(x, y)$ considérée comme une fonction entière en y, quand le point x se déplace à distance finie dans son plan, en supposant que la fonction entière en y, $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière, c_n désignant le coefficient maximum de $a_n(x)$.

Nous sommes parvenu au théorème suivant :

Si $F(x, y)$ *satisfait aux conditions énoncées*, $F(x, y)$ *sera une fonction entière en* y *d'ordre apparent* μ *et à croissance régulière pour tous les points du plan des* x *situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel pouvant avoir la puissance du continu, pour lesquels* $F(x, y)$ *est ou bien une fonction entière en* y *d'ordre apparent* μ *et à croissance irrégulière, ou bien une fonction entière en* y *d'ordre apparent inférieur à* μ.

Nous rappelons qu'un ensemble ponctuel est un ensemble de points dont la portion appartenant à une aire finie quelconque peut être renfermée dans un nombre fini ou bien dans une infinité dénombrable de circonférences dont la somme totale des longueurs est aussi petite que l'on veut.

La méthode que nous avons utilisée pour résoudre la question posée plus haut repose sur les propositions suivantes :

1° Soient $f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{s_n} y^{s_n}$, $f_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{t_n} y^{t_n}$ deux fonctions entières d'ordre apparent respectif μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \geqq \mu_2$), telles que les nombres de la suite des exposants s_n soient distincts des nombres de la suite des exposants t_n ; si la fonction $f_1(y)$ est à croissance régulière il en sera de même de la fonction $f(y) = f_1(y) + f_2(y)$.

2° Si $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière, on peut mettre cette fonction sous la forme

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n}$ étant une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière telle que $\lim_{n=\infty} -\frac{\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}$ et en outre telle que les exposants des diverses puissances de y vérifient, quel que soit l'indice n, l'inégalité

$$q_n > e^{n^2}$$

et $f_2(y)$ étant la somme des termes de $f(y)$ qui n'entrent pas dans $f_1(y)$.

3° Si

$$P_{q_1}(x),\quad P_{q_2}(x),\quad \ldots,\quad P_{q_n}(x),\quad \ldots$$
$$[P_{q_n}(x) = (x - a_{q_n,1})(x - a_{q_n,2})\ldots(x - a_{q_n,\varphi(q_n)})]$$

est une suite de polynomes satisfaisant aux conditions suivantes : a) quel que soit q_n, on a

$$q_n > e^{n^2};$$

b) les points d'affixes $a_{q_n,i}$ appartiennent à un cercle C concentrique à l'origine et de rayon R; c) quelque soit q_n, le degré $\varphi(q_n)$ de $P_{q_n}(x)$ est inférieur à qq_n (q étant un nombre entier fixe), l'ensemble E des points $x = b$ pour lesquels on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k'$$

est un ensemble ponctuel, quel que soit $k' > 0$.

En utilisant d'une part des résultats obtenus au cours de nos recherches et d'autre part une transformation due à Legendre, nous avons obtenu la proposition suivante, qui est un complément au théorème Picard-Borel :

Soit $f(y)$ une fonction entière d'ordre apparent entier p et à croissance régulière, désignons par $r_n(x)$ le module du zéro de rang n de la fonction $x = f(y)$, l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ est déterminé pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un ensemble ponctuel E pouvant avoir la puissance du continu, pour lesquels cet ordre d'infinitude n'est plus déterminé.

Nous avons montré par un exemple qu'il existait des fonctions $f(y)$ pour lesquelles cet ensemble E avait effectivement la puissance du continu. Il n'y a donc pas analogie complète entre le théorème précédent et le théorème Picard-Borel.

Dans un prochain Mémoire nous étudierons les particularités que présente la fonction multiforme $y(x)$ définie par l'équation

$$F(x, y) = 0$$

aux points x pour lesquels $F(x, y)$ est une fonction entière en y à croissance irrégulière, $F(x, y)$ étant une fonction entière en x et y satisfaisant aux conditions énoncées au début de cette Introduction.

Fonctions entières d'une variable.

1. Soit $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ une fonction entière de la variable complexe y, d'ordre apparent μ; on sait que $\frac{1}{\mu}$ est la plus petite limite de la suite des nombres $\frac{-\log|c_n|}{n \log n}$. Désignons par

$$c_{q_1,\delta}, \quad c_{q_2,\delta}, \quad \ldots, \quad c_{q_n,\delta}, \quad \ldots,$$

les coefficients de $f(y)$ tels que les nombres correspondants $\frac{-\log|c_{q_n,\delta}|}{q_{n,\delta} \log q_{n,\delta}}$ appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu} - \delta, \frac{1}{\mu} + \delta\right)$. Si, quelque petit que soit le nombre positif δ, le rapport $\frac{\log q_{n+1,\delta}}{\log q_{n,\delta}}$ converge vers l'unité lorsque n augmente indéfiniment, la fonction $f(y)$ est dite *à croissance régulière.* Mais s'il existe une valeur δ_1 de δ pour laquelle on ait

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log q_{n+1,\delta_1}}{\log q_{n,\delta_1}} \geqq k \qquad (k > 1),$$

il en sera de même pour toutes les valeurs de $\delta < \delta_1$. On dit que, dans ce cas, la fonction $f(y)$ est à croissance irrégulière.

2. Désignons par r_n le module du zéro de rang n de $f(y)$, les zéros de $f(y)$ étant supposés rangés d'après la règle de Weierstrass. En supposant que μ est nombre non entier, M. E. Borel a démontré les deux propositions suivantes [1] :

1° Si l'ordre d'infinitude des r_n est déterminé, la fonction $f(y)$ est à croissance régulière.

2° Si la fonction $f(y)$ est à croissance régulière, l'ordre d'infinitude des r_n est déterminé.

---

[1] *Leçons sur les fonctions entières*, p. 108. Paris, Gauthier-Villars; 1900.

3. *Soient* $f_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{s_n} y^{s_n}$, $f_2(y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{t_n} y^{t_n}$ *deux fonctions entières d'ordre apparent respectif* μ_1 *et* μ_2 ($\mu_1 \geqq \mu_2$) *et telles que la suite des exposants* s_n *ait tous ses éléments distincts de la suite des exposants* t_n ; posons

$$f(y)=f_1(y)+f_2(y), \tag{1}$$

cette fonction $f(y)$ sera évidemment d'ordre apparent μ_1. Je dis que *si la fonction* $f_1(y)$ *est à croissance régulière, il en sera de même de la fonction* $f(y)$.

Désignons à cet effet par

$$c_{q_{1,\delta}},\quad c_{q_{2,\delta}},\quad \ldots,\quad c_{q_{n,\delta}},\quad \ldots \tag{2}$$

les coefficients de $f(y)$ tels que les nombres correspondants $\frac{-\log|c_{q_{n,\delta}}|}{q_{n,\delta}\log q_{n,\delta}}$ appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu}-\delta, \frac{1}{\mu}+\delta\right)$, et par

$$c_{p_{1,\delta}},\quad c_{p_{2,\delta}},\quad \ldots,\quad c_{p_{n,\delta}},\quad \ldots \tag{3}$$

les coefficients de $f_1(y)$ dont les nombres correspondants $\frac{-\log|c_{p_{n,\delta}}|}{p_{n,\delta}\log p_{n,\delta}}$ appartiennent également à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu}-\delta, \frac{1}{\mu}+\delta\right)$. La relation (1) nous montre, en tenant compte de l'hypothèse faite sur les s_n et les t_n, que les nombres de la suite (3) font partie de la suite (2), et cela quelque petit que soit le nombre positif δ. Il en résulte que la suite des indices $q_{n,\delta}$ contient tous les nombres de la suite des indices $p_{n,\delta}$ et cela pour toute valeur positive de δ. Comme par hypothèse le rapport $\frac{\log p_{n+1,\delta}}{\log p_{n,\delta}}$ converge vers l'unité lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre positif δ, il en sera de même du rapport $\frac{\log q_{n+1,\delta}}{\log q_{n,\delta}}$ en vertu d'un lemme établi dans notre Thèse (n° **17**). Donc la fonction $f(y)$ est à croissance régulière.

Remarque. — Supposons que μ_2 soit inférieur à μ_1 ; dans ce cas, si la fonction $f_1(y)$ est à croissance irrégulière, il en sera de même de la fonction $f(y)$, car à partir d'une certaine valeur δ_1 de δ, la suite (2) sera identique à la suite (3). Comme par hypothèse

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log p_{n+1,\delta_1}}{\log p_{n,\delta_1}} = k > 1,$$

on aura également

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log q_{n+1,\delta}}{\log q_{n,\delta}} = k,$$

et la fonction $f(y)$ sera à croissance irrégulière.

4. Soit $f(y) = \sum_{n=0} c_n y^n$ une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière; désignons par ω une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité et posons

$$\sum_{i=0}^{q-1} f(\omega^i y) = a_1(y), \qquad \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} f(\omega^i y) f(\omega^j y) = a_2(y) \qquad (i \neq j), \qquad \ldots,$$

$$f(y) f(\omega y) \ldots f(\omega^{q-1} y) = a_q(y);$$

si ε est un nombre positif arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un nombre positif R jouissant de la propriété suivante : il existe d'une part au moins un point ζ sur tout cercle concentrique à l'origine et de rayon $r > \mathrm{R}$ et d'autre part au moins une fonction $a_h(y)$, tels que l'on ait

$$|a_h(\zeta)| > e^{|\zeta|^{\mu-\varepsilon}},$$

l'indice h de la fonction $a_h(y)$ pouvant d'ailleurs varier avec r.

Désignons à cet effet par C l'ensemble des points du plan des y situés à distance finie tels que si ζ est un point de cet ensemble dont la distance à l'origine est égale à r, on ait

$$|f(\zeta)| = \mathrm{M}(r),$$

$\mathrm{M}(r)$ étant le module maximum de $f(y)$ pour $|y| = r$. Cet ensemble C est formé d'une ou plusieurs courbes continues. Désignons en outre par R le plus grand des trois nombres R_1, R_2, R_3 qui satisfont respectivement aux conditions suivantes :

1° On a

$$|f(\zeta)| > e^{|\zeta|^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

pour tout point ζ de C dès que $|\zeta| > R_1$;

2° On a

$$\frac{p}{|f(\zeta)|^{\frac{1}{q}}} < \lambda < 1$$

pour tout point ζ de C dès que $|\zeta| > R_2$, p désignant un nombre entier supérieur au nombre des produits partiels figurant dans $a_i(y)$ pour $i = 1, 2, \ldots, q$;

3° On a

$$e^{|\zeta|^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}}(1-\lambda) > e^{|\zeta|^{\mu-\varepsilon}}$$

pour tout point ζ de C dès que $|\zeta| > R_3$.

Ceci posé, soit ζ un point quelconque de C dont la distance à l'origine soit supérieure à R, et considérons la suite des intervalles

$$(4)\quad \begin{cases} [0, |f(\zeta)|^{k_1}], \quad [|f(\zeta)|^{k_1}, |f(\zeta)|^{k_2}], \quad \ldots, \quad [|f(\zeta)|^{k_i}, |f(\zeta)|^{k_{i+1}}], \quad \ldots \\ [|f(\zeta)|^{k_{q-1}}, |f(\zeta)|^{k_q}] \qquad \left[k_i = \frac{i}{q}\,(i = 1, 2, \ldots, q)\right]. \end{cases}$$

La relation $|f(\omega^i\zeta)| \leq |f(\zeta)|$ étant vérifiée au point ζ considéré pour toute valeur de l'exposant i de ω différente de zéro, les nombres $|f(\omega^i\zeta)|\,(i \neq 0)$ appartiendront à certains intervalles (4). Mais comme le nombre de ces intervalles est supérieur d'une unité au nombre des quantités $f(\omega^i\zeta)\,(i \neq 0)$, il y en aura au moins un ne contenant pas de quantités $|f(\omega^i\zeta)|$. Soit $[|f(\zeta)|^{k_s}, |f(\zeta)|^{k_{s+1}}]$ un tel intervalle; nous aurons alors

$$(5)\qquad |f(\omega^i\zeta)| > |f(\zeta)|^{k_{s+1}}$$

pour $h-1$ nombres $|f(\omega^{i_1}\zeta)|, |f(\omega^{i_2}\zeta)|, \ldots, |f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)|$, tandis que pour les autres nombres $|f(\omega^j\zeta)|$ nous aurons d'une part

$$|f(\omega^j\zeta)| < |f(\zeta)|^{k_s}$$

et d'autre part

$$(6)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{f(\omega^j\zeta)}{f(\omega^{i_p}\zeta)}\right| < \dfrac{1}{|f(\zeta)|^{k_{s+1}-k_s}} = \dfrac{1}{|f(\zeta)|^{\frac{1}{q}}} \\ (p = 1, 2, \ldots, h-1;\ j \neq i_1, i_2, \ldots, i_{h-1}). \end{cases}$$

Ceci étant, considérons le nombre $a_h(\zeta)$, nous aurons

$$|a_h(\zeta)| = |f(\zeta)f(\omega^{i_1}\zeta)\ldots f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)|\,[1+\varepsilon(\zeta)]$$

avec

$$\varepsilon(\zeta) = \frac{\Sigma f(\omega^{j_1}\zeta)\ldots f(\omega^{j_h}\zeta)}{f(\zeta)f(\omega^{i_1}\zeta)\ldots f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)},$$

le signe Σ étant étendu à tous les produits partiels figurant dans $a_h(\zeta)$ et ne contenant pas l'un au moins des nombres $f(\zeta), f(\omega^{i_1}\zeta), \ldots, f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)$. Un terme quelconque $\frac{f(\omega^{j_1}\zeta)f(\omega^{j_2}\zeta)\ldots f(\omega^{j_h}\zeta)}{f(\zeta)f(\omega^{i_1}\zeta)\ldots f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)}$ de $\varepsilon(\zeta)$ est le produit d'un certain nombre $\left|\frac{f(\omega^j\zeta)}{f\omega^{i_p}\zeta)}\right|$ $(j \neq i_1, i_2, \ldots, i_{h-1})$ par des nombres dont le module est au plus égal à l'unité ; par conséquent, d'après (6), le module de ce terme est moindre que $\frac{1}{|f(\zeta)|^{\frac{1}{q}}}$. Le nombre des termes figurant dans $\varepsilon(\zeta)$ étant inférieur à p, nous aurons donc

$$|\varepsilon(\zeta)| < \frac{p}{|f(\zeta)|^{\frac{1}{q}}}.$$

Par conséquent, puisque $|\zeta| > \mathrm{R}$, il viendra d'après 2°

$$|\varepsilon(\zeta)| < \lambda,$$

et par suite

$$|a_h(\zeta)| > |f(\zeta)f(\omega^{i_1}\zeta)\ldots f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)|\,|(1-\lambda)|,$$

d'où, en remarquant que $|\zeta| > \mathrm{R}_1$ et que les nombres $|f(\omega^{i_1}\zeta)|, \ldots, |f(\omega^{i_{h-1}}\zeta)|$ vérifient la relation (5),

$$|a_h(\zeta)| > e^{r^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}[1+(h-1)k_{s+1}]}(1-\lambda) > e^{r^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}}(1-\lambda) \qquad (r=|\zeta|).$$

Comme $|\zeta|$ est en outre supérieur à R_3, nous aurons donc finalement

$$|a_h(\zeta)| > e^{r^{\mu-\varepsilon}} \qquad (r=|\zeta|),$$

ce qu'il fallait établir.

Il résulte immédiatement de la proposition précédente que *si $f(y)$ est une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance régulière, il ne peut exister une infinité de cercles concentriques à l'origine et de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on* *ait à la fois*

$$|a_1(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}}, \quad |a_2(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}}, \quad \ldots, \quad |a_q(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \quad (\eta > 0).$$

5. *Si* $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ *est une fonction entière en* y *d'ordre apparent* μ *et à croissance régulière, on peut mettre cette fonction sous la forme*

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n}$ *étant une fonction entière d'ordre apparent* μ *et à croissance régulière, telle que* $\lim_{n=\infty} \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}$ *et en outre telle que les exposants des diverses puissances de* y *vérifient, quel que soit l'indice* n, *l'inégalité*

$$q_n > e^{n^2}$$

et $f_2(y)$ *étant la somme des termes de* $f(y)$ *qui n'entrent pas dans* $f_1(y)$.

Soit à cet effet

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \quad \ldots, \quad \delta_i, \quad \ldots,$$

une suite décroissante de quantités positives telles que $\lim_{i=\infty} \delta_i = 0$ et désignons par

$$c_{q_{1,i}}, \quad c_{q_{2,i}}, \quad \ldots, \quad c_{q_{n,i}}, \quad \ldots$$

les coefficients de $f(y)$ dont les nombres correspondants $\frac{-\log|c_{q_{n,i}}|}{q_{n,i}\log q_{n,i}}$ appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu} - \delta_i, \frac{1}{\mu} + \delta_i\right)$, la suite des nombres $c_{q_{n,i}}$ fera partie quel que soit i de la suite des nombres $c_{q_{n,i-1}}$.

Ceci posé, la fonction $f(y)$ étant à croissance régulière, nous pouvons déterminer une suite de nombres entiers

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n, \quad \ldots$$

tels que

$$\frac{\log q_{n+1,i}}{\log q_{n,i}} < 1 + \varepsilon_i \qquad \left(\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0\right),$$

dès que $q_{n,i} > e^{m_i^2}$, et considérons la suite des intervalles

$$(7) \qquad (e^{m_1^2}, e^{(m_1+1)^2}), \quad (e^{(m+1)^2}, e^{(m_1+2)^2}), \quad \ldots, \quad (e^{m_2^2}, e^{(m_2+1)^2}), \quad \ldots$$

Soient $(e^{n_1^2}, e^{(n_1+1)^2})$ le premier des intervalles (7) renfermant des nombres $q_{n,1}$ supérieurs à $e^{n_1^2}$, $(e^{n_2^2}, e^{(n_2+1)^2})$ le premier des intervalles (7) pour lesquels l'exposant n_2 est au moins égal à m_2, renfermant des nombres $q_{n,2}$ supérieurs à $e^{n_2^2}$, etc. L'intervalle $(e^{n_1^2}, e^{(n_1+1)^2})$ renfermant des nombres $q_{n,1}$ supérieurs à $e^{n_1^2}$, nous prendrons le plus grand d'entre eux et nous le noterons q_1; si $(e^{p^2}, e^{(p+1)^2})$ est le premier des intervalles (7) pour lesquels l'exposant p vérifie la double inégalité $n_1 < p < n_2$, renfermant des nombres $q_{n,1}$ supérieurs à e^{p^2}, nous prendrons le plus grand d'entre eux et nous le noterons q_2, etc. L'intervalle $(e^{n_2^2}, e^{(n_2+1)^2})$ renfermant des nombres $q_{n,2}$ supérieurs à $e^{n_2^2}$, nous prendrons le plus grand d'entre eux et nous le noterons q_h, si le nombre des q_n précédemment choisis est égal à $h-1$, et ainsi de suite indéfiniment. D'après la façon même dont nous avons opéré, il est clair que l'on aura pour toute valeur de l'indice n

$$q_n > e^{n^2}.$$

Je dis maintenant que $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1$. En effet, si ε est un nombre positif arbitrairement petit, nous pouvons déterminer d'une part un nombre entier N de manière que

$$\frac{(m+1)^2}{m^2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $e^{m^2} > N$, et d'autre part un nombre entier h tel que

$$\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour toute valeur de l'indice i supérieure à h. Ceci fait, q_n étant supposé appartenir à un intervalle $(e^{m^2}, e^{(m+1)^2})(e^{m^2} > N)$, deux cas peuvent se présenter : 1° le nombre q_{n+1} fait partie de l'intervalle $(e^{(m+1)^2}, e^{(m+2)^2})$, nous aurons alors

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < \frac{(m+2)^2}{m^2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\text{puisque } e^{m^2} > N);$$

2° le nombre q_{n+1} fait partie de l'intervalle $(e^{(m+p)^2}, e^{(m+p+1)^2})\,(p > 1)$. Alors si $e^{m^2} > e^{n_i^2}$ avec $i > h$, d'après la façon même dont nous avons opéré plus haut, le nombre q_n appartiendra à la suite des nombres q_n, et nous aurons $q_n = q_{t,i}$, et de plus les deux nombres q_{n+1} et $q_{t+1,i}$ seront ou bien égaux, ou bien situés dans le même intervalle $(e^{(m+p)^2}, e^{(m+p+1)^2})$. Par conséquent nous déduirons de la relation

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = \frac{\log q_{t+1,i}}{\log q_{t,i}} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_{t+1,i}},$$

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon',$$

en remarquant que d'après nos hypothèses et d'après ce qui a été établi précédemment

$$\frac{\log q_{t+1,i}}{\log q_{t,i}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{\log q_{n+1}}{\log q_{t+1,i}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il résulte donc de ce qui précède que si M est le plus grand des deux nombres N et e^{n_k}, on aura dans tous les cas

$$\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < 1 + \varepsilon' \qquad \left(\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right),$$

dès que $q_n > \mathrm{M}$. Comme ε' est arbitrairement petit en même temps que ε, il s'ensuit que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1.$$

Je dis de plus que la suite des nombres $\dfrac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ admet $\dfrac{1}{\mu}$ comme élément limite unique. En effet, si q_n est supérieur à $e^{n_i^2}$, le nombre c_{q_n} fera partie de la suite des nombres $c_{q_{n,i}}$ et nous aurons d'après l'hypothèse faite au début de la démonstration

$$\left| \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} - \frac{1}{\mu} \right| \leqq \delta_i,$$

et comme δ_i converge vers zéro avec $\dfrac{1}{i}$, il en résulte bien que

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} = \frac{1}{\mu}.$$

Si nous posons

$$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n},$$

cette fonction $f_1(y)$ satisfera bien aux conditions requises et nous aurons

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

$f_2(y)$ désignant la somme des termes de $f(y)$ qui n'entrent pas dans $f_1(y)$.

Ensembles ponctuels.

6. Soit E un ensemble borné de points répartis dans un plan; on dit que c'est un ensemble ponctuel, si tous ses points peuvent être renfermés dans un nombre fini ou dans une infinité dénombrable de circonférences dont la somme totale des longueurs est aussi petite que l'on veut.

De cette définition résulte immédiatement que l'ensemble, somme d'une infinité dénombrable d'ensembles ponctuels, est lui-même un ensemble ponctuel.

Un point est un ensemble ponctuel; par suite, d'après la propriété précédente, un ensemble dénombrable et borné de points est un ensemble ponctuel. En particulier, l'ensemble des points à coordonnées rationnelles et appartenant à une aire finie quelconque est un ensemble ponctuel. Cet exemple nous montre qu'un ensemble ponctuel peut être dense superficiellement.

La distribution des points d'un ensemble ponctuel par rapport à certaines familles de courbes a été étudiée par M. E. Borel [1]. De ses recherches résultent en particulier que :

1° La projection d'un ensemble ponctuel sur une droite quelconque est un ensemble de points de mesure linéaire nulle;

2° Les circonférences concentriques à un point et portant des points de l'ensemble déterminent sur une droite quelconque passant par le centre un ensemble de points de mesure linéaire nulle;

3° Les droites issues d'un point fixe O et portant des points de l'ensemble autres que O (dans le cas où O appartient à l'ensemble) déter-

---

(1) *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 72 et suiv. Paris, Gauthier-Villars; 1898.

minent, sur une circonférence concentrique au point O, un ensemble de points de mesure linéaire nulle.

On déduit aisément de ces propriétés que si E est un ensemble ponctuel, on pourra toujours trouver dans toute aire finie, si petite soit-elle, des points n'appartenant pas à E.

7. Dans le cas où l'ensemble E est non borné, on dit que c'est un ensemble ponctuel, si la portion de cet ensemble appartenant à une aire finie quelconque est un ensemble ponctuel.

Comme exemple d'ensemble ponctuel non borné, nous pouvons citer l'ensemble de tous les points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles.

Points de moindre croissance.

8. Soit

$$P_{q_1}(x),\quad P_{q_2}(x),\quad \ldots,\quad P_{q_n}(x),\quad \ldots$$
$$[P_{q_n}(x) = (x - a_{q_n,1})(x - a_{q_n,2})\ldots(x - a_{q_n,\varphi(q_n)})]$$

une suite de polynomes satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les points d'affixes $a_{q_n,i}$ appartiennent à un cercle concentrique à l'origine et de rayon R.

2° Si $\varphi(q_n)$ est le degré du polynome $P_{q_n}(x)$, il existe un nombre entier q tel que l'on ait pour toute valeur de q_n

$$\varphi(q_n) \leqq q q_n.$$

Nous avons désigné dans notre Thèse (n° 59), sous le nom de *points de moindre croissance*, tout point $x = a$ pour lequel on a

$$\lim_{q_n = \infty} \frac{-\log|P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie. Si k est un nombre positif inférieur à k', nous aurons à partir d'une certaine valeur de q_n

$$-\frac{\log|P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} > k. \tag{8}$$

Désignons par $C^k_{q_n}$ la lemniscate représentée par l'équation

$$\frac{-\log|P_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} - k = 0;$$

l'inégalité (8) signifie qu'à partir d'une certaine valeur de q_n, le point $x = a$ sera intérieur au sens étroit à la courbe $C^k_{q_n}$. Cette courbe $C^k_{q_n}$ sera en général formée d'une suite de boucles fermées en nombre au plus égal à $\varphi(q_n)$, chacune de ces boucles comprenant à son intérieur au moins un zéro du polynome $P_{q_n}(x)$. Dans le cas particulier où la courbe $C^k_{q_n}$ comprend $\varphi(q_n)$ boucles fermées, chacune de ces boucles renferme à son intérieur un zéro et un seul du polynome $P_{q_n}(x)$.

Si $C^{k'}_{q_n}$, $C^{k''}_{q_n}$ sont deux lemniscates correspondant à deux valeurs distinctes de k, ces boucles n'ont aucun point commun et de plus, si $k' < k''$, la courbe $C^{k''}_{q_n}$ sera intérieure au sens étroit à la courbe $C^{k'}_{q_n}$.

9. Soient $C^k_{q_n,1}, C^k_{q_n,2}, \ldots, C^k_{q_n,\varphi(q_n)}$ les boucles fermées qui constituent la lemniscate $C^k_{q_n}$ et désignons par $\Gamma^k_{q_n,i}$ la circonférence circonscrite au rectangle $R^k_{q_n,i}$ circonscrit à la boucle $C^k_{q_n,i}$ et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, *le rayon* $\rho^k_{q_n,i}$ *de* $\Gamma^k_{q_n,i}$ *sera à partir d'une certaine valeur de* q_n *moindre que* $\frac{A}{\log q_n}$ (A *désignant une quantité positive fixe*).

Posons à cet effet

$$a_{q_n,i} = \alpha_{q_n,i} + \beta_{q_n,i}\sqrt{-1}$$

et

$$A_{q_n}(\xi) = (\xi - \alpha_{q_n,1})(\xi - \alpha_{q_n,2}) \ldots (\xi - \alpha_{q_n,\varphi(q_n)}).$$

En vertu de la relation

$$|\xi - \alpha_{q_n,i}| \leqq |x - a_{q_n,i}|,$$

la projection de l'axe des ξ du côté du rectangle $R^k_{q_n,i}$ parallèle à cet axe sera un certain segment $d^\xi_{q_n,i}$ compris à l'intérieur du segment $\gamma^k_{q_n,i}$ en tout point duquel on a

$$\frac{-\log|A_{q_n}(\xi)|}{q_n \log q_n} \geqq k.$$

La longueur du segment $\gamma^k_{q_n,i}$ étant inférieure à $\frac{A}{\log q_n}$ (A étant une quantité positive), pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe (*cf.* Thèse, n° **57**), on aura donc pour ces mêmes valeurs de q_n

$$\text{longueur du segment : } d^{\xi}_{q_n,i} < \frac{A}{\log q_n}.$$

On verrait de même que la longueur du segment $d^{\eta}_{q_n,i}$ projection du rectangle $R^k_{q_n,i}$ sur $O\eta$ est moindre que $\frac{A}{\log q_n}$, à partir d'une certaine valeur de q_n. Il en résulte qu'on aura pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe et quel que soit le second indice i

$$\rho^k_{q_n,i} < \frac{A}{\log q_n}.$$

10. *Lemme.* — Soit

$$A_{q_n}(\xi) = (\xi - \alpha_{q_n,1})(\xi - \alpha_{q_n,2})\ldots(\xi - \alpha_{q_n,\varphi(q_n)})$$

une suite de polynomes de la variable réelle ξ satisfaisant aux conditions suivantes : 1° tous les zéros de ces polynomes appartiennent à un intervalle fini AB de l'axe des ξ dont les extrémités A et B ont respectivement pour abscisses a et b ($a < b$); 2° le degré $\varphi(q_n)$ de $A_{q_n}(\xi)$ satisfait pour toute valeur de l'indice q_n à l'inégalité $\varphi(q_n) < \frac{q_n}{p}$, p étant un nombre entier positif fixe. *Si σ_{q_n} est la somme totale des longueurs des segments $\gamma^k_{q_n,i}$ en chaque point desquels on a $\frac{-\log|A_{q_n}(\xi)|}{q_n \log q_n} \geqq k$ avec $k > \frac{4}{p}$, on aura pour toute valeur de q_n*

$$\sigma_q < \frac{2}{p q_n^3}.$$

Nous supposerons pour plus de clarté dans la démonstration que les points $\alpha_{q_n,i}$ ont été numérotés pour chaque valeur de l'indice q_n dans l'ordre où les rencontre un mobile se déplaçant sur l'axe des ξ dans le sens de A vers B.

Cette remarque faite, portons de part et d'autre de chaque point $\alpha_{q_n,i}$ une longueur égale à $\frac{1}{q_n^4}$, nous obtiendrons une suite de segments $g_{q_n,i}$ dont la somme totale des longueurs est moindre que $\frac{2}{p q_n^3}$. Ces segments $g_{q_n,i}$ peuvent avoir des portions ou des extrémités communes.

Considérons en particulier les segments $g_{q_n,i}$, $g_{q_n,i+1}$, ..., $g_{q_n,j}$ jouissant des propriétés suivantes : a) le segment $g_{q_n,i}$ n'a aucune portion ni extrémité commune avec le segment $g_{q_n,i-1}$, de même le segment $g_{q_n,j}$ n'a aucune portion ni extrémité commune avec le segment $g_{q_n,j+1}$; b) chaque segment $g_{q_n,h}$ pour $h = i, i+1, \ldots, j-1$ a une portion ou extrémité commune avec le segment $g_{q_n,h+1}$, nous remplacerons tous ces segments par le segment unique $\gamma'_{q_n,i}$ ayant pour extrémité gauche l'extrémité gauche du segment $g_{q_n,i}$ et pour extrémité droite l'extrémité droite du segment $g_{q_n,j}$. Les segments $\gamma'_{q_n,i}$ ainsi définis n'auront aucune portion ni extrémité commune. La somme totale des longueurs de ces segments $\gamma'_{q_n,i}$ étant au plus égale à la somme totale des longueurs des segments $g_{q_n,i}$ est donc moindre que $\frac{2}{pq_n^3}$.

Ceci posé, soit $\xi = b$ un point de l'axe des ξ extérieur au sens large à tous les segments $\gamma'_{q_n,i}$ ayant même premier indice q_n; comme la distance d'un tel point $\xi = b$ aux points $\alpha_{q_n,i}$ $[i = 1, 2, \ldots, \varphi(q_n)]$ est au moins égale à $\frac{1}{q_n^4}$, nous aurons donc pour la valeur q_n considérée, en observant que le degré $\varphi(q_n)$ de $A_{q_n}(\xi)$ vérifie l'inégalité $\varphi(q_n) < \frac{q_n}{p}$,

$$|A_{q_n}(b)| > \frac{1}{q_n^{\frac{4q_n}{p}}},$$

d'où nous déduisons, en tenant compte de notre hypothèse sur k,

$$\frac{-\log|A_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} < \frac{4q_n \log q_n}{pq_n \log q_n} = \frac{4}{p} < k.$$

Il en résulte donc que tout segment $\gamma^k_{q_n,i}$ en tout point duquel on a

$$\frac{-\log|A_{q_n}(\xi)|}{q_n \log q_n} \geqq k,$$

est intérieur au sens étroit à un certain segment $\gamma'_{q_n,i}$ et cela quels que soient les indices q_n et i. Par suite, la somme totale des longueurs des segments $\gamma^k_{q_n,i}$ est au plus égale à la somme totale des longueurs des segments $\gamma'_{q_n,i}$ et cela pour toute valeur de q_n. On aura donc pour toute valeur de q_n

$$\sigma_{q_n} < \frac{2}{pq_n^3},$$

ce qu'il fallait établir.

En procédant de la même manière qu'au numéro précédent et en utilisant le lemme que nous venons d'établir, on démontre aisément que *si le degré du polynome* $P_{q_n}(x)$ *satisfait pour toute valeur de* q_n *à l'inégalité* $\varphi(q_n) < \frac{q_n}{p}$ *et si* k *est supérieur à* $\frac{4}{p}$, *le rayon* $\rho^k_{q_n,i}$ *de la circonférence* $\Gamma^k_{q_n,i}$ *vérifie, quels que soient les indices* q_n *et* i, *l'inégalité* $\rho^k_{q_n,i} < \frac{2}{pq_n^3}$.

11. Admettons maintenant que le degré $\varphi(q_n)$ du polynome $P_{q_n}(x)$ satisfasse quel que soit q_n à l'inégalité $\varphi(q_n) < qq_n$ (q étant un nombre entier) et considérons les deux lemniscates $C^h_{q_n}$ et $C^k_{q_n}$ $\left(h < \frac{k}{2}\right)$. La lemniscate $C^k_{q_n}$ sera, d'après la proposition rappelée à la fin du n° 8, intérieure au sens étroit à la courbe $C^h_{q_n}$. Nous partagerons les boucles de cette dernière courbe en deux sortes : 1° les courbes de la première sorte caractérisées par le fait que chacune d'elles renferme à son intérieur au moins $\frac{q_n}{p}$ zéros du polynome $P_{q_n}(x)$ (p étant un nombre entier que nous fixerons ultérieurement) ; 2° les boucles de la seconde sorte caractérisées par ce fait que chacune d'elles renferme à son intérieur moins de $\frac{q_n}{p}$ zéros du polynome $P_{q_n}(x)$. Le nombre des courbes de la première sorte est au plus égal à pq, en vertu de l'hypothèse faite sur le nombre des zéros du polynome $P_{q_n}(x)$. Par suite la somme totale des longueurs des circonférences $\Gamma^h_{q_n,i}$ circonscrites aux rectangles $R^h_{q_n,i}$ circonscrits aux boucles de la première sorte de la lemniscate $C^h_{q_n}$ sera, d'après la proposition du n° **9**, moindre que $\frac{2\pi pqA}{\log q_n}$ à partir d'une valeur de q_n suffisamment grande.

Ce point établi, considérons les boucles de la courbe $C^k_{q_n}$ situées à l'intérieur d'une boucle quelconque $C^h_{q_n,i}$ de la seconde sorte de la lemniscate $C^h_{q_n}$ et désignons par $Q_{q_n,i}(x)$ le polynome dont la plus haute puissance de x est égale à l'unité et admettant comme zéros, les zéros du polynome $P_{q_n}(x)$ compris à l'intérieur de la boucle $C^h_{q_n,i}$ et ceux-là seulement. Le degré de ce polynome $Q_{q_n,i}(x)$ sera, quel que soit le second indice i, évidemment inférieur à $\frac{q_n}{p}$. Posons

$$P_{q_n}(x) = Q_{q_n,i}(x)\, S_{q_n,i}(x).$$

Les zéros du polynome $Q_{q_n,i}(x)$ restant, quels que soient les indices q_n et i, à l'intérieur d'un cercle C concentrique à l'origine et de rayon fini R, en vertu de la condition 1° du n° **8** à laquelle satisfont tous les polynomes $P_{q_n}(x)$ et le degré de ce polynome restant toujours inférieur à $\frac{q_n}{p}$, nous pouvons déterminer un nombre positif Q de manière que l'on ait pour tout point x du cercle C et quel que soit le second indice i

$$\frac{-\log|Q_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} > -\varepsilon,$$

dès que $q_n > Q$, le nombre positif ε étant choisi de telle façon que $h + \varepsilon < \frac{k}{2}$. Par suite, nous aurons pour tout point d'une boucle de la seconde sorte $C^h_{q_n,i}$ et quel que soit le second indice i

$$(9) \qquad \frac{-\log|S_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} < \frac{k}{2},$$

dès que $q_n > Q$, en remarquant que l'on a pour tout point d'une boucle quelconque de $C^h_{q_n}$

$$\frac{-\log|P_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n} - h = 0.$$

Par suite, comme la fonction $\frac{-\log|S_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n}$ est une fonction harmonique régulière à l'intérieur de la boucle $C^h_{q_n,i}$, l'inégalité (9) sera vérifiée dans les mêmes conditions pour tout point x intérieur à $C^h_{q_n,i}$. On en déduit que l'on a pour tous les points des boucles de la lemniscate $C^k_{q_n}$ situées à l'intérieur d'une boucle de la seconde sorte $C^h_{q_n,i}$, et quel que soit le second indice i,

$$(10) \qquad \frac{-\log|Q_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} > \frac{k}{2},$$

pour toute valeur de q_n supérieure à Q.

Par conséquent, si nous déterminons le nombre entier p de manière que $\frac{4}{p} < \frac{k}{2}$, la longueur d'une circonférence $\Gamma_{q_n,i,h}$ circonscrite à un rectangle circonscrit à une boucle quelconque de la lemniscate représentée par l'équation $\frac{-\log|Q_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} = \frac{k}{2}$ sera, en vertu de la proposition du n° **10**, moindre que $\frac{4\pi}{pq_n^3}$ et cela quels que soient les indices q, i et h. Comme pour toute valeur de q_n supérieure à Q, toute boucle de $C_{q_n}^k$ ayant des points à l'intérieur d'une boucle de la courbe représentée par l'équation $\frac{-\log|Q_{q_n,i}(x)|}{q_n \log q_n} = \frac{k}{2}$, est en vertu de la relation (10) intérieure au sens étroit à cette dernière boucle, il en résulte que pour ces valeurs de q_n et quel que soit le second indice i, toute circonférence $\Gamma_{q_n,i}^k$ correspondant à une boucle de la lemniscate $C_{q_n}^k$ intérieure au sens étroit à la boucle $C_{q_n,i}^h$ de la seconde sorte de la courbe $C_{q_n}^h$, est intérieure au sens étroit à une certaine circonférence $\Gamma_{q_n,i,h}$. Par suite, nous aurons pour toutes les valeurs de q_n supérieures à Q et quel que soit le second indice i

$$\text{longueur de } \Gamma_{q_n,i}^k < \frac{4\pi}{pq_n^3}.$$

Le nombre des circonférences $\Gamma_{q_n,i}^k$ correspondant aux boucles de $C_{q_n}^k$ située à l'intérieur des boucles $C_{q_n,i}^h$ de la seconde sorte, étant au plus égal à qq_n, il s'ensuit que la somme totale des longueurs de toutes ces circonférences est moindre que $\frac{4\pi q}{pq_n^2}$.

Par suite, en tenant compte du résultat obtenu plus haut pour les boucles $C_{q_n,i}^h$ de la première sorte, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si les polynomes $P_{q_n}(x)$ satisfont aux conditions énoncées au n° **8**, *pour toutes les valeurs de q_n supérieures à un certain nombre fixe, les boucles de la lemniscate $C_{q_n}^k$ peuvent être renfermées dans un nombre fini de circonférences dont la somme totale des longueurs est moindre que*

$$\frac{2\pi pqA}{\log q_n} + \frac{4\pi}{pq_n^2},$$

le nombre entier positif p dépendant de k.

12. Désignons ces circonférences par $D^k_{q_n,1}, D^k_{q_n,2}, \ldots; D^k_{q_n,\theta(q_n)}\,[\theta(q_n) \leqq \varphi(q_n)]$ et soit $M_{k'}$ l'ensemble des points de moindre croissance $x = a$ pour lesquels on a

$$\underline{\lim}_{q_n=\infty} \frac{-\log|P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} \geqq k' \qquad (k' > k).$$

Un tel point $x = a$ est, comme nous l'avons remarqué au n° **8**, intérieur au sens étroit à une boucle de la lemniscate $C^k_{q_n}$ pour toutes les valeurs de q_n dépassant un certain nombre fixe. Par suite, pour ces mêmes valeurs de q_n, il est *a fortiori* intérieur au sens étroit à une circonférence $D^k_{q_n,i}$. Par conséquent, en procédant de la même façon qu'aux n°s **42** et **57** de notre Thèse, on démontre d'abord que l'ensemble $M_{k'}$ est un ensemble ponctuel, puis que *l'ensemble* M *des points de moindre croissance de la suite des polynomes* $P_{q_n}(x)$ *est également un ensemble ponctuel.*

13. Nous allons maintenant assujettir les indices q_n des polynomes $P_{q_n}(x)$ à vérifier pour toute valeur de n la relation $q_n > e^{n^2}$ et étudier dans cette hypothèse l'ensemble E des points $x = b$ du plan des x pour lesquels on a

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie.

Soit $E_{k''}$ l'ensemble des points de E pour lesquels le nombre k' vérifie l'inégalité $k' \geqq k''$. D'après ce qui a été dit au numéro précédent, un point quelconque $x = b$ de E est intérieur au sens étroit à une infinité de circonférences $D^k_{q_n,i}$ $(k'' > k)$. De plus, la somme totale des longueurs de toutes les circonférences $D^k_{q_n,i}$ est d'après notre hypothèse sur les q_n et en vertu du résultat du n° **11**, moindre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B}{n^2}$, B étant une quantité positive finie. Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, il s'ensuit que l'ensemble $E_{k''}$ est un ensemble ponctuel. Cette propriété ayant lieu quelque petit que soit le nombre positif k'', on en conclut, en procédant de la même manière qu'au n° **57** de notre

Thèse, que l'ensemble E est un ensemble ponctuel. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si les polynomes $P_{q_n}(x)$ *satisfont aux conditions énoncées au n° 8 et si leurs indices* q_n *vérifient pour toute valeur de n l'inégalité* $q_n > e^{n^2}$, *l'ensemble* E *des points* $x = b$ *pour lesquels on a*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie, est un ensemble ponctuel.

Remarque I. — Cet ensemble E comprendra évidemment tous les points de l'ensemble M des points de moindre croissance de la suite des polynomes $P_{q_n}(x)$.

Remarque II. — Si $x = c$ est un point n'appartenant pas à E, nous aurons en ce point

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|P_{q_n}(c)|}{q_n \log q_n} = 0,$$

d'après la définition même de E.

Fonctions $G(x, y)$.

14. Soit $G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}(x) y^{q_n}$ une fonction entière en x et y ordonnée suivant les puissances entières de y, d'ordre apparent total fini λ et dans laquelle les exposants des diverses puissances de y vérifient pour toute valeur de n, l'inégalité

$$q_n > e^{n^2}.$$

Désignons par c_{q_n} le coefficient maximum de $a_{q_n}(x)$, nous supposerons en outre que l'ensemble des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ admette $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique. Alors la fonction entière en

y, $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n}$ sera d'ordre apparent μ. Posons

$$a_{q_n}(x) = c_{q_n} f_{q_n}(x),$$

et appelons E l'ensemble des points $x = b$ du plan des x situés à distance finie pour lesquels on a

$$\overline{\lim_{q_n=\infty}} \frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k',$$

k' étant une quantité positive finie ou infinie. *Cet ensemble* E *est un ensemble ponctuel.* Pour le montrer, il suffit d'établir, d'après la définition du n° **7**, que la portion E_R de E appartenant à un certain cercle C_R concentrique à l'origine et de rayon R est un ensemble ponctuel. Désignons à cet effet par $P_{q_n}(x)$ le polynome dont le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à l'unité et admettant pour zéros, les zéros de $f_{q_n}(x)$ dont le module est au plus égal à $R + \eta\,(\eta > 0)$, et ceux-là seulement; puis posons

$$f_{q_n}(x) = P_{q_n}(x)\, h_{q_n}(x).$$

Les fonctions $h_{q_n}(x)$ sont des fonctions holomorphes n'admettant aucun zéro à l'intérieur du cercle $C_{R+\eta}$ concentrique à l'origine et de rayon $R + \eta$. Par suite, les fonctions $\frac{-\log|h_{q_n}(x)|}{q_n \log q_n}$ sont des fonctions harmoniques régulières à l'intérieur et sur le contour du cercle C_R concentrique à l'origine et de rayon R. En procédant de la même manière qu'aux n^{os} **73-76** de notre Thèse, on voit que cette suite de fonctions converge uniformément vers zéro dans C_R. Il en résulte que tout point $x = b$ de l'ensemble E_R est un point pour lequel on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|P_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k'$$

et inversement. L'ensemble des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ étant borné, puisqu'il admet un seul élément limite fini, le degré $\varphi(q_n)$ de $P_{q_n}(x)$ satisfera pour toute valeur de l'indice n à l'inégalité

$$\varphi(q_n) \leqq q q_n,$$

q étant un nombre entier fixe (*cf.* Thèse, n° **80**). Par suite, d'après le résultat du n° **13**, l'ensemble E_R sera un ensemble ponctuel.

L'ensemble E étant un ensemble ponctuel, dans toute aire finie, il existe des points n'appartenant pas à E (*cf.* n° **6**). Comme en un tel point $x = a$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|P_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = 0,$$

et que de plus

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|h_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = 0,$$

il en résulte que l'on aura pour un tel point

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|f_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} = 0.$$

15. Admettons, en outre, que la fonction entière $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{q_n} y^{q_n}$ soit à croissance régulière, nous allons étudier la régularité de la croissance de $G(x, y)$ considérée comme une fonction entière en y quand le point x se déplace à distance finie dans son plan.

Soit $x = a$ un point n'appartenant pas à l'ensemble E. Comme la suite des nombres $\frac{-\log|f_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n}$ admet zéro comme élément limite unique, au nombre positif δ nous pouvons faire correspondre un entier Q_1, tel que pour $q_n > Q_1$, on ait

$$-\delta \leqq \frac{-\log|f_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} \leqq \delta.$$

D'autre part, la suite des nombres $\frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ convergeant vers $\frac{1}{\mu}$, il existe un entier Q_2, tel que pour $q_n > Q_2$, on ait

$$\frac{1}{\mu} - \delta \leqq \frac{-\log|c_{q_n}|}{q_n \log q_n} \leqq \frac{1}{\mu} + \delta.$$

Par suite, nous aurons pour toutes les valeurs de q_n supérieures au plus grand des deux nombres Q_1 et Q_2 :

$$(11) \qquad \frac{1}{\mu} - 2\delta \leqq \frac{-\log|a_{q_n}(a)|}{q_n \log q_n} \leqq \frac{1}{\mu} + 2\delta.$$

Il en résulte que la suite des indices q_n des coefficients $a_{q_n}(a)$ de $G(a, y)$ vérifiant la relation précédente s'obtient en supprimant un nombre fini de termes de la suite des indices q_n des coefficients de $g(y)$, et cela quel que soit le nombre positif δ. Comme d'après nos hypothèses sur $g(y)$ le rapport $\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}$ (q_n et q_{n+1} étant les indices de deux coefficients consécutifs de cette fonction entière) converge vers l'unité, il en sera de même du rapport $\frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}$, q_n et q_{n+1} étant les indices de deux coefficients consécutifs de $G(a, y)$ vérifiant la relation (11), et cela quel que soit le nombre positif δ. Par suite, la fonction $G(a, y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Donc *en tout point x n'appartenant pas à* E, *la fonction* $G(x, y)$ *est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière.*

Soit maintenant $x = b$ un point de l'ensemble E. Comme

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k' > 0,$$

on a ou bien

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = k > 0$$

ou bien

$$\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n} = 0.$$

Dans le premier cas la fonction $G(b, y)$ sera une fonction entière d'ordre apparent inférieur à μ, puisque la plus petite limite de la suite des nombres $\frac{-\log|a_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n}$ est égale à $\frac{1}{\mu} + k$ $(k > 0)$.

Ceci posé, considérons le cas où la suite des nombres $\frac{-\log|f_{q_n}(b)|}{q_n \log q_n}$ admet zéro comme plus petite limite et désignons par

$$(12) \qquad f_{s_1,\delta}(b), \quad f_{s_2,\delta}(b), \quad \ldots, \quad f_{s_n,\delta}(b), \quad \ldots,$$

les nombres de la suite des $f_{q_n}(b)$ tels que les nombres correspondants $\frac{-\log|f_{s_n,\delta}(b)|}{s_{n,\delta} \log s_{n,\delta}}$ appartiennent à l'intervalle $(-\delta, +\delta)$. Deux circonstances pourront se présenter : 1° quelque petit que soit le nombre positif δ, le rapport $\frac{\log s_{n+1,\delta}}{\log s_{n,\delta}}$ converge vers l'unité lorsque n augmente indéfiniment. Comme les nombres $\frac{-\log|c_{s_n,\delta}|}{s_{n,\delta}\log s_{n,\delta}}$ appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{1}{\mu}-\delta, \frac{1}{\mu}+\delta\right)$ pour toutes les valeurs de s_n supérieures à Q_δ, il en résulte que

$$(13) \qquad \frac{1}{\mu}-2\delta \leq \frac{-\log|a_{s_n,\delta}(b)|}{s_{n,\delta}\log s_{n,\delta}} \leq \frac{1}{\mu}+2\delta,$$

dès que $s_{n,\delta} > Q_\delta$. Il s'ensuit que pour toute valeur positive de δ, la suite des indices $s_{n,\delta}$ des nombres $a_{s_n,\delta}(b)$ vérifiant la relation (13) se déduit de la suite des indices des nombres (12) par la suppression d'un nombre fini de termes de cette dernière suite. Par suite, d'après notre hypothèse, le rapport $\frac{\log s_{n+1,\delta}}{\log s_{n,\delta}}$ [$s_{n,\delta}$ et $s_{n+1,\delta}$ étant les indices de deux coefficients consécutifs de $G(b,y)$ satisfaisant à la relation (13)] converge vers l'unité, et cela quelque petit que soit le nombre positif δ.

Par conséquent la fonction $G_1(b,y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{s_n,\delta_1}(b)y^{s_{n,\delta_1}}$ (δ_1 désignant une valeur positive de δ) est d'ordre apparent μ et à croissance régulière.

Or

$$G(b,y)=G_1(b,y)+G_2(b,y),$$

$G_2(b,y)$ étant une fonction entière d'ordre apparent inférieur à μ, il s'ensuit d'après la proposition du n° **3** que $G(b,y)$ est une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance régulière.

2° Il existe une valeur δ_1 de δ telle que $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\log s_{n+1,\delta}}{\log s_{n,\delta}} = k > 1$. Dans ce cas $G_1(b,y)$ sera une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, comme on le voit aisément, en procédant de la même manière que plus haut. Puisque la fonction $G_2(b,y)$ est d'ordre apparent inférieur à μ, la fonction $G(b,y)$ sera alors d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, d'après la remarque du n° **3**.

Il résulte donc de l'analyse précédente que *la fonction* $G(x,y)$ *est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf* *au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel* M *pour lesquels elle sera ou bien une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, ou bien une fonction entière en y d'ordre apparent inférieur à μ.*

Cet ensemble **M** peut avoir la puissance du continu, comme on le constate aisément par des exemples.

Fonctions $F(x, y)$.

16. Soit $F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ une fonction entière en x et y d'ordre apparent total fini λ, ordonnée suivant les puissances entières de y.

Désignons par c_n le coefficient maximum de $a_n(x)$ et supposons que la fonction entière en y, $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ soit d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Nous avons vu au n° **5** que l'on pouvait mettre cette fonction sous la forme

$$f(y) = f_1(y) + f_2(y),$$

$f_1(y)$ étant une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière telle que l'ensemble des nombres $\frac{-\log |c_{q_n}|}{q_n \log q_n}$ admette $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique et en outre telle que la suite des exposants q_n vérifie, quel que soit n, l'inégalité $q_n > e^{n^2}$. Posons

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}(x) y^{q_n}$$

et

$$F(x, y) = G(x, y) + H(x, y).$$

La fonction $G(x, y)$ que nous venons de définir vérifie les mêmes conditions que la fonction $G(x, y)$ du numéro précédent; de plus la fonction $H(x, y)$ sera d'ordre apparent au plus égal à μ par rapport à y.

Ceci posé, soit $x = a$ un point ne faisant pas partie de l'ensemble **M** défini au numéro précédent. La fonction $G(a,y)$ est une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance régulière, d'après la proposition précédente. Comme la fonction $H(a,y)$ est d'ordre apparent au plus égal à μ, il en résulte, d'après la proposition du n° **3**, que $F(a,y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Pour un point $x = b$ de M, la fonction $F(b,y)$ sera soit d'ordre apparent μ et à croissance régulière, soit d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, soit d'ordre apparent inférieur à μ, comme on le constate aisément, en utilisant la proposition et la remarque du n° **3**. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une fonction entière en x et y, $F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ d'ordre apparent total fini λ, si la fonction $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$, c_n désignant le coefficient maximum de $a_n(x)$, est d'ordre apparent μ et à croissance régulière, $F(x,y)$ sera une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pour lesquels elle sera ou bien une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, ou bien une fonction entière en y d'ordre apparent inférieur à μ.

Définition. — Si $F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ est une fonction entière d'ordre apparent total fini λ telle que la fonction entière en y, $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ [c_n désignant le coefficient maximum de $a_n(x)$] soit d'ordre apparent μ et à croissance régulière, nous dirons pour simplifier le langage que cette fonction $F(x,y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière par rapport à y.

17. Examinons maintenant ce qui se passe lorsque le nombre des zéros des $a_n(x)$ dont le module est au plus égal à R, ne dépasse pas, quel que soit R, le nombre fini N_R, qui peut d'ailleurs croître avec R.

Nous avons vu dans notre Thèse (n° **85**) que si la fonction $f(y)$ était d'ordre apparent μ, $F(x,y)$ était une fonction entière en y d'ordre apparent μ pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble M n'admettant aucun point limite à distance finie pour lesquels $F(x,y)$ était une fonction entière en y d'ordre apparent inférieur à μ. Il n'existe pas de théorème analogue pour la croissance régulière, comme nous allons le montrer par des exemples.

I. Soit $F(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)y^n$ une fonction entière en x et y, les $a_n(x)$ étant des polynomes du premier degré en x tels que si c_n désigne le coefficient maximum de $a_n(x)$, la suite des nombres $\frac{-\log|c_n|}{n\log n}$ admette $\frac{1}{\mu}$ comme élément limite unique. Cette fonction $F(x,y)$ sera d'ordre apparent total fini égal à μ et d'ordre apparent μ par rapport à y (*cf.* Thèse, n^{os} **22** et **78**).

Ceci étant, considérons d'une part la suite croissante de nombres entiers :

$$p_1, \quad p_2, \quad \dots, \quad p_n, \quad \dots$$

vérifiant la relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log p_{n+1}}{\log p_n} = k > 1,$$

et, d'autre part, l'ensemble dénombrable de nombres :

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad \dots.$$

Supposons que les polynomes $a_n(x)$ dont les indices appartiennent aux intervalles

$$(p_1, p_2), \quad (p_4, p_5), \quad \dots, \quad (p_{2^n}, p_{2^n+1}), \quad \dots$$

s'annulent pour $x=a_1$, que les polynomes $a_n(x)$ dont les indices appartiennent aux intervalles

$$(p_2, p_3), \quad (p_5, p_6), \quad \dots, \quad (p_{2^n+1}, p_{2^n+2}), \quad \dots$$

s'annulent pour $x=a_2$ et ainsi de suite indéfiniment. Pour tout point $x=a_i$, la fonction $F(x,y)$ sera une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière. En effet, tous les coefficients des puissances de y dont les exposants appartiennent aux intervalles

$$\ldots, \quad (p_{2^n+i-1}, p_{2^n+i}), \quad \ldots$$

sont nuls et la fonction $F(a_i, y)$ se réduit à

$$F(a_i, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{s_n}(a_i) y^{s_n} \qquad [a_{s_n}(a_i) \neq 0 \text{ quel que soit } s_n]$$

avec $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{\log s_{n+1}}{\log s_n} = k > 1$. Comme la fonction $F(x, y)$ ainsi construite peut être à croissance irrégulière pour des points n'appartenant pas à l'ensemble D des points $x = a_i$, nous pouvons dire, en tenant compte de notre hypothèse sur les c_n et de la proposition du n° **16**, que cette fonction $F(x, y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière pour tous les points du plan des x, sauf pour un ensemble ponctuel comprenant au moins tous les points de l'ensemble dénombrable D, pour lesquels elle est d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière.

II. On peut aller plus loin en montrant qu'il est possible de construire une fonction

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a_{q_n}).$$

les c_n vérifiant la condition $\lim\limits_{n=\infty} \frac{-\log|c_n|}{n \log n} = \frac{1}{\mu}$ et les a_{q_n} étant des nombres que nous déterminerons ultérieurement, pour laquelle l'ensemble E a effectivement la puissance du continu.

Considérons à cet effet l'ensemble P des nombres

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^{\varphi(n)}} + \ldots,$$

où les α_i sont des nombres entiers inférieurs à 10 (une infinité d'entiers étant toujours supposés différents de zéros) et où $\varphi(n)$ est un nombre entier que nous déterminerons plus loin. Cet ensemble P a la puissance du continu (*cf.* E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 29). De plus, à condition de lui adjoindre le nombre zéro, il est le dérivé d'un certain ensemble dénombrable qu'on peut obtenir de la manière suivante : Rangeons dans un ordre quelconque les nombres $\frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}}$ $(\alpha_1 \neq 0)$, ce qui est possible puisque ces quantités sont en nombre fini ; puis les nombres de la forme $\frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}}$ $(\alpha_2 \neq 0)$ et ainsi de suite indéfiniment ; nous obtenons donc la suite dénombrable de nombres

$$(a) \qquad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots.$$

Nous supposerons que tous les polynomes du premier degré $a_n(x)$ dont l'indice n vérifie les relations

$$p_n \leqq n < p_{n+1} \quad \text{[1]}$$

s'annulent pour le point d'abscisse a_n. Il nous reste maintenant à déterminer le nombre $\varphi(n)$. Pour cela nous remarquons que le nombre des quantités de la forme

$$\frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^{\varphi(n)}}$$

(les α prenant de toutes les façons possibles les valeurs $0, 1, \ldots, 9$, la combinaison $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ étant exclue) est indépendant de $\varphi(n)$. Soit $\theta(n)$ le nombre de ces quantités ; d'après nos hypothèses, le nombre $a_{\theta(n)}$ sera le dernier nombre de la suite (a) de la forme $\frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^{\varphi(n)}}$ avec $\alpha_n \neq 0$, et de plus il sera le zéro de tous les polynomes $a_n(x)$ dont l'indice n vérifie les relations

$$p_{\theta(n)} \leqq n < p_{\theta(n)+1}.$$

Ceci rappelé, nous poserons pour chaque valeur de n :

$$\varphi(n) = p^2_{\theta(n)+1}.$$

Les nombres entiers $\varphi(n)$ étant ainsi déterminés et a_n étant le zéro des polynomes $a_n(x)$ dont les indices n vérifient les relations

$$p_n \leqq n < p_{n+1},$$

nous aurons

$$a_n = \frac{\alpha_1}{10^{\varphi(1)}} + \frac{\alpha_2}{10^{\varphi(2)}} + \ldots + \frac{\alpha_m}{10^{\varphi(m)}} \qquad (\alpha_m \neq 0)$$

---

[1] Les nombres p_n vérifient la relation $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log p_{n+1}}{\log p_n} = k > 1$.

avec

$$\varphi(m) \geqq p_{n+1}^2.$$

En effet, n sera au plus égal à $\theta(m)$ et par suite p_{n+1} sera au plus égal à $p_{\theta(m)+1}$; comme $\varphi(m) = p_{\theta(m)+1}^2$, on aura donc bien

$$\varphi(m) \geqq p_{n+1}^2.$$

Donc la distance de a_n aux points ξ de l'ensemble P dont les m premiers chiffres du développement sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sera inférieure à $\frac{A}{10^{p_{n+1}^2}}$ (A étant une quantité positive fixe).

Il nous est actuellement possible de démontrer que tout point de l'ensemble P est un point pour lequel la fonction $F(x, y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière. Soit à cet effet ξ un point quelconque de P. Ce point ξ est limite d'une suite de points

$$a_{q_1}, \quad a_{q_2}, \quad \ldots, \quad a_{q_n}, \quad \ldots$$

extraite de la suite (a). a_{q_n} étant le zéro des polynomes $a_n(x)$ dont l'indice n vérifie les relations

$$(14) \qquad p_{q_n} \leqq n < p_{q_{n+1}},$$

la distance de ce point au point ξ considéré sera, d'après ce qui précède, moindre que $\frac{A}{10^{p_{q_{n+1}}^2}}$ avec $n < p_{n+1}$. On en déduit que l'on aura pour toutes les valeurs de n vérifiant la relation (14),

$$(15) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{-\log|a_n(\xi)|}{n \log n} = +\infty,$$

en remarquant en outre que pour ces valeurs de n, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\log|c_n|}{n \log n} = \frac{1}{\mu}.$$

Posons

$$F(\xi, y) = F_1(\xi, y) + F_2(\xi, y),$$

la fonction $F_2(\xi, y)$ comprenant tous les termes de la fonction $F(\xi, y)$ dont les indices vérifient les relations (14) et ceux-là seulement et $F_1(\xi, y)$ étant la somme des termes de $F(\xi, y)$ qui n'entrent pas dans $F_2(\xi, y)$. La fonction $F_1(\xi, y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, car tous les termes de cette fonction dont les indices vérifient les relations (14) sont nuls et que de plus $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log p_{q_{n+1}}}{\log p_{q_n}} = k > 1$. La fonction $F_2(\xi, y)$ est d'ordre apparent zéro en vertu de la relation (15); par suite, d'après la remarque du n° **3**, $F(\xi, y)$ est une fonction entière d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière.

Comme en tout point n'appartenant pas à P, la fonction $F(x, y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière, il en résulte que les ensembles E et P sont identiques. Par conséquent, l'ensemble P ayant effectivement la puissance du continu, comme nous l'avons remarqué plus haut, il en sera de même de l'ensemble E.

18. Soit $F(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n$ une fonction entière en x et y d'ordre apparent total fini λ et d'ordre apparent μ et à croissance régulière par rapport à y (μ étant un nombre non entier). Désignons par $r_n(x)$ le module du zéro de rang n de la fonction entière en y, $F(x,y)$. En appliquant la deuxième des propositions de M. E. Borel, rappelées au n° **2** et la proposition du n° **16**, on obtient aisément le résultat suivant :

L'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ est déterminé pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pouvant avoir la puissance du continu pour lesquels il ne sera plus déterminé.

Remarque sur une classe de fonctions entières de deux variables.

19. Soit $\Phi(x, y) = x^q + a_1(y)x^{q-1} + a_2(y)x^{q-2} + \ldots + a_q(y)$ une fonction entière en x et y d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière par rapport à y. Je dis qu'*il existe une infinité de cercles $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ concentriques à l'origine et de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a à la fois*

$$|a_1(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}}, \quad |a_2(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}}, \quad \ldots, \quad |a_q(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \quad (\eta > 0).$$

Désignons à cet effet par $N(R, r)$ la fonction majorante de $\Phi(x, y)$, c'est-à-dire la fonction définie par la relation

$$N(R, r) = R^q + A_1(r) R^{q-1} + \ldots + A_q(r);$$

$A_i(r)$ étant la fonction majorante de $a_i(y)$, nous avons quel que soit i

$$(16) \qquad A_i(r) < N(R_1, r),$$

R_1 désignant une quantité positive fixe. La fonction $\Phi(x, y)$ étant à croissance irrégulière par rapport à y, il en sera de même de la fonction $N(R, r)$, comme on le vérifie facilement en utilisant le résultat du n° **15** de notre Thèse. Par suite, il existera une infinité de valeurs de r :

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

convergeant vers l'infini et telles que l'on ait

$$N(R_1, r_n) < e^{r_n^{\mu - \eta}} \qquad (\eta > 0).$$

Par conséquent, l'inégalité (16) nous montre que l'on aura pour toutes ces valeurs de r_n et quel que soit l'indice i

$$A_i(r_n) < e^{r_n^{\mu - \eta}} \qquad (\eta > 0),$$

et comme

$$|a_i(y)| \leqq A_i(r),$$

il en résulte que l'on aura pour chaque point des cercles C_n concentriques au point $y = 0$ et de rayon r_n ($n = 1, 2, \ldots, ad\ infinitum$)

$$|a_i(y)| < e^{|y|^{\mu - \eta}} \qquad (\eta > 0),$$

et cela quel que soit i.

Cas des fonctions $F(x, y) = x - f(y)$.

20. Soit $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ une fonction entière en y d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Désignons par $r_n(x)$ le module du zéro de rang n de la fonction $x - f(y)$, ces zéros étant supposés rangés d'après la règle de Weierstrass, nous nous proposons d'étudier, comme application de ce qui précède, l'ensemble E des points du plan des x situés à distance finie pour lesquels l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ n'est plus déterminé. Si μ est un nombre non entier, d'après la deuxième des propositions de M. E. Borel rappelées au n° **2**, cet ensemble E ne contiendra aucun point. Il n'en est plus de même si μ est un nombre entier, comme nous allons le montrer dans la suite. Soit q le plus petit nombre entier tel que $\frac{\mu}{q}$ soit un nombre fractionnaire, désignons par ω une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité et considérons la fonction

$$\begin{aligned}\Phi(x, y^q) &= [x - f(y)][x - f(\omega y)]\ldots[x - f(\omega^{q-1} y)] \\ &= x^q + a_1(y)x^{q-1} + \ldots + a_q(y) \\ &= (c_0 - x)^q + \sum_{n=1} b_n(x) y^{q^n},\end{aligned}$$

les $b_n(x)$ étant des polynomes en x de degré $q - 1$ au plus. Si g_n est le coefficient maximum de $b_n(x)$, *je dis que la fonction entière en* y, $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n y^{nq}$, *est d'ordre apparent* μ *et à croissance régulière*. Admettons que cette fonction soit ou bien d'ordre apparent inférieur à μ ou bien d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière, alors d'après le n° **78** de notre Thèse et le n° **19** du présent travail, il existerait une infinité de cercles concentriques au point $y = 0$ et de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on aurait

$$|a_i(y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0;\ i = 1, 2, \ldots, q).$$

Or ces relations sont impossibles, puisque la fonction $f(y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière (*cf.* n° **4**). Il en résulte donc que la fonction $g(y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière. Par suite, si nous posons $y^q = \mathrm{Y}$, la fonction $g(\mathrm{Y}) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{Y}^n$ sera d'ordre apparent $\frac{\mu}{q}$ et à croissance régulière. Par conséquent, d'après la définition donnée au n° **16**, la fonction $\Phi(x, \mathrm{Y})$ sera une fonction entière d'ordre apparent $\frac{\mu}{q}$ et à croissance régulière par rapport à Y. Désignons par $R_n(x)$ le module du zéro de rang n de la fonction entière en Y, $\Phi(x, Y)$. Comme $\frac{\mu}{q}$ est un nombre non entier, d'après le n° **18**, l'ordre d'infinitude des $R_n(x)$ sera déterminé et égal à $\frac{q}{\mu}$ pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pour lesquels cet ordre d'infinitude n'est plus déterminé. Comme pour toute valeur finie de x, $r_n(x) = [R(x)]^{\frac{1}{q}}$, l'ordre d'infinitude des $R_n(x)$ sera déterminé et égal à $\frac{1}{\mu}$ pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pour lesquels il ne sera plus déterminé.

21. Inversement, supposons que l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ soit déterminé et égal à $\frac{1}{\mu}$ pour tous les points du plan des x, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E, je dis que la *fonction $f(y)$ est d'ordre apparent μ et à croissance régulière.* Admettons que cette fonction soit ou bien d'ordre apparent inférieur à μ ou bien d'ordre apparent μ et à croissance irrégulière. Il existera au moins une infinité de cercles concentriques au point $y = 0$ et de rayons indéfiniment croissants tels que l'on ait sur chacun d'eux

$$|x - f(\omega^i y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0;\ i = 1, 2, \ldots, q)$$

pour tout point x d'un cercle C concentrique au point $x = 0$ et de rayon R. Alors nous aurons dans les mêmes conditions

$$|\Phi(x, Y)| < e^{|Y|^{\frac{\mu}{q}-\eta'}} \qquad (\eta' > 0,\ Y = y^q),$$

d'où l'on déduit que pour chaque point x de C, la plus grande limite de la suite des nombres $\frac{\log R_n(x)}{\log n}$ est au moins égale à $\frac{1}{\frac{\mu}{q} - \eta'}$ (¹), ce qui est impossible puisque, par hypothèse, cette plus grande limite est égale à $\frac{1}{\frac{\mu}{q}}$ pour un point x au moins du cercle C. Cette contradiction établit la propriété énoncée.

(¹) *Cf.* Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 110

22. Il nous reste encore à montrer que l'ensemble E peut avoir effectivement la puissance du continu. A cet effet, nous considérons la fonction

$$\varphi(y) = \frac{k_0}{1} + \frac{k_1 y}{1} + \frac{k_2 y^2}{1.2} + \ldots + \frac{k_n y^n}{1.2\ldots n} + \ldots \qquad (|k_n| < A;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

les constantes k_n étant choisies de telle façon que la fonction

$$H(x, y) = e^y x - \varphi(y)$$

soit d'ordre apparent 1 et à croissance régulière par rapport à y pour tous les points du plan des x, sauf pour les points d'un ensemble ponctuel E_1 ayant effectivement la puissance du continu, pour lesquels $H(x, y)$ est une fonction entière en y d'ordre apparent 1 et à croissance irrégulière, ce qui est possible (*cf.* n° **17**). Nous supposons en outre que la constante k_0 ait été choisie de telle manière que le produit $\varphi(y)\varphi(-y)$ soit d'ordre apparent 1 et à croissance régulière, ce qui est également possible d'après le n° **20**. Ceci étant, considérons le produit

$$\begin{aligned} \Psi(x, Y) &= [e^y x - \varphi(y)][e^{-y} x - \varphi(-y)] \\ &= x^2 - [\varphi(y) e^{-y} + \varphi(-y) e^y] + \varphi(y)\varphi(-y) \\ &= x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) y^{2n} \qquad (Y = y^2). \end{aligned}$$

Si g_n est le coefficient maximum de $b_n(x)$, la fonction $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n y^{2n}$ sera d'ordre apparent 1 et à croissance régulière, car s'il n'en était pas ainsi, on en conclurait, en appliquant la proposition du n° **19**, que la fonction $\varphi(y)\varphi(-y)$ est à croissance irrégulière, ce qui est contraire à notre hypothèse. Par suite, la fonction $g(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n Y^n$ est d'ordre apparent $\frac{1}{2}$ et à croissance régulière. Si $R_n(x)$ est le module du zéro de rang n de la fonction entière en Y, $\Psi(x, Y)$, l'ordre d'infinitude des $R_n(x)$ sera déterminé et égal à 2 pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un certain ensemble ponctuel E pour lesquels il n'est plus déterminé. Je dis que cet ensemble E a effectivement la puissance du continu. Il suffit pour cela de montrer que tout point $x = a$ de E_1 fait partie de E. La fonction $H(a, y)$ étant d'ordre apparent 1 et à croissance irrégulière, il existe une infinité de cercles concentriques à l'origine et de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a

$$|H(a, y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}}. \qquad |H(a, -y)| < e^{|y|^{\mu-\eta}} \qquad (\eta > 0).$$

Par suite, nous aurons pour une infinité de cercles concentriques au point $Y = 0$ et de rayons indéfiniment croissants :

$$|\Psi(a, Y)| < e^{|Y|^{\frac{1}{2}-\eta'}} \qquad (\eta' > 0).$$

Il en résulte que l'ordre d'infinitude des $R_n(a)$ n'est pas déterminé. Donc l'ensemble E_1 est une partie aliquote de E.

Les zéros de la fonction entière en y, $H(x, y)$, sont pour chaque valeur de x identiques aux zéros de la fonction $x - \frac{\varphi(y)}{e^y} = x - h(y)$. Si $r_n(x)$ est le module du zéro de rang n de $x - h(y)$, il s'ensuit, en vertu de la relation $r_n(x)^2 = R(x)$, que l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ est déterminé et égal à 1 pour tous les points du plan des x, sauf pour les points d'un ensemble ponctuel E ayant effectivement la puissance du continu pour lesquels cet ordre d'infinitude n'est plus déterminé. De plus, d'après la proposition du numéro précédent, la fonction $h(y)$ est d'ordre apparent 1 et à croissance régulière. Nous pouvons donc, en tenant compte de ce qui précède et du résultat du n° **20**, énoncer le théorème suivant :

Si $f(y)$ est une fonction entière d'ordre apparent entier et à croissance régulière, l'ordre d'infinitude des $r_n(x)$ est déterminé pour tous les points du plan des x situés à distance finie, sauf au plus pour les points d'un ensemble ponctuel E *pouvant avoir la puissance du continu, pour lesquels cet ordre d'infinitude n'est plus déterminé.*

La question posée par M. E. Borel à la page 112 de ses *Leçons sur les fonctions entières* est donc résolue dans un cas particulier.