JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. KOENIGS

Sur les mouvements de Ribaucour décomposables

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 7 (1911), p. 349-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__349_0>

Sur les mouvements de Ribaucour décomposables;

PAR M. G. KOENIGS,

Professeur à la Sorbonne,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Je me propose de faire connaître ici une propriété des surfaces quadriques déformées, que j'ai donnée en 1896 dans mes leçons au Collège de France, mais que je n'avais pas jusqu'ici publiée.

La position relative de deux corps solides S et S′ dépend, comme on sait, de six paramètres. Si entre ces six paramètres on établit un certain nombre de relations, les deux corps S et S′ se trouvent gênés dans leur position relative et constituent alors ce que j'ai appelé un *système binaire*. Si l'on suppose que les relations imposées aux six paramètres soient toutes des équations finies, c'est-à-dire non différentielles, et si elles laissent arbitraires l paramètres $[l < 6]$, le système binaire est dit avoir la *liberté* l.

Supposons alors un système binaire de liberté l, et soient S et S′ les deux corps solides qui le réalisent. Concevons qu'on puisse trouver un corps intermédiaire Σ tel que S et Σ forment un système binaire $\boxed{S\Sigma}$ de liberté $\lambda < l$, et soient $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ les λ paramètres de position de ce système binaire. Supposons en même temps que le système binaire $\boxed{S'\Sigma}$ des corps S′ et Σ ait la liberté $l - \lambda = \lambda'$ et dépende des paramètres de position $v_1, v_2, \ldots, v_{\lambda'}$, différents des λ paramètres précédents. Nous disons, dans ces conditions, que le système binaire $\boxed{SS'}$ est DÉCOMPOSABLE dans les systèmes binaires $\boxed{S\Sigma}$ et $\boxed{S\Sigma'}$.

J'ai introduit cette considération des systèmes binaires décomposables, il y a longtemps, dans la théorie des mécanismes. Elle y correspond à des réalités mécaniques à la fois fréquentes et variées.

2. Le théorème que j'ai en vue concerne le cas d'un mouvement de Ribaucour, ou d'un système binaire de Ribaucour, à deux paramètres, ou de liberté 2, qui serait décomposable en deux mouvements, ou systèmes binaires de liberté 1.

On sait en quoi consiste un mouvement de Ribaucour. Il s'agit d'un système binaire $\boxed{SS'}$ à deux paramètres, dans lequel une surface [F], solidaire du corps S, roule sur une surface qui lui est *applicable* [F'], solidaire du corps S'.

Si l'on appelle O le point de contact des deux surfaces et Π leur plan tangent commun en ce point, tout déplacement infiniment petit du système binaire équivaut à une rotation autour d'un axe Δ issu du point O dans le plan Π, c'est-à-dire autour d'une tangente commune au point O aux deux surfaces.

3. Dans quel cas ce système binaire à deux paramètres est-il décomposable ?

S'il l'est, il existe un troisième corps Σ tel que les systèmes binaires $\boxed{S\Sigma}$, $\boxed{S'\Sigma}$ dépendent chacun d'un seul paramètre, u pour le premier, v pour le second (v indépendant de u), en sorte que u, v sont en définitive les deux paramètres du système binaire $\boxed{SS'}$.

Si on laisse v constant, le système binaire $\boxed{S'\Sigma}$ ne bouge pas, et, u variant seul, le mouvement du système binaire $\boxed{S\Sigma}$ est l'un des mouvements du système binaire $\boxed{SS'}$; c'est dire que le mouvement $\boxed{S\Sigma}$ admet à chaque instant une rotation tangente. Si donc on considère les deux surfaces réglées [Φ] et [F_1] solidaires de Σ et de S qui virent l'une sur l'autre dans le système binaire $\boxed{S\Sigma}$, ces deux surfaces réglées sont applicables et roulent constamment sans glisser l'une sur l'autre.

Prenons alors les corps S et Σ dans une position correspondante à une valeur u de leur paramètre de position relative; l'axe Δ_u de la rotation tangente afférente à cette époque est une droite de raccordement pour les surfaces [Φ] et [F_1]. Le point O de contact des surfaces déjà dénommées [F] et [F′] est un point de cette droite. Si maintenant on fait varier le paramètre v en laissant fixe le paramètre u, la droite Δ_u reste fixe sur les surfaces [Φ] et [F_1] et le point O, en variant, ne peut que décrire la droite Δ_u dans le corps S. Il est ainsi prouvé que l'axe Δ_u, en tant que lieu du point O, est tout entier tracé sur la surface [F], et que, par suite, la surface [F] contenant tout axe Δ_u, ne peut que coïncider avec [F_1], que nous n'appellerons plus dès lors que [F].

Supposons, au contraire, que nous considérions le système binaire $\boxed{S'\Sigma}$ dans une position correspondante à une valeur v du paramètre de ce système. L'axe Δ_v de la rotation tangente est encore la génératrice de raccordement de deux surfaces réglées applicables [Φ'] et [F'_1] solidaires de Σ et S′, qui roulent l'une sur l'autre au cours de ce mouvement. Nous verrions comme tout à l'heure que [F′] doit coïncider avec [F'_1] que nous n'appellerons plus que [F′].

D'autre part, si l'on observe que le point O de contact des surfaces [F] [F′], dans la position afférente aux valeurs u, v des paramètres, doit être commun aux axes Δ_u et Δ_v, on reconnaît que toute génératrice de [Φ] doit couper toute génératrice de [Φ']; par suite, [Φ] et [Φ'] sont constitués par les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une même quadrique [Q], solidaire de Σ.

Les deux surfaces réglées [F] et [F′] sont applicables sur cette quadrique, avec cette circonstance particulière que les génératrices rectilignes de [F] correspondent aux génératrices d'un premier système [Φ] de [Q]; tandis que les génératrices rectilignes de [F′] correspondent aux génératrices du second système [Φ'] de [Q].

4. La solution du problème proposé est donc la suivante : Pour obtenir le mouvement de Ribaucour décomposable le plus général, on prend une quadrique [Q] solidaire d'un corps solide Σ. On considère un corps S solidaire d'une surface réglée [F] applicable sur [Q] de façon que les génératrices rectilignes de [F] correspondent aux génératrices d'un système [Φ] de [Q]. On prend ensuite un corps S′, solidaire aussi d'une surface réglée [F′], également applicable sur [Q], mais de telle sorte que ses génératrices rectilignes correspondent aux

génératrices rectilignes du second système [Φ′] de [Q]. En faisant rouler indépendamment l'une de l'autre [F] et [F′] sur [Q] on obtiendra deux corps S et S′ réalisant le système de Ribaucour cherché.

On voit que si l'on considère les axes Δ_u, Δ_v correspondants aux valeurs u, v des paramètres de position, le point de rencontre O des axes Δ_u et Δ_v sur [Q] sera aussi le point de contact des surfaces [F] et [F′] entre elles [1].

Comme on sait que la détermination des surfaces telles que [F] [F′] ne dépend que des quadratures, on peut conclure que des quadratures suffisent également pour réaliser la représentation analytique du système binaire décomposable que nous venons de définir.

---

[1] Pour cette détermination, *voir* G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 293 et suiv.