JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Contribution à l'optique cristalline

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 7 (1911), p. 317-348.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__317_0>

Contribution à l'optique cristalline;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

Sommaire. — I. Construction nouvelle de la direction des vibrations, de celle du rayon lumineux et de la vitesse de ce rayon, pour chacun des deux systèmes d'ondes planes de direction donnée, propagés dans un cristal transparent. — II. De l'absorption par les cristaux *translucides;* équations fondamentales. — III. Ondes planes latéralement indéfinies, dans un cristal translucide. — IV. Ondes planes latéralement limitées, dans le même cristal translucide. — V. *Ellipsoïde d'absorption;* formes simples du *coefficient d'extinction* de la lumière dans le cristal. — VI. Réflexions sur la grandeur relative des longueurs d'onde que supposent nos équations du mouvement de l'éther dans les corps.

I. — Construction nouvelle de la direction des vibrations, de celle du rayon lumineux et de la vitesse de ce rayon, pour chacun des deux systèmes d'ondes planes de direction donnée, propagés dans un cristal transparent.

1. On admet généralement que tout cristal transparent possède un système d'axes rectangulaires, par rapport auquel les équations du mouvement vibratoire de son éther se réduisent à la forme simple

$$(1)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{a^2}, \frac{\eta}{b^2}, \frac{\zeta}{c^2}\right) = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)},$$

où ξ, η, ζ désignent les trois composantes, suivant les x, y, z, du déplacement élastique, a, b, c trois certaines vitesses constantes de propagation, caractéristiques du cristal (et dont les rapports mutuels ne sont jamais, pratiquement, très différents de l'unité), Δ_2 le symbole opératoire $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, enfin, θ, la dilatation cubique $\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$.

Or il résulte de ces équations, pour régir les ondes planes susceptibles de se propager à l'intérieur du cristal et normales à la direction de cosinus directeurs donnés α, β, γ, suivant laquelle progressent les ondes (quand elles sont latéralement indéfinies) : 1° l'équation de Fresnel aux vitesses ω de propagation de ces ondes,

$$(2) \qquad \frac{\alpha^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{\omega^2 - c^2} = 0;$$

2° la double proportion suivante, définissant les cosinus directeurs l', m', n' de la vibration, que nous conviendrons de compter positivement quand elle se fera suivant le sens dont l'angle avec la normale (α, β, γ) est aigu,

$$(3) \qquad \frac{l'}{\frac{a^2\alpha}{\omega^2 - a^2}} = \frac{m'}{\frac{b^2\beta}{\omega^2 - b^2}} = \frac{n'}{\frac{c^2\gamma}{\omega^2 - c^2}}.$$

2. Cette double proportion entraîne, pour les cosinus directeurs l'_1, m'_1, n'_1 de la projection de la vibration sur le plan de l'onde, projection qu'on peut choisir pour définir le *plan de la vibration* (ou plan normal à l'onde et contenant la vibration), la double proportion, un peu plus simple,

$$(4) \qquad \frac{l'_1}{\frac{\alpha}{\omega^2 - a^2}} = \frac{m'_1}{\frac{\beta}{\omega^2 - b^2}} = \frac{n'_1}{\frac{\gamma}{\omega^2 - c^2}}.$$

Nous appellerons, pour abréger, *pseudo-vibration* (ou vibration de Fresnel) cette projection de la vibration vraie sur le plan de l'onde, et ε son écart angulaire (toujours petit en réalité) avec elle (l', m', n'). Cet écart ε sera donc l'angle aigu de la direction (l'_1, m'_1, n'_1) avec la direction précédente (l', m', n'), qui lui est évidemment reliée par les rapports égaux

$$(5) \qquad \frac{l'}{a^2 l'_1} = \frac{m'}{b^2 m'_1} = \frac{n'}{c^2 n'_1}.$$

Il est le complément de l'angle des deux directions (α, β, γ) et (l', m', n'); en sorte qu'on a

$$(6) \qquad \sin\varepsilon = \alpha l' + \beta m' + \gamma n'.$$

D'autre part, il suit, vu l'équation (2), des doubles proportions (4) et (5), la relation

$$(7) \qquad \frac{\alpha}{a^2}l' + \frac{\beta}{b^2}m' + \frac{\gamma}{c^2}n' = 0,$$

qui prouve la perpendicularité de la vibration (l', m', n') à la droite émanée de l'origine et dont les cosinus directeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ seraient proportionnels aux trois quotients $\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\beta}{b^2}, \frac{\gamma}{c^2}$. Comme, dans la réalité, les rapports mutuels de ces trois quotients ne seront jamais très différents de ceux de α, β, γ, cette droite, parfaitement déterminée dès que la normale (α, β, γ) l'est elle-même, n'en diffère pas beaucoup et peut être appelée la *pseudo-normale* aux ondes. La vibration (l', m', n') est, en quelque sorte, par rapport à elle, *rigoureusement transversale*, tandis qu'elle est seulement *quasi-transversale* par rapport à la normale vraie (α, β, γ). Et l'on remarquera que les cosinus directeurs de celle-ci sont reliés aux siens $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ par la double proportion

$$(8) \qquad \frac{\alpha}{a^2\alpha_1} = \frac{\beta}{b^2\beta_1} = \frac{\gamma}{c^2\gamma_1},$$

entièrement analogue à (5).

3. Enfin, quand les ondes planes ne sont pas latéralement indéfinies, mais que, toutefois, l'amplitude varie, à chaque instant, assez graduellement d'un point à l'autre du premier plan d'onde (censé mené par l'origine) pour éviter les phénomènes de diffraction, la transmission intégrale du mouvement se fait, sur chaque onde, dans le sens du rayon r, émané de l'origine, dont l'extrémité (x, y, z) est située sur l'onde plane

$$(9) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \omega,$$

partie de l'origine depuis une unité de temps ou ayant parcouru la distance ω suivant la normale (α, β, γ), et a, de plus, ses trois coordonnées x, y, z astreintes à vérifier la double proportion

$$(10) \qquad \frac{x}{\alpha - l'\sin\varepsilon} = \frac{y}{\beta - m'\sin\varepsilon} = \frac{z}{\gamma - n'\sin\varepsilon}.$$

Or il résulte de celle-ci (10) et de la relation (6) que ce rayon r se trouve à la fois perpendiculaire à la vibration (l', m', n') et situé *dans le plan de celle-ci*; en sorte que, dans ce plan d'ailleurs normal à l'onde, il fait lui-même l'angle ε avec la perpendiculaire ω menée de l'origine sur l'onde (9). Par conséquent, la perpendiculaire ω est la projection, sous l'angle ε, du rayon r, et l'on a

$$\omega = r\cos\varepsilon \quad (^1). \tag{11}$$

4. Cela posé, élevons au carré les trois rapports (4), et, les multipliant ensuite, haut et bas, par $\omega^2 - a^2$, $\omega^2 - b^2$, $\omega^2 - c^2$, ajoutons-les terme à terme en tenant compte, au dénominateur, de l'équation (2) en ω. Il viendra, comme on sait, pour évaluer le carré de cette vitesse ω de progression des ondes en fonction linéaire des trois carrés $l_1'^2$, $m_1'^2$, $n_1'^2$ des cosinus directeurs de la pseudo-vibration, la formule simple

$$\omega^2 = a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2. \tag{12}$$

Mais la vraie vitesse de propagation du mouvement doit se mesurer suivant le sens où il se transmet; et elle se trouve exprimée par le rayon r, dont l'inverse, élevé au carré, a, d'après (11), la valeur $\frac{\cos^2\varepsilon}{\omega^2}$. On l'obtiendra donc en évaluant le cosinus de l'angle ε des deux directions (l_1', m_1', n_1') et (l', m', n'). Or les formules (5) reviennent à prendre

$$(l', m', n') = \frac{(a^2 l_1', b^2 m_1', c^2 n_1')}{\sqrt{a^4 l_1'^2 + b^4 m_1'^2 + c^4 n_1'^2}},$$

et, par suite,

$$\cos^2\varepsilon = \frac{(a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2)^2}{a^4 l_1'^2 + b^4 m_1'^2 + c^4 n_1'^2}.$$

L'inverse du carré r^2 de la vraie vitesse de propagation est donc, vu (12),

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2}{a^4 l_1'^2 + b^4 m_1'^2 + c^4 n_1'^2}. \tag{13}$$

([1]) On peut voir, par exemple, pour la démonstration de toutes les propriétés rappelées ici, le Tome II de mon Cours de la Sorbonne sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, p. 290 à 306.

Il est plus naturel de l'exprimer au moyen de la direction vraie (l', m', n') de la vibration, que de sa projection (l'_1, m'_1, n'_1) sur le plan de l'onde. Or le second membre de (13) est homogène, du degré zéro, en l'_1, m'_1, n'_1; et l'on peut y remplacer ces trois cosinus directeurs par les trois quantités proportionnelles $\frac{l'}{a^2}, \frac{m'}{b^2}, \frac{n'}{c^2}$. Il vient alors, vu l'égalité à 1 de la somme des trois carrés l'^2, m'^2, n'^2,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{l'^2}{a^2} + \frac{m'^2}{b^2} + \frac{n'^2}{c^2}. \tag{14}$$

Ainsi, l'inverse du carré de la vraie vitesse r de propagation s'exprime linéairement au moyen des trois carrés l'^2, m'^2, n'^2 des cosinus directeurs de la vibration [1].

5. Construisons, avec Fresnel, l'ellipsoïde, que nous qualifierons de *direct*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \tag{15}$$

et faisons correspondre, à ses points (x, y, z), ceux (X, Y, Z) de l'ellipsoïde *inverse*,

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 = 1, \tag{16}$$

par les relations

$$\frac{x}{a} = aX, \qquad \frac{y}{b} = bY, \qquad \frac{z}{c} = cZ, \tag{17}$$

qui donnent bien

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

L'on reconnaît aisément que les deux demi-diamètres, dits *correspondants*, joignant l'origine aux deux points respectifs (x, y, z) et

---

(1) J'avais déjà donné cette formule simple au numéro de mai 1905 du *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux, dans un Mémoire intitulé *Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal, et sur la construction des rayons lumineux dans les milieux opaques* [formule (25)].

(X, Y, Z), appartiennent, chacun, à la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent mené à l'extrémité de l'autre, et qu'ils ont leur longueur inverse de celle de cette perpendiculaire. En particulier, les directions $\left(\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\beta}{b^2}, \frac{\gamma}{c^2}\right)$ et $\left(\frac{l'}{a^2}, \frac{m'}{b^2}, \frac{n'}{c^2}\right)$ de la *pseudo-normale* aux ondes et de la *pseudo-vibration* sont données par les demi-diamètres qui correspondent, dans l'ellipsoïde inverse, aux demi-diamètres de l'ellipsoïde direct orientés suivant la vraie normale (α, β, γ) et suivant la vraie vibration (l', m', n').

Donc cette dernière (l', m', n'), par exemple, correspond, dans l'ellipsoïde direct, à la *pseudo-vibration* (l'_1, m'_1, n'_1), supposée représentée en direction par un demi-diamètre de l'ellipsoïde inverse; d'où il suit qu'elle est orientée suivant la normale à l'ellipsoïde inverse, menée à l'extrémité de ce demi-diamètre. Telle est une première manière de construire la vraie direction (l', m', n') de la vibration, quand on en connaît la *pseudo-direction* (l'_1, m'_1, n'_1).

Cela posé, on sait que l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde inverse par le plan d'onde diamétral $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ a ses demi-axes dirigés suivant les deux pseudo-vibrations possibles des ondes mêmes, ou dans les deux plans possibles de la vibration, et inverses de la vitesse ω de propagation de ces ondes suivant leur normale (¹). D'autre part, ayant construit la pseudo-normale, par rapport à laquelle sont transversales les vibrations vraies, menons-lui par l'origine un plan perpendiculaire. Il est clair que ce plan coupera justement les deux plans rectangulaires, déjà obtenus, des vibrations, suivant le sens des vibrations vraies : ce qui fournit une deuxième manière de construire celles-ci. Et comme, de plus, les rayons r se trouveront, dans ces mêmes plans de vibration, perpendiculaires à la vibration respective, de même que l'est déjà (hors des plans) la pseudo-normale, on voit que les deux projections de la pseudo-normale sur ces mêmes plans de vibration seront précisément, quant à la direction, les rayons r correspondants.

Enfin, leurs vitesses de propagation égaleront le demi-diamètre de l'ellipsoïde direct orienté suivant la vibration (l', m', n'). En effet, les

(¹) *Voir* le Tome II, cité ci-dessus, p. 418.

coordonnées x, y, z de l'extrémité du demi-diamètre en question auront, en appelant r celui-ci, les valeurs rl', rm', rn'; et l'équation (15) de l'ellipsoïde direct donnera immédiatement, pour y déterminer r, la formule (14), qui exprime déjà l'inverse du carré r^2 de la vraie vitesse de propagation.

6. On voit comment l'adjonction de la pseudo-normale et de l'ellipsoïde direct à l'ellipsoïde inverse permet de construire, dans un milieu homogène et transparent quelconque, tous les éléments essentiels caractérisant un système d'ondes planes latéralement limitées, c'est-à-dire un pinceau de lumière parallèle, un *rayon lumineux*; et cela, sans recourir à l'onde courbe de Fresnel, enveloppe des ondes planes de toute direction, passées simultanément par l'origine des coordonnées. Cette onde courbe, du quatrième degré, et la construction d'Huygens où elle intervient, ne deviendraient indispensables, que s'il s'agissait d'obtenir, à la surface séparative de deux milieux homogènes transparents, tant les quatre systèmes d'ondes planes, deux réfléchis et deux réfractés, que les rayons correspondants, auxquels donne naissance soit un système défini d'ondes planes incidentes, soit le rayon incident qui le représente.

II. — De l'absorption par les cristaux translucides; équations fondamentales.

7. Nous appellerons translucide un corps qui se comportera sensiblement comme un milieu transparent dans des étendues de dimensions comparables aux longueurs d'ondulation, ou même aux largeurs ordinaires des ondes planes latéralement limitées (*rayons* ou *pinceaux* de lumière parallèle se propageant sans phénomènes de diffraction perceptibles), mais qui, cependant, après des parcours de quelques milliers de longueurs d'onde, aura produit une assez notable réduction de l'amplitude des mouvements. On pourra donc y calculer la réflexion et la réfraction, à la surface d'entrée des radiations, et le cheminement des ondes à l'intérieur sous des épaisseurs de quelques longueurs d'onde, comme s'il était transparent. Mais il faudra, sous les épaisseurs beaucoup plus grandes, y tenir compte du lent décroissement des amplitudes.

8. Ce décroissement s'expliquera, d'une manière simple, en admettant que l'éther éprouve, à vibrer dans les milieux dont il s'agit, de très petites résistances fonctions linéaires des composantes $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ de la vitesse. Au contraire, les résistances compatibles avec la transparence, ou qui différencient essentiellement les petits mouvements élastiques de l'éther au milieu duquel baignent, disséminées çà et là, les molécules massives d'un corps, d'avec ces mouvements dans le même éther mais non entrecoupé de molécules pondérables, ou *libre*, sont fonctions linéaires des accélérations $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$, c'est-à-dire du genre de celles qu'opposeraient, aux mouvements d'ensemble d'un *liquide parfait*, de petits solides, immergés, dans un tel liquide, à d'assez grandes distances relatives les uns des autres ([1]), résistances qu'avait déjà constatées du Buat dans les petites oscillations d'un pendule court. Quand le liquide est imparfait, ou à frottements intérieurs, il s'adjoint à cette résistance, du moins lorsque les mouvements considérés sont à peu près pendulaires, celles, plus connues, qui sont fonction linéaire des vitesses, avec coefficients *largement dépendants* de la période ; et, en outre, les coefficients des résistances précédentes (fonction de l'accélération) éprouvent des changements dépendant aussi de la période, mais qui tendent vers zéro avec celle-ci ([2]).

Si l'on accepte cette analogie hydrodynamique pour les résistances qu'éprouve à vibrer l'éther, de la part de la matière pondérable, l'on conçoit que, vu l'excessive brièveté des périodes lumineuses, de tels changements dans les coefficients passent inaperçus, comparativement à la partie principale, sensiblement constante, des mêmes coefficients. Et comme de plus, dans la question hydrodynamique, les résistances fonction de la vitesse deviennent relativement peu influentes lors des très courtes vibrations, l'on s'explique qu'il y ait tant de corps soit transparents, soit au moins translucides, ou qu'il soit le plus souvent possible de négliger, en optique, ces résistances, à une première approximation.

([1]) *Voir* le Tome II, cité ci-dessus, de mon *Cours de Physique mathématique*, p. 206 à 211.

([2]) Même Tome II, p. 241 et 261. Dans les mouvements non pendulaires, la résistance due aux frottements intérieurs est bien plus compliquée encore (même Tome II, p. 238).

9. La résistance principale qu'éprouvera l'unité de volume d'éther, à vibrer dans un corps, s'exprimera donc, suivant les trois axes respectifs des x, y, z, par trois trinomes linéaires en $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, dérivées secondes que nous écrirons simplement ξ'', η'', ζ''. Or l'analogie admise avec la résistance opposée par des solides à un liquide parfait conduit à prendre pour ces trinomes les trois dérivées partielles respectives, par rapport à ξ'', η'', ζ'', d'un même sextinome homogène du second degré en ξ'', η'', ζ'', où les trois coefficients affectant les carrés $\xi''^2, \eta''^2, \zeta''^2$ sont, seuls, essentiellement négatifs. D'ailleurs, dans les changements d'axes coordonnés rectangulaires, ce sextinome, exprimé au moyen des composantes d'accélération suivant les nouveaux axes, lesquelles se transforment comme des coordonnées, fournira encore, par ses trois dérivées partielles relatives aux nouvelles composantes, les résistances correspondantes par unité de volume.

Cela posé, l'on sait qu'il y aura toujours un système *principal* d'axes pour lequel les trois rectangles $\eta''\zeta'', \zeta''\xi'', \xi''\eta''$ disparaîtront du sextinome, cas où les composantes de la résistance suivant les x, y, z se réduiront, respectivement, aux trois produits de coefficients négatifs par ξ'', η'', ζ''. Alors ces produits, transportés, avec signes contraires, dans les premiers membres des équations du mouvement, pour y être joints aux inerties changées de signe qui ont précisément les mêmes formes, donneront nos équations simples (1) ci-dessus. Mais, ici, nous devrons, comme on verra bientôt, adopter un autre système d'axes; et le sextinome sera complet. Les équations recevront donc les formes plus générales, à six coefficients a, b, c, d, e, f, dont les trois premiers seront positifs,

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathrm{a}\xi'' + \mathrm{f}\eta'' + \mathrm{e}\zeta'' = \Delta_2\xi - \dfrac{d\theta}{dx}, \\ \mathrm{f}\xi'' + \mathrm{b}\eta'' + \mathrm{d}\zeta'' = \Delta_2\eta - \dfrac{d\theta}{dy}, \\ \mathrm{e}\xi'' + \mathrm{d}\eta'' + \mathrm{c}\zeta'' = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

10. A la deuxième approximation, où il faudra tenir compte des minimes résistances *de translucidité* linéaires en $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ ou (pour abréger) en ξ', η', ζ', ces résistances, transportées avec signes contraires dans les premiers membres des équations de mouvement, ajouteront, aux premiers membres de ce système (18), de petits termes, que nous pourrons y écrire respectivement, avec *neuf* coefficients distincts $2a'$, $2b'$, $2c'$, $d' \pm d''$, $e' \pm e''$, $f' \pm f''$, les trois premiers, positifs, les six autres, de signes divers,

$$(19)\qquad \begin{cases} 2a'\xi' + \ \ f'\eta' + \ \ e'\zeta' + (e''\zeta' - f''\eta'), \\ f'\xi' + 2b'\eta' + \ \ d'\zeta' + (f''\xi' - d''\zeta'), \\ e'\xi' + \ \ d'\eta' + 2c'\zeta' + (d''\eta' - e''\xi'). \end{cases}$$

Or les termes en d'', e'', f'' ne produisent pas l'absorption que l'on veut étudier, mais un tout autre phénomène, analogue à la polarisation rotatoire magnétique, et que l'on n'a constaté dans aucun corps transparent *à l'état naturel*, c'est-à-dire soustrait à l'influence du magnétisme [1]. Il y a donc lieu de poser ici $(d'', e'', f'') = 0$.

Il est clair, d'ailleurs, que les expressions (19) restantes, dérivées respectives en ξ', η', ζ' du sextinome

$$(20)\qquad a'\xi'^2 + b'\eta'^2 + c'\zeta'^2 + d'\eta'\zeta' + e'\zeta'\xi' + f'\xi'\eta',$$

se transformeront, dans les changements d'axes, comme le faisaient les résistances principales en ξ'', η'', ζ'', vu que ξ', η', ζ' s'exprimeront encore à la manière de coordonnées. Le milieu admettra, par suite, un système *d'axes principaux* faisant évanouir d', e', f', ou ne laissant subsister dans le sextinome (20) que les trois termes essentiellement positifs $a'\xi'^2$, $b'\eta'^2$, $c'\zeta'^2$. Nous supposerons qu'on ait adopté précisément ce système d'axes; en sorte que les équations du mouvement seront

$$(21)\qquad \begin{cases} a\xi'' + f\eta'' + e\zeta'' + 2a'\xi' = \Delta_2\xi - \dfrac{d\theta}{dx}, \\ f\xi'' + b\eta'' + d\zeta'' + 2b'\eta' = \Delta_2\eta - \dfrac{d\theta}{dy}, \\ e\xi'' + d\eta'' + c\zeta'' + 2c'\zeta' = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

---

[1] *Voir*, par exemple, le Tome II cité, p. 476 à 481, 602 à 604, et le Mémoire, également cité plus haut, du *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 3 et 4.

11. On sait comment, dans le cas des équations (18), s'obtiennent les formules régissant les ondes planes dont il a été question au § 1, et que nous supposerons d'abord latéralement indéfinies : α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à ces ondes; ω leur vitesse de propagation; l', m', n' les cosinus directeurs de la vibration; enfin, l, m, n désignant, pour abréger, les trois quotients

$$(22) \qquad l = \frac{\alpha}{\omega}, \qquad m = \frac{\beta}{\omega}, \qquad n = \frac{\gamma}{\omega},$$

et ϖ, une fonction continue quelconque d'une variable, l'on prend ξ, η, ζ de la forme

$$(23) \qquad (\xi, \eta, \zeta) = (l', m', n')\varpi(t - lx - my - nz).$$

Ces expressions de ξ, η, ζ, substituées dans (18), donnent, après suppression du facteur commun ϖ'', en transposant d'ailleurs aux premiers membres tous les termes des seconds,

$$(24) \quad \varphi l' + \chi m' + \psi n' = 0, \quad \varphi_1 l' + \chi_1 m' + \psi_1 n' = 0, \quad \varphi_2 l' + \chi_2 m' + \psi_2 n' = 0,$$

où $\varphi, \chi, \psi, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \varphi_2, \chi_2, \psi_2$ représentent les polynomes, du second degré en l, m, n,

$$(25) \left\{ \begin{array}{lll} \varphi = -(l^2 + m^2 + n^2) + l^2 + \mathrm{a}, & \chi = lm + \mathrm{f}, & \psi = nl + \mathrm{e}, \\ \varphi_1 = lm + \mathrm{f}, & \chi_1 = -(l^2 + m^2 + n^2) + m^2 + \mathrm{b}, & \psi_1 = mn + \mathrm{d}, \\ \varphi_2 = nl + \mathrm{e}, & \chi_2 = mn + \mathrm{d}, & \psi_2 = -(l^2 + m^2 + n^2) + n^2 + \mathrm{c}. \end{array} \right.$$

La compatibilité des équations (24) exige l'annulation du déterminant des neuf éléments $\varphi, \chi, \psi, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \varphi_2, \chi_2, \psi_2$, fonction *paire* du sixième degré en l, m, n, que nous appellerons $\mathrm{F}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, l, m, n)$, en y mettant ainsi en vue, pour une raison qu'on verra plus loin, les trois paramètres a, b, c *spécifiques* ou propres au milieu, outre les trois autres paramètres l, m, n, caractéristiques des ondes. L'on a donc, pour déterminer, vu (22), la vitesse ω des ondes, l'équation

$$(26) \qquad \mathrm{F}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, l, m, n) = 0;$$

après quoi deux quelconques des relations (24) font connaître les cosinus directeurs de la vibration par leurs rapports mutuels.

12. Mais les nouvelles équations linéaires (21) du mouvement ne sont plus homogènes quant à l'ordre des dérivées qui y figurent, à raison des dérivées premières ξ', η', ζ' que multiplient les très petits coefficients $2a'$, $2b'$, $2c'$; et l'on ne peut plus y satisfaire avec une fonction ϖ arbitraire. Toutefois, comme les physiciens ne considèrent guère, en optique, que des vibrations pendulaires, dont nous appellerons $\frac{2\pi}{k}$ la période, et où kt ne figurera que sous les signes cosinus ou sinus, comme, de plus, de telles expressions en t s'obtiennent par la superposition d'exponentielles imaginaires conjuguées, nous pourrons essayer de former d'abord des solutions *symboliques*, analogues à (23), où des constantes imaginaires L', M', N' remplaceront l', m', n' et où ϖ sera le produit d'une constante encore imaginaire, I, par une exponentielle de la forme $e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}$, avec L, M, N imaginaires aussi pour remplacer l, m, n. La superposition de deux solutions pareilles, *purement formelles*, mais où toutes les imaginaires seront conjuguées chacune à chacune, nous fournira évidemment des valeurs de ξ, η, ζ réelles et vérifiant bien les équations voulues (21).

Nous prendrons donc provisoirement, au lieu de (23),

$$(27)\qquad (\xi, \eta, \zeta) = (L', M', N')\,I\,e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}.$$

Il est vrai que, plus loin, nous y ferons lentement variables avec x, y, z les coefficients (ici L'I, M'I, N'I) de l'exponentielle. Mais, même alors, les vitesses ξ', η', ζ' y seront, en quelque sorte, homogènes avec les accélérations ξ'', η'', ζ'', ou réductibles avec elles; car on aura, par exemple,

$$\xi'' = \frac{d\xi'}{dt} = k\sqrt{-1}\,\xi' \qquad \text{ou} \qquad \xi' = -\frac{\sqrt{-1}}{k}\xi''.$$

Or, par le fait même, les petits termes en ξ', η', ζ', distinguant (21) de (18), se réduiront avec les termes respectifs en ξ'', η'', ζ'', pour donner en tout, au lieu de $a\xi''$, $b\eta''$, $c\zeta''$ comme dans (18), les trois expressions $A\xi''$, $B\eta''$, $C\zeta''$ où l'on aura posé

$$(28)\qquad A = a - 2\frac{a'}{k}\sqrt{-1}, \qquad B = b - 2\frac{b'}{k}\sqrt{-1}, \qquad C = c - 2\frac{c'}{k}\sqrt{-1}.$$

Les nouvelles équations (21) du problème auront pris ainsi, grâce aux imaginaires, la forme (18), avec A, B, C, accrus de petites parties en

$\sqrt{-1}$, à la place de a, b, c réels. Et il est évident que les calculs algébriques indiqués tout à l'heure pour le cas de transparence (n° 11) deviendront utilisables au cas actuel de translucidité.

III. — Ondes planes latéralement indéfinies, dans un cristal translucide.

13. En particulier, les équations (24) deviendront

$$(29)\qquad \begin{cases} \varphi\, L' + \chi\, M' + \psi\, N' = 0, \\ \varphi_1 L' + \chi_1 M' + \psi_1 N' = 0, \\ \varphi_2 L' + \chi_2 M' + \psi_2 N' = 0, \end{cases}$$

où $\varphi, \chi, \psi, \varphi_1, \chi_1, \psi_1, \varphi_2, \chi_2, \psi_2$ auront encore les expressions (25), mais avec A, B, C, L, M, N au lieu de a, b, c, l, m, n; et l'annulation du déterminant conduira à la même équation (26), écrite

$$(30)\qquad F(A, B, C, L, M, N) = 0.$$

Quand, dans F, l'on remplacera A, B, C, L, M, N par leurs valeurs complexes, l'annulation séparée de la partie réelle et de la partie en $\sqrt{-1}$ dédoublera cette équation en deux distinctes; de telle sorte qu'on pourra se donner à volonté, non seulement, comme on a fait déjà par les relations (22), les rapports mutuels des parties réelles l, m, n de L, M, N où, dans (22), les cosinus directeurs α, β, γ peuvent définir la direction quelconque imposée aux ondes, mais encore les rapports mutuels des parties en $\sqrt{-1}$, que nous pourrons représenter par $-h\lambda\sqrt{-1}$, $-h\mu\sqrt{-1}$, $-h\nu\sqrt{-1}$, où λ, μ, ν seront les cosinus directeurs de la normale (menée vers l'intérieur) à la face d'entrée, pouvant être quelconque, de la lumière dans le milieu. Les expressions de L, M, N, ainsi écrites

$$(31)\qquad (L, M, N) = (l, m, n) - h(\lambda, \mu, \nu)\sqrt{-1} = \frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega} - h(\lambda, \mu, \nu)\sqrt{-1},$$

conserveront donc, pour satisfaire aux deux équations fournies par le dédoublement de (30), les deux paramètres disponibles ω et h, que ces équations permettront de déterminer en fonction des deux directions (α, β, γ) et (λ, μ, ν).

Mais souvenons-nous que les parties imaginaires de A, B, C, dans (28), et, par suite, celles de L, M, N qu'elles entraînent, sont extrêmement petites, bien assez pour qu'on puisse, dans tous les calculs, négliger leurs carrés et produits. On les assimilera donc à de simples différentielles, ayant les expressions respectives

$$(32)\quad \partial(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) = -2\frac{(\mathrm{a}', \mathrm{b}', \mathrm{c}')}{k}\sqrt{-1}, \qquad \partial(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}) = -(\lambda, \mu, \nu)h\sqrt{-1};$$

et le premier membre de (30), développé par la formule de Taylor, s'écrira

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, l, m, n) &- \frac{2}{k}\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{a}}\mathrm{a}' + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{b}}\mathrm{b}' + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{c}}\mathrm{c}'\right)\sqrt{-1}\\ &- h\left(\frac{d\mathrm{F}}{dl}\lambda + \frac{d\mathrm{F}}{dm}\mu + \frac{d\mathrm{F}}{dn}\nu\right)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Les deux parties réelle et imaginaire s'y trouvent toutes séparées; et l'on aura, d'une part, pour déterminer ω en fonction de α, β, γ, la même équation (26) que dans le cas de transparence, d'autre part, pour déterminer l'autre inconnue h, l'équation du premier degré

$$(33)\quad h\left(\frac{d\mathrm{F}}{dl}\lambda + \frac{d\mathrm{F}}{dm}\mu + \frac{d\mathrm{F}}{dn}\nu\right) = -\frac{1}{k}\left(2\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{a}}\mathrm{a}' + 2\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{b}}\mathrm{b}' + 2\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{c}}\mathrm{c}'\right),$$

où l'on pourra remplacer les six dérivées partielles premières de F par des quantités qui leur soient proportionnelles.

14. Or l'on obtient de telles quantités, sans avoir besoin de former l'expression de F, en différentiant complètement les équations (24), qui impliquent (26) et, par suite, la différentielle totale de celle-ci,

$$(34)\quad \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{a}}d\mathrm{a} + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{b}}d\mathrm{b} + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{c}}d\mathrm{c} + \frac{d\mathrm{F}}{dl}dl + \frac{d\mathrm{F}}{dm}dm + \frac{d\mathrm{F}}{dn}dn = 0.$$

Cinq des six accroissements infiniment petits $d\mathrm{a}$, $d\mathrm{b}$, ..., dn sont supposés ici avoir entre eux des rapports quelconques, le sixième seul se trouvant alors déterminé par la vérification constante de (26). Or la différentiation du système (24), où les différentielles dl', dm', dn'

recevront, dès lors, certaines valeurs qu'on devra éliminer, donne

$$\begin{aligned}
&\varphi\, dl' + \chi\, dm' + \psi\, dn' + l'\, d\varphi + m'\, d\chi + n'\, d\psi = 0,\\
&\varphi_1\, dl' + \chi_1\, dm' + \psi_1\, dn' + l'\, d\varphi_1 + m'\, d\chi_1 + n'\, d\psi_1 = 0,\\
&\varphi_2\, dl' + \chi_2\, dm' + \psi_2\, dn' + l'\, d\varphi_2 + m'\, d\chi_2 + n'\, d\psi_2 = 0.
\end{aligned}$$

L'élimination de dl', dm', dn' se fait en multipliant respectivement par l', m', n' ces équations et ajoutant terme à terme. Vu les expressions (25) de φ, χ, ψ,..., ψ_2, qui rendent symétrique le déterminant F, les coefficients totaux de dl', dm', dn', dans le résultat, ne seront autre chose que les premiers membres, déjà nuls, de (24). Il viendra donc, en remplaçant d'abord χ, ψ, φ_1, ψ_1, φ_2, χ_2 par leurs valeurs (25) où d, e, f sont constants,

$$(34\ bis)\quad l'^2 d\varphi + m'^2 d\chi_1 + n'^2 d\psi_2 + 2m'n'd.mn + 2n'l'd.nl + 2l'm'd.lm = 0,$$

et puis, en substituant aussi à φ, χ_1, ψ_2 leurs valeurs (25),

$$\begin{aligned}
&l'^2 d\mathrm{a} + m'^2 d\mathrm{b} + n'^2 d\mathrm{c} - (l'^2 + m'^2 + n'^2)\, d(l^2 + m^2 + n^2)\\
&\quad + l'^2 d.l^2 + m'^2 d.m^2 + n'^2 d.n^2 + 2m'n'd.mn + 2n'l'd.nl + 2l'm'd.lm = 0.
\end{aligned}$$

Enfin, par l'évaluation séparée et le groupement des termes en dl, en dm, en dn, on aura

$$\begin{aligned}
(35)\qquad &l'^2 d\mathrm{a} + m'^2 d\mathrm{b} + n'^2 d\mathrm{c}\\
&\quad - 2[(l'^2 + m'^2 + n'^2)\, l - l'(ll' + mm' + nn')]\, dl + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Or comparons cette relation à (34) et annulons-y successivement quatre quelconques des six différentielles $d\mathrm{a}$, $d\mathrm{b}$, $d\mathrm{c}$, dl, dm, dn. Si nous posons, pour abréger,

$$(36)\quad s = l^2 + m^2 + n^2, \qquad s' = l'^2 + m'^2 + n'^2, \qquad \sigma = ll' + mm' + nn',$$

nous aurons la quintuple proportion

$$(37)\quad \frac{2\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{a}}}{-l'^2} = \frac{2\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{b}}}{-m'^2} = \frac{2\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{c}}}{-n'^2} = \frac{\dfrac{d\mathrm{F}}{dl}}{s'l - \sigma l'} = \frac{\dfrac{d\mathrm{F}}{dm}}{s'm - \sigma m'} = \frac{\dfrac{d\mathrm{F}}{dn}}{s'n - \sigma n'}.$$

Et les dénominateurs de ces rapports pourront être substitués aux numérateurs dans l'équation (33), qui deviendra ainsi

$$(38)\quad h[(s'l-\sigma l')\lambda+(s'm-\sigma m')\mu+(s'n-\sigma n')\nu]=\frac{a'l'^2+b'm'^2+c'n'^2}{k}.$$

15. Nous simplifierons considérablement l'expression qui résulte de là pour h en introduisant le rayon r de la surface d'onde courbe de Fresnel, droite qui joint l'origine des coordonnées au point (x, y, z) où l'onde plane

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\omega,\qquad \text{ou bien, ici,}\qquad lx+my+nz=1,$$

partie de l'origine depuis une unité de temps, touche son enveloppe (*onde courbe*) obtenue en y faisant varier α, β, γ, c'est-à-dire l, m, n, de toutes les manières possibles. On sait que ce point (x, y, z), commun à l'onde plane et à toutes ses voisines où l, m, n ont varié de dl, dm, dn, se détermine par les équations

$$(39)\qquad \frac{x}{\frac{dF}{dl}}=\frac{y}{\frac{dF}{dm}}=\frac{z}{\frac{dF}{dn}}=\frac{1}{l\frac{dF}{dl}+m\frac{dF}{dm}+n\frac{dF}{dn}},$$

qui deviennent ici, à raison de (37),

$$(40)\qquad \frac{x}{s'l-\sigma l'}=\frac{y}{s'm-\sigma m'}=\frac{z}{s'n-\sigma n'}=\frac{1}{ss'-\sigma^2}.$$

Un cinquième rapport égal s'obtient en élevant les trois premiers au carré, ajoutant terme à terme et extrayant enfin la racine carrée *positive* du résultat, vu la valeur du quatrième rapport (40), dont le dénominateur équivaut visiblement, d'après (36), à la somme des carrés de $mn'-nm'$, $nl'-ln'$, $lm'-ml'$. Le carré de ce cinquième rapport aura évidemment pour numérateur r^2 et pour dénominateur

$$ss'^2+s'\sigma^2-2s'\sigma^2=s'(ss'-\sigma^2);$$

en sorte que ce cinquième rapport est $\frac{r}{\sqrt{s'(ss'-\sigma^2)}}$. Son égalisation au quatrième donne

$$\frac{1}{ss'-\sigma^2}=\frac{r^2}{s'};$$

et il vient par suite

$$(41)\qquad s'l - \sigma l' = \frac{x}{r}\frac{s'}{r},\qquad s'm - \sigma m' = \frac{y}{r}\frac{s'}{r},\qquad s'n - \sigma n' = \frac{z}{r}\frac{s'}{r}.$$

La substitution de ces valeurs dans (38) introduit immédiatement le cosinus de l'angle, que nous appellerons V, fait par la direction $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ du rayon r avec la normale (λ, μ, ν) à la face d'entrée des ondes dans le corps; et nous aurons, en remplaçant d'ailleurs s' par son expression (36), la formule

$$(42)\qquad h = \frac{r}{\cos V}\,\frac{a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2}{k(l'^2 + m'^2 + n'^2)}.$$

16. Il reste à déterminer, dans la solution symbolique, L', M', N', dont nous serons conduits à appeler l', m', n' les parties réelles et $l'l''\sqrt{-1}$, $m'm''\sqrt{-1}$, $n'n''\sqrt{-1}$ les parties imaginaires.

Une fois obtenus ω, h ou, par suite, L, M, N et, dans (29), φ, χ, ψ, φ_1, ..., deux quelconques de ces équations (29) fourniront, par leurs déterminants mineurs, les rapports mutuels de L', M', N'. D'ailleurs, les multiplications à faire de facteurs complexes, pour évaluer tant φ, χ, ψ, ..., que ces déterminants mineurs, donneront sans cesse, comme produits, des parties réelles formées soit avec deux facteurs réels, soit avec deux facteurs en $\sqrt{-1}$, et des parties imaginaires formées avec un facteur réel et un facteur en $\sqrt{-1}$. Or les facteurs en $\sqrt{-1}$ à combiner sont tous, ici, du premier ordre de petitesse et ont leurs produits négligeables. Donc, en résumé, les parties réelles *sensibles* des déterminants mineurs ne seront formées qu'avec les parties réelles des données, les mêmes que dans le cas de transparence, et les parties imaginaires seront petites du premier ordre.

L'on pourra, finalement, diviser les trois déterminants mineurs employés, par la racine carrée de la somme des carrés de leurs parties réelles et prendre les quotients comme valeurs de L', M', N'. Il est clair qu'alors les parties réelles de L', M', N' seront les mêmes que dans le cas de transparence, c'est-à-dire les trois cosinus directeurs de la vibration, l', m', n', obtenus pour ce cas; et, dans les parties imaginaires $l'l''\sqrt{-1}$, $m'm''\sqrt{-1}$, $n'n''\sqrt{-1}$, les facteurs l'', m'', n'' se trouveront très petits, de l'ordre de a', b', c'. Il viendra donc

$$(43)\quad L' = l'(1 + l''\sqrt{-1}) = l'e^{l''\sqrt{-1}}, \qquad M' = m'e^{m''\sqrt{-1}}, \qquad N' = n'e^{n''\sqrt{-1}}.$$

17. Enfin, prenons, dans (27), pour le coefficient *d'amplitude* I, une expression imaginaire quelconque, sous la forme $\frac{1}{2}e^{i+j\sqrt{-1}}$; et les trois expressions symboliques formées (27) de ξ, η, ζ seront, en y remplaçant L, M, N, L', M', N' par les valeurs (31) et (43),

$$(44)\quad (\xi, \eta, \zeta) = (l', m', n')\frac{e^i}{2}e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)}e^{[k(t-lx-my-nz)+j+(l'',m'',n'')]\sqrt{-1}}.$$

Si nous y changeons le signe de $\sqrt{-1}$, nous aurons évidemment une deuxième solution symbolique, conjuguée de celle-là; et la somme des deux nous donnera enfin la solution réelle cherchée des équations effectives (21) du mouvement :

$$(45)\quad \begin{aligned}(\xi, \eta, \zeta) = (l', m', n')\,e^i e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)} \\ \times \cos[k(t - lx - my - nz) + j + (l'', m'', n'')].\end{aligned}$$

Les inégalités extrêmement petites de phase, dues à l'', m'', n'', entre les trois composantes ξ, η, ζ du déplacement, seront négligeables ou échapperont à l'observation; de sorte qu'on peut les annuler pratiquement, en supprimant même l'', m'', n''. Alors les vibrations sont rectilignes, avec l'orientation (l', m', n') et, vu (22), la vitesse ω de propagation, exactement comme dans le cas de transparence. Mais la demi-amplitude du mouvement, représentée par e^i à la face d'entrée $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, décroît lentement, à partir de là, dans l'intérieur; car son expression est, partout,

$$(46)\quad e^i e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)},$$

où le trinome $\lambda x + \mu y + \nu z$ égale la distance du point intérieur quelconque (x, y, z) à la face d'entrée.

18. On peut voir maintenant les raisons pour lesquelles, au moins dans le cas d'ondes latéralement indéfinies, il convient de choisir la direction (λ, μ, ν) normale à la face d'entrée et, faisant, d'ailleurs, avec les rayons lumineux qui correspondent aux ondes planes (45), un angle V aigu, de manière à rendre positive la valeur (42) du paramètre h, ou décroissante vers l'intérieur l'exponentielle (46). Si, en effet, la face d'entrée, qui passe par l'origine, ne se confondait pas avec le plan $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, la demi-amplitude (46) des vibrations n'y serait pas constante, comme elle doit l'être, naturellement, si ces vibrations résultent d'ondes incidentes latéralement indéfinies aussi, mais propagées dans un milieu transparent et, par suite, d'amplitude uniforme partout.

D'autre part, même avec V aigu, ou l'exponentielle (46) décroissante quand on chemine vers l'intérieur du corps, il suffirait évidemment que la face d'entrée fût coupée par le plan $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, pour qu'il y eût dans le corps, assez loin de la droite d'intersection, des points où la distance $\lambda x + \mu y + \nu z$ à ce plan serait négative et très grande; en sorte que l'exponentielle (46) y ferait prendre, à l'amplitude des mouvements, des valeurs dépassant toutes celles qu'on peut physiquement admettre pour de petites vibrations élastiques de l'éther.

IV. — Ondes planes latéralement limitées, dans le même cristal translucide.

19. Quand un pinceau de lumière parallèle, un *rayon lumineux*, latéralement assez large pour ne pas offrir de diffraction sensible, pénètre dans un cristal par réfraction à sa face d'entrée, les déplacements ξ, η, ζ présentent à une première approximation, lors de vibrations pendulaires, les caractères exprimés par cette solution (45); mais les deux paramètres i et j, au lieu d'y être constants, du moins tous les deux, peuvent y être, i principalement, des fonctions de x, y, z *très graduellement variables*, c'est-à-dire paraître sensiblement constants dans toute étendue dont les dimensions sont de l'ordre d'une longueur d'onde, mais passer de leurs valeurs notables à d'autres bien différentes, *au bout d'assez longs parcours;* et, en particulier, le coefficient e^i d'amplitude s'annule identiquement hors de régions limitées des plans d'onde $lx + my + nz =$ const. Il y a donc lieu de voir comment se modifie la solution symbolique (27) (p. 328) lorsqu'on rend lentement variable avec x, y, z le coefficient analogue, dit *d'amplitude*, I, ou que I acquiert de petites dérivées $\frac{d\mathrm{I}}{d(x, y, z)}$, de manière, en particulier, à recevoir des valeurs *arbitraires* bien continues sur la face d'entrée du cristal.

Par le fait même, les coefficients L'I, M'I, N'I de l'exponentielle imaginaire dans (27), où il est entendu que L', M', N' garderont leurs expressions *constantes* (43) (p. 334), ne pourront plus suffire; car elles n'ont permis de satisfaire aux équations (21) du mouvement que dans l'hypothèse de I constant. Et il faudra leur ajouter trois petites fonctions *correctives* ε, ε_1, ε_2, de x, y, z, de l'ordre des dérivées partielles $\frac{d\mathrm{I}}{d(x, y, z)}$ dont l'annulation partout entraînerait la leur. Mais nous supposerons que le coefficient I convienne, ou soit choisi précisément, pour ce qu'on peut appeler la *projection totale du déplacement imaginaire sur la direction symbolique invariable* (L', M', N'), c'est-à-dire soit tel, que l'on ait

$$(47) \qquad \mathrm{L}'\xi + \mathrm{M}'\eta + \mathrm{N}'\zeta = (\mathrm{L}'^2 + \mathrm{M}'^2 + \mathrm{N}'^2)\,\mathrm{I}\,e^{k(t-\mathrm{L}x-\mathrm{M}y-\mathrm{N}z)\sqrt{-1}}.$$

Les nouvelles expressions de ξ, η, ζ s'écriront donc

$$(48) \qquad (\xi, \eta, \zeta) = (\mathrm{L}'\mathrm{I} + \varepsilon.\ \mathrm{M}'\mathrm{I} + \varepsilon_1,\ \mathrm{N}'\mathrm{I} + \varepsilon_2)\, e^{k(t-\mathrm{L}x-\mathrm{M}y-\mathrm{N}z)\sqrt{-1}},$$

formules qui, substituées dans (47), donneront identiquement, entre les trois petites fonctions correctives ε, ε_1, ε_2, la relation linéaire

$$(49) \qquad \mathrm{L}'\varepsilon + \mathrm{M}'\varepsilon_1 + \mathrm{N}'\varepsilon_2 = 0.$$

Deux d'entre elles, seules, seront donc encore disponibles.

20. Il reste évidemment à déterminer ces deux petites fonctions de x, y, z, et I, qui n'est arbitraire que sur la face d'entrée, de manière à faire vérifier *formellement* par les expressions (48) de ξ, η, ζ les équations (18) du mouvement, où A, B, C remplaceraient a, b, c.

Notons, à cet effet, non seulement que les dérivées partielles de I seront petites, mais que, de plus, elles varieront très graduellement, chacune d'elles n'éprouvant des changements comparables à sa valeur que le long de parcours d'un grand nombre de longueurs d'onde. Par suite, ces dérivées premières de I auront leurs propres dérivées beaucoup plus petites, en quelque sorte, qu'elles ne sont elles-mêmes; et, au degré d'approximation où l'on est tenu de les introduire, elles, dans les calculs, on pourra les regarder comme constantes, c'est-à-dire négliger les dérivées partielles secondes de I. De même, les quotients, par I, de ces dérivées premières de I, pourront être supposés constants; car les variations du dénominateur I n'introduiraient, dans les dérivées des quotients, que des produits, négligeables, du numérateur déjà très faible par des dérivées de I. Donc aussi les fonctions correctives ε, ε_1, ε_2, qui sont de l'ordre des dérivées premières de I, se comporteront comme des constantes.

Dans ces conditions, les petits termes de ξ, η, ζ produits de ε, ε_1, ε_2 par l'exponentielle, portés dans les équations (18) du mouvement (ramenées encore à avoir zéro à leurs seconds membres), donneront, aux premiers membres, après suppression des facteurs communs, des expressions comme celles qu'on obtenait en L'I, M'I, N'I quand I était constant, savoir, d'après les résultats précédents (29) multipliés par I,

$$(50) \qquad \varphi\varepsilon + \chi\varepsilon_1 + \psi\varepsilon_2, \quad \varphi_1\varepsilon + \chi_1\varepsilon_1 + \psi_1\varepsilon_2, \quad \varphi_2\varepsilon + \chi_2\varepsilon_1 + \psi_2\varepsilon_2.$$

Voyons maintenant ce qu'ajouteront à ces expressions les parties principales de ξ, η, ζ, c'est-à-dire le produit $\mathrm{I}e^{k(t-\mathrm{L}x-\mathrm{M}y-\mathrm{N}z)\sqrt{-1}}$, multiplié respectivement par L', M', N'. Une dérivation de ce produit en x, par exemple, donne comme dérivée ce produit lui-même, multiplié par le binome

$$-k\mathrm{L}\sqrt{-1} + \frac{1}{\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dx} = -k\sqrt{-1}\left(\mathrm{L} + \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dx}\sqrt{-1}\right);$$

et le résultat est ce qu'on aurait eu pour I constant, mais à cela près que le facteur constant L ainsi introduit se trouve accru de la très petite quantité, *censée constante aussi*, $\frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dx}\sqrt{-1}$. Un tel facteur subsistera donc, sans produire aucune complication nouvelle, dans les différentiations ultérieures à effectuer sur la fonction d'où l'on est parti. De même, les différentiations en y et en z introduiraient les facteurs analogues

$$M + \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dy}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad N + \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{dz}\sqrt{-1}.$$

Donc les parties principales de ξ, η, ζ donneront, après suppression de facteurs communs, des expressions comme les premiers membres de (29) multipliés par I, mais où les variables L, M, N des neuf polynomes φ, χ, ψ, φ_1, ... auraient subi les très petits accroissements respectifs

$$\partial(L, M, N) = \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{d(x, y, z)}\sqrt{-1}. \tag{51}$$

21. Appelons $\varphi + \partial\varphi$, $\chi + \partial\chi$, $\psi + \partial\psi$, $\varphi_1 + \partial\varphi_1$, ..., ce que deviennent alors ces neuf fonctions, avec leurs petites variations symboliques $\partial\varphi$, $\partial\chi$, ..., évidemment calculables à la manière de différentielles totales; et, ajoutant enfin les premiers membres de (29) ainsi modifiés (p. 329) aux expressions précédentes (50), il viendra, par exemple, comme première équation du mouvement,

$$(L'\mathrm{I} + \varepsilon)\varphi + (M'\mathrm{I} + \varepsilon_1)\chi + (N'\mathrm{I} + \varepsilon_2)\psi + \mathrm{I}(L'\partial\varphi + M'\partial\chi + N'\partial\psi) = 0. \tag{52}$$

On peut y supprimer les termes principaux en $\mathrm{I}\varphi$, $\mathrm{I}\chi$, $\mathrm{I}\psi$, à raison de la première équation (29). De plus, dans les trois termes où figurent les très petits facteurs ε, ε_1, ε_2, les facteurs finis φ, χ, ψ peuvent, évidemment, être réduits à leurs parties notables où l, m, n remplacent L, M, N et ont les valeurs du cas de transparence. Enfin, dans les trois derniers termes, en $\partial\varphi$, $\partial\chi$, $\partial\psi$, de l'ordre des petites dérivées de I, non seulement L′, M′, N′ peuvent, de même, être réduits, d'après (43), à leurs parties principales l', m', n', mais, en outre, les dérivées $\frac{d(\varphi, \chi, \psi)}{d(L, M, N)}$ figurant aux développements de $\partial\varphi$, $\partial\chi$, $\partial\psi$ peuvent s'évaluer, de même, avec substitution de l, m, n à L, M, N. Cette première équation du mouvement, et les deux autres, analogues, deviennent donc, en définitive,

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi\,\varepsilon + \chi\,\varepsilon_1 + \psi\,\varepsilon_2 + \mathrm{I}(l'\partial\varphi + m'\partial\chi + n'\partial\psi) = 0, \\ &\varphi_1\varepsilon + \chi_1\varepsilon_1 + \psi_1\varepsilon_2 + \mathrm{I}(l'\partial\varphi_1 + m'\partial\chi_1 + n'\partial\psi_1) = 0, \\ &\varphi_2\varepsilon + \chi_2\varepsilon_1 + \psi_2\varepsilon_2 + \mathrm{I}(l'\partial\varphi_2 + m'\partial\chi_2 + n'\partial\psi_2) = 0, \end{aligned}\right. \tag{53}$$

où les différentielles totales $\partial\varphi$, $\partial\chi$, ... à prendre seront celles des fonctions (25) (p. 327) relatives au cas de transparence, avec de très faibles accroissements de l, m, n représentés, d'après (51), par les formules

$$(54)\qquad \partial(l, m, n) = \frac{1}{k\mathrm{I}}\frac{d\mathrm{I}}{d(x, y, z)}\sqrt{-1}.$$

22. Multiplions respectivement ces trois équations (53) par l', m', n' et ajoutons-les. Comme le déterminant des neuf éléments $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ est symétrique, les trois coefficients totaux de ε, ε_1, ε_2 s'annuleront en vertu de (24); et, après suppression du facteur commun I, il viendra pour régir la fonction I, vu les valeurs (25) de χ, ψ, φ_1, ψ_1, φ_2, χ_2, l'équation

$$(55)\qquad l'^2\,\partial\varphi + m'^2\,\partial\chi_1 + n'^2\,\partial\psi_2 + 2m'n'\,\partial.mn + 2n'l'\,\partial.nl + 2l'm'\,\partial.lm = 0.$$

Elle est exactement pareille à (34 *bis*) (p. 331) et donne évidemment, en ∂l, ∂m, ∂n, le développement (35) en dl, dm, dn, mais pris avec $d(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) = 0$, vu que, ici, l, m, n seuls reçoivent des accroissements, savoir, ceux qui ont les formules (54). L'équation (55) sera donc, encore avec les notations abrégées (36),

$$(56)\qquad (s'l - \sigma l')\frac{d\mathrm{I}}{dx} + (s'm - \sigma m')\frac{d\mathrm{I}}{dy} + (s'n - \sigma n')\frac{d\mathrm{I}}{dz} = 0.$$

Or les formules (40) (p. 332) montrent que les trois coefficients $s'l - \sigma l'$, $s'm - \sigma m'$, $s'n - \sigma n'$ sont entre eux comme les cosinus directeurs des rayons lumineux correspondant aux ondes planes proposées, c'est-à-dire comme les cosinus de la direction suivant laquelle le mouvement se transmet intégralement sur chaque onde dans le milieu censé transparent. Décrivons donc un élément $(\partial x, \partial y, \partial z)$ de chemin le long du rayon, à partir de (x, y, z); et, ∂x, ∂y, ∂z étant alors proportionnels aux trois cosinus directeurs, l'équation (56) deviendra

$$(57)\qquad \frac{d\mathrm{I}}{dx}\partial x + \frac{d\mathrm{I}}{dy}\partial y + \frac{d\mathrm{I}}{dz}\partial z = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial\mathrm{I} = 0.$$

23. Ainsi, les équations (21) du mouvement n'astreignent *le coefficient* I *d'amplitude qu'à rester invariable le long de chaque rayon lumineux du milieu censé transparent.* Si donc on pose, comme précédemment, $I = \frac{1}{2} e^{i+j\sqrt{-1}}$, tant le coefficient réel e^i d'amplitude que le changement j de phase conserveront, tout le long de chaque rayon émané de la face d'entrée suivant une direction constante, les valeurs fournies, à cette face d'entrée, par les conditions définies relatives à la surface séparative de deux milieux sensiblement transparents, valeurs qui seront, d'une part, constante pour le changement j de phase (si la surface est homogène), d'autre part, proportionnelle, pour le coefficient e^i d'amplitude, à l'amplitude même des vibrations incidentes, donnée pour chaque région de la face d'entrée.

La fonction I se trouvant ainsi déterminée, dans tout le milieu translucide, par l'équation (57) qui exprime la compatibilité des quatre équations linéaires (49) et (53) en ε, ε_1, ε_2, ces équations feront évidemment connaître, pour ε, ε_1, ε_2, en fonction de x, y, z, des expressions de l'ordre de $I\,\partial\varphi$, $I\,\partial\chi$, ... ou des petites dérivées $\frac{dI}{d(x, y, z)}$, comme on avait pressenti qu'elles le seraient; et toutes les équations du problème seront vérifiées.

24. Ces petites fonctions ε, ε_1, ε_2, une fois connues, ajouteront au module et à l'argument des coefficients principaux L'I, M'I, N'I de l'exponentielle, dans les formules (48) de ξ, η, ζ, ou, plus simplement, à leurs quotients L', M', N' par I, de minimes corrections, revenant à remplacer dans (43) les modules l', m', n', si ε', ε'_1, ε'_2 désignent certaines petites fonctions de x, y, z, par $l'e^{\varepsilon'}$, $m'e^{\varepsilon'_1}$, $n'e^{\varepsilon'_2}$, et à accroître les arguments l'', m'', n'', très faibles déjà, de parties également insensibles, mais fonction de x, y, z et qui les porteront à de nouvelles valeurs l''_1, m''_1, n''_1.

Enfin, I étant toujours $\frac{1}{2} e^{i+j\sqrt{-1}}$, la solution symbolique (48) s'écrira, au lieu de (44),

$$(58)\quad (\xi, \eta, \zeta) = (l'e^{\varepsilon'}, m'e^{\varepsilon'_1}, n'e^{\varepsilon'_2})\,\frac{e^i}{2}\,e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)}\,e^{[k(t-lx-my-nz)+j+(l''_1, m''_1, n''_1)]\sqrt{-1}}.$$

Et, par sa superposition avec sa conjuguée, elle donnera, au lieu de (45), la solution réelle

$$(59)\quad \begin{aligned}(\xi, \eta, \zeta) = {} & (l'e^{\varepsilon'}, m'e^{\varepsilon'_1}, n'e^{\varepsilon'_2})\,e^i\,e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)} \\ & \times \cos[k(t-lx-my-nz)+j+(l''_1, m''_1, n''_1)].\end{aligned}$$

Pratiquement, les petites quantités variables ε', ε'_1, ε'_2, l''_1, m''_1, n''_1 seront insensibles, ou réductibles à zéro. Donc *les déplacements vibratoires* ξ, η, ζ *auront* précisément, *en chaque point* (x, y, z) *du milieu translucide, leurs valeurs au même point dans le milieu censé transparent, multipliées par l'exponentielle commune*

$$e^{-kh(\lambda x+\mu y+\nu z)}. \tag{60}$$

Il n'y a de différence d'avec le cas d'ondes latéralement indéfinies que dans *le coefficient* e^i *d'amplitude, ici variable arbitrairement*, quoique d'une manière très graduelle, *d'un rayon lumineux aux rayons parallèles voisins*.

V. — Ellipsoïde d'absorption; formes simples du coefficient d'extinction de la lumière dans le cristal.

25. Ainsi, l'amplitude des vibrations s'affaiblit, sur chaque rayon émané de la face d'entrée suivant une direction qui fait l'angle V avec la normale à cette face, à mesure que son trajet croissant u dans le milieu translucide le porte à une plus grande distance $\lambda x + \mu y + \nu z$ de la face d'entrée. Comme cette distance égale la projection, sous l'angle V, du chemin u parcouru par le rayon, on a

$$\lambda x + \mu y + \nu z = u \cos V,$$

et l'exponentielle (60), fraction qui subsiste encore de l'amplitude à l'entrée, devient $e^{-(kh\cos V)u}$, ou bien, vu la valeur (42) de h (p. 333) dans laquelle on prendra pour l', m', n' les cosinus directeurs de la vibration,

$$e^{-fu}, \qquad \text{avec} \qquad f = r(\mathrm{a}' l'^2 + \mathrm{b}' m'^2 + \mathrm{c}' n'^2). \tag{61}$$

Le coefficient f du parcours u, dans l'exposant négatif de l'exponentielle e^{-fu}, est ce qu'on appelle le *coefficient d'absorption* ou *d'extinction*, du cristal, pour l'*amplitude* des vibrations de direction (l', m', n').

Construisons une droite égale à son inverse $\frac{1}{f}$ et puis la moyenne proportionnelle entre cette droite et la vitesse connue r du rayon lumineux, dans le milieu censé transparent. Enfin, portons, à partir de l'origine, cette moyenne proportionnelle, dans la direction donnée (l', m', n') des vibrations. Si x, y, z désignent les coordonnées de son extrémité, nous aurons

$$(x, y, z) = \sqrt{\frac{r}{f}}(l', m', n'), \qquad \text{d'où} \qquad (l', m', n') = \sqrt{\frac{f}{r}}(x, y, z);$$

et la formule (61) de f donnera

$$\mathfrak{a}' x^2 + \mathfrak{b}' y^2 + \mathfrak{c}' z^2 = 1. \tag{62}$$

Le lieu des points (x, y, z) est donc un ellipsoïde, qui se trouve ainsi propre à exprimer l'action absorbante ou extinctrice du cristal pour les vibrations orientées suivant les divers sens.

Comme les trois coefficients principaux $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ d'absorption ont entre eux, dans les cristaux non cubiques naturels, des rapports très différents de l'unité, tandis que leur biréfringence, toujours faible, laisse le rayon r presque indépendant de la direction, le coefficient d'extinction f des amplitudes aura son inverse sensiblement proportionnel au carré du demi-diamètre de l'ellipsoïde mené suivant la direction de la vibration : ce qui justifiera le nom d'*ellipsoïde d'absorption* donné à cette surface, conformément à une induction suggérée par l'expérience à divers physiciens et minéralogistes, notamment Henri Becquerel, Mallard, M. Camichel, M. Carvallo, etc.

26. Pratiquement, le coefficient d'absorption à considérer sera non pas précisément f, mais le double de f, qui aura ainsi l'expression

$$2f = r(2\mathfrak{a}' l'^2 + 2\mathfrak{b}' m'^2 + 2\mathfrak{c}' n'^2) \tag{63}$$

et contiendra intégralement les trois coefficients principaux des résistances (19) proportionnelles aux vitesses. En effet, dans les additions ou superpositions d'ondes diverses constituant un éclairement total, ce qui s'ajoute *arithmétiquement*, en chaque endroit, pour y mesurer *l'intensité lumineuse*, c'est, au moins en moyenne, la demi-force vive due aux ondes partielles ou aux mouvements de divers sens, et non les quantités de ces mouvements ou les amplitudes. Or, la demi-force vive est, dans chaque onde, proportionnelle au carré de l'amplitude; et, de plus, ses trois fractions correspondant, pour une vitesse effective V, aux composantes $l'V$, $m'V$, $n'V$ du mouvement suivant les trois axes, s'expriment précisément par les trois carrés l'^2, m'^2, n'^2, dont la somme donne l'unité. L'exponentielle décroissante à considérer est donc essentiellement e^{-2fu}, carré de e^{-fu}; et c'est bien $2f$ qui y figure comme coefficient de la distance u parcourue.

La formule (63) pourra donc s'énoncer en disant que *le coefficient $2f$ d'absorption est le produit de la vitesse r de propagation du rayon, par une moyenne entre les trois coefficients principaux* 2a', 2b', 2c' *de résistance, où chacun d'eux figure pour la fraction de l'éclairement due à la composante du mouvement vibratoire suivant l'axe principal correspondant* ([1]).

27. Il y a lieu d'observer que, dans nos équations (21) de mouvement (p. 326), les petits coefficients de résistance que désignent, à un facteur constant près, a', b', c', se forment par addition pure et simple de leurs valeurs relatives aux diverses molécules pondérables disséminées au sein de l'unité de volume d'éther, et en adoptant comme axes coordonnés les *axes principaux de leur ensemble*, ou axes de symétrie de ces résistances pour la totalité des molécules. Or c'est bien d'accord avec les résultats d'observations très étendues, dues à Henri Becquerel, qui a reconnu, en outre, le siège presque exclusif de ces résistances de translucidité, dans des impuretés incorporées au cristal en quantités généralement minimes.

La formule (61) de f ne contient pas explicitement k, ou ne dépend pas directement de la période vibratoire. Mais l'analogie hydrodynamique qui a suggéré les expressions (19) (p. 326) des résistances de translucidité conduit à penser (p. 324) que, conformément à l'expérience, les coefficients a', b', c', d', e', f' de ces expressions dans tous les systèmes d'axes, notamment dans le système principal où d', e', f' s'annulent, varieront assez largement avec la période, c'est-à-dire

([1]) On peut voir, aux pages 616 à 618 du Tome II de mon *Cours de Physique mathématique*, que la même loi s'applique aussi, du moins dans certaines conditions, à des milieux doués de pouvoirs rotatoires, pourvu qu'on y considère, en chaque point, la moyenne des demi-forces vives successives, au lieu des demi-forces vives à un moment donné.

avec la couleur des lumières simples considérées (d'où résulte l'explication du *polychroïsme*); et que, de plus, l'orientation de ces axes de symétrie des résistances de translucidité en dépendra *généralement*, c'est-à-dire en dehors des cas de contextures symétriques.

28. Quand on tient compte de la biréfringence du cristal, il y a lieu de remplacer la vitesse r du rayon, dans la formule (61) de f, par son expression tirée de la relation simple (14) (p. 321). Mais comme les cosinus directeurs figurant dans celle-ci sont pris par rapport aux axes de symétrie des résistances compatibles avec la transparence, c'est-à-dire par rapport aux axes des ellipsoïdes (15), (16) ou de l'onde courbe de Fresnel, en général très différents de *ceux de l'ellipsoïde d'absorption adoptés ici*, nous devrons désigner ces cosinus directeurs autrement que par l', m', n'. Aussi les appellerons-nous $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$; ce qui donnera, d'après (14),

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{\mathfrak{l}'^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2} + \frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}}. \tag{64}$$

Pour amener alors au maximum de simplicité l'expression de l'absorption, nous évaluerons le trajet u de la lumière dans le cristal par le temps t_0 employé à l'effectuer; ce qui donnera

$$u = r t_0 \qquad \text{et} \qquad e^{-fu} = e^{-(rf)t_0}.$$

Nous appellerons donc $\mathfrak{f}$ le nouveau coefficient rf d'absorption; et nous aurons, d'après (61) et (64), pour la fraction de l'amplitude à l'entrée qui subsistera dans le rayon après un trajet de durée t_0, l'exponentielle $e^{-\mathfrak{f}t_0}$, avec la valeur suivante de $\mathfrak{f}$,

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{a}'\, l'^2 + \mathfrak{b}'\, m'^2 + \mathfrak{c}'\, n'^2}{\dfrac{\mathfrak{l}'^2}{a^2} + \dfrac{\mathfrak{m}'^2}{b^2} + \dfrac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}}. \tag{65}$$

Le nouveau coefficient $\mathfrak{f}$ d'absorption est donc une fonction rationnelle et homogène, du degré zéro, à numérateur et dénominateur linéaires, des six carrés l'^2, m'^2, n'^2, $\mathfrak{l}'^2$, $\mathfrak{m}'^2$, $\mathfrak{n}'^2$ des cosinus directeurs de la vibration, par rapport aux axes tant de l'ellipsoïde d'absorption que de l'onde courbe de Fresnel.

29. Cette expression peut, à raison de la petitesse des différences relatives existant, dans les corps, entre a, b et c, être remplacée par une autre seulement *approchée*, mais *entière*. Dans l'identité classique

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)$$
$$=(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2,$$

faisons

$$\alpha=a\mathfrak{l}',\qquad \beta=b\mathfrak{m}',\qquad \gamma=c\mathfrak{n}',$$
$$\alpha'=\frac{\mathfrak{l}'}{a},\qquad \beta'=\frac{\mathfrak{m}'}{b},\qquad \gamma'=\frac{\mathfrak{n}'}{c}.$$

Le premier terme du second membre vaudra 1; et les trois derniers, devenus $\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2$, $\mathfrak{m}'^2\mathfrak{n}'^2$, ..., seront négligeables, comme étant du second ordre. On aura donc

$$(a^2\mathfrak{l}'^2+b^2\mathfrak{m}'^2+c^2\mathfrak{n}'^2)\left(\frac{\mathfrak{l}'^2}{a^2}+\frac{\mathfrak{m}'^2}{b^2}+\frac{\mathfrak{n}'^2}{c^2}\right)=1;$$

ce qui permettra bien de donner à l'expression (65) de $\mathfrak{r}'$ la forme entière, très approchée,

$$\mathfrak{r}'=(a^2\mathfrak{l}'^2+b^2\mathfrak{m}'^2+c^2\mathfrak{n}'^2)(\mathrm{a}'l'^2+\mathrm{b}'m'^2+\mathrm{c}'n'^2)\ (^1). \tag{66}$$

30. Observons, en terminant, que nous nous sommes bornés aux vibrations dont les composantes ξ, η, ζ, pendulaires, peuvent se déduire de la solution symbolique (48) ou, à une première approximation, de la solution symbolique (27). Mais j'ai démontré, à la page 493 du Tome II de mon cours de la Sorbonne, que cela comprend, pour les corps translucides, toutes les ondes planes où le temps t

---

(1) La théorie générale de la translucidité appliquée ici aux phénomènes les plus simples de l'optique cristalline, a été exposée, dans ses principes, vers la fin du Tome, II cité plus haut, de mon *Cours de Physique mathématique* (p. 600 à 618; *voir* aussi p. 481 à 493); elle s'y trouve étendue aux phénomènes de dispersion et de polarisation rotatoire, de manière à expliquer, par exemple (p. 625) l'inégalité de l'absorption, par certains corps *actifs*, des deux rayons à vibrations circulaires de sens inverses, en lesquels ces corps dédoublent un rayon incident à vibrations rectilignes.

ne figure, dans les expressions de ξ, η, ζ, que par les cosinus et sinus d'un même arc, de la forme $k(t - lx - my - nz)$, avec coefficients proportionnels à une amplitude U fonction uniquement, du moins à une première approximation, de la distance $\lambda x + \mu y + \nu z$ à un plan fixe, qui est la face d'entrée de la lumière dans *le cristal*.

Et la démonstration s'y trouve étendue aux corps opaques, dans une considération finale que j'ai développée plus complètement à une Note de la page 9 de mon Mémoire sur l'absorption, inséré au numéro de mai 1905 du *Bulletin des Sciences Mathématiques*.

31. On voit, par les formules (14) et (65), combien était juste le double et merveilleux pressentiment de Fresnel, qui voulait que la vitesse de propagation et l'absorption de la lumière dépendissent *uniquement*, dans chaque corps homogène, *de la direction des vibrations*.

Ce pressentiment se vérifie plus complètement même que ne le pensait Fresnel, puisqu'il s'applique à la vitesse r de propagation et à l'extinction, suivant le rayon lumineux ou suivant le vrai sens de la transmission du mouvement, plutôt ou, du moins, plus simplement encore, qu'à la vitesse ω et à l'extinction suivant la normale aux ondes, comme le supposait Fresnel. Et l'on peut l'étendre à certains (tout au moins) des phénomènes de polarisation rotatoire, où les cosinus directeurs de la vitesse vibratoire changent sans cesse, à la condition de remplacer les carrés et produits de ces cosinus par leurs *valeurs moyennes* (1).

Les mêmes formules montrent aussi que le choix, comme variables, des cosinus directeurs de la vibration, rend extrêmement simples et même élégantes certaines relations fondamentales de l'optique; ce qui pourrait suggérer l'idée de les employer parfois, dans des questions nouvelles où l'on serait embarrassé (2).

---

(1) Même Tome II, p. 615 à 622.

(2) Dans le cas où les coefficients principaux $2a'$, $2b'$, $2c'$ des résistances proportionnelles aux vitesses vibratoires, cessant d'être très petits, deviendraient suffisants pour produire l'*opacité*, c'est-à-dire pour amener l'extinction sous des épaisseurs de quelques longueurs d'onde, les formules simples ci-dessus du cas de translucidité ne s'appliqueraient plus; et, par exemple, dans un milieu isotrope,

VI. — Réflexions sur la grandeur relative des longueurs d'onde que supposent nos équations du mouvement de l'éther dans les corps.

32. D'après l'analogie hydrodynamique qui nous a permis (p. 324) d'exprimer la résistance opposée par chaque molécule pondérable au mouvement de l'éther ambiant, l'accélération (ξ'', η'', ζ'') et la vitesse (ξ', η', ζ') dont dépend cette résistance sont celles, *censées communes*, de tout l'éther situé aux limites de la petite région où le mouvement vibratoire est troublé par la présence de la molécule, région d'un diamètre naturellement en rapport avec la grosseur des diverses molécules, mais *toujours beaucoup plus grand que le leur*. L'éther est donc, implicitement, supposé *à une même phase de son mouvement* sur toute une sphère entourant la région troublée; ce qui exige que le rayon d'une telle sphère soit négligeable par rapport à la longueur d'onde. Or il peut en être autrement quand les éléments des corps deviennent exceptionnellement grands, comme sont, par exemple, les molécules *intégrantes* de certains cristaux ou même les molécules *chimiques*, très complexes, de nombreux corps organiques.

Alors, sans doute, les dimensions des molécules dont il s'agit ne cessent pas de paraître comme infiniment petites à côté de la longueur d'onde; mais *le rayon des régions perturbées* peut lui devenir un peu comparable. Et cela suffit évidemment pour que la résistance de chaque molécule à l'éther ambiant comprenne, outre les termes ordi-

---

les rayons lumineux deviendraient obliques à leurs ondes, sauf sous l'incidence normale. Alors, par conséquent, la construction d'Huygens et de Fresnel, pour obtenir la direction de ces rayons par la jonction du centre de l'onde courbe enveloppe au point de contact de celle-ci avec l'onde plane tangente, cesserait d'être admissible. Bien plus, la forme des rayons lumineux ne serait plus rectiligne; et leur construction exigerait l'intégration d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, sous des conditions initiales que les relations définies propres à la face d'entrée rattacheraient aux mouvements incidents. Pour toutes ces questions intéressantes, à peine ébauchées jusqu'ici, on peut voir, relativement au cas des corps isotropes, les pages 583 à 587 du même Tome II, et, pour le cas général d'un corps homogène hétérotrope, c'est-à-dire d'un cristal opaque non cubique, les nos 7 à 10 du Mémoire, également cité plus haut (p. 321), qui a paru dans le Numéro de mai 1905 du *Bulletin des Sciences mathématiques*.

naires où figurent ξ'', η'', ζ'', ξ', η', ζ' évalués pour le centre de la molécule (abstraction faite de la perturbation), de minimes parties, proportionnelles aux dérivées en x, y, z de ξ'', η'', ζ'', ou même de ξ', η', ζ', et représentant les légères modifications introduites dans la résistance par la *disparité*, que ces dérivées mesurent, du mouvement de l'éther aux limites de la région troublée, ou par le petit désaccord en résultant, dans les impulsions que subit sur ses diverses faces la molécule.

Ces petits termes, quand des raisons de symétrie ne les annulent pas pour l'ensemble des molécules de l'élément de volume, expliquent la polarisation rotatoire ordinaire et la double réfraction elliptique, comme on voit aux pages 455 à 476, 611 et 625 du Tome II souvent cité ici.

33. Il ne subsistera même plus rien de nos expressions de la résistance, ni, par suite, des lois ordinaires de la réflexion et de la réfraction, si la longueur d'onde, se rapetissant dans un rapport énorme, devient seulement comparable aux dimensions d'une molécule, ou même plus petite; ce qui est probablement le cas des rayons X (¹).

(¹) *Voir*, à ce sujet, le n° 41 *bis* (p. 90 à 92) du Tome I du même cours de la Sorbonne sur la *Théorie analytique de la chaleur*, *etc.*

Les cinq premiers paragraphes du présent Mémoire ont été résumés dans trois Notes publiées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CLII, 19 et 26 juin 1911, p. 1721 et 1808; t. CLIII, 3 juillet 1911, p. 16.