JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. STUDY

Sur les équations du mouvement d'un corps solide

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 7 (1911), p. 97-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__97_0>

Sur les équations du mouvement d'un corps solide;

PAR M. E. STUDY.

(Traduit par M. R. GARNIER.)

M. Study a introduit, pour définir la position d'un solide, un système de huit coordonnées homogènes liées par une relation quadratique, analogue aux six coordonnées d'une droite d'après Plücker (¹). M. Appell ayant demandé à M. Study s'il avait calculé l'énergie cinétique T des corps, dans son système, en vue des applications possibles à la Dynamique, a reçu en réponse l'exposé suivant que nous sommes heureux de reproduire.

(*Note de la Rédaction.*)

Nous définirons la position d'un solide mobile par celle d'un trièdre de coordonnées rectangulaires (y), invariablement lié au corps. Soient y_1, y_2, y_3 les coordonnées par rapport à ce trièdre d'un point quelconque du corps, et x_1, x_2, x_3 les coordonnées du même point par rapport à un second trièdre de coordonnées (x), que nous regarderons comme *fixe*, et qui est orienté comme le premier trièdre. Le passage $\{\overrightarrow{xy}\}$ des coordonnées x_i aux coordonnées y_k s'effectuera à l'aide d'une transformation orthogonale *propre* S (c'est-à-dire de déterminant 1), dont nous écrirons les coefficients sous forme de frac-

---

(¹) *Comptes rendus*, 1910 (Notes de MM. Study et Bricard).

tions avec un dénominateur commun :

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{00}y_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ a_{00}y_2 = a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ a_{00}y_3 = a_{30} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

Les coefficients de la transformation inverse S^{-1}, qui effectue le passage $\left\{\overrightarrow{yx}\right\}$ des coordonnées y_k aux coordonnées x_i, seront désignés, en conséquence, de la façon suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{00}x_1 = a_{01} + a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3, \\ a_{00}x_2 = a_{02} + a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3, \\ a_{00}x_3 = a_{03} + a_{13}y_1 + a_{23}y_3 + a_{33}y_3. \end{cases}$$

Les seize coefficients homogènes a_{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ sont liés d'ailleurs par certaines équations algébriques qu'on vérifiera toutes identiquement en choisissant huit paramètres liés par la relation

$$(3)\qquad \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$

et en calculant à l'aide de ces paramètres les seize coefficients a_{ik} par les formules suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\ a_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \\ a_{22} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \\ a_{33} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\ a_{23} = 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1), \qquad a_{32} = 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1), \\ a_{31} = 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2), \qquad a_{13} = 2(\alpha_3\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2), \\ a_{12} = 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3), \qquad a_{21} = 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3); \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{10} = 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0), \\ a_{20} = 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0), \\ a_{30} = 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0), \\ a_{01} = 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0), \\ a_{02} = 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0), \\ a_{03} = 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0). \end{cases}$$

De plus, les mêmes paramètres (α, β) permettent d'exprimer d'une façon tout à fait semblable les formules de transformation analogues à (1) et (2) pour les coordonnées de droites et les coordonnées tangentielles. Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les projections d'un vecteur sur les axes fixes (x), et par η_1, η_2 η_3 les projections du même vecteur sur les axes (y); il vient alors, d'après (1) et (2),

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{00}\eta_k &= a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 \\ a_{00}\xi_k &= a_{1k}\eta_1 + a_{2k}\eta_2 + a_{3k}\eta_3 \end{aligned} \right. \qquad (k = 1, 2, 3).$$

et si l'on pose, en outre,

$$\begin{array}{llll} P_{01} = \xi_1, & P_{23} = x_2\xi_3 - x_3\xi_2; & Q_{01} = \eta_1, & Q_{23} = y_2\eta_3 - y_3\eta_2; \\ P_{02} = \xi_2, & P_{31} = x_3\xi_1 - x_1\xi_3; & Q_{02} = \eta_2, & Q_{31} = y_3\eta_1 - y_1\eta_3; \\ P_{03} = \xi_3, & P_{12} = x_1\xi_2 - x_2\xi_1; & Q_{03} = \eta_3, & Q_{12} = y_1\eta_2 - y_2\eta_1; \end{array}$$

il en résultera :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{00}Q_{01} &= a_{11}P_{01} + a_{12}P_{02} + a_{13}P_{03}, \\ a_{00}Q_{23} &= a_{11}P_{23} + a_{12}P_{31} + a_{13}P_{12} + b_{11}P_{01} + b_{12}P_{02} + b_{13}P_{03}; \end{aligned} \right.$$

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{00}P_{01} &= a_{11}Q_{01} + a_{21}Q_{02} + a_{31}Q_{03}, \\ a_{00}P_{23} &= a_{11}Q_{23} + a_{21}Q_{31} + a_{31}Q_{12} + b_{11}Q_{01} + b_{21}Q_{02} + b_{31}Q_{03}; \end{aligned} \right.$$

. . . .

Dans ces formules les coefficients b_{ik} ont les valeurs suivantes :

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_{11} &= 2(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3), \\ b_{23} &= 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0), \\ b_{32} &= 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0); \end{aligned} \right.$$

. . . .

Enfin, nous obtenons pour la transformation des coordonnées tangentielles u_i et v_k, associées respectivement aux systèmes (x) et (y), les équations suivantes :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{00}v_0 &= a_{00}u_0 + a_{01}u_1 + a_{02}u_2 + a_{03}u_3, \\ a_{00}v_k &= \quad \star \quad a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + a_{k3}u_3, \end{aligned} \right.$$

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_{00}u_0 &= a_{00}v_0 + a_{10}v_1 + a_{20}v_2 + a_{30}v_3, \\ a_{00}u_k &= \quad \star \quad a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2 + a_{3k}v_3 \end{aligned} \right.$$

$$(k = 1, 2, 3).$$

Les formules (4) renferment les expressions classiques découvertes par Euler. Naturellement on devra supposer que a_{00} est différent de zéro ; autrement dit, si nous nous limitons aux domaines réels, les paramètres α_0, α_1, α_2, α_3 ne peuvent tous être nuls. On voit de plus que les équations (4), (3) et (5) donnent toujours, pour les rapports des huit paramètres (α, β), une solution et *une seule;* en outre, pour passer de la transformation S à son inverse S^{-1}, il suffit de remplacer respectivement les huit quantités

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

par les huit quantités

$$\alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : \beta_0 : -\beta_1 : -\beta_2 : -\beta_3.$$

Enfin, l'emploi des paramètres (α, β) permet d'effectuer d'une façon très simple la composition des transformations orthogonales. Soit, en effet, $S(\alpha, \beta)$ la transformation qui fait passer du système de coordonnées (x) au système (y), et, de même, $S'(\alpha', \beta')$ la transformation qui change (y) en un troisième système (z); le passage de (x) à (z) s'effectuera au moyen d'une transformation orthogonale S'' appelée, comme on sait, le produit des deux premières : $S'' = SS'$. Or les paramètres (α'', β'') de cette transformation composée se laissent exprimer par les formules suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_0\alpha'_0 - \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3 = \alpha'_0, \\ &\alpha_0\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_0 + \alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2 = \alpha''_1, \\ &\alpha_0\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_0 + \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3 = \alpha''_2, \\ &\alpha_0\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_0 + \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1 = \alpha''_3; \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_0\beta'_0 - \alpha_1\beta'_1 - \alpha_2\beta'_2 - \alpha_3\beta'_3 + \beta_0\alpha'_0 - \beta_1\alpha'_1 - \beta_2\alpha'_2 - \beta_3\alpha'_3 = \beta''_0, \\ &\alpha_0\beta'_1 + \alpha_1\beta'_0 + \alpha_2\beta'_3 - \alpha_3\beta'_2 + \beta_0\alpha'_1 + \beta_1\alpha'_0 + \beta_2\alpha'_3 - \beta_3\alpha'_2 = \beta''_1, \\ &\alpha_0\beta'_2 + \alpha_2\beta'_0 + \alpha_3\beta'_1 - \alpha_1\beta'_3 + \beta_0\alpha'_2 + \beta_2\alpha'_0 + \beta_3\alpha'_1 - \beta_1\alpha'_3 = \beta''_2, \\ &\alpha_0\beta'_3 + \alpha_3\beta'_0 + \alpha_1\beta'_2 - \alpha_2\beta'_1 + \beta_0\alpha'_3 + \beta_3\alpha'_0 + \beta_1\alpha'_2 - \beta_2\alpha'_1 = \beta''_3. \end{aligned} \right.$$

Les formules (12), déjà connues de Gauss, ont été retrouvées plus tard, indépendamment (autant que nous le sachions), par Cayley et Hamilton. Elles sont connues sous le nom de *théorème de multiplication des quaternions*. De même, l'ensemble des formules (12) et (13) exprime le théorème de multiplication d'un système de grandeurs complexes : c'est un des systèmes considérés d'abord par Clifford sous le nom de *biquaternions*.

Relativement à la théorie des paramètres (α, β), nous renvoyons à un Mémoire des *Mathematische Annalen* (t. XXIX, 1891) et au Traité : *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1903), où l'on trouvera des applications à la Cinématique.

Supposons maintenant que les paramètres (α, β) soient des fonctions données d'une variable t que nous regarderons comme la *mesure du temps*, ces fonctions étant d'ailleurs continues et possédant des dérivées des deux premiers ordres au moins. Le corps solide (y) se meut alors de telle sorte que pendant l'élément de temps dt le point y passe de la position x qu'il occupait en l'instant t à la position voisine $x + dx$. La transformation infinitésimale correspondante est manifestement

$$\Sigma = S(S + dS)^{-1},$$

où le symbole $S + dS$ désigne la transformation $S(t + dt)$ correspondant à l'argument $t + dt$. Comme y se déduit de x à l'aide de S, la *même* transformation infinitésimale, rapportée au système de coordonnées correspondant à la situation du trièdre y en l'instant t, sera donnée par

$$S^{-1}\Sigma S = (S + dS)^{-1}S.$$

Ce déplacement infinitésimal permet d'obtenir les coordonnées du point $x + dx$ dans le système de coordonnées (y) *qui correspond à l'instant* t. On peut le calculer suivant la règle donnée précédemment [formules (12), (13)]. Il est d'ailleurs loisible de négliger les termes qui sont, par rapport à dt, d'ordre supérieur à 1; on obtient ainsi pour les paramètres respectifs de $(S + dS)^{-1}S$ des expressions de la forme

$$(14)\qquad 1 + \frac{1}{2}\frac{N'}{N}dt : -\frac{1}{2}\Delta_{01}\,dt : -\frac{1}{2}\Delta_{02}\,dt : -\frac{1}{2}\Delta_{03}\,dt$$
$$: 0 : -\frac{1}{2}\Delta_{23}\,dt : -\frac{1}{2}\Delta_{31}\,dt : -\frac{1}{2}\Delta_{12}\,dt,$$

où l'on a posé pour abréger :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} N &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \;(= a_{00}),\\ N\Delta_{01} &= -2(\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2' - \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0'),\\ N\Delta_{23} &= -2(\alpha_2\beta_3' - \alpha_3\beta_2' - \alpha_0\beta_1' + \alpha_1\beta_0' - \beta_2\alpha_3' + \beta_3\alpha_2' + \beta_0\alpha_1' - \beta_1\alpha_0'),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et où, bien entendu, α'_0, par exemple, désigne $\frac{d\alpha_0}{dt}$. L'introduction des valeurs (14) dans les formules (1) donne finalement la transformation infinitésimale cherchée. Nous obtenons ainsi les formules ci-dessous, où nous avons désigné par δt et δy_k les accroissements de t et de y_k :

$$
(16)\qquad \left\{\begin{aligned}
\delta y_1 &= \{\Delta_{23} \quad \star \quad - \Delta_{03} y_2 + \Delta_{02} y_3\}\,\delta t,\\
\delta y_2 &= \{\Delta_{31} + \Delta_{03} y_1 \quad \star \quad - \Delta_{01} y_3\}\,\delta t,\\
\delta y_3 &= \{\Delta_{12} - \Delta_{02} y_1 + \Delta_{01} y_2 \quad \star \quad\}\,\delta t.
\end{aligned}\right.
$$

Ce sont là des équations connues, abstraction faite des notations (¹); le seul point nouveau réside dans les expressions (15) des six coefficients Δ_{ik} par les paramètres (α, β).

Par un procédé classique nous allons déduire des équations (16) les conséquences suivantes :

Remarquons d'abord que pour obtenir le *mouvement* (*relatif*) *apparent du système fixe* (x) pendant l'élément de temps $dt = \delta t$, tel que se le représente un observateur lié au corps mobile, il suffit d'effectuer le mouvement infinitésimal *inverse* de (16). Les coordonnées, dans le système mobile (y), du vecteur qui représente la vitesse apparente d'un point fixe (x), ont alors les valeurs suivantes (où $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ désignent les coordonnées de x):

$$
(17)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\bar{y}_1}{dt} &= -\Delta_{23} \quad \star \quad + \Delta_{03}\bar{y}_2 - \Delta_{02}\bar{y}_3,\\
\frac{d\bar{y}_2}{dt} &= -\Delta_{31} - \Delta_{03}\bar{y}_1 \quad \star \quad + \Delta_{01}\bar{y}_3,\\
\frac{d\bar{y}_3}{dt} &= -\Delta_{12} + \Delta_{02}\bar{y}_1 - \Delta_{01}\bar{y}_2 \quad \star \quad .
\end{aligned}\right.
$$

En particulier, appliquons successivement ces équations aux points

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1),$$

(¹) Les notations classiques sont :

$$u = \Delta_{23}, \quad v = \Delta_{31}, \quad w = \Delta_{12}; \qquad p = \Delta_{01}, \quad q = \Delta_{02}, \quad r = \Delta_{03}.$$

Nous préférons des symboles qui mettent en évidence la loi de formation des ormules.

dont les coordonnées $\overline{y}_k$ se calculent à l'aide des formules (1). Nous obtiendrons ainsi pour les coefficients de la transformation (1) les équations différentielles suivantes :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{a_{10}}{a_{00}}\right) = -\Delta_{23} + \Delta_{03}\left(\dfrac{a_{20}}{a_{00}}\right) - \Delta_{02}\left(\dfrac{a_{30}}{a_{00}}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{a_{11}}{a_{00}}\right) = \quad \star \; + \Delta_{03}\left(\dfrac{a_{21}}{a_{00}}\right) - \Delta_{02}\left(\dfrac{a_{31}}{a_{00}}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{a_{23}}{a_{00}}\right) = \quad \star \; + \Delta_{01}\left(\dfrac{a_{33}}{a_{00}}\right) - \Delta_{03}\left(\dfrac{a_{13}}{a_{00}}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{a_{32}}{a_{00}}\right) = \quad \star \; + \Delta_{02}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{00}}\right) - \Delta_{01}\left(\dfrac{a_{22}}{a_{00}}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

On obtient des équations correspondant à (17) en attribuant des valeurs fixes aux coordonnées de droites P_{ik}, ou à des quantités se comportant comme P_{ik}. Les relations (7) associent alors aux P_{ik} des quantités $\overline{Q}_{ik}$ satisfaisant aux équations suivantes, qui représentent encore le mouvement apparent du système fixe :

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\overline{Q}_{01}}{dt} = \Delta_{03}\overline{Q}_{02} - \Delta_{02}\overline{Q}_{03}, \\ \dfrac{d\overline{Q}_{23}}{dt} = \Delta_{03}\overline{Q}_{31} - \Delta_{02}\overline{Q}_{12} + \Delta_{12}\overline{Q}_{02} - \Delta_{31}\overline{Q}_{03}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

L'application de ces formules aux systèmes particuliers

$$(P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{23}, P_{31}, P_{12}) = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \ldots$$

donne [1] les équations différentielles ci-dessous :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{b_{11}}{a_{00}}\right) = \Delta_{03}\left(\dfrac{b_{21}}{a_{00}}\right) - \Delta_{02}\left(\dfrac{b_{31}}{a_{00}}\right) + \Delta_{12}\left(\dfrac{a_{21}}{a_{00}}\right) - \Delta_{31}\left(\dfrac{a_{31}}{a_{00}}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{b_{23}}{a_{00}}\right) = \Delta_{01}\left(\dfrac{b_{33}}{a_{00}}\right) - \Delta_{03}\left(\dfrac{b_{13}}{a_{00}}\right) + \Delta_{23}\left(\dfrac{a_{33}}{a_{00}}\right) - \Delta_{12}\left(\dfrac{a_{13}}{a_{00}}\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{b_{32}}{a_{00}}\right) = \Delta_{02}\left(\dfrac{b_{12}}{a_{00}}\right) - \Delta_{01}\left(\dfrac{b_{22}}{a_{00}}\right) + \Delta_{31}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{00}}\right) - \Delta_{23}\left(\dfrac{a_{22}}{a_{00}}\right). \end{array}\right.$$

---

[1] Plus simplement, ces équations se déduisent des trois dernières équations (18) par une sorte de formation polaire. Cf. *Geometrie der Dynamen*, § 23.

Écrivons enfin les formules analogues à (17) et (19) pour les coordonnées tangentielles. Remarquons à cet effet que les équations (1) et (10) entraînent l'identité

$$v_0 + v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3.$$

Exprimons que le premier membre conserve la même valeur après le déplacement infinitésimal pour lequel les composantes de la vitesse ont les expressions (17); nous obtenons ainsi les équations suivantes, analogues à (17) et (19):

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{rcllll} \dfrac{d\bar v_0}{dt} & = & & \Delta_{23}\bar v_1 & + \Delta_{31}\bar v_2 & + \Delta_{12}\bar v_3, \\ \dfrac{d\bar v_1}{dt} & = & & \star & + \Delta_{03}\bar v_2 & - \Delta_{02}\bar v_3, \\ \dfrac{d\bar v_2}{dt} & = & - & \Delta_{03}\bar v_1 & \star & + \Delta_{01}\bar v_3, \\ \dfrac{d\bar v_3}{dt} & = & & \Delta_{02}\bar v_1 & - \Delta_{01}\bar v_2 & \star\ . \end{array}\right.$$

Appliquées aux cas particuliers $(u_0, u_1, u_2, u_3) = (1, 1, 0, 0)$, ..., ces formules donnent enfin les équations différentielles

$$(22)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{a_{0k}}{a_{00}}\right) = \Delta_{23}\left(\frac{a_{1k}}{a_{00}}\right) + \Delta_{31}\left(\frac{a_{2k}}{a_{00}}\right) + \Delta_{12}\left(\frac{a_{3k}}{a_{00}}\right) \qquad (k = 1, 2, 3),$$

qui complètent le système des équations (18) et (20).

Dans toutes ces formules relatives à la *Cinématique pure*, nous avons indiqué, en surmontant d'un trait les lettres y, Q, v, que les figures auxquelles elles se rapportent doivent être considérées comme appartenant à l'espace *fixe*. Il s'agit donc ainsi du mouvement apparent dont croit être témoin un observateur lié invariablement au trièdre mobile.

Les formules (18), (20), (22), dont la vérification à l'aide de simples différentiations serait un peu laborieuse, sont très utiles dans l'application des paramètres (α, β) à la Mécanique. Pour ne pas allonger ce travail nous considérerons seulement le cas le plus simple, celui d'un solide libre, et, là encore, nous nous bornerons à la formation des équations différentielles vérifiées par les paramètres (α, β) et qui définissent le mouvement du corps. Ainsi, nous n'aborderons pas la théorie de l'intégration de ces équations.

Nous regarderons le solide à étudier comme formé d'un nombre fini de points matériels isolés, ce qui n'implique, comme on sait, aucune restriction dans l'énoncé des problèmes de la Dynamique. Soient m_h la masse du point y_h, $\xi_h = x'_h$ le vecteur qui représente en grandeur et en direction la vitesse instantanée de ce point, et $\xi_{kh} = x'_{kh}$ ses coordonnées dans le système fixe (x); appelons η_h le même vecteur rapporté aux axes mobiles, et η_{kh} ses coordonnées dans le système mobile (y). A l'aide des éléments précédents on peut former une *grandeur géométrique* Ξ ou H, définie par six coordonnées, et qui est pour le solide l'analogue de la quantité de mouvement d'un point matériel isolé; on pourrait l'appeler la *quantité de mouvement du solide* (¹) :

$$\Xi_{01} = \Sigma m_h \xi_{1h}, \qquad \Xi_{23} = \Sigma m_h (x_{2h}\xi_{3h} - x_{3h}\xi_{2h}),$$
$$H_{01} = \Sigma m_h \eta_{1h}, \qquad H_{23} = \Sigma m_h (y_{2h}\eta_{3h} - y_{3h}\eta_{2h}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\xi_{kh} = x'_{kh} \quad \frac{dx_{kh}}{dt}\right).$$

Les deux systèmes de composantes Ξ_{ik}, H_{ik} de la quantité de mouvement se déduisent l'un de l'autre par des substitutions linéaires identiques à celles que nous avons établies précédemment entre les coordonnées de droites P_{ik} et Q_{ik}. Mais, d'après (16), les vecteurs η_h représentant les vitesses satisfont aux équations

$$\eta_{1h} = \Lambda_{23} - \Lambda_{03}\, y_{2h} + \Lambda_{02}\, y_{3h}, \qquad \ldots;$$

en posant, pour abréger,

$$M = \Sigma m_h, \qquad M_k = \Sigma m_h y_{kh}, \qquad M_{ik} = \Sigma m_h y_{ih} y_{kh};$$

on aura donc les équations

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{01} = M\,\Lambda_{23} - M_2\,\Lambda_{03} + M_3\,\Lambda_{02}, \\ H_{23} = M_2\Lambda_{12} - M_{12}\Lambda_{02} + M_{22}\Lambda_{01} - M_3\Lambda_{31} + M_{33}\Lambda_{01} - M_{13}\Lambda_{03}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

(¹) En allemand, *Impuls*.

De plus, on obtient pour l'expression de l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m_h(\xi_{1h}^2 + \xi_{2h}^2 + \xi_{3h}^2) = \frac{1}{2}\Sigma m_h(\eta_{1h}^2 + \eta_{2h}^2 + \eta_{3h}^2)$$

du corps mobile ou, plus exactement, pour 2T, la formule suivante :

$$(24)\qquad \begin{aligned} 2T = {} & M(\Delta_{23}^2 + \Delta_{31}^2 + \Delta_{12}^2) \\ & - 2M_1(\Delta_{02}\Delta_{12} - \Delta_{03}\Delta_{31}) - 2M_2(\Delta_{03}\Delta_{23} - \Delta_{01}\Delta_{12}) \\ & - 2M_3(\Delta_{01}\Delta_{31} - \Delta_{02}\Delta_{31}) + (M_{22} + M_{33})\Delta_{01}^2 \\ & + (M_{33} + M_{11})\Delta_{02}^2 + (M_{11} + M_{22})\Delta_{03}^2 \\ & - 2M_{23}\Delta_{02}\Delta_{03} - 2M_{31}\Delta_{03}\Delta_{02} - 2M_{12}\Delta_{01}\Delta_{02}; \end{aligned}$$

on peut donc poser

$$\begin{aligned} H_{01} &= \frac{\partial T}{\partial \Delta_{23}}, & H_{02} &= \frac{\partial T}{\partial \Delta_{31}}, & H_{03} &= \frac{\partial T}{\partial \Delta_{12}}, \\ H_{23} &= \frac{\partial T}{\partial \Delta_{01}}, & H_{31} &= \frac{\partial T}{\partial \Delta_{02}}, & H_{12} &= \frac{\partial T}{\partial \Delta_{03}}, \end{aligned}$$

avec

$$(25)\qquad T = \frac{1}{2}\{\Delta_{01}H_{23} + \Delta_{02}H_{31} + \Delta_{03}H_{12} + \Delta_{23}H_{01} + \Delta_{31}H_{02} + \Delta_{12}H_{03}\}.$$

Dans les formules précédentes les quantités Δ_{ik} sont supposées exprimées à l'aide des relations (15) en fonction des paramètres (α, β) et de leurs dérivées premières par rapport à t.

Supposons maintenant que les points x_h ou y_h soient soumis à des forces dont les composantes soient X_h par rapport aux axes fixes et Y_h par rapport aux axes mobiles. A l'aide de ces quantités on peut former dans chaque système d'axes les coordonnées d'une *dyname* X ou Y :

$$\begin{aligned} X_{01} &= \Sigma X_{1h}, & &\Sigma(x_{2h}X_{3h} - x_{3h}X_{2h}), \\ Y_{01} &= \Sigma Y_{1h}, & Y_{23} &= \Sigma(y_{2h}Y_{3h} - y_{3h}Y_{2h}); \end{aligned}$$

et, entre ces deux systèmes de coordonnées, nous retrouvons les mêmes relations (7) et (8) qu'entre les P_{ik} et les Q_{ik}.

Cela étant, pendant le mouvement d'un solide soumis à l'action de la dyname X, les équations suivantes sont vérifiées :

$$(26)\qquad \frac{d\Xi_{ik}}{dt} = X_{ik} \qquad \{ik = 01, 02, 03, 23, 31, 12\};$$

réciproquement, on sait — et il en résulte de la suite de ce travail — que ces équations définissent complètement le mouvement. Passons alors du trièdre fixe au trièdre mobile; les équations (26) se transformeront en les suivantes:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{dH_{01}}{dt} - \Delta_{03}H_{02} + \Delta_{02}H_{03} = Y_{01}, \\ \dfrac{dH_{23}}{dt} - \Delta_{03}H_{31} + \Delta_{02}H_{12} - \Delta_{12}H_{02} + \Delta_{31}H_{03} = Y_{23}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Remplaçons dans (27) les quantités H_{ik} par leurs valeurs extraites de (23), et nous obtiendrons un système de six équations différentielles du premier ordre où les seules inconnues sont les paramètres (α, β). Par exemple, en choisissant convenablement le trièdre de coordonnées (y), de façon à annuler M_1, M_2, M_3, M_{23}, M_{31}, M_{12}, on retrouve les équations d'Euler :

$$(28)\quad \begin{cases} M\left\{\dfrac{d\Delta_{23}}{dt} + \Delta_{02}\Delta_{12} - \Delta_{03}\Delta_{31}\right\} = Y_{01}, \\ (M_{22}+M_{33})\dfrac{d\Delta_{01}}{dt} + (M_{22}-M_{33})\Delta_{02}\Delta_{03} = Y_{23}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

D'autre part, on peut transformer les équations (26) tout en les laissant résolues par rapport aux coordonnées des dynames X_{ik}; il vient alors, d'après (8),

$$a_{00}\,\Xi_{01} = a_{11}H_{01} + a_{21}H_{02} + a_{31}H_{03},$$
$$a_{00}\,\Xi_{23} = a_{11}H_{23} + a_{21}H_{31} + a_{31}H_{12} + b_{11}H_{01} + b_{21}H_{02} + b_{31}H_{03};$$

servons-nous encore des équations (23) pour exprimer les seconds membres de ces équations en fonction des Δ_{ik}; nous obtiendrons ainsi:

$$(29)\quad \Xi_{0k} = \frac{d}{dt}\left\{M\left(\frac{a_{0k}}{a_{00}}\right) + M_1\left(\frac{a_{1k}}{a_{00}}\right) + M_2\left(\frac{a_{2k}}{a_{00}}\right) + M_3\left(\frac{a_{3k}}{a_{00}}\right)\right\} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

et, dans l'hypothèse $M_1 = M_2 = M_3 = 0$, $M_{23} = M_{31} = M_{12} = 0$, le système des équations du mouvement prend la forme

$$
(30)\quad \begin{cases}
\mathrm{M}\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{a_{01}}{a_{00}}\right) = \mathrm{X}_{01}, \qquad \mathrm{M}\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{a_{02}}{a_{00}}\right) = \mathrm{X}_{02}, \qquad \mathrm{M}\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{a_{03}}{a_{00}}\right) = \mathrm{X}_{03}, \\
(\mathrm{M}_{22}+\mathrm{M}_{33})\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{a_{11}\Delta_{01}}{a_{00}}\right) + (\mathrm{M}_{33}+\mathrm{M}_{11})\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{a_{11}\Delta_{02}}{a_{00}}\right) \\
\qquad + (\mathrm{M}_{11}+\mathrm{M}_{22})\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{a_{31}\Delta_{03}}{a_{00}}\right) + \mathrm{M}\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{b_{11}\Delta_{23}+b_{21}\Delta_{31}+b_{31}\Delta_{12}}{a_{00}}\right\} = \mathrm{X}_{23}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Les équations différentielles du mouvement vont s'écrire différemment si l'on se sert de la forme découverte par Lagrange; on aura alors

$$
(31)\quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta'_k}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta_k} = \mathfrak{A}_k + \lambda \alpha_k \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha'_k}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha_k} = \mathfrak{B}_k + \lambda \beta_k
\end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)
$$

avec

$$
(32)\quad \begin{cases}
\mathrm{N}\mathfrak{A}_0 = 2\{-\alpha_1\mathrm{X}_{01} - \alpha_2\mathrm{X}_{02} - \alpha_3\mathrm{X}_{03}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{A}_1 = 2\{\alpha_0\mathrm{X}_{01} + \alpha_3\mathrm{X}_{02} - \alpha_2\mathrm{X}_{03}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{A}_2 = 2\{-\alpha_3\mathrm{X}_{01} + \alpha_0\mathrm{X}_{02} + \alpha_1\mathrm{X}_{03}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{A}_3 = 2\{\alpha_2\mathrm{X}_{01} - \alpha_1\mathrm{X}_{02} + \alpha_0\mathrm{X}_{03}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{B}_0 = 2\{-\beta_1\mathrm{X}_{01} - \beta_2\mathrm{X}_{02} - \beta_3\mathrm{X}_{03} - \alpha_1\mathrm{X}_{23} - \alpha_2\mathrm{X}_{31} - \alpha_3\mathrm{X}_{12}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{B}_1 = 2\{\beta_0\mathrm{X}_{01} + \beta_3\mathrm{X}_{02} - \beta_2\mathrm{X}_{03} + \alpha_0\mathrm{X}_{23} + \alpha_3\mathrm{X}_{31} - \alpha_2\mathrm{X}_{12}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{B}_2 = 2\{-\beta_3\mathrm{X}_{01} + \beta_0\mathrm{X}_{02} + \beta_1\mathrm{X}_{03} - \alpha_3\mathrm{X}_{23} + \alpha_0\mathrm{X}_{31} + \alpha_1\mathrm{X}_{12}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{B}_3 = 2\{\beta_2\mathrm{X}_{01} - \beta_1\mathrm{X}_{02} + \beta_0\mathrm{X}_{03} + \alpha_2\mathrm{X}_{23} - \alpha_1\mathrm{X}_{31} + \alpha_0\mathrm{X}_{12}\},
\end{cases}
$$

$$
(33)\quad \begin{cases}
\mathrm{N}\mathfrak{A}_0 = 2\{-\alpha_1\mathrm{Y}_{01} - \alpha_2\mathrm{Y}_{02} - \alpha_3\mathrm{Y}_{03}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{A}_1 = 2\{\alpha_0\mathrm{Y}_{01} - \alpha_3\mathrm{Y}_{02} + \alpha_2\mathrm{Y}_{05}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{A}_2 = 2\{\alpha_3\mathrm{Y}_{01} + \alpha_0\mathrm{Y}_{02} - \alpha_1\mathrm{Y}_{03}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{A}_3 = 2\{-\alpha_2\mathrm{Y}_{01} + \alpha_1\mathrm{Y}_{02} + \alpha_0\mathrm{Y}_{03}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{B}_0 = 2\{-\beta_1\mathrm{Y}_{01} - \beta_2\mathrm{Y}_{02} - \beta_3\mathrm{Y}_{03} - \alpha_1\mathrm{Y}_{23} - \alpha_2\mathrm{Y}_{31} - \alpha_3\mathrm{Y}_{12}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{B}_1 = 2\{\beta_0\mathrm{Y}_{01} - \beta_3\mathrm{Y}_{02} + \beta_2\mathrm{Y}_{03} + \alpha_0\mathrm{Y}_{23} - \alpha_3\mathrm{Y}_{31} + \alpha_2\mathrm{Y}_{12}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{B}_2 = 2\{\beta_3\mathrm{Y}_{01} + \beta_0\mathrm{Y}_{02} - \beta_1\mathrm{Y}_{03} + \alpha_3\mathrm{Y}_{23} + \alpha_0\mathrm{Y}_{31} - \alpha_1\mathrm{Y}_{12}\}, \\
\mathrm{N}\mathfrak{B}_3 = 2\{-\beta_2\mathrm{Y}_{01} + \beta_1\mathrm{Y}_{02} + \beta_0\mathrm{Y}_{03} - \alpha_2\mathrm{Y}_{23} + \alpha_1\mathrm{Y}_{31} + \alpha_0\mathrm{Y}_{12}\}.
\end{cases}
$$

On obtient ces formules en partant des relations

$$\mathfrak{A}_k = \sum_{(h)} \left\{ \frac{\partial x_{1h}}{\partial \beta_k} X_{1h} + \frac{\partial x_{2h}}{\partial \beta_k} X_{2h} + \frac{\partial x_{3h}}{\partial \beta_k} X_{3h} \right\},$$
$$\mathfrak{B}_k = \sum_{(h)} \left\{ \frac{\partial x_{1h}}{\partial \alpha_k} X_{1h} + \frac{\partial x_{2h}}{\partial \alpha_k} X_{2h} + \frac{\partial x_{3h}}{\partial \alpha_k} X_{3h} \right\},$$

et en tenant compte ([1]) de (2) et (6).

Réciproquement, on a les relations

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 \mathfrak{A}_0 + \alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \alpha_2 \mathfrak{A}_2 + \alpha_3 \mathfrak{A}_3 &= 0, \\ -\alpha_1 \mathfrak{A}_0 + \alpha_0 \mathfrak{A}_1 - \alpha_3 \mathfrak{A}_2 + \alpha_2 \mathfrak{A}_3 &= 2X_{01}, \\ -\alpha_2 \mathfrak{A}_0 + \alpha_3 \mathfrak{A}_1 + \alpha_0 \mathfrak{A}_2 - \alpha_1 \mathfrak{A}_3 &= 2X_{02}, \\ -\alpha_3 \mathfrak{A}_0 - \alpha_2 \mathfrak{A}_1 + \alpha_1 \mathfrak{A}_2 + \alpha_0 \mathfrak{A}_3 &= 2X_{03}, \\ \alpha_0 \mathfrak{B}_0 + \alpha_1 \mathfrak{B}_1 + \alpha_2 \mathfrak{B}_2 + \alpha_3 \mathfrak{B}_3 + \beta_0 \mathfrak{A}_0 + \beta_1 \mathfrak{A}_1 + \beta_2 \mathfrak{A}_2 + \beta_3 \mathfrak{A}_3 &= 0, \\ -\alpha_1 \mathfrak{B}_0 + \alpha_0 \mathfrak{B}_1 - \alpha_3 \mathfrak{B}_2 + \alpha_2 \mathfrak{B}_3 - \beta_1 \mathfrak{A}_0 + \beta_0 \mathfrak{A}_1 - \beta_3 \mathfrak{A}_2 + \beta_2 \mathfrak{A}_3 &= 2X_{23}, \\ -\alpha_2 \mathfrak{B}_0 + \alpha_3 \mathfrak{B}_1 + \alpha_0 \mathfrak{B}_2 - \alpha_1 \mathfrak{B}_3 - \beta_2 \mathfrak{A}_0 + \beta_3 \mathfrak{A}_1 + \beta_0 \mathfrak{A}_2 - \beta_1 \mathfrak{A}_3 &= 2X_{31}, \\ -\alpha_3 \mathfrak{B}_0 - \alpha_2 \mathfrak{B}_1 + \alpha_1 \mathfrak{B}_2 + \alpha_0 \mathfrak{B}_3 - \beta_3 \mathfrak{A}_0 - \beta_2 \mathfrak{A}_1 + \beta_1 \mathfrak{A}_2 + \beta_0 \mathfrak{A}_3 &= 2X_{12}; \end{aligned} \right.$$

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 \mathfrak{A}_0 + \alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \alpha_2 \mathfrak{A}_2 + \alpha_3 \mathfrak{A}_3 &= 0, \\ -\alpha_1 \mathfrak{A}_0 + \alpha_0 \mathfrak{A}_1 + \alpha_3 \mathfrak{A}_2 - \alpha_2 \mathfrak{A}_3 &= 2Y_{01}, \\ -\alpha_2 \mathfrak{A}_0 - \alpha_3 \mathfrak{A}_1 + \alpha_0 \mathfrak{A}_2 + \alpha_1 \mathfrak{A}_3 &= 2Y_{02}, \\ -\alpha_3 \mathfrak{A}_0 + \alpha_2 \mathfrak{A}_1 - \alpha_1 \mathfrak{A}_2 + \alpha_0 \mathfrak{A}_3 &= 2Y_{03}, \\ \alpha_0 \mathfrak{B}_0 + \alpha_1 \mathfrak{B}_1 + \alpha_2 \mathfrak{B}_2 + \alpha_3 \mathfrak{B}_3 + \beta_0 \mathfrak{A}_0 + \beta_1 \mathfrak{A}_1 + \beta_2 \mathfrak{A}_2 + \beta_3 \mathfrak{A}_3 &= 0, \\ -\alpha_1 \mathfrak{B}_0 + \alpha_0 \mathfrak{B}_1 + \alpha_3 \mathfrak{B}_2 - \alpha_2 \mathfrak{B}_3 - \beta_1 \mathfrak{A}_0 + \beta_0 \mathfrak{A}_1 + \beta_3 \mathfrak{A}_2 - \beta_2 \mathfrak{A}_3 &= 2Y_{23}, \\ -\alpha_2 \mathfrak{B}_0 - \alpha_3 \mathfrak{B}_1 + \alpha_0 \mathfrak{B}_2 + \alpha_1 \mathfrak{B}_3 - \beta_2 \mathfrak{A}_0 - \beta_3 \mathfrak{A}_1 + \beta_0 \mathfrak{A}_2 + \beta_1 \mathfrak{A}_3 &= 2Y_{31}, \\ -\alpha_3 \mathfrak{B}_0 + \alpha_2 \mathfrak{B}_1 - \alpha_1 \mathfrak{B}_2 + \alpha_0 \mathfrak{B}_3 - \beta_3 \mathfrak{A}_0 + \beta_2 \mathfrak{A}_1 - \beta_1 \mathfrak{A}_2 + \beta_0 \mathfrak{A}_3 &= 2Y_{12}. \end{aligned} \right.$$

Substituons aux $\mathfrak{A}_k$ et $\mathfrak{B}_k$, dans ces équations, leurs valeurs tirées de (31); nous obtiendrons, en partant de la cinquième équation (34) [ou (35)], une relation linéaire entre les huit expressions (31):

$$(36)\qquad \sum \alpha_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_k} \right\} + \sum \beta_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta'_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_k} \right\} = 0.$$

([1]) Ici encore, remarquons que les formules relatives aux $\mathfrak{B}_k$ peuvent se déduire par un procédé d'extension des formules relatives aux $\mathfrak{A}_k$. Cf. *Geometrie der Dynamen*, § 23.

Ceci concorde bien avec le fait que nous nous sommes servis de paramètres homogènes ; en effet, la relation (36) est une conséquence des équations évidentes

$$\sum \left\{ \alpha_k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha_k} + \beta_k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta_k} \right\} = -2\mathrm{T}, \qquad \sum \left\{ \alpha'_k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha'_k} + \beta'_k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta'_k} \right\} = 2\mathrm{T},$$
$$\sum \left\{ \alpha_k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha'_k} + \beta_k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta'_k} \right\} = 0.$$

Les autres équations (34) ou (35) reproduisent respectivement les équations (30) ou (27). Enfin, la première des équations (34) ou (35) sert à définir le multiplicateur Λ, qui, d'après (36), dépend *seulement de la quantité de mouvement* (ainsi, il est indépendant de la dyname qui définit la variation de la quantité de mouvement). Or, on a manifestement

$$\sum \alpha_k \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta_k} = 0 ;$$

il en résulte

$$(37) \qquad \sum \alpha_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta'_k} \right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \beta_k} \right\} = -2\mathrm{M} \left\{ \Delta_{01}\Delta_{23} + \Delta_{02}\Delta_{31} + \Delta_{03}\Delta_{12} \right\}.$$

On obtient ainsi

$$(38) \qquad \mathrm{N}\Lambda = -2\mathrm{M} \left\{ \Delta_{01}\Delta_{23} + \Delta_{02}\Delta_{31} + \Delta_{03}\Delta_{12} \right\}.$$

Remarquons enfin les relations suivantes qui peuvent servir :

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{N}(\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2) = 4(\mathrm{X}_{01}^2 + \mathrm{X}_{02}^2 + \mathrm{X}_{03}^2) = 4(\mathrm{Y}_{01}^2 + \mathrm{Y}_{02}^2 + \mathrm{Y}_{03}^2), \\ & \mathrm{N}(\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3) \\ & \quad = 4(\mathrm{X}_{01}\mathrm{X}_{23} + \mathrm{X}_{02}\mathrm{X}_{31} + \mathrm{X}_{03}\mathrm{X}_{12}) = 4(\mathrm{Y}_{01}\mathrm{Y}_{23} + \mathrm{Y}_{02}\mathrm{Y}_{31} + \mathrm{Y}_{03}\mathrm{Y}_{12}), \end{aligned} \right.$$

ainsi que *l'expression du travail* mis en jeu pendant l'élément de temps dt :

$$(40) \quad \begin{aligned} & \left\{ \Delta_{01}\mathrm{Y}_{23} + \Delta_{02}\mathrm{Y}_{31} + \Delta_{03}\mathrm{Y}_{12} + \Delta_{23}\mathrm{Y}_{01} + \Delta_{31}\mathrm{Y}_{02} + \Delta_{12}\mathrm{Y}_{03} \right\} dt \\ & \quad = \left\{ \alpha'_0\mathfrak{B}_0 + \alpha'_1\mathfrak{B}_1 + \alpha'_2\mathfrak{B}_2 + \alpha'_3\mathfrak{B}_3 + \beta'_0\mathfrak{A}_0 + \beta'_1\mathfrak{A}_1 + \beta'_2\mathfrak{A}_2 + \beta'_3\mathfrak{A}_3 \right\} dt. \end{aligned}$$

L'introduction des paramètres (α, β) dans la dynamique du corps solide ne doit pas faire espérer un perfectionnement dans la théorie de l'intégration des équations du mouvement : un tel progrès est impossible, comme le montrent les résultats déjà obtenus à l'aide des paramètres d'Euler ou de certaines combinaisons complexes de ces quantités. Mais l'emploi des paramètres (α, β) est bien supérieur à l'application des formules classiques pour mettre en lumière les rapports de la mécanique du corps solide dans l'espace euclidien avec les propositions correspondantes de la mécanique *non euclidienne*. Le choix de nos notations a été fait précisément à ce point de vue. Aussi bien, dans le cas de l'espace non euclidien, ou dans les rotations autour d'un point fixe, dans l'espace à quatre dimensions, il est beaucoup plus avantageux d'introduire les paramètres analogues à (α, β), car alors on ne peut pas profiter des simplifications qui, dans l'espace euclidien, résultent des propriétés du centre de gravité d'un solide. Enfin, même dans le cas de l'espace euclidien, il y aura avantage à employer nos paramètres toutes les fois qu'il s'agira d'interpréter géométriquement les formules ; c'est ce qui arrivera, par exemple, lorsqu'on se servira des quaternions et des biquaternions que nous n'avons pas introduits ici pour rendre notre exposé le plus élémentaire possible.

Notations.

	Coordonnées.		
	Système fixe.	Système mobile.	Indices
Point....................	x	y	1, 2, 3
Vecteur..................	ξ	η	1, 2, 3
Quantité de mouvement....	Ξ	H	01, 02, 03 / 23, 31, 12
Dyname...................	X	Y	01, 02, 03 / 23, 31, 12
Mouvement infinitésimal...	Γ (n'a pas été employée)	Δ	01, 02, 03 / 23, 31, 12

Correspondance entre les notations de ce travail et celles de M. P. Stäckel (*Encyclopädie der Math. Wissensch.*, t. IV, 6):

x_1	x_2	x_3	Ξ_{01}	Ξ_{02}	Ξ_{03}	Ξ_{23}	Ξ_{31}	Ξ_{12}	X_{01}	X_{02}	X_{03}	X_{23}	X_{31}	X_{12}
ξ	η	ζ	Ξ_1	H_1	Z_1	L_1	M_1	N_1	Ξ	H	Z	L	M	N
y_1	y_2	y_3	H_{01}	H_{02}	H_{03}	H_{23}	H_{31}	H_{12}	Y_{01}	Y_{02}	Y_{03}	Y_{23}	Y_{31}	Y_{12}
x	y	z	X_1	Y_1	Z_1	L_1	M_1	N_1	X	Y	Z	L	M	N
$\frac{a_{01}}{a_{00}}$	$\frac{a_{02}}{a_{00}}$	$\frac{a_{03}}{a_{00}}$	$\frac{a_{11}}{a_{00}}$	$\frac{a_{21}}{a_{00}}$	$\frac{a_{31}}{a_{00}}$	$\frac{a_{21}}{a_{00}}$	$\frac{a_{22}}{a_{00}}$	$\ldots$ $\frac{a_{33}}{a_{00}}$	Δ_{01}	Δ_{02}	Δ_{03}	Δ_{23}	Δ_{31}	Δ_{12}
ξ^*	η^*	ζ^*	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	$\ldots$ c_3	p	q	r	u	v	w

M	M_1	M_2	M_3	M_{23}	M_{31}	M_{12}	$M_{22}+M_{33}$	$M_{33}+M_{11}$	$M_{11}+M_{22}$
m. M	—	—	—	D	E	F	A	B	C