JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TH. ANNYCKE

Contribution à l'étude thermomécanique des tiges et des plaques

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 7 (1911), p. 241-315.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__241_0>

Contribution à l'Étude thermomécanique des tiges et des plaques;

PAR M. TH. ANNYCKE.

INTRODUCTION.

1. Les théories classiques de l'élasticité et de la propagation de la chaleur dans les solides, telles qu'elles furent édifiées respectivement par leurs auteurs, n'offrent aucun point de pénétration réciproque. La première, en effet, suppose la température des corps uniforme et invariable, et ne peut atteindre, par conséquent, les déformations que provoquent des écarts sensibles de celle-ci; la seconde ne se préoccupe pas des modifications apportées à la température par les dégagements ou absorptions de chaleur qu'engendrent les déformations du milieu, que ces déformations soient d'origine thermique ou mécanique.

Pour l'étude des phénomènes thermomécaniques des solides, la soudure entre ces deux théories était indispensable : il fallait, en premier lieu, compléter les équations de l'élasticité, de façon qu'elles rendissent compte des déformations thermiques; en second lieu, reprendre l'établissement de l'équation indéfinie de la température, en tenant compte des déformations du milieu.

2. Duhamel tenta cet essai vers l'année 1835. Ses résultats, qui furent établis dans le cas particulier d'une contexture isotrope à l'état naturel (et de l'hypothèse ancienne $\lambda = \mu$), en essayant notamment d'appliquer aux solides la distinction des deux caloriques spécifiques à volume constant et à pression constante, bien connue dès lors pour les gaz, se trouvent insérés dans deux Mémoires intitulés, l'un : *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides* (*Recueil des Savants étrangers, de l'Académie des Sciences de Paris*, t. V); l'autre : *Mémoire sur les phénomènes thermomécaniques* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXV^e Cahier).

3. M. Boussinesq reprit ensuite les recherches de Duhamel d'une manière plus simple et plus rationnelle, en faisant appel aux principes fondamentaux de la Thermodynamique.

Après avoir établi l'expression générale du potentiel d'élasticité, en tenant compte, à la fois, et des déformations élastiques résultant de l'action des forces extérieures, et des déformations thermiques engendrées par les variations de température, M. Boussinesq démontre, d'abord, qu'à une première approximation, on peut raisonner comme si les changements modérés de température n'amenaient pas de changements de pression et réciproquement (c'est d'ailleurs ce que prouve l'expérience journalière); ensuite, qu'à une seconde approximation il faut, d'une part, compléter les équations générales de l'élasticité par l'addition de nouveaux termes, qui s'interprètent aisément lorsqu'on attribue à la température le rôle d'une pression superficielle et, à ses dérivées dans l'espace, le rôle de forces extérieures appliquées à chaque élément de volume; d'autre part, ajouter à l'équation indéfinie des températures, des termes analogues à ceux qu'introduirait l'existence d'une source intérieure fictive, traduisant la conversion du travail des déformations en chaleur.

Ces résultats, résumés dans une Note importante qui termine la XXXIV^e Leçon de sa *Théorie analytique de la chaleur*, ont été démontrés d'une façon détaillée par M. Boussinesq dans son cours de la Sorbonne en l'année 1909.

4. Entrant dans la voie des recherches inaugurées par Duhamel et par M. Boussinesq, M. L. Roy, dans une très intéressante Thèse soutenue le 26 mai 1910 devant la Faculté des Sciences de Paris, développe la théorie des phénomènes thermomécaniques des solides *en suivant les méthodes de l'Énergétique*. Au lieu de se borner, comme l'ont fait ses devanciers, aux corps notablement étendus en toutes dimensions, il aborde également le cas des tiges et des plaques homogènes et isotropes; il établit pour ces différents milieux les équations de la température, celles du mouvement tangentiel et transversal, et détermine, à une deuxième approximation, la vitesse du son dans les corps solides, en étendant à ceux-ci l'hypothèse d'*adiabatie*, reconnue légitime pour les gaz; la thèse s'achève par l'application des théories exposées au problème des vibrations d'origine calorifique, qui accompagnent le refroidissement d'une tige libre à ses deux bouts, uniformément chauffée à l'instant initial, se refroidissant par rayonnement sur toute sa longueur et par contact à ses extrémités.

3. Le but du présent travail est de reprendre, en se plaçant au point de vue thermomécanique, l'étude des tiges et des plaques traitée par M. Boussinesq dans deux remarquables Mémoires insérés au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, l'un en 1871, l'autre en 1879, et dans lesquels sont démontrés en toute rigueur les principes que les ingénieurs mettent à la base de leurs théories sur la *Résistance des matériaux*.

Cette Thèse comprend deux Parties. Dans la première, qui concerne les tiges, nous tenons compte, d'abord, de l'*hétérogénéité* des fibres qui sont souvent, près de l'axe, constituées autrement qu'au voisinage de la surface; la seule hypothèse que nous faisons sur leur constitution est la symétrie de contexture par rapport aux sections normales; notre point de vue est donc plus général que celui de M. L. Roy et atteint, par exemple, l'étude thermomécanique des corps laminés et des poutres en bois qui ne peuvent entrer dans la catégorie des corps homogènes et isotropes; ensuite, sans recourir aux principes de l'Énergétique, mais en admettant *qu'il existe*, à toutes les températures considérées, un *état naturel* pour chaque tronçon de la tige pris isolément, nous démontrons, tout intuitivement d'ailleurs, qu'à part certaines régions exceptionnelles, on peut admettre, à une première approximation, l'*uniformité* de la température dans toute l'étendue d'un tronçon quelconque et lui appliquer, par conséquent, *à l'instant t*, les équations *ordinaires* de l'élasticité, à condition toutefois de compter les déplacements et les déformations *à partir de l'état naturel relatif à la température* θ *correspondante*.

Cela posé, nous introduisons *explicitement* la température dans nos équations en prenant, comme terme de comparaison, non plus l'état naturel relatif à une température θ *quelconque*, mais celui qui correspond à la température *spéciale* $\theta = 0$. Dès lors, nous établissons que la température influe toujours sur l'effort d'extension ou de compression; que les moments de flexion et les efforts tranchants dépendent de celle-ci dans le cas seulement où les propriétés thermiques des fibres longitudinales sont variables; que le couple de torsion en est indépendant : et nous arrivons ensuite à des conclusions analogues pour les vibrations longitudinales, transversales et tournantes.

L'exposé de cette première Partie se termine par l'étude des déplacements vibratoires longitudinaux d'une tige isotrope, à bouts fixes et imperméables à la chaleur, dont les deux moitiés, après avoir été initialement, l'une, chauffée, l'autre, refroidie, se remettent peu à peu en équilibre thermique entre elles et avec l'atmosphère ambiante maintenue à la température zéro. A ce sujet, nous montrons qu'*une simple dérivation* des résultats de notre problème permet de déduire ceux du problème posé par M. L. Roy. Enfin, à l'aide d'applications numériques appropriées, nous discutons les phases du phénomène de refroidissement, en insistant particulièrement sur les conditions requises pour que les vibrations, d'origine calorifique, puissent donner lieu à un son perceptible.

Dans une seconde Partie, nous étendons la méthode intuitive qui nous a servi pour les tiges, aux plaques élastiques planes, toujours dans de larges hypothèses d'hétérotropie et d'hétérogénéité de la matière suivant les petites dimensions du corps, c'est-à-dire, ici, suivant l'épaisseur, mais en y admettant encore l'*existence d'un état naturel des tronçons* à toutes les températures. Nous retrouvons notamment, comme résultats particuliers, tant pour les déplacements tangentiels que pour les déplacements transversaux, des lois que M. L. Roy avait dû, même en se bornant aux plaques homogènes et isotropes, demander au calcul des variations et à d'hypothétiques développements en série censés très rapidement convergents, dus à Poisson, mais qui ne s'appliqueraient peut-être pas facilement à des plaques d'une contexture moins spéciale.

6. C'est sous l'influence de l'enseignement de M. Boussinesq que j'ai entrepris ce travail et je dois beaucoup à ses encouragements et à ses conseils très bienveillants; qu'il daigne recevoir ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

PREMIÈRE PARTIE.

LES TIGES.

I. — Préliminaires.

1. M. Boussinesq pose à la base de son étude sur les tiges, outre les équations générales de l'élasticité, le principe essentiel que nous énoncerons de la manière suivante : Pour toutes les petites déformations d'une particule élastique, s'effectuant *à température constante* et comptées à partir de l'état naturel ou sans tension relatif à cette température, le travail de déformation est *essentiellement positif;* dans le cas où il existe un *potentiel d'élasticité*, le travail de déformation est mesuré par la variation de ce potentiel.

A l'aide de ce principe, M. Boussinesq établit, par l'application des propriétés des formes quadratiques, pour toute tige admettant comme plan de symétrie de contexture une section transversale quelconque, la quasi-nullité des actions mutuelles des fibres longitudinales dans les sens transversaux; il déduit ensuite les formules qui donnent, à une première approximation, l'*effort d'extension ou de compression*, *le moment de torsion*, *les couples de flexion et les efforts tranchants.*

Tous ces résultats sont d'ailleurs démontrés par lui, même pour le cas où il n'existerait pas de *potentiel d'élasticité*, c'est-à-dire pour le cas où les six composantes usuelles des pressions ne seraient pas les dérivées partielles d'une même fonction $\rho\Phi$ par rapport aux six déformations simples correspondantes. Mais, depuis, la certitude de l'existence de ce potentiel est devenue si complète, et il en résulte une simplification telle des théories, que nous n'hésiterons pas à l'admettre dans tout ce qui suit et à profiter des réductions de formules qu'elle permet.

2. Reprenant donc, dans cet esprit, l'étude de M. Boussinesq, cher-

chons les modifications qui doivent y être apportées lorsqu'on se place au point de vue thermomécanique, c'est-à-dire lorsqu'on tient compte des petites déformations des solides que provoquent d'assez larges variations de température.

Soit une tige mince et allongée, de section constante ou variant graduellement d'une extrémité à l'autre, homogène ou composée d'une matière dont la nature peut changer (même brusquement) dans les sens transversaux; nous admettrons cependant la symétrie de contexture par rapport aux sections normales, hypothèse qui, d'ailleurs, se trouve presque toujours vérifiée dans la pratique.

Concevons-la divisée en tronçons sensiblement prismatiques, dont chacun, limité par la surface même du corps et par deux plans parallèles menés normalement à la ligne moyenne, ait ses trois dimensions comparables entre elles.

Abstraction faite des perturbations locales résultant ou de l'introduction de sources de chaleur ou de l'application de forces exceptionnellement grandes, deux tronçons voisins d'une région quelconque de la tige peuvent être considérés comme étant dans des *conditions physiques à fort peu près identiques;* par suite, on est amené à supposer, *à une première approximation*, que les variables qui définissent l'état physique d'un tronçon, c'est-à-dire les six déformations élémentaires (∂, g) et la température θ, conservent les mêmes valeurs tout le long d'une perpendiculaire aux bases du tronçon, les variations de ces quantités ou, tout au moins, des six (∂, g) pouvant d'ailleurs être beaucoup plus considérables dans les sens transversaux. Ajoutons qu'en raison de la très grande conductibilité de la matière qui constitue la tige, comparée à celle de l'atmosphère ambiante, la température est également uniforme dans l'étendue de chaque section normale, et nous arrivons à conclure qu'*en tous les points d'un tronçon quelconque* (*supposé isolé*) *la température est la même.*

3. Il résulte donc de cette analyse préliminaire que, à une première approximation, nous aurons le droit d'appliquer au problème de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon de tige *à l'instant t*, les équations *ordinaires* de l'élasticité qui supposent, comme on sait, la température uniforme et invariable, mais en comptant les déplace-

ments et les déformations à partir de l'état naturel relatif à à la température θ effective.

II. — Équations de l'équilibre ou du mouvement d'un tronçon quelconque supposé parfaitement homogène dans le sens de la longueur et soustrait à toute action extérieure s'exerçant sur sa masse et sa surface latérale.

1. Soit un tronçon quelconque de la tige, considéré primitivement à l'*état naturel relatif à la température* θ (nous désignons par θ la température à l'instant t); puis *dans cet état primitif* choisissons, comme origine d'axes locaux de coordonnées, le centre de gravité de l'une des bases, centre déterminé en attribuant à chaque élément $d\sigma$ de celle-ci une masse fictive égale au produit de cet élément $d\sigma$ par le coefficient d'élasticité E de la fibre qui y passe; pour axe des x, la tangente à la fibre moyenne; pour axes Oy et Oz, deux fibres rectangulaires coïncidant avec les axes principaux d'inertie de la base en question; enfin appelons α l'angle que fait avec Oy la normale extérieure à un élément du contour limitant la section.

Les actions extérieures directement appliquées à la masse du tronçon (y compris l'inertie dans le cas du mouvement) et celles qui s'exercent sur la surface latérale, sont très peu de chose par rapport à l'ensemble des forces qui agissent sur le reste du corps et qui donnent lieu aux réactions intérieures (N, T); nous aurons donc, sous l'action de celles-ci, comme équations de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon de tige,

$$(1)\ (^1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dN_x}{dx}+\frac{dT_z}{dy}+\frac{dT_y}{dz}=0,\\ &\frac{dT_z}{dx}+\frac{dN_y}{dy}+\frac{dT_x}{dz}=0,\\ &\frac{dT_y}{dx}+\frac{dT_x}{dy}+\frac{dN_z}{dz}=0,\end{aligned}\right.$$

les conditions spéciales au contour étant

$$(2)\quad T_z\cos\alpha+T_y\sin\alpha=0,\quad N_y\cos\alpha+T_x\sin\alpha=0,\quad T_x\cos\alpha+N_z\sin\alpha=0.$$

(1) Nous indiquerons par des d italiques les dérivées, mêmes partielles, pour éviter toute confusion avec les ∂ désignant les dilatations linéaires.

2. Il convient de remarquer que les équations (1) et (2) sont les *seules nécessaires* au problème si la tige est *homogène* ou du moins faite d'une matière dont la densité varie graduellement dans les sens transversaux; au contraire, dans le cas d'une *variation brusque de densité dans les sens des* yz, comme il arriverait s'il s'agissait d'une tige formée de plusieurs prismes de constitution entièrement différente accolés sur toute leur longueur, il faudrait, par voie de continuité et eu égard au principe d'égalité de l'action et de la réaction, ajouter aux équations (1) et (2) *deux relations complémentaires* exprimant : l'une, l'égalité des déplacements ξ, η, ζ de part et d'autre de chaque élément de la surface de séparation de ces prismes; l'autre, l'égalité deux à deux, avec signes contraires, des pressions appliquées aux deux faces de l'élément superficiel considéré.

3. Évaluons les déformations élémentaires (∂, g) en fonction des réactions intérieures (N, T).

On sait que le potentiel d'élasticité, rapporté à l'unité de volume, d'une particule élastique quelconque, a le double de sa valeur $\rho\Phi$ définie par l'expression

$$2\rho\Phi = N_x\partial_x + N_y\partial_y + N_z\partial_z + T_x g_x + T_y g_y + T_z g_z. \tag{3}$$

C'est une forme quadratique par rapport aux six déformations (∂, g) qui renfermera le plus généralement vingt et un coefficients spécifiques différents.

Pour le présent problème, étant donnée la *symétrie de contexture* relativement au plan des yz, le potentiel $\rho\Phi$ sera la *somme de deux formes quadratiques distinctes*, l'une en $(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x)$, l'autre en (g_y, g_z).

Rappelons que les déformations (∂, g) dont il s'agit sont comptées *à partir de l'état naturel correspondant à la température* θ et sont liées aux déplacements ξ, η, ζ, *comptés à partir du même état primitif*, par les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_x = \dfrac{d\xi}{dx}, & \partial_y = \dfrac{d\eta}{dy}, & \partial_z = \dfrac{d\zeta}{dz}, \\ g_x = \dfrac{d\zeta}{dy} + \dfrac{d\eta}{dz}, & g_y = \dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}, & g_z = \dfrac{d\eta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dy}. \end{array}\right. \tag{4}$$

La théorie générale de l'élasticité apprend également que, lorsqu'il existe un potentiel $\rho\Phi$, comme nous l'admettons ici, les six pressions (ou plutôt tensions) déformatrices sont données par

$$(5)\qquad (N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z) = \frac{d(\rho\Phi)}{d(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x, g_y, g_z)}.$$

Et si, à l'inverse, on exprime $\rho\Phi$ au moyen des six pressions N, T, ce qui fait de ce potentiel un polynome homogène du second degré en $(N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z)$, il vient, comme on le sait également et comme il est démontré au paragraphe II du premier Mémoire cité de M. Boussinesq (de 1871),

$$(5\ bis)\qquad (\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x, g_y, g_z) = \frac{d(\rho\Phi)}{d(N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z)}.$$

Donc, dans le cas présent où la fonction $\rho\Phi$ se dédouble en deux parties, *essentiellement positives*, contenant, l'une, N_x, N_y, N_z, T_x, l'autre, T_y et T_z, nous aurons, pour exprimer les déformations par les pressions, six relations de la forme

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_x = A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x), \\ \partial_y = -\beta A N_x + 3 \text{ termes en } N_y,\ N_z,\ T_x, \\ \partial_z = -\beta' A N_x + 3 \text{ termes en } N_y,\ N_z,\ T_x, \\ g_x = -\beta'' A N_x + 3 \text{ termes en } N_y,\ N_z,\ T_x, \\ g_y = G T_y + H T_z, \\ g_z = H T_y + G' T_z. \end{array}\right.$$

Il est clair en effet que l'existence du potentiel $\rho\Phi$ entraîne l'égalité, deux à deux, des coefficients affectant soit N_y, N_z, T_x dans ∂_x; soit N_x dans ∂_y, ∂_z, g_x; soit enfin T_z dans g_y et T_y dans g_z.

D'ailleurs les coefficients spécifiques, tant ceux dont il vient d'être parlé que les autres, *ne dépendront pas de* θ : car leurs petites variations dues aux élévations modérées de la température n'ajouteraient, une fois multipliées par les (N, T), que des termes du second ordre; de plus, vu l'homogénéité de la matière le long d'une perpendiculaire aux bases du tronçon, ces coefficients seront tous *indépendants de* x, mais varieront généralement dans les sens des yz; enfin, nous admettrons l'hypothèse suivante, *essentielle* pour la simplification de certains raisonnements dans la suite, en vertu de laquelle les *coefficients* β, β', β'' *sont constants :* cela revient à supposer qu'il s'agit d'une tige dont les fibres, si on les isolait de manière à avoir $N_y = N_z = T_x = 0$, éprouveraient d'égales déformations latérales $(\partial_y, \partial_z, g_x) = -\partial_x(\beta, \beta', \beta'')$, sous l'effet de tractions produisant sur toutes une même dilatation longitudinale ∂_x.

III. — Démonstration de la nullité de T_x, N_z, N_y.

1. Nous avons vu que, à une première approximation, on peut admettre les égalités $\frac{d}{dx}(\partial, g) = 0$, exprimant, pour chaque tronçon, *l'uniformité* de l'état physique en tous les points d'une parallèle à l'axe des x. Il suffira toutefois, pour établir notre proposition, de partir des hypothèses suivantes fort approchées, quand elles ne sont pas rigoureuses, en tout cas plus larges que ne serait la supposition de nullité de toutes les dérivées du premier ordre en x, à savoir

$$(7)\qquad \frac{d^2}{dx^2}(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x) = 0, \qquad \frac{d}{dx}(g_y, g_z) = 0.$$

Le second groupe des équations (7) s'écrit encore, en remplaçant g_y, g_z par leurs valeurs (4) et en tenant compte de ce que $\frac{d\xi}{dx} = \partial_x$,

$$(8)\qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{d\,\partial_x}{dy}, \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{d\,\partial_x}{dz}.$$

Remarquons que les premiers membres des équations (8) sont *continus* dans la section σ, même s'il s'agit d'une tige constituée par des prismes accolés; car les déplacements η, ζ étant égaux, à moins de rupture, de part et d'autre de la surface de séparation de ces prismes, il en est de même de leurs dérivées en x.

2. Cela posé, dérivons par rapport à y la première des équations (8), par rapport à z la seconde, les résultats obtenus pour les premiers membres sont respectivement $\frac{d^2\partial_y}{dx^2}$ et $\frac{d^2\partial_z}{dx^2}$; puis, inversement, dérivons l'une par rapport à z, l'autre par rapport à y, les premiers membres ainsi dérivés ont pour valeur commune $\frac{1}{2}\frac{d^2 g_x}{dx^2}$. Il en résulte donc, vu le premier groupe des équations (7), que les dérivées des termes $\frac{d^2\eta}{dx^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$, soit par rapport à y, soit par rapport à z, sont *nulles*, ou que ces termes ne varient pas dans les sens transversaux.

Soient η_0 et ζ_0 ([1]) les déplacements transversaux du centre de gravité O de la section σ. Nous pouvons remplacer par $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}$ et $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$ les premiers membres des équations (8); celles-ci, multipliées, la première par dy, la seconde par dz, puis ajoutées et intégrées, donnent, en désignant par ∂_0 la dilatation longitudinale de la fibre moyenne au point considéré,

$$\partial_x = \partial_0 - y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}. \tag{9}$$

La formule (9) nous apprend que *les dilatations ∂_x des fibres longitudinales varient linéairement dans les sens transversaux.*

3. Passons maintenant aux deux dernières équations du système (1). Celles-ci deviennent, en remarquant que, eu égard aux égalités (6), les conditions $\frac{d}{dx}(g_y, g_z) = 0$ équivalent à poser $\frac{d}{dx}(T_y, T_z) = 0$,

$$\frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz} = 0, \qquad \frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz} = 0. \tag{10}$$

Multiplions-les respectivement par $V\,dy\,dz$, $W\,dy\,dz$, V et W désignant deux fonctions continues quelconques de y, z, puis ajoutons et intégrons dans toute l'étendue σ d'une section transversale. Il vient

$$\int\!\!\int_\sigma \left[V\left(\frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz}\right) + W\left(\frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz}\right)\right] dy\,dz = 0. \tag{11}$$

Or, on a identiquement

$$V\left(\frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz}\right) = \frac{d}{dy}(VN_y) + \frac{d}{dz}(VT_x) - N_y\frac{dV}{dy} - T_x\frac{dV}{dz},$$
$$W\left(\frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz}\right) = \frac{d}{dy}(WT_x) + \frac{d}{dz}(WN_z) - T_x\frac{dW}{dy} - N_z\frac{dW}{dz}.$$

([1]) On affectera de l'indice o tout ce qui se rapporte à la fibre moyenne ou centrale du tronçon.

Substituant ces valeurs dans l'intégrale (11), nous pouvons, par application de la formule de Green-Stokes[1], transformer les termes exactement intégrables une fois en des intégrales curvilignes étendues au contour s qui limite la section σ, et écrire, par conséquent, pour l'ensemble des termes considérés,

$$(12) \qquad \int_s [V(N_y \cos\alpha + T_x \sin\alpha) + W(T_x \cos\alpha + N_z \sin\alpha)]\, ds.$$

La formule (12) établie sans difficulté lorsque la tige est *homogène*, les fonctions N_y, N_z, T_x étant alors *continues* dans toute la section σ, subsiste, même s'il s'agit d'une tige *constituée par des prismes de nature différente accolés sur leur longueur*, quoiqu'il y ait, dans ce cas, *discontinuité* à la surface de séparation des prismes pour les tensions N_y, N_z, T_x. Notons que, dans cette dernière hypothèse, il faut, pour arriver au résultat, diviser d'abord la section σ en autant de régions partielles qu'il y a de prismes accolés; puis, les variations de N_y, N_z, T_x étant continues à l'intérieur de chacune d'elles, leur appliquer successivement la formule de Green-Stokes.

L'addition de ces intégrales curvilignes partielles nous conduit à la formule (12); car les deux éléments d'intégrale relatifs à un même arc ds' contigu à deux régions sont égaux et contraires, vu les hypothèses spéciales aux surfaces de séparation énoncées plus haut et à cause de la continuité supposée de V et W.

En raison des deux dernières conditions (2) spéciales au contour, il est clair que l'intégrale (12) est nulle, et la relation (11) devient

$$(13) \qquad \int\int_\sigma \left[N_y \frac{dV}{dy} + N_z \frac{dW}{dz} + T_x\left(\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy}\right)\right] d\sigma = 0.$$

Posons successivement dans cette dernière égalité

$$\begin{array}{llllllll} 1^\circ & W = 0 & \text{et} & V = y, & = z, & = y^2, & = yz, & = z^2; \\ 2^\circ & V = 0 & \text{et} & W = z, & = y, & = z^2, & = zy, & = y^2. \end{array}$$

Nous obtenons neuf relations distinctes qui peuvent se condenser

---

(1) Ou plutôt de Lagrange.

en une seule formule symbolique

$$\int\int_\sigma (N_y, N_z, T_x)(1, y, z)\, d\sigma = 0. \tag{14}$$

Posons encore $V = \eta$, $W = \zeta$. On déduit de l'égalité (13), en se rappelant que $\frac{d\eta}{dy} = \partial_y$, $\frac{d\zeta}{dz} = \partial_z$, $\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = g_x$, l'expression suivante :

$$\int\int_\sigma (N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x)\, d\sigma = 0. \tag{15}$$

4. Il nous reste à démontrer que l'équation (15) entraîne, avec (14), la nullité des composantes transversales T_x, N_z, N_y.

Nous avons vu que, pour le problème qui nous occupe, le potentiel d'élasticité $\rho\Phi$ était la somme de deux formes quadratiques distinctes, *essentiellement positives*, l'une contenant N_x, N_y, N_z, T_x; l'autre, T_y, T_z. On sait, d'autre part, que toute forme quadratique, *essentiellement positive*, peut être ramenée à une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, les coefficients de ces divers carrés étant *tous positifs*.

Cela posé, occupons-nous de la première de ces formes, dont le double est

$$N_x \partial_x + N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x.$$

Après y avoir remplacé les ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x par leurs valeurs tirées de (6), développons-la en appliquant la méthode connue de réduction des formes quadratiques. Le premier terme du développement sera $A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x)^2$.

On retranchera ensuite de la partie restante de la forme quadratique le terme $A(\beta N_y + \beta' N_z + \beta'' T_x)^2$, puis par un procédé analogue, on obtiendra le carré d'une forme linéaire ne contenant plus que N_y, N_z, T_x, et ainsi de suite, le nombre de variables dans chaque carré diminuant toujours d'une unité.

En résumé, nous pourrons écrire

$$N_x \partial_x + N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x = A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x)^2 + b(N_y + \gamma N_z + \gamma' T_x)^2 + c(N_z + \gamma'' T_x)^2 + d T_x^2,$$

formule dans laquelle les coefficients A, b, c, d sont *positifs*.

Or on sait que

$$\partial_x = A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x).$$

Par suite, le premier terme du développement s'écrira encore

$$\partial_x(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x) \qquad \text{ou bien} \qquad N_x \partial_x - \partial_x(\beta N_y + \beta' N_z + \beta'' T_x).$$

Nous arrivons donc finalement à l'expression de $N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x$ que nous cherchons :

$$N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x = b(N_y + \gamma N_z + \gamma' T_x)^2 + c(N_z + \gamma'' T_x)^2 + d T_x^2$$
$$- \partial_x(\beta N_y + \beta' N_z + \beta' T_x).$$

Dès lors, si l'on effectue l'intégrale

$$\int\int_\sigma [N_y \partial_y + N_z \partial_z + T_x g_x]\, d\sigma,$$

on constate aisément que le terme

$$-\int\int_\sigma \partial_x(\beta N_y + \beta' N_z + \beta'' T_x)\, d\sigma$$

est *nul identiquement*.

En effet, d'une part, les coefficients β, β', β'' étant *constants* peuvent sortir du signe somme; d'autre part, les trois intégrales $\int\int_\sigma \partial_x(N_y, N_z, T_x)\, d\sigma$ sont *nulles*, vu les formules (9) et (14).

Nous aurons donc, comme expression du premier membre de l'équation (15), une intégrale double dans laquelle l'élément différentiel sera la somme de trois carrés dont les coefficients respectifs b, c, d sont positifs. Cette intégrale, devant être nulle, ne pourra l'être que si chaque carré, pris isolément, s'annule : ce qui entraîne

$$T_x = 0. \qquad N_z = 0. \qquad N_y = 0.$$

Le résultat fondamental que nous venons d'établir en suivant l'élégante méthode de M. Boussinesq, *mais spécifiée et simplifiée pour le cas où existe le potentiel* $\rho\Phi$, s'interprète de la manière suivante :

Dans tout tronçon supposé homogène dans le sens de la longueur et soustrait à toute action extérieure s'exerçant sur sa masse et sa surface latérale, les *composantes de la pression mutuelle de deux fibres quelconques suivant les y et les z sont nulles.*

IV. — Expression de l'effort d'extension, des couples de flexion et de torsion, des efforts tranchants.

1. Les tensions N_y, N_z, T_x étant nulles, les formules (6) se simplifient. La première devient

$$(16) \qquad \partial_x = AN_x \qquad \text{ou} \qquad N_x = \frac{1}{A}\partial_x = E\left(\partial_0 - y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right),$$

E désignant le coefficient d'élasticité d'une fibre longitudinale quelconque du tronçon ; les trois suivantes s'écrivent de même :

$$(17) \quad (\partial_y, \partial_z, g_x) = -\partial_x(\beta, \beta', \beta'') \quad \text{ou} \quad -\left(\partial_0 - y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)(\beta, \beta', \beta'').$$

Parmi les trois quantités $\partial_0, \frac{d^2\eta_0}{dx^2}, \frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$, qui figurent dans les équations (16) et (17), ∂_0 a une signification physique connue; quant aux dérivées secondes $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}, \frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$, elles ne sont autres que les *courbures* que présente à l'origine, en projection sur deux plans rectangulaires des xy et des xz, une ligne matérielle primitivement droite et tangente à la fibre moyenne.

Si maintenant on intègre le système d'équations (17) par rapport à y et à z, il est facile de voir que la base σ du tronçon subit, par rapport à l'axe local des x toujours supposé coïncidant avec l'élément ds de l'axe de la tige, et outre ses déformations transversales ∂_y, ∂_z, g_x, éprouvées dans son propre plan, pareilles pour toutes les sections σ du tronçon (à une première approximation), une rotation d'ensemble autour de cet axe Ox. La connaissance de cette rotation, jointe à celle de ∂_y, ∂_z, g_x, permettra donc de déterminer complètement, *du moins en projection sur le plan des yz*, le mode de déformation et de déplacement de la section transversale σ considérée.

2. Cela posé, cherchons à sommer les composantes normales N_x qui s'exercent aux divers points d'une section σ.

Il vient

$$\iint_\sigma N_x\,d\sigma = \iint_\sigma E\left(\partial_0 - y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)d\sigma;$$

ou encore, ∂_0, $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}$, $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$ étant *constants* dans l'étendue d'une section,

$$\iint_\sigma N_x\,d\sigma = \partial_0\iint_\sigma E\,d\sigma - \frac{d^2\eta_0}{dx^2}\iint_\sigma Ey\,d\sigma - \frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\iint_\sigma Ez\,d\sigma.$$

Or, l'origine des axes coïncidant primitivement avec le centre de gravité de la section défini, comme l'on sait, en attribuant à chaque élément de celle-ci une masse fictive proportionnelle au coefficient d'élasticité E de la fibre longitudinale qui y passe, les deux derniers termes de l'expression précédente disparaissent, et il reste

$$\iint_\sigma N_x\,d\sigma = \partial_0\iint_\sigma E\,d\sigma = E'\sigma\partial_0,$$

en appelant E′ le coefficient *moyen* d'élasticité des fibres longitudinales.

En définitive, nous voyons que la réduction des forces N_x donne :

1° Une *résultante* $\mathcal{N} = E'\sigma\partial_0$ appliquée au centre de gravité;

2° Un *couple normal à la section* σ et qui équivaut à l'ensemble des forces

$$-E\left(y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} + z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)d\sigma.$$

Ce couple se décompose en deux autres, perpendiculaires aux axes Oy et Oz, dont les moments respectifs M_y et M_z, comptés positivement de Ox vers Oz pour le premier, de Ox vers Oy pour le second, sont

$$M_y = \iint_\sigma E\left(y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} + z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)z\,d\sigma,\qquad M_z = \iint_\sigma E\left(y\frac{d^2\eta_0}{dx^2} + z\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}\right)y\,d\sigma.$$

Or, les axes Oy et Oz coïncidant primitivement avec les axes principaux d'inertie de la section, on a

$$\iint_\sigma Eyz\,d\sigma = 0.$$

Par suite, les expressions de M_y et de M_z se simplifient et deviennent, en introduisant les *moments d'inertie principaux*

$$E' I_y = \int\int_\sigma E z^2 \, d\sigma, \qquad E' I_z = \int\int_\sigma E y^2 \, d\sigma;$$

$$(18) \qquad M_y = E' I_y \frac{d^2 \zeta_0}{dx^2}, \qquad M_z = E' I_z \frac{d^2 \eta_0}{dx^2}.$$

La force $\mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0$ qui produit la *dilatation* ∂_0 de la fibre moyenne représente l'*effort d'extension* au point considéré de l'axe de la tige; les couples M_y, M_z qui donnent lieu respectivement aux *courbures* $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$, $\frac{d^2\eta_0}{dx^2}$, sont appelés *couples de flexion*.

3. Passons à la composition des forces T_y et T_z appliquées en chacun des points de la section σ. L'ensemble de ces forces pourra se ramener généralement à un *couple* situé dans le plan des yz et qui, ayant pour effet de faire tourner la section dans son plan, sera le *couple de torsion*, et à une *résultante* dont les composantes suivant les y et les z, $\mathfrak{T}_y$ et $\mathfrak{T}_z$, seront désignées sous le nom d'*efforts tranchants*.

1° *A une première approximation, les efforts tranchants $\mathfrak{T}_y$ et $\mathfrak{T}_z$ sont nuls.* — En effet, dans cette hypothèse, on a

$$\frac{d}{dx}(\partial, g) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}(N, T) = 0;$$

donc la première équation du système (1) devient

$$\frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} = 0.$$

Multiplions l'équation précédente par $U d\sigma$, U étant une fonction continue quelconque de y, z; et intégrons les résultats dans toute l'étendue de la section σ, en remplaçant toutefois

$$U\left(\frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz}\right)$$

par

$$\frac{d}{dy}(UT_z) + \frac{d}{dz}(UT_y) - T_z \frac{dU}{dy} - T_y \frac{dU}{dz}.$$

Le procédé qui nous a servi à établir la formule (13) s'applique ici de même et donne, vu la première équation du système (2),

$$\int\int_\sigma \left(T_z \frac{dU}{dy} + T_y \frac{dU}{dz}\right) d\sigma = 0.$$

D'où il vient, pour $U = y$,

$$\int\int_\sigma T_z \, d\sigma = 0;$$

pour $U = z$,

$$\int\int_\sigma T_y \, d\sigma = 0.$$

Il en résulte que les efforts tranchants $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, étant définis par les égalités

$$\mathfrak{F}_y = \int\int_\sigma T_z \, d\sigma, \qquad \mathfrak{F}_z = \int\int_\sigma T_y \, d\sigma,$$

sont nuls; et la proposition est établie.

2° Par suite de la nullité des efforts tranchants, il ne subsiste, comme résultat de la réduction des forces T_y, T_z, qu'un *couple* dont le moment M_x sera

$$M_x = \int\int_\sigma (y T_y - z T_z) \, d\sigma.$$

Démontrons que M_x est *proportionnel à l'angle de torsion φ et au carré de l'aire σ de la section transversale.*

En effet, deux sections primitivement normales et situées à une distance dx auront, dans la déformation, tourné, en projection, l'une par rapport à l'autre, d'un petit angle $d\psi$ ou $\varphi \, dx$, φ désignant l'angle de torsion rapporté à l'unité de longueur. Les déplacements transversaux correspondant à cette rotation élémentaire, les seuls qui soient différents (à une première approximation) dans les deux sections σ consécutives, seront

(19) $$d\eta = z \, d\psi = -z\varphi \, dx, \qquad d\zeta = y \, d\psi = y\varphi \, dx.$$

Donc les glissements g_y, g_z, définis par les équations (4), seront, en fonction de ξ et de φ,

(20) $$g_y = \frac{d\xi}{dz} + \varphi y, \qquad g_z = \frac{d\xi}{dy} - \varphi z.$$

Supposons que l'angle φ soit donné; il suffira, pour connaître g_y, g_z

et par suite T_y, T_z, de déterminer la fonction ξ en chaque point (y, z) de la section σ.

A cet effet, on porte les expressions de T_y, T_z en fonction de g_y, g_z, tirées de (6), dans les équations

$$\frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} = 0, \qquad T_z \cos\alpha + T_y \sin\alpha = 0; \tag{21}$$

on substitue ensuite aux déformations g_y, g_z leurs valeurs (20), et, de la sorte, on obtient le système permettant de déterminer ξ.

Cela posé, divisons par φ les équations (21). Celles-ci ne renfermeront d'autre inconnue que le rapport $\frac{\xi}{\varphi}$; il s'ensuit que les valeurs de ξ, celles de g_y, g_z, T_y, T_z aux divers points, ainsi que le moment $M_x = \int\int_\sigma (yT_y - zT_z)\,d\sigma$ du couple résultant, sont simplement *proportionnelles à* φ.

De même, établissons la proportionnalité de M_x au carré de σ : il suffit, pour cela, de constater que les équations (20) et (21) ne cessent pas d'être satisfaites quand on y multiplie y, z, dy, dz par un rapport *constant* de similitude a, pourvu qu'on multiplie en même temps ξ par a^2, g_y, g_z, T_y, T_z par a, et, en conséquence, le moment

$$M_x = \int\int_0 (yT_y - zT_z)\,d\sigma.$$

par la quantité a^4 *proportionnelle à* σ^2.

Ainsi donc, s'il s'agit de tronçons ayant des sections semblables et pareillement constitués en leurs points homologues, le moment de torsion M_x varie proportionnellement à φ et à σ^2; par suite, si l'on désigne par c un coefficient dépendant des élasticités transversales et de la forme de la section, le moment de torsion M_x pourra s'écrire, d'une manière générale,

$$M_x = c\sigma^2\varphi \qquad \text{ou} \qquad c\sigma^2\frac{d\psi}{dx}.$$

V. — Équations de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon de tige dans le cas réel.

1. La théorie qui vient d'être exposée et les résultats obtenus ne conviennent *en toute rigueur* qu'au cas *idéal* où l'on supposerait la

tige infinie, de manière à éliminer les influences perturbatrices des extrémités; le tronçon exactement prismatique à l'état naturel correspondant à la température θ, de constitution parfaitement homogène dans le sens de la longueur; la masse du tronçon et sa surface latérale libres de toute action extérieure.

Evidemment toutes ces conditions ne peuvent être vérifiées dans un tronçon de tige *réel;* toutefois, si la longueur de la tige est suffisamment grande, par rapport aux dimensions transversales, pour que les conditions précédentes soient approximativement réalisées, *en vertu du principe de continuité*, les résultats obtenus dans le cas *théorique* déjà envisagé pourront, dans une certaine mesure, *être étendus* au cas *réel.*

Ainsi les expressions des forces ou couples $\mathfrak{N}$, M_x, M_y, M_z ne différeront pas notablement de ce qu'elles étaient dans ce cas *limite*, et les efforts tranchants $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, qui s'annulaient dans ce cas limite, n'auront jamais, rapportés à l'unité de surface de la section σ, que des valeurs relativement faibles, comparées à celles de $\mathfrak{N}$ ou à celles de M_x, M_y, M_z divisées par $\sigma^{\frac{3}{2}}$. De même, la dilatation ∂_x des fibres longitudinales sera restée sensiblement une fonction linéaire des coordonnées y, z.

Donc, partant de l'extension des résultats acquis, cherchons à exprimer les équations d'équilibre d'un tronçon de tige *réel;* de plus, pour simplifier, bornons-nous au cas intéressant d'une tige *primitivement droite et non torse, peu déformée.*

2. Soit un tronçon quelconque de la tige. Les axes locaux de coordonnées, rapportés à l'*état primitif*, c'est-à-dire à l'*état naturel correspondant à la température* θ, sont : Ox, l'élément de fibre moyenne; Oy et Oz, les axes principaux d'inertie de la section σ.

La première base σ du tronçon supporte les trois forces $-\mathfrak{N}$, $-\mathfrak{F}_y$, $-\mathfrak{F}_z$, et les trois couples $-M_x$, $-M_y$, $-M_z$; la seconde σ' est soumise à trois forces et trois couples analogues, mais changés de signe, augmentés de leurs différentielles par rapport à x et orientés suivant les axes locaux $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ du tronçon voisin.

Ces axes diffèrent seulement des précédents Ox, Oy, Oz, en direction, de quantités infiniment petites que nous allons déterminer. En effet, dans la déformation, la fibre centrale primitivement droite s'est incurvée et les courbures, à l'origine, de ses projections sur le plan des xy et celui des xz sont respectivement $\frac{1}{R_y} = \frac{d^2\eta_0}{dx^2}$, $\frac{1}{R_z} = \frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$; de plus, la seconde base σ' a tourné par rapport à la première σ, de telle sorte que les axes principaux d'inertie des deux sections σ et σ', qui étaient *primitivement parallèles* (puisque la tige est supposée *non torse*), font maintenant, en projection sur le plan des yz, un angle $d\psi = \varphi\, dx$. Il est facile dès lors de déduire les cosinus des angles que font avec Ox, Oy, Oz les axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$; ceux-ci seront sensiblement : pour $O'x'$, $1, \frac{dx}{R_y}, \frac{dx}{R_z}$; pour $O'y'$, $-\frac{dx}{R_y}, 1, \varphi\, dx$; pour $O'z'$, $-\frac{dx}{R_z}, -\varphi\, dx, 1$.

D'autre part, si les flexions et torsion sont *très petites*, nous pourrons négliger leurs produits par (M_x, M_y, M_z), ce qui revient, étant donné que ces moments ont dans leurs expressions respectives les facteurs $\varphi, \frac{1}{R_y}, \frac{1}{R_z}$, à négliger les carrés et produits des facteurs considérés. Nous négligerons aussi leurs produits par $\mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$; car les efforts tranchants étant toujours très faibles, nous n'introduirions, en les multipliant par $\varphi, \frac{1}{R_y}, \frac{1}{R_z}$, que des termes du second ordre de petitesse, donc négligeables.

3. Ces conventions faites, nous pouvons, en utilisant les valeurs des cosinus qui viennent d'être calculés, chercher les *composantes et les moments* suivant Ox, Oy, Oz des forces $\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$ appliquées à la seconde extrémité de l'élément dx, ainsi que les *moments des couples* $M_x + \frac{dM_x}{dx}dx$, $M_y + \frac{dM_y}{dx}dx$, $M_z + \frac{dM_z}{dx}dx$.

1° *Composantes des forces* $\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$. — Elles sont pour la première, $\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx$, $\frac{\mathfrak{N}}{R_y}dx$, $\frac{\mathfrak{N}}{R_z}dx$; pour la seconde, 0, $\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, 0; pour la troisième, 0, 0, $\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$.

2° *Moments des forces* $\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$. — Ces forces sont appliquées en un point O', dont les coordonnées sont

dx, $dx\frac{dx}{R_y}$, $dx\frac{dx}{R_z}$. Par l'application des formules classiques de Mécanique rationnelle, on évaluera les moments L, M, N, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. On trouve ainsi que, en se bornant à une première approximation, les moments de $\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx$ sont négligeables; ce qui était à prévoir, puisque cette force prolongée ne passe qu'à une distance, comparable à dx^2, de l'origine O; de même, pour les deux forces $\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx$, $\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx$, les seuls moments sensibles sont, pour la première, $N = \mathfrak{F}_y\,dx$; pour la seconde, $M = -\mathfrak{F}_z\,dx$.

3° *Moments des couples* $M_x + \frac{dM_x}{dx}dx$, $M_y + \frac{dM_y}{dx}dx$, $M_z + \frac{dM_z}{dx}dx$. — Ces couples sont normaux à trois directions $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ qui ne diffèrent respectivement de celles des axes Ox, Oy, Oz que par des angles comparables à $\frac{dx}{R_y}$, $\frac{dx}{R_z}$, $\varphi\,dx$. Par conséquent, leurs moments seront : pour le premier, $M_x + \frac{dM_x}{dx}dx$, o, o; pour le second o, $M_y + \frac{dM_y}{dx}dx$, o; pour le troisième, o, o, $M_z + \frac{dM_z}{dx}dx$.

4. Reste à évaluer les *composantes et les moments des forces extérieures*. Soient X, Y, Z, les composantes de la résultante des forces extérieures par unité de masse; en désignant par ρ la densité moyenne du tronçon, les *composantes* des forces extérieures ont pour expressions $\rho X\sigma\,dx$, $\rho Y\sigma\,dx$, $\rho Z\sigma\,dx$.

Quant aux *moments* des forces extérieures, on peut négliger, d'une part, ceux de $\rho Y\sigma\,dx$, $\rho Z\sigma\,dx$, par rapport à Oy et Oz, le bras de levier de ces forces étant de l'ordre de dx; d'autre part, ceux de $\rho X\sigma\,dx$ par rapport aux trois axes, à condition toutefois que les actions extérieures ne soient pas distribuées trop inégalement de part et d'autre du centre de gravité des sections. Il ne subsiste donc plus que le moment des composantes transversales $\rho Y\sigma\,dx$ et $\rho Z\sigma\,dx$ par rapport à Ox; nous le désignerons par $\mu\rho\sigma^{\frac{3}{2}}dx$, de telle sorte que $\mu\sigma^{\frac{1}{2}}$ représentera le moment des forces transversales rapporté à l'unité de masse.

5. Par suite, les équations fournies par le principe des quantités

de mouvement seront :

$$-\mathfrak{M} + \left(\mathfrak{M} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx}dx\right) + \rho X\sigma\, dx = 0,$$

$$-\mathfrak{F}_y + \left(\mathfrak{F}_y + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dx}dx\right) + \rho Y\sigma\, dx + \frac{\mathfrak{M}}{R_y}dx = 0,$$

$$-\mathfrak{F}_z + \left(\mathfrak{F}_z + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dx}dx\right) + \rho Z\sigma\, dx + \frac{\mathfrak{M}}{R_z}dx = 0.$$

et l'on aura, pour celles des moments,

$$-M_x + \left(M_x + \frac{dM_x}{dx}dx\right) + \mu\rho\sigma^{\frac{3}{2}}dx = 0,$$

$$-M_y + \left(M_y + \frac{dM_y}{dx}dx\right) + \mathfrak{F}_z\, dx \quad = 0,$$

$$-M_z + \left(M_z + \frac{dM_z}{dx}dx\right) + \mathfrak{F}_y\, dx \quad = 0.$$

La première et la quatrième de ces équations reviennent à

$$(22) \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \rho X\sigma = 0, \qquad \frac{dM_x}{dx} + \mu\rho\sigma^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Les quatre autres peuvent s'écrire

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{dM_y}{dx} + \mathfrak{F}_z = 0, & \dfrac{dM_z}{dx} + \mathfrak{F}_y = 0, \\[2mm] \dfrac{d\mathfrak{F}_y}{dx} + \dfrac{\mathfrak{M}}{R_y} + \rho Y\sigma = 0, & \dfrac{d\mathfrak{F}_z}{dx} + \dfrac{\mathfrak{M}}{R_z} + \rho Z\sigma = 0. \end{cases}$$

En substituant les valeurs de $\mathfrak{F}_y$ et de $\mathfrak{F}_z$ dans les deux dernières équations du système (23), il vient pour celles-ci :

$$(24) \qquad \frac{d^2M_z}{dx^2} - \frac{\mathfrak{M}}{R_y} - \rho Y\sigma = 0, \qquad \frac{d^2M_y}{dx^2} - \frac{\mathfrak{M}}{R_z} - \rho Z\sigma = 0.$$

Les deux premières équations du système (23) nous apprennent que les *efforts tranchants* $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ égalent les dérivées premières en x, changées de signe, des moments fléchissants respectifs M_z, M_y; les égalités (22) régissent, l'une l'*extension* ou la *compression*, l'autre la *torsion*, tandis que les relations (24) régissent la *flexion*.

Il ne reste plus, pour résoudre les équations (22) et (24), qu'à y remplacer $\mathfrak{N}$, $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$, M_x, M_y, M_z par leurs valeurs. Ces valeurs, pour une tige *primitivement droite, non torse, peu déformée*, sont :

$$\mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0 \quad \text{ou} \quad E'\sigma\frac{d\xi_0}{dx}, \qquad \frac{1}{R_y} = \frac{d^2\eta_0}{dx^2}, \qquad \frac{1}{R_z} = \frac{d^2\zeta_0}{dx^2},$$

$$M_x = c\sigma^2\varphi \quad \text{ou} \quad c\sigma^2\frac{d\psi}{dx}, \qquad M_y = E'I_y\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}, \qquad M_z = E'I_z\frac{d^2\eta_0}{dx^2}.$$

Remarquons, pour finir, que, si l'on introduit dans les relations (22) et (24) les composantes et les moments de la *force d'inertie*, on en déduira les équations des vibrations *longitudinales*, *tournantes* et *transversales* de la tige.

VI. — Introduction de la température θ dans les équations.

1. Dans toutes les formules qui ont été établies jusqu'ici, nous avons fait une hypothèse *essentielle :* nous avons supposé que l'*état primitif* du tronçon, choisi comme terme de comparaison, était l'*état naturel relatif à la température* θ. Or le choix de cet état primitif ne peut être que *provisoire;* car la température θ, que nous savons être uniforme pour un tronçon quelconque de la tige, varie d'un instant à l'autre, et, de plus, au même instant, diffère suivant le tronçon considéré; il faut donc, si l'on veut se rendre compte du rôle joué par la température dans les équations qui précèdent, que les déplacements et les déformations soient rapportés à un point de repère fixe : ce point de repère *invariable* sera l'*état naturel correspondant à la température spéciale* $\theta = 0$.

2. Examinons donc comment nos formules devront être modifiées. Désignons par ∂'_x, ∂'_y, ∂'_z, g'_x, g'_y, g'_z les déformations comptées cette fois *à partir de l'état naturel relatif à la température* $\theta = 0$; ces déformations sont liées aux déplacements ξ', η', ζ' comptés aussi *à partir du même état primitif* $\theta = 0$, par les relations connues (4). Si l'on joint la connaissance de la température θ à celle des déformations (∂', g') ainsi choisies, on pourra définir, à toute époque, l'état physique d'un tronçon quelconque. Généralisant la loi de Hooke pour l'étendre aux variations modérées de θ, M. Boussinesq écrit que les six composantes de la pression intérieure N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z sont des fonctions linéaires et homogènes des sept paramètres ∂'_x, ∂'_y, ∂'_z, g'_x, g'_y, g'_z et θ, ce qui le conduit à introduire six nouveaux coefficients d'élasticité ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z, du moins dans le cas des milieux de la contexture la plus générale.

Les composantes N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z de la pression intérieure dérivent encore d'un potentiel d'élasticité $\rho\Phi$, de sorte qu'on a

$$(25)\qquad N_x = \frac{d(\rho\Phi)}{d\,\partial'_x}, \qquad N_y = \frac{d(\rho\Phi)}{d\,\partial'_y}, \qquad \ldots, \qquad T_z = \frac{d(\rho\Phi)}{dg'_z},$$

et le potentiel $\rho\Phi$ est lié au potentiel analogue $\rho\Phi'$ relatif à la température spéciale $\theta = 0$, par la relation

$$\rho\Phi = \rho\Phi' - \theta(\nu_x\,\partial'_x + \nu_y\,\partial'_y + \nu_z\,\partial'_z + \tau_x g'_x + \tau_y g'_y + \tau_z g'_z).$$

3. Pour le problème qui nous occupe, étant donnée la symétrie de contexture de la tige relativement au plan des yz, il n'y aura que quatre coefficients d'élasticité thermiques ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, introduits dans l'expression du potentiel $\rho\Phi$, qui pourra par suite s'écrire $\rho\Phi = \rho\Phi' - \theta(\nu_x\partial'_x + \nu_y\partial'_y + \nu_z\partial'_z + \tau_x g'_x)$, le terme $\rho\Phi'$ étant, vu la symétrie de contexture, la somme de deux formes quadratiques distinctes, l'une en ∂'_x, ∂'_y, ∂'_z, g'_x, l'autre en g'_y, g'_z. Il suit de là que les expressions $N_x + \nu_x\theta$, $N_y + \nu_y\theta$, $N_z + \nu_z\theta$, $T_x + \tau_x\theta$, T_y, T_z, sont les mêmes fonctions linéaires de ∂'_x, ∂'_y, ∂'_z, g'_x, g'_y, g'_z qu'à la température $\theta = 0$.

Cela posé, résolvant par rapport aux ∂', g', les six relations ainsi écrites, on trouve comme expressions des déformations ∂', g', les formules suivantes où sont groupés à part, puis réduits ensemble, les termes dans lesquels figure θ, et où les coefficients des N, T, sont évidemment les mêmes que dans les formules (6) données plus haut :

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned}
\partial'_x &= A(N_x - \beta N_y - \beta' N_z - \beta'' T_x) + D_x\theta,\\
\partial'_y &= -\beta A N_x + (3 \text{ termes en } N_y, N_z, T_x) + D_y\theta,\\
\partial'_z &= -\beta' A N_x + (3 \text{ termes en } N_y, N_z, T_x) + D_z\theta,\\
g'_x &= -\beta'' A N_x + (3 \text{ termes en } N_y, N_z, T_x) + G_x\theta,\\
g'_y &= GT_y + HT_z,\\
g'_z &= HT_y + G'T_z.
\end{aligned}\right.$$

Remarquons de suite que les nouveaux coefficients D_x, D_y, D_z, G_x, qui sont des fonctions déterminées des quatre coefficients d'élasticité thermiques ν_x, ν_y, ν_z, τ_x et aussi des coefficients entrant dans $\rho\Phi'$, présentent l'avantage d'avoir une *signification physique immédiate*. En effet, supposons que, le tronçon restant toujours à l'état naturel ou sans tension, nous élevions sa température de o à θ; tous les N, T sont nuls, et les formules précédentes se réduisent pour donner :

$$(27) \qquad \delta'_x = D_x\theta, \quad \delta'_y = D_y\theta, \quad \delta'_z = D_z\theta, \quad g'_x = G_x\theta, \quad g'_y = 0, \quad g'_z = 0.$$

Les déformations, *purement thermiques*, sont donc proportionnelles à la température θ, et par conséquent les D_x, D_y, D_z sont les *coefficients de dilatation thermique* suivant les directions Ox, Oy, Oz; de même, G_x désigne le coefficient du glissement thermique conjugué aux x; quant aux deux autres coefficients analogues G_y, G_z, ils sont nuls en raison de la symétrie de contexture de la tige.

Dès lors, si l'on retranche des déformations *totales* δ'_x, ..., g'_z, leurs parties *purement thermiques* $D_x\theta$, ..., ou dues à l'échauffement θ, le reste, c'est-à-dire les termes en N_x, N_y, ..., T_z des formules (26), seront évidemment les déformations *purement mécaniques* δ_x, δ_y, ..., g_z dues aux pressions N, T, et résultant de l'application de celles-ci au tronçon considéré, censé porté déjà à la température θ, comme on l'a admis au Chapitre précédent. On aura donc :

$$(28) \quad \begin{cases} \delta'_x = \delta_x + D_x\theta, \quad \delta'_y = \delta_y + D_y\theta, \quad \delta'_z = \delta_z + D_z\theta, \quad g'_x = g_x + G_x\theta, \\ g'_y = g_y, \quad g'_z = g_z. \end{cases}$$

La seule considération des deux dernières équations (28) nous apprend que la température *n'influe pas* sur les glissements conjugués aux directions transversales et par suite sur les tensions T_y, T_z, considérées du moins dans leurs parties *principales* constituant le couple de torsion ou ne donnant pas d'effort tranchant.

4. A une première approximation, les coefficients thermiques D_x, D_y, D_z, G_x, sont, comme d'ailleurs les coefficients dont ils dépendent, indépendants de x et de θ. Ils varieront généralement dans les sens transversaux, sans être pour cela des fonctions *arbitraires* de y, z, du moins, dans l'hypothèse, faite implicitement au Chapitre précédent, *de l'existence d'un état naturel pour l'ensemble du tronçon, à toutes les températures* θ.

En effet, au début de son Mémoire sur les tiges (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1871), M. Boussinesq établit, à la suite de Barré de Saint-Venant, les conditions nécessaires et suffisantes pour que six fonctions données de x, y, z puissent représenter les trois dilatations ∂ et les trois glissements g, amenés par de petits déplacements ξ, η, ζ continus quelconques, dans une masse d'étendue finie ou notable en tous sens, comme sont nos tronçons. Ces conditions sont les suivantes :

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\partial_x}{dy\,dz} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dg_y}{dy} + \frac{dg_z}{dz} - \frac{dg_x}{dx}\right),\\
\frac{d^2\partial_y}{dz\,dx} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{dg_z}{dz} + \frac{dg_x}{dx} - \frac{dg_y}{dy}\right),\\
\frac{d^2\partial_z}{dx\,dy} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{dg_x}{dx} + \frac{dg_y}{dy} - \frac{dg_z}{dz}\right),\\
\frac{d^2 g_x}{dy\,dz} &= \frac{d^2\partial_y}{dz^2} + \frac{d^2\partial_z}{dy^2},\\
\frac{d^2 g_y}{dz\,dx} &= \frac{d^2\partial_z}{dx^2} + \frac{d^2\partial_x}{dz^2},\\
\frac{d^2 g_z}{dx\,dy} &= \frac{d^2\partial_x}{dy^2} + \frac{d^2\partial_y}{dx^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les relations (29) sont tout à fait générales et s'appliquent aussi bien aux déformations purement thermiques qu'à celles qui sont purement mécaniques, pourvu cependant que les déplacements ξ, η, ζ soient *très petits*.

Substituons donc dans le système (29) les valeurs des déformations purement thermiques définies par les formules (27); en tenant compte de ce que, à une première approximation, dans toute l'étendue du tronçon, la *température* θ est *uniforme* et les *dérivées en* x des déformations *nulles*, nous obtiendrons aisément, par cette substitution, les conditions de compatibilité auxquelles doivent satisfaire les coefficients D_x, D_y, D_z, G_x, pour que des dilatations *purement thermiques* à toute température θ soient possibles, ou que l'échauffement θ puisse se produire sans être accompagné de pressions (ce qui est le caractère distinctif de l'état dit *naturel*), à savoir :

$$\frac{d^2 D_x}{dy\,dz} = 0, \qquad \frac{d^2 D_x}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^2 D_x}{dz^2} = 0, \qquad \frac{d^2 D_y}{dz^2} + \frac{d^2 D_z}{dy^2} - \frac{d^2 G_x}{dy\,dz} = 0.$$

Les D_y, D_z, G_x, n'ayant qu'une seule relation à vérifier, pourront donc être choisis d'une manière assez large ; *quant à* D_x, il résulte des trois premières relations qui précèdent que ce coefficient sera une *fonction linéaire des coordonnées transversales*, c'est-à-dire que sa forme la plus générale sera

$$(30) \qquad D_x = D_0 - \mathcal{A} y - \mathcal{B} z,$$

D_0 désignant le coefficient de dilatation thermique de la fibre centrale, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux coefficients qui varieront généralement d'un tronçon à l'autre, mais qui ne dépendent ni de y, ni de z.

Il est clair que, pour toute autre expression de D_x, il n'existera pas, pour l'ensemble du tronçon, d'*état naturel* à la température θ, mais seulement pour chaque particule imperceptible du tronçon, censée détachée du reste et soustraite à toute pression. Les dilatations thermiques des particules, ainsi libérées individuellement, rendront leurs formes impropres à se juxtaposer exactement ou à reconstituer le tronçon *continu* en se soudant.

5. Les déplacements et les déformations étant ainsi rapportés à l'*état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$, cherchons ce que deviennent les formules qui donnent l'effort d'extension $\mathcal{N}$, les moments de flexion M_y, M_z, le couple de torsion M_x et les efforts tranchants $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}_z$.

1° *Effort d'extension.* — On sait que l'expression de cet effort est $\mathcal{N} = E'\sigma\partial_0$; or, vu les formules (28), on a $\partial_0 = \partial'_0 - D_0\theta$; d'où il vient pour $\mathcal{N}$

$$(31) \qquad \mathcal{N} = E'\sigma(\partial'_0 - D_0\theta).$$

Cette dernière relation nous apprend que l'échauffement a pour effet de *diminuer* la traction $\mathcal{N}$ proportionnellement à l'écart de température θ : en effet, les corps solides se dilatant sous l'action de la chaleur, le coefficient D_0 est *positif*.

2° *Moments de flexion.* — Les moments fléchissants M_y et M_z sont donnés par les égalités (18). Or celles-ci supposent la *linéarité* en y et z de la déformation ∂_x. D'autre part, pour établir la linéarité de ∂_x, nous nous sommes basés sur la remarque suivante, dont il est facile d'ailleurs de reconnaître la légitimité, à savoir que, pour une tige très longue par rapport aux dimensions transversales, les dilatations et glissements (∂, g) varient d'une manière incomparablement moins rapide dans le sens longitudinal x que dans les sens transversaux y, z. Il est clair que ce principe de la *graduelle* variation des déformations suivant l'axe de la tige, qui s'applique tant aux déformations purement thermiques qu'à celles qui sont purement mécaniques, reste vrai pour les déformations *totales* résultant de la superposition des deux précédentes, c'est-à-dire pour les déformations (∂', g') comptées à partir de l'*état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$.

Il suit de là que nous pouvons appliquer la formule (9) aux déformations *totales* (∂', g') ainsi qu'aux déplacements correspondants (ξ', η', ζ') et écrire

$$\partial'_x = \partial'_0 - y\frac{d^2\eta'_0}{dx^2} - z\frac{d^2\zeta'_0}{dx^2};$$

or l'on sait que $\partial'_x = \partial_x + D_x\theta$ et que $D_x = D_0 - \mathcal{A}y - \mathcal{B}z$; d'où il vient

$$\partial_x = (\partial'_0 - D_0\theta) - y\left(\frac{d^2\eta'_0}{dx^2} - \mathcal{A}\theta\right) - z\left(\frac{d^2\zeta'_0}{dx^2} - \mathcal{B}\theta\right).$$

Par identification de cette dernière égalité avec la formule (19) qui exprime également la dilatation *partielle* ∂_x, due uniquement à l'action des forces extérieures, on déduit que

$$\frac{d^2\eta_0}{dx^2} = \frac{d^2\eta'_0}{dx^2} - \mathcal{A}\theta, \qquad \frac{d^2\zeta_0}{dx^2} = \frac{d^2\zeta'_0}{dx^2} - \mathcal{B}\theta;$$

et par suite, pour expressions des *moments fléchissants* M_y et M_z,

$$(32) \qquad M_y = E'I_y\left(\frac{d^2\zeta'_0}{dx^2} - \mathcal{B}\theta\right), \qquad M_z = E'I_z\left(\frac{d^2\eta'_0}{dx^2} - \mathcal{A}\theta\right).$$

Ceux-ci *dépendront*, comme on le voit, *de la température* θ, qui, à elle seule (ou sans l'adjonction d'aucun couple M_y ou M_z de flexion), fera naître les deux courbures $\frac{1}{R_z} = \mathcal{B}\theta$, $\frac{1}{R_y} = \mathcal{A}\theta$. Il faut *excepter* cependant le cas où les coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ seraient *nuls simultanément*, ce qui aurait lieu précisément, si toutes les fibres longitudinales de la tige avaient *même* coefficient de dilatation thermique

$$D_x = D_0.$$

3° *Efforts tranchants.* — Ces efforts étaient nuls dans le *mode de déformation type;* et leurs *très petites valeurs* dans les *modes réels* sont directement liées, par le théorème des moments [formules (23)], à la dérivée en x des couples de flexion; donc ils ne dépendront de θ que dans le cas où ces couples eux-mêmes en dépendront.

4° *Couple de torsion.* — Nous avons vu au n° **3** de ce paragraphe que, dans le *mode de déformation type* dont s'écartent très peu les *modes réels*, la température n'influe pas sur les glissements conjugués aux directions transversales g_y, g_z et par suite sur les tensions T_y, T_z considérées du moins dans leurs parties *principales* constituant le couple de torsion. Il en résulte que ce dernier couple est *indépendant de* θ.

6. Il nous reste à voir maintenant dans quelle mesure la température modifiera le mouvement vibratoire des tiges.

1° *Vibrations longitudinales.* — Les déplacements d'ensemble du tronçon qui résultent de son mouvement étant, en général, très grands par rapport aux déplacements relatifs aux axes *locaux* (liés au tronçon) ou déplacements propres du tronçon, nous pourrons écrire, à une première approximation, pour chaque section σ, $\xi' = \xi'_0$, $\eta' = \eta'_0$, $\zeta' = \zeta'_0$, ces déplacements ξ'_0, η'_0, ζ'_0 de l'axe de la tige étant considérés par rapport à des axes *généraux* des x, y, z. La composante de la force d'inertie, suivant Ox, sera donc $-\rho\sigma\dfrac{d^2\xi'_0}{dt^2}$, et en l'introduisant dans la formule (22), nous obtiendrons, conformément au principe de d'Alembert, l'équation qui régit les vibrations longitudinales,

$$\frac{d\mathcal{N}}{dx} + \rho\sigma\left(X - \frac{d^2\xi'_0}{dt^2}\right) = 0.$$

Or

$$\mathcal{N} = E'\sigma(\partial'_0 - D_0\theta) = E'\sigma\left(\frac{d\xi'_0}{dx} - D_0\theta\right).$$

d'où

$$\frac{d}{dx}\left[E'\sigma\left(\frac{d\xi_0}{dx} - D_0\theta\right)\right] + \rho\sigma\left(X - \frac{d^2\xi_0}{dt^2}\right) = 0. \tag{33}$$

L'équation (33), dont les coefficients présentent l'avantage d'avoir une *signification physique simple et immédiate,* est analogue à celle qu'avait obtenue M. L. Roy dans sa Thèse [*Recherches sur les propriétés thermomécaniques des solides*, p. 46, équation (5)], en basant ses raisonnements sur les théories de l'Énergétique. La méthode toute intuitive que nous avons suivie nous a donc conduit au même résultat.

2° *Vibrations transversales.* — Nous obtiendrons l'équation des vibrations qui s'effectuent dans le sens des y, par exemple, en introduisant dans la première des formules (24) la composante, suivant Oy, de la force d'inertie. Cette composante a pour valeur, toujours à une première approximation, $-\rho\sigma\frac{d^2\eta'_0}{dt^2}$; de la sorte on déduit l'équation

$$-\frac{d^2 M_z}{dx^2} + \frac{\mathfrak{N}}{R_y} + \rho\sigma\left(Y - \frac{d^2\eta'_0}{dt^2}\right) = 0.$$

Mais dans le cas d'une *verge* vibrante, la tension $\mathfrak{N}$ n'est jamais considérable (1), le terme $\frac{\mathfrak{N}}{R_y}$ peut donc être négligé et il reste

$$-\frac{d^2 M_z}{dx^2} + \rho\sigma\left(Y - \frac{d^2\eta'_0}{dt^2}\right) = 0.$$

Si donc l'on a $D_x = D_0$ (ce qui correspond au cas de l'*homogénéité thermique* des fibres longitudinales), les moments fléchissants M_y, M_z ne dépendent pas de la température : et celle-ci, par suite, *n'influe pas* sur le mouvement transversal.

Au contraire, si $D_x = D_0 - \mathcal{A}y - \mathcal{B}z$, la température figure explicitement dans l'expression des couples de flexion, et, dès lors, l'équation des vibrations transversales, dans le sens des y, devient, si l'on

(1) Elle aurait, au contraire, le rôle principal dans le problème de la *corde* vibrante ou tige *sans rigidité* sensible.

suppose en outre $Y = 0$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E' I_z \frac{d^2 \eta'_0}{dx^2}\right) + \rho\sigma \frac{d^2 \eta'_0}{dt^2} = \frac{d^2}{dx^2}(E' I_z \mathcal{A} \theta). \tag{34}$$

Il est clair que l'intégrale générale de cette dernière équation comportera un terme, *fonction de* θ, qui mettra en évidence le rôle joué par la température dans le mouvement vibratoire considéré.

3° *Vibrations tournantes*. — Nous supposons, comme précédemment, qu'il n'y a pas d'autre force extérieure appliquée au tronçon que la force d'inertie. Par suite, nous aurons, comme équation des vibrations tournantes,

$$\frac{dM_x}{dx} - \rho \int\int_\sigma \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right) d\sigma = 0. \tag{35}$$

Notons que, dans cette dernière équation, y et z désignent les coordonnées *totales* des divers points d'une section, et non leurs coordonnées *primitives*. Cela posé, on sait que $M_x = c\sigma^2 \frac{d\psi}{dx}$, où c et σ^2 ne dépendent de θ que dans la proportion infime des dilatations purement thermiques. Donc, pour la torsion φ ou $\frac{d\psi}{dx}$ qui sera à considérer, cette expression du couple de torsion n'aura pas à contenir la température θ ou à en dépendre. D'autre part, en raison des rotations très sensibles et rapides, ψ, qui se font, dans le problème actuel, autour de l'axe de la tige pris comme axe général des x, les petites déformations variables qu'éprouve chaque section σ ne donnent lieu, *si près de l'axe de rotation*, qu'à des vitesses et à des accélérations insignifiantes; de sorte qu'on a, comme dans une simple rotation d'un solide autour de l'axe des x,

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\psi}{dt}\right) = r^2 \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

L'équation (35) deviendra donc, par substitution des valeurs de M_x et de $\left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right)$,

$$c\sigma^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \rho \frac{d^2\psi}{dt^2} \int\int_\sigma r^2 \, d\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad c\sigma^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \rho I_0 \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0; \tag{36}$$

l'intégrale $\int\int_\sigma r^2 d\sigma = \int\int_\sigma (y^2+z^2)d\sigma$, où y et z pourront être très sensiblement réduits aux coordonnées *primitives*, n'étant autre que le moment d'inertie polaire I_0 de la section, supposée homogène.

Puisque, à une première approximation, les coefficients $c\sigma^2$ et ρI_0 de l'équation (36) ne dépendent pas de θ, il s'ensuit que les vibrations tournantes, définies par la fonction ψ de x et de t, ont lieu *comme si la température était uniforme et invariable.*

7. En résumé, nous voyons que (au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons), parmi les trois modes de vibrations étudiés, il n'y a que les vibrations longitudinales seules sur lesquelles la température *influe toujours*, quelles que soient les propriétés thermiques de la matière qui constitue la tige : ce sont donc les plus intéressantes au point de vue thermomécanique; et nous les étudierons, en détail, pour une tige droite, homogène et isotrope.

VII. — Étude des vibrations occasionnées, dans une tige droite, fixée à ses extrémités, par le refroidissement ou l'échauffement de cette tige, supposée portée initialement à des températures données.

1. Proposons-nous d'appliquer les théories, qui viennent d'être exposées, au cas simple du refroidissement ou de l'échauffement d'une tige. L'énoncé du problème que nous traiterons est le suivant :

Une tige de longueur donnée l, primitivement droite, homogène et isotrope, dont on adopte l'axe comme axe des x, est fixée par ses extrémités contre deux appuis immobiles, distants de sa longueur naturelle à la température $\theta = 0$. La matière qui constitue la tige est, par hypothèse, bonne *conductrice de la chaleur, tandis que les appuis, au contraire, sont* mauvais *conducteurs. La tige, après avoir été mise un certain temps à des températures données $f(x)$, ce qui lui a permis de prendre un état d'équilibre mécanique bien défini, correspondant à ces températures stationnaires $f(x)$, est abandonnée à elle-même, sans vitesse initiale, dans une atmosphère maintenue à la température zéro. Étudier les vibrations longitu-*

dinales de la tige qui accompagnent le phénomène de son refroidissement ou de son échauffement, et les conditions dans lesquelles elles peuvent donner naissance à un son perceptible.

2. L'équation indéfinie du problème nous est donnée par l'égalité (33); mais, vu l'homogénéité de la matière et l'absence de force extérieure (la pesanteur et la pression atmosphérique sont en effet négligeables), celle-ci se simplifie et devient, en y supprimant les indices,

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = E\frac{d^2\xi}{dx^2} - ED\frac{d\theta}{dx},$$

ou encore, en introduisant la vitesse du son a égale à $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$,

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} - D\frac{d\theta}{dx}.$$

Cherchons les conditions aux limites et les conditions initiales correspondantes.

D'abord, les extrémités de la tige étant supposées fixées dans leur situation d'état naturel à la température zéro, on aura, à toute époque, $\xi = 0$ (pour $x = 0$ et pour $x = l$).

D'autre part, à l'instant initial, la loi de répartition des températures étant $f(x)$, et la vitesse $\frac{d\xi}{dt}$ nulle, nous pourrons déterminer, en fonction de $f(x)$, le déplacement initial ξ^0 en un point quelconque de la tige. En effet, la vitesse initiale nulle fait suite à un état continu de repos : il en résulte que la tension *initiale* $\mathfrak{N}^0$ est *uniforme*. Il suffit, pour s'en convaincre, de remplacer dans l'équation (22), X par $-\frac{d^2\xi}{dt^2}$, et de remarquer que l'égalité $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$ entraîne la suivante $\frac{d\mathfrak{N}}{dx} = 0$, c'est-à-dire l'*uniformité* de la tension $\mathfrak{N}$ dans l'état primitif.

Soit donc $\mathfrak{N}^0$ cette tension initiale uniforme rapportée à l'unité de surface, on a, d'après la formule (31),

$$\mathfrak{N}^0 = E(\partial - D\theta) = E\left[\frac{d\xi^0}{dx} - Df(x)\right].$$

Résolvant cette dernière relation par rapport à $\frac{d\xi^0}{dx}$ et intégrant, il vient

$$\xi^0 = \frac{\mathfrak{X}^0}{E} x + D \int_0^x f(z)\, dz,$$

sans constante arbitraire, eu égard à la fixité de l'extrémité $x = 0$.

Reste à déterminer $\mathfrak{X}^0$. La seconde extrémité $x = l$ est fixe aussi : par conséquent,

$$0 = \frac{\mathfrak{X}^0}{E} l + D \int_0^l f(z)\, dz. \tag{37}$$

L'équation (37) donne $\mathfrak{X}^0$, et en portant sa valeur dans l'expression de ξ^0, nous obtenons

$$\xi^0 = D \int_0^x f(z)\, dz - D \frac{x}{l} \int_0^l f(z)\, dz.$$

En définitive, nous pourrons grouper les équations du problème dans le Tableau suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - D \dfrac{d\theta}{dx}, \\ \xi = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l). \\ (\text{pour } t = 0),\quad \dfrac{d\xi}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \xi^0 = D\left[\displaystyle\int_0^x f(z)dz - \frac{x}{l}\int_0^l f(z)dz\right] = DF(x)\,(^1). \end{array} \right.$$

3. *Détermination de* θ. — L'équation indéfinie du problème renfermant le terme $\frac{d\theta}{dx}$, il est nécessaire de déterminer au préalable la température; or le calcul de θ s'effectue, du moins à une première approximation, en considérant la tige comme un solide invariable, ce qui permet d'appliquer les méthodes classiques de la théorie analytique de la chaleur.

Soit donc un tronçon de tige de longueur dx, et appelons σ et s l'aire et le périmètre de la base; l'équation usuelle des températures, posée par Biot et Fourier, est

$$C \frac{d\theta}{dt} = K \frac{d^2\theta}{dx^2} - k \frac{s}{\sigma} \theta,$$

(1) *N. B.* — Nous désignons par $F(x)$ la quantité placée entre crochets.

où C désigne la chaleur spécifique par unité de volume, K et k deux coefficients respectifs de conductibilité intérieure et de conductibilité extérieure ou superficielle.

De plus, la tige étant fixée contre deux appuis *mauvais conducteurs*, le flux de chaleur est *nul aux extrémités*, ce qui revient à dire qu'on a, à toute époque, $\frac{d\theta}{dx} = 0$ (pour $x = 0$ et pour $x = l$).

Enfin, la relation d'état initial qui achève de déterminer θ est (pour $t = 0$) $\theta = f(x)$.

Donc le système déterminant θ, à une première approximation, sera

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = b^2 \dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \mathcal{L}\,\theta, & \text{en posant} \quad \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{C}} = b^2, \quad \dfrac{k}{\mathrm{C}}\dfrac{s}{\sigma} = \mathcal{L}; \\ \dfrac{d\theta}{dx} = 0 & (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\ \theta = f(x) & (\text{pour } t = 0). \end{cases}$$

Ces équations sont précisément celles qui caractérisent le refroidissement du mur diathermane, d'épaisseur l, et dont les parois extrêmes sont supposées imperméables à la chaleur.

L'intégrale générale du système (II) est donnée par la superposition d'une infinité de solutions particulières vérifiant, séparément, les équations indéfinie et aux limites, chacune de ces solutions étant affectée d'un coefficient arbitraire qu'on détermine ensuite par la condition d'état initial.

Si nous posons

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{l}, \qquad \beta_i = \frac{1}{a}(\mathcal{L} + b^2\alpha_i^2), \qquad \mathrm{A}_i = \frac{2}{l}\int_0^l f(z)\cos\alpha_i z\,dz,$$

la solution *formelle* du problème s'écrira

$$(38) \qquad \theta = \sum_1 \mathrm{A}_i e^{-a\beta_i t}\cos\alpha_i x,$$

où nous faisons figurer explicitement dans l'exponentielle, et, par suite, implicitement dans β_i, le facteur a qui représente la vitesse du son dans la tige; ce facteur n'a, il est vrai, aucun rôle à jouer dans la question des températures; néanmoins son introduction est avantageuse, car elle nous permettra de simplifier certaines formules ultérieures relatives à ξ.

Pour que la série (38) soit la solution *effective* du problème, il faut s'assurer, en outre, que la série considérée et celles qui s'en déduisent par dérivation, terme à terme, une fois par rapport à t et deux fois de suite par rapport à x, sont *uniformément convergentes en x et t pour $t > 0$.*

Or ces propositions ont été démontrées par M. H. Poincaré [1]; et par conséquent la série (38) est la solution cherchée.

4. *Détermination de ξ.* — Remplaçons θ par sa valeur dans l'équation indéfinie du système (I). Nous sommes conduits, pour déterminer ξ, à la recherche de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire et avec second membre.

Formons, en premier lieu, une solution *particulière* de l'équation complète, qui satisfasse en même temps à l'équation aux limites. On trouve ainsi, par identification et par l'emploi de coefficients indéterminés, l'expression suivante sous forme de série :

$$\xi_1 = \mathrm{D}\sum_1^\infty \frac{\mathrm{A}_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} e^{-a\beta_i t} \sin \alpha_i x. \tag{39}$$

Cette série, comme il est facile de le vérifier, satisfait aux conditions mentionnées. Elle ne représentera cependant la solution *effective* que si l'on établit sa convergence uniforme ainsi que celle des séries obtenues en dérivant la première, terme à terme, deux fois de suite par rapport à x et à t.

A cet effet, considérons la série suivante, que nous savons être uniformément convergente,

$$\frac{d\theta}{dx} = -\sum_1^\infty \mathrm{A}_i \alpha_i e^{-a\beta_i t} \sin \alpha_i x. \tag{40}$$

Or la série (39) se déduit de la proposée (40) en multipliant chaque

---

(1) H. Poincaré, *Étude analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. V : *Problème de l'armille.*

terme de cette dernière par la quantité $\frac{1}{\alpha_i^2+\beta_i^2}$ *positive, décroissante et tendant vers zéro.* D'après un lemme dû à Abel, et facilement étendu au cas des séries uniformément convergentes, il en résulte que la convergence uniforme de la série (40) entraîne celle de la série (39).

On démontrerait de même que les dérivées premières et secondes de ξ_1 convergent uniformément, en comparant celles-ci à θ ou aux dérivées de cette fonction.

Cela posé, effectuons le changement de variables $\xi_2 = \xi - \xi_1$; le système (I) devient

$$(\text{III})\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{d^2\xi_2}{dx^2}; \\ \xi_2 = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\ (\text{pour } t = 0) \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{d\xi_1}{dt} \quad \text{et} \quad \xi_2^0 = \text{D}\,\text{F}(x) - \xi_1^0. \end{array}\right.$$

La première équation du système (III) est celle des cordes vibrantes qui a pour intégrale générale

$$\xi_2 = \text{H}(x + at) + \text{G}(x - at),$$

H et G étant deux fonctions arbitraires.

La condition $\xi_2 = 0$ (pour $x = 0$) donne

$$\text{H}(at) + \text{G}(-at) = 0;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant at par $at - x$,

$$\text{H}(at - x) + \text{G}(x - at) = 0,$$

et par suite

$$\xi_2 = \text{H}(x + at) - \text{H}(at - x).$$

La condition $\xi_2 = 0$ (pour $x = l$) donne

$$\text{H}(l + at) - \text{H}(at - l) = 0,$$

d'où, en remplaçant at par $at + l$,

$$\text{H}(at + 2l) = \text{H}(at).$$

Cette dernière égalité exprime que la fonction $\text{H}(u)$ est une fonction périodique de période $2l$; nous l'écrirons donc sous forme de série trigonométrique,

$$H(u) = M_0 + \sum_1^\infty (M_i \cos\alpha_i u + N_i \sin\alpha_i u). \tag{41}$$

Tâchons de déterminer les divers coefficients M_0, M_i, N_i, de façon à satisfaire aux conditions initiales, les seules qu'il reste à vérifier.

Vu l'expression précédente de $H(u)$, ξ_2 et $\frac{d\xi_2}{dt}$ pourront s'écrire respectivement

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= H(at+x) - H(at-x) \\
&= 2\sum_1^\infty (-M_i \sin\alpha_i at + N_i \cos\alpha_i at)\sin\alpha_i x, \\
\frac{d\xi_2}{dt} &= a[H'(at+x) - H'(at-x)] \\
&= -2a\sum_1^\infty \alpha_i (M_i \cos\alpha_i at + N_i \sin\alpha_i at)\sin\alpha_i x.
\end{aligned}$$

Si maintenant nous tenons compte des conditions initiales, nous devrons avoir

$$\left\{\begin{aligned}
\sum_1^\infty \alpha_i M_i \sin\alpha_i x &= -\frac{D}{2}\sum_1^\infty \alpha_i \frac{\beta_i A_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sin\alpha_i x, \\
\sum_1^\infty N_i \sin\alpha_i x &= \frac{D}{2}F(x) - \frac{D}{2}\sum_1^\infty \frac{\alpha_i A_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sin\alpha_i x.
\end{aligned}\right. \tag{42}$$

La seconde des égalités (42) exige que la fonction $F(x)$ soit *impaire;* ce que nous pouvons toujours supposer puisqu'elle n'est définie qu'entre $x=0$ et $x=l$. Dès lors, si l'on calcule les coefficients N_i par la méthode d'élimination de Fourier, les valeurs ainsi obtenues, substituées dans le premier membre $\sum_1^\infty N_i \sin\alpha_i x$, assureront sa convergence uniforme.

Les N_i sont donnés par la relation

$$N_i = \frac{D}{l}\int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\,dz - \frac{D}{2}\frac{A_i\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}.$$

Quant aux M_i, on les obtient par identification des deux membres de la première équation (42) :

$$M_i = -\frac{D}{2}\frac{A_i\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}.$$

Il est nécessaire de vérifier, pour que la démonstration soit *rigoureusement complète*, que les valeurs des M_i et N_i, transportées dans la série (41), rendent celle-ci *uniformément convergente*.

La série $\sum_1^\infty N_i \sin\alpha_i u$ étant uniformément convergente d'après la deuxième égalité (42), il suffit, pour démontrer la convergence uniforme de la série (41), d'établir la proposition pour la série $\sum_1^\infty M_i \cos\alpha_i u$.

A cet effet, remplaçons les M_i par leurs valeurs, nous aurons

$$\sum_1^\infty M_i\cos\alpha_i u = -\frac{D}{2}\sum_1^\infty \frac{A_i\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\cos\alpha_i u.$$

Or les coefficients $\frac{A_i\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}$ sont *positifs, décroissants et tendent vers zéro*, il en résulte (¹) que la série $\sum_1^\infty \frac{A_i\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\cos\alpha_i u$ converge uniformément et la proposition est établie.

La fonction ξ_2 du système (III), *maintenant calculée en toute rigueur*, s'écrira, après substitution des valeurs trouvées pour M_i et N_i,

$$(43)\qquad \xi_2 = 2\frac{D}{l}\sum_1^\infty \cos\alpha_i at \sin\alpha_i x\int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\,dz$$
$$- D\sum_1^\infty \frac{A_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}(\alpha_i\cos\alpha_i at - \beta_i\sin\alpha_i at)\sin\alpha_i x.$$

Ajoutant, à l'expression trouvée de ξ_2, celle de ξ_1 définie par la rela-

(¹) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, Chap. IX, n° 9.

tion (39), nous obtiendrons finalement la solution ξ du problème :

$$(44)\quad \xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\frac{D}{l}\sum_1^\infty \cos\alpha_i at \sin\alpha_i x \int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\, dz$$
$$+ D\sum_1^\infty \frac{A_i\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\sin\alpha_i at - \cos\alpha_i at + e^{-a\beta_i t}\right)\sin\alpha_i x.$$

Cette dernière égalité peut se ramener à une autre, susceptible d'une interprétation physique immédiate, si l'on effectue les changements suivants. Posons

$$(45)\quad \begin{cases} B_i = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l F(z)\sin\alpha_i z\, dz, \qquad \tan\!g\gamma_i = \dfrac{B_i(\alpha_i^2+\beta_i^2) - A_i\alpha_i}{A_i\beta_i}, \\ C_i = \sqrt{B_i^2 + \dfrac{A_i(A_i - 2B_i\alpha_i)}{\alpha_i^2+\beta_i^2}}; \end{cases}$$

nous aurons, de la sorte, en groupant les termes périodiques par rapport au temps,

$$(46)\qquad \xi = D\sum_1^\infty \left[\frac{A_i\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}e^{-a\beta_i t} + C_i\sin(\alpha_i at + \gamma_i)\right]\sin\alpha_i x.$$

Sous cette forme, nous voyons que, d'une manière générale, le mouvement longitudinal occasionné par le refroidissement de la tige sera la superposition d'un mouvement progressif de contraction ou de dilatation, qui s'évanouit asymptotiquement comme l'échauffement lui-même, et d'un mouvement vibratoire.

Il est intéressant de remarquer qu'outre le mouvement longitudinal, il se produira, dans les sens transversaux, des phénomènes périodiques de dilatation et de contraction, analogues à ceux qui prennent naissance suivant l'axe de la tige, mais d'amplitude beaucoup moindre. En effet, la dilatation superficielle d'une section droite de la tige a pour expression

$$\partial'_\sigma = \partial'_y + \partial'_z = (D_y + D_z)\theta + (\partial_y + \partial_z).$$

Or, en vertu de l'isotropie,

$$D_y = D_z = D, \qquad \partial_y + \partial_z = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\partial_x = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\partial'_x - D\theta);$$

d'où

$$\partial'_\sigma = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} D\theta - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{d\xi}{dx}.$$

La substitution des valeurs de θ et de $\frac{d\xi}{dx}$ donne, pour ∂'_σ, une expression où $\cos\alpha_i x$ est en facteur.

Il en résulte une correspondance entre les maxima et les minima des variables ξ et ∂'_σ, considérées en tant que fonctions de x : ainsi, au milieu de la tige, la section σ ne subit ni contraction ni dilatation, mais l'allongement ξ des fibres y est le plus grand possible; le contraire se produit aux extrémités.

5. Poursuivons l'étude du phénomène dans les deux cas suivants, où la répartition *initiale* des températures est particulièrement simple :

Premier cas. — *La température initiale de la tige est uniforme.*

Dans cette hypothèse, les coefficients A_i sont tous nuls ; il suffit, pour le constater, de se reporter à l'intégrale $\frac{2}{l}\int_0^l f(z)\cos\alpha_i z\,dz$ qui définit les A_i, et d'y faire $f(z) = \text{const.}$

Même conclusion pour les B_i; car la fonction $F(x)$, qui a pour expression

$$F(x) = \int_0^x f(z)\,dz - \frac{x}{l}\int_0^l f(z)\,dz,$$

s'annule aussi identiquement pour $f(z) = \text{const.}$

Enfin, d'après l'égalité qui détermine les C_i, il résulte que la nullité des A_i et B_i entraîne celle des C_i.

Somme toute, nous voyons que, lorsque la température initiale de la tige est uniforme, les coefficients A_i et C_i sont nuls, et, par suite, nul aussi à toute époque le déplacement ξ : autrement dit, dans ce cas, le refroidissement ne donne naissance à *aucune vibration*, soit longitudinale, soit transversale.

Quant à la tension $\mathfrak{N}$ dont la formule générale est

$$\mathfrak{N} = E\sigma\left(\frac{d\xi}{dx} - D\theta\right),$$

elle sera simplement, puisque $\frac{d\xi}{dx} = 0$, $\mathfrak{N} = -\mathrm{ED}\sigma\theta$. La tension $\mathfrak{N}$ reste donc uniforme pendant toute la durée du phénomène et proportionnelle à la température θ qui est, elle-même, une fonction *évanouissante* du temps. La même remarque s'applique à la dilatation superficielle latérale δ_σ qui se réduit à $2\mathrm{D}\theta$.

Deuxième cas. — *La température initiale de la tige, dont une moitié a été chauffée, l'autre refroidie, est distribuée symétriquement par rapport au milieu de la tige et dépend linéairement de l'abscisse x.*

Il résulte des suppositions faites, qu'on a

$$f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right),$$

où m désigne la *pente* de la température, c'est-à-dire marque la rapidité avec laquelle celle-ci varie le long de la tige.

Vu la symétrie de la fonction $f(x)$ par rapport au milieu, nous avons

$$\int_0^l f(z)\,dz = 0,$$

et par conséquent la fonction $\mathrm{F}(x)$, déjà définie, se réduit à l'expression simple

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(z)\,dz = \int_0^x m\left(z - \frac{l}{2}\right)dz = \frac{m}{2}(x^2 - lx).$$

Dès lors, les coefficients A_i, B_i, C_i deviennent

$$\mathrm{A}_i = \frac{2}{l}\int_0^l f(z)\cos\alpha_i z\,dz = \frac{2m}{l}\int_0^l\left(z - \frac{l}{2}\right)\cos\alpha_i z\,dz = -2ml\,\frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2},$$

$$\mathrm{B}_i = \frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{F}(z)\sin\alpha_i z\,dz = \frac{m}{l}\int_0^l (z^2 - lz)\sin\alpha_i z\,dz = -2ml^2\,\frac{1-\cos i\pi}{i^3\pi^3},$$

$$\mathrm{C}_i = \sqrt{\mathrm{B}_i^2 + \frac{\mathrm{A}_i(\mathrm{A}_i - 2\mathrm{B}_i\alpha_i)}{\alpha_i^2+\beta_i^2}} = -2ml^2\,\frac{1-\cos i\pi}{i^3\pi^3}\,\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}.$$

De même l'angle γ_i qui détermine la *phase* du mouvement vibratoire a, ici, pour expression

$$\tan\gamma_i = \frac{B_i(\alpha_i^2+\beta_i^2) - A_i\alpha_i}{A_i\beta_i} = \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

Par substitution des valeurs présentes de A_i, C_i, γ_i dans les formules (38) et (46), nous obtenons

$$(47)\quad \begin{cases} \theta = -2m \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{1-\cos i\pi}{i\pi} e^{-\alpha\beta_i t} \frac{\cos\alpha_i x}{\alpha_i}, \\ \xi = -2Dm \sum_{1}^{\infty} \frac{1-\cos i\pi}{i\pi} \frac{\sin\alpha_i x}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} \left[\frac{e^{-a\beta_i t}}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i^2}\sin(\alpha_i at+\gamma_i)\right]. \end{cases}$$

Donc, lorsque les températures initiales sont réparties le long de la tige suivant la loi $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$, les refroidissement et échauffement respectifs des deux moitiés de la tige engendrent des vibrations longitudinales : le milieu est un ventre de vibration; les extrémités, des nœuds. En outre, il n'existe d'autres harmoniques que ceux qui correspondent à la suite des nombres entiers impairs consécutifs.

Reste à traiter une dernière question : l'amplitude du mouvement vibratoire considéré est-elle suffisante pour donner naissance à un son perceptible ? Pour la résoudre, nous comparerons les vibrations, d'origine calorifique, du problème proposé, à celles qui seraient produites si la tige, au lieu d'être *fixe*, était *libre* aux extrémités, et la température, *uniforme*, au lieu d'être une *fonction linéaire et symétrique de l'abscisse* $\left(x - \frac{l}{2}\right)$.

VIII. — Comparaison des vibrations, d'origine calorifique, précédemment étudiées, à celles qu'engendrerait le refroidissement d'une tige, libre aux extrémités, de température initiale uniforme.

1. Le problème de l'état vibratoire où entre une tige, *libre* à ses deux bouts, *uniformément* chauffée à l'instant initial, qui se refroidit par rayonnement sur sa longueur et *par contact* aux extrémités, a été traité par M. L. Roy dans sa Thèse. Nous le reprendrons rapidement en suivant notre analyse et nous montrerons que la solution de ce problème se déduit, *par simple dérivation*, des résultats de celui que nous venons de traiter.

2. L'équation indéfinie étant la même que celle du système (I), il suffit d'établir les conditions aux limites et les conditions initiales qui conviennent au cas présent.

La tige est *libre* à ses deux bouts : d'où $\mathfrak{N} = 0$ (pour $x = 0$ et pour $x = l$).

On admet, en outre, que le refroidissement se fait *par contact* aux extrémités, où la température θ est supposée *nulle;* il en résulte, vu l'expression (31) de $\mathfrak{N}$, qu'on a

$$\frac{d\xi}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l).$$

La température initiale est *uniforme* et égale à θ^0 : cette donnée permet d'évaluer l'allongement *initial* ξ^0 en un point quelconque de la tige. On a, en effet,

$$\partial^0 = \frac{d\xi^0}{dx} = D\theta^0;$$

d'où il vient, par intégration,

$$\xi^0 = D\theta^0\left(x - \frac{l}{2}\right),$$

car la section de la tige qui contient le centre de gravité n'éprouve pas de déplacement longitudinal.

Nous sommes donc conduits au système (IV), composé comme suit :

$$(\mathrm{IV}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - D\dfrac{d\theta}{dx}, \\ \dfrac{d\xi}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \dfrac{d\xi}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi^0 = D\theta^0\left(x - \dfrac{l}{2}\right). \end{array} \right.$$

Pour la détermination complète du problème, il faut joindre à ce système le suivant, auquel satisfait θ lorsqu'on traite la tige comme un solide invariable :

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = b^2\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \mathfrak{C}\theta; \\ \theta = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l), \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \theta = \theta^0. \end{cases}$$

3. Nous démontrerons maintenant que les solutions des systèmes (IV) et (V) se déduisent, par dérivation, de celles des systèmes (I) et (II) où l'on pose

$$f(x) = \theta^0\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_0^x \theta^0\left(z - \frac{l}{2}\right) dz.$$

Avec les valeurs considérées de $f(x)$ et $F(x)$, les systèmes (I) et (II) s'écrivent :

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - D\dfrac{d\theta}{dx}; \\ \xi = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \dfrac{d\xi}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi^0 = D\displaystyle\int_0^x \theta^0\left(z - \frac{l}{2}\right) dz. \end{cases}$$

$$\text{(VII)}\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = b^2\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \mathfrak{C}\theta; \\ \dfrac{d\theta}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \theta = \theta^0\left(x - \dfrac{l}{2}\right). \end{cases}$$

La seconde ligne des formules (VI) donne d'ailleurs, aux deux bouts de la tige, $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$, et, vu la seconde ligne des formules (VII), la première équation du système (VI) donne en même temps les deux relations spéciales supplémentaires

$$(48) \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l).$$

Cela posé, différentions en x les première et dernière des relations (VI), et des relations (VII), en appelant θ', ξ' les deux dérivées en x de θ et de ξ. Il viendra, vu d'ailleurs la formule (48) et la seconde ligne du système (VII),

$$
(\mathrm{VIII})\quad
\begin{cases}
\dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi'}{dx^2} - \mathrm{D}\dfrac{d\theta'}{dx}; \\
\dfrac{d\xi'}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\
(\text{pour } t = 0) \qquad \dfrac{d\xi'}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi'^0 = \mathrm{D}\theta^0\left(x - \dfrac{l}{2}\right).
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{IX})\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\theta'}{dt} = b^2\dfrac{d^2\theta'}{dx^2} - \zeta\theta'; \\
\theta' = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\
(\text{pour } t = 0) \qquad \theta' = \theta^0.
\end{cases}
$$

Il est clair que les deux derniers systèmes obtenus ne sont autres que les systèmes (IV) et (V). Or les formules (47) nous donnent précisément les solutions des systèmes (I) et (II) lorsque $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$ et $\mathrm{F}(x) = \int_0^x m\left(z - \frac{l}{2}\right)dz$; il suffit donc d'y remplacer m par θ^0, puis de dériver par rapport à x, pour avoir les solutions du problème cherché. De la sorte, on trouve

$$
(49)\quad
\begin{cases}
\theta = 2\theta^0 \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1 - \cos i\pi}{i\pi} e^{-a\beta_i t} \sin \alpha_i x, \\
\xi = -2\mathrm{D}\theta^0 \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1 - \cos i\pi}{i\pi} \frac{\cos \alpha_i x}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \left[\frac{\alpha_i e^{-a\beta_i t}}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\sin(\alpha_i a t + \gamma_i)\right].
\end{cases}
$$

Il est facile de s'assurer que les séries (49) convergent uniformément et, par suite, qu'elles représentent bien les solutions *effectives* (1).

(1) M. Boussinesq a bien voulu nous indiquer cette manière de déduire le système (49) du système (47) et nous faire observer qu'il est possible de déduire les résultats du problème de M. L. Roy de ceux du problème que nous traitons, dans l'hypothèse, *plus large*, où la fonction $f(x)$, au lieu d'être, comme nous l'avons supposé, *linéaire et symétrique par rapport au milieu de la tige*, est *quelconque*, *mais à valeur moyenne nulle entre* $x = 0$ *et* $x = l$; il nous a fait remarquer, en outre, que, *réciproquement*, on peut obtenir, par dérivation de la solution du problème de M. L. Roy, celle de notre problème.

Supposons, en effet, que $f(x)$ soit une fonction quelconque, à valeur moyenne

4. Nous voyons donc que les mouvements vibratoires définis par les secondes des relations (47) et (49) sont en concordance de phase et ont mêmes harmoniques. Le rapport de deux harmoniques correspondants

---

nulle entre $x = 0$ et $x = l$. La fonction $F(x)$, déjà définie, se réduit à l'expression simple $D\int_0^x f(z)\,dz$, et les équations de notre problème deviennent

$$
(1) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - D\dfrac{d\theta}{dx}; \\
\xi = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\
(\text{pour } t = 0) \qquad \dfrac{d\xi}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi = D\displaystyle\int_0^x f(z)\,dz;
\end{array}
\right.
$$

$$
(2) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d\theta}{dt} = b^2\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - \varepsilon\theta; \\
\dfrac{d\theta}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\
(\text{pour } t = 0) \qquad \theta = f(x).
\end{array}
\right.
$$

En raisonnant comme il a été fait, on déduit du rapprochement des conditions aux limites des systèmes (1) et (2) les deux relations supplémentaires

$$
(3) \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l).
$$

Dès lors, en dérivant les première et dernière des relations (1) et des relations (2), on obtient, vu la formule (3) et la seconde ligne de (2), les deux systèmes suivants en ξ' et θ' (ξ', θ' désignant les dérivées en x de ξ et de θ) :

$$
(4) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi'}{dx^2} - D\dfrac{d\theta'}{dx}; \\
\dfrac{d\xi'}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\
(\text{pour } t = 0) \qquad \dfrac{d\xi'}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi' = D f(x).
\end{array}
\right.
$$

$$
(5) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d\theta'}{dt} = b^2\dfrac{d^2\theta'}{dx^2} - \varepsilon\theta'; \\
\theta' = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l), \\
(\text{pour } t = 0) \qquad \theta' = f'(x).
\end{array}
\right.
$$

Or ce sont précisément les équations du problème de M. L. Roy. *Donc, en* est $r_i = \frac{m}{\theta^0}\frac{1}{\alpha_i}$, qui devient, pour $i = 1$ (c'est le cas des harmoniques *fondamentaux*),

$$r_1 = \frac{m}{\theta^0}\frac{1}{\alpha_1} = \frac{ml}{\pi\theta^0} = \frac{\Delta\theta}{\pi\theta^0},$$

où $\Delta\theta$ désigne l'*écart initial* des températures aux extrémités de la tige, la loi de distribution de celles-ci étant $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$. Il en résulte que les sons fondamentaux auront *même intensité* dans les deux

---

différentiant en x les valeurs de θ et de ξ de notre problème, on obtient la solution d'un problème de M. L. Roy.

Mais continuons. Observons que la seconde ligne des équations (5) entraîne aux deux bouts ($x = 0$ et $x = l$) la relation $\frac{d\theta'}{dt} = 0$, non moins que $\theta = 0$; en sorte que la première (5) donne

$$(6) \qquad \frac{d^2\theta'}{dx^2} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l).$$

Alors les première et dernière (4), première et dernière (5), différentiées en x, conduisent à poser, vu (6) et la seconde ligne des relations (4), en appelant ξ'' et θ'' les deux dérivées en x de ξ' et θ',

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi''}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi''}{dx^2} - D\dfrac{d\theta''}{dx}; \\ \xi'' = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l). \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \dfrac{d\xi''}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi'' = D f'(x). \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta''}{dt} = b^2\dfrac{d^2\theta''}{dx^2} - c\,\theta''; \\ \dfrac{d\theta''}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l). \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \theta'' = f''(x). \end{cases}$$

Donc, réciproquement, les dérivées en x d'une solution d'un problème de M. L. Roy constituent, elles-mêmes, la solution du problème que nous avons traité.

Il est essentiel de remarquer que, les solutions de ces deux problèmes étant exprimées par des séries trigonométriques, il faudra, chaque fois, vérifier la convergence uniforme de ces dernières.

mouvements vibratoires, d'origine calorifique, si entre $\Delta\theta$ et θ^0 on a relation $\frac{\Delta\theta}{\theta^0} = \pi$.

5. Pour achever notre étude, nous tâcherons d'*interpréter physiquement* les résultats obtenus, et, à cet effet, nous comparerons, terme à terme, les deux mouvements vibratoires, d'origine calorifique, dont il vient d'être question, avec celui que produirait, à la température constante $\theta = 0$, la suppression brusque d'une tension ayant préalablement donné lieu au *même allongement statique* que l'échauffement uniforme de la tige de o à θ^0.

Dans ce cas, le système qui régit le déplacement longitudinal ξ est

$$(\mathrm{X})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2};\\ &\frac{d\xi}{dx} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et pour } x = l),\\ &\frac{d\xi}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi^0 = \mathrm{D}\theta^0\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad (\text{pour } t = 0).\end{aligned}\right.$$

La solution de ce système est évidemment

$$\xi = \sum_1^\infty \mathrm{A}_i \cos\alpha_i x \cos\alpha_i a t,$$

où

$$\mathrm{A}_i = \frac{2\,\mathrm{D}\theta^0}{l}\int_0^l \left(z - \frac{l}{2}\right)\cos\alpha_i z\,dz,$$

ou encore, par substitution des valeurs A_i,

$$(50)\qquad \xi = -2\,\mathrm{D}\theta^0 l \sum_1^\infty \frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2}\cos\alpha_i x \cos\alpha_i a t.$$

Ici, comme d'ailleurs dans les mouvements vibratoires précédents, il n'existe que les harmoniques *impairs*. L'amplitude respective de ces derniers variant en raison inverse du carré de 1, 3, 5, ..., l'intensité correspondante décroît comme la quatrième puissance des mêmes nombres; et, par suite, les premiers harmoniques seuls pourront être perçus.

6. Les expressions (47) et (50) nous permettent de former le rapport r'_i de l'amplitude de l'harmonique de rang i, dans le mouvement vibratoire, d'origine calorifique, produit par les refroidissement et échauffement respectifs des deux moitiés d'une tige, *fixe*, *initialement portée à la température variable* $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$, à l'amplitude de l'harmonique de même rang, dans le mouvement vibratoire, *d'origine mécanique*. Nous obtenons ainsi

$$r'_i = \frac{m}{\varphi_0}\,\frac{1}{\alpha_i}\,\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}.$$

De même, les formules (49) et (50) nous donnent le rapport r''_i de l'amplitude des harmoniques correspondants dans le mouvement vibratoire, d'origine calorifique, engendré par le refroidissement d'une tige *libre*, *de température initiale uniforme*, et le mouvement *d'origine mécanique*. D'où

$$r''_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}.$$

Étudions les variations de r'_i et r''_i lorsque α_i croît de α_1 ou $\frac{\pi}{l}$ jusqu'à l'infini. — Les variations de r'_i sont les mêmes que celles de la quantité $\frac{1}{\alpha_i}\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$; or, en remplaçant β_i par sa valeur $\frac{1}{a}(\chi + b^2\alpha_i^2)$, on constate que la quantité considérée décroît *progressivement* de r'_1 à 0. Donc, pour une tige de longueur donnée, le rapport r'_i diminue, quand grandit l'ordre des harmoniques : il sera donc maximum pour le son fondamental, et ce maximum sera d'autant plus grand que la tige sera plus longue. Il suit de là qu'il faudra opérer sur des tiges *très longues*, si l'on veut que les refroidissement et échauffement respectifs des deux moitiés d'une tige, *fixe*, *initialement portée à la température variable* $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$, puissent donner lieu à un son perceptible.

Les variations de r''_i sont celles de la fraction $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$, dont le carré a pour expression l'inverse de $1 + \frac{\alpha_i^2}{\beta_i^2}$ ou de $1 + \frac{a^2}{b^4\left(\alpha_i + \frac{\chi}{b^2\alpha_i}\right)^2}$; cette fraction $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$ varie donc dans le même sens que le binome $\alpha_i + \frac{\zeta}{b^2\alpha_i}$. Or celui-ci, quand on y assimile α_i à une variable continue, passe, pour $\alpha_i = \frac{\sqrt{\zeta}}{b}$, par le minimum $2\frac{\sqrt{\zeta}}{b}$, de part et d'autre duquel il grandit jusqu'à l'infini. Par suite, le rapport r_i'', minimum et égal à l'inverse de $\sqrt{1+\frac{a^2}{4b^2\zeta}}$, quand α_i reçoit la valeur spéciale $\frac{\sqrt{\zeta}}{b}$, grandit à mesure que α_i s'éloigne de cette valeur ; et il tend vers l'unité pour les valeurs de α_i, soit évanouissantes, soit grandissantes sans limite.

Il résulte de là que, pour un harmonique de rang déterminé, le rapport r_i'' sera d'autant plus grand que la longueur l sera, elle-même, ou plus petite, ou plus grande, en s'éloignant de la valeur limite $i\pi\frac{b}{\sqrt{\zeta}}$ qui rend ce rapport minimum; autrement dit, il faudra se servir de tiges, ou *très courtes*, ou *très longues*, si l'on veut que celles-ci, supposées *libres et de température initiale uniforme*, donnent, par refroidissement, un son d'intensité appréciable. Mais un calcul numérique ultérieur montrera qu'en se bornant au cas où l'on fait $i=1$, c'est-à-dire aux harmoniques *fondamentaux* (que nous savons être les plus intenses de tous les harmoniques), la valeur $\pi\frac{b}{\sqrt{\zeta}}$ est trop petite pour que, physiquement, la longueur d'une tige puisse devenir encore moindre. Il faudra donc prendre seulement les barres *les plus longues possible*.

7. Nous allons faire l'application numérique, en prenant les mêmes données que M. L. Roy, dans sa Thèse, c'est-à-dire dans le cas d'une tige de cuivre de section circulaire, supposée placée dans un courant d'air atmosphérique à la température 0°, dirigé normalement à l'axe de la tige et animé d'une vitesse uniforme V. M. Boussinesq a démontré (¹) que, dans ces conditions, le coefficient de conductibilité

(¹) J. Boussinesq, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6ᵉ série, t. I, 1905. Cette formule fait abstraction de la partie de k due à la chaleur échangée par rayonnement entre la couche superficielle de la barre (*athermane*) extérieure k était donné par la formule

$$k = 4\sqrt{\frac{K_1 C_1 V}{\pi^3 \varepsilon}},$$

dans laquelle K_1 désigne le coefficient de conductibilité interne du fluide, C_1 sa capacité calorifique par unité de volume, ε le rayon de la section de la tige. Dans le système C. G. S., petite calorie, degré centigrade, et à la température de la glace fondante, on a

$$K_1 = 5.10^{-5}, \qquad C_1 = 3{,}06.10^{-4}.$$

Si nous prenons $V = 400^{cm}$, ce qui correspond à une brise légère, nous trouverons, pour une tige de 1^{cm} de diamètre ($\varepsilon = 0{,}5$),

$$k = 2{,}51.10^{-3}.$$

Ajoutons aux données précédentes, relatives au cuivre, les valeurs de son coefficient de conductibilité $K = 0{,}819$, de son coefficient de dilatation linéaire $D = 17{,}18.10^{-6}$, et de la vitesse du son dans le cuivre, $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 3{,}42.10^5$.

Cela posé, cherchons, avec les données numériques choisies, la valeur de l'expression $\pi\frac{b}{\sqrt{C}}$ qui donne la longueur de la tige correspondant au *minimum de* r''_1, c'est-à-dire au *minimum* du rapport des amplitudes *fondamentales* dans les deux mouvements vibratoires mentionnés. On trouve ainsi, tous calculs faits, $\pi\frac{b}{\sqrt{C}} = 26^{cm},7$. Si, maintenant, nous considérons les valeurs de l, qui vont s'écartant de cette dernière $26^{cm},7$, les unes tendant vers zéro, les autres grandissant jusqu'à l'infini, d'après ce que nous savons déjà, le rapport r''_1 augmente et tend, dans les deux cas, vers l'unité. En particulier, on constate que les valeurs *évanouissantes* de l, qui donnent au rapport r''_1 une valeur voisine de l'unité, sont de l'ordre du millième de millimètre :

---

et l'éther ambiant (partie proportionnelle au cube de la température absolue de cet éther), comparativement à la chaleur emportée ou apportée par la convection du courant d'air : elle cesserait d'être admissible aux très hautes températures absolues.

ceci prouve et justifie la remarque faite antérieurement, à savoir qu'au point de vue de la perceptibilité des sons, le cas d'une tige *courte* ne doit pas être envisagé.

Nous supposerons donc que l'expérience se fait sur une tige très longue, et que nous choisissons sa longueur de façon que le terme fondamental corresponde à un son qui soit à la limite des sons graves perceptibles, dont la fréquence serait égale à 8, d'après les expériences de Savart. Pour une longueur de 200^m ($l = 2.10^4$), on trouve une fréquence fondamentale $n_1 = \frac{a}{2l} = 8,55$, et pour les quantités α_1, β_1, les valeurs

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l} = 1,57.10^{-4},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{a}(\mathfrak{C} + b^2\alpha_1^2) = \frac{K}{Ca}\left(\frac{2}{\varepsilon}\frac{k}{K} + \alpha_1^2\right) = 1,724.10^{-7},$$

en tenant compte des expressions de $b^2 = \frac{K}{C}$ et de $\mathfrak{C} = \frac{k}{C}\frac{s}{\sigma}$.

Examinons, en premier lieu, le cas où la tige est *libre* aux extrémités et, *à l'instant initial, chauffée uniformément à* 200°. On aura, en désignant par A_c l'amplitude fondamentale dans le mouvement *d'origine calorifique*, par A_m l'amplitude fondamentale dans le mouvement *d'origine mécanique*,

$$\frac{A_c}{A_m} = r_1'' = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} = 1,09.10^{-3};$$

or, vu la formule (50), on a

$$A_m = 2lD\theta^0\frac{2}{\pi^2},$$

d'où l'on déduit, en effectuant,

$$A_c = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} A_m = 0^{cm},032.$$

En second lieu, si la tige, au lieu d'être libre, est *fixée* aux extrémités, et si, de plus, *la température initiale* qui, tout à l'heure, était uniforme, *varie suivant la loi* $f(x) = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$, il vient, en représentant par A_c' l'amplitude fondamentale dans ce *second* mouvement *d'origine calorifique*,

$$\frac{A'_c}{A_m} = r'_1 = \frac{ml}{\pi\theta^0}\,\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}} = \frac{\Delta\theta}{\pi\theta^0}\,\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}.$$

Donc, *pour un écart de 400°, par exemple, entre les extrémités* ($\Delta\theta = 400°$),

$$A'_c = \frac{2}{\pi}\,\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}\,A_m = 0^{\text{cm}},020.$$

En se basant sur les données de l'expérience (1), on peut conclure que les amplitudes de ces deux sortes de mouvements vibratoires, d'origine calorifique, sont largement suffisantes pour permettre au son fondamental d'être perçu.

Ainsi donc, à condition toutefois d'opérer sur des tiges *très longues*, les vibrations, d'origine calorifique, des deux cas étudiés seront susceptibles de donner naissance à un son perceptible; ce son sera d'autant plus grave que la tige est plus longue.

Nous avons remarqué, au n° 4 de ce paragraphe, que les amplitudes fondamentales des deux mouvements vibratoires, d'origine calorifique, ont même valeur, si, entre l'*écart initial* $\Delta\theta$ des températures aux extrémités de la tige *fixe* et la température *initiale uniforme* θ^0 de la tige *libre*, il existe un rapport égal à π. Il est donc intéressant de mentionner qu'en ce qui concerne l'exemple numérique choisi, pour que le son fondamental, perçu de part et d'autre, ait même intensité, il faut que l'écart initial des températures aux extrémités de la tige fixe soit $\Delta\theta = \pi.200 = 628°$.

---

(1) Parmi les physiciens qui, en ces derniers temps, ont recherché l'amplitude minima que devait avoir un son de hauteur donnée pour pouvoir être perçu, on peut citer :

WIEN, *Phys. Zeitschr.*, t. IV, 1902, p. 69; *Verh. d. d. phys. Ges.*, t. IV, 1902, p. 297, qui a trouvé comme minimum d'amplitude a du corps vibrant (membrane de téléphone), pour une fréquence N :

$N = 200$,	400,	600,	1050.
$a = 1,5.10^{-5}$,	7.10^{-7},	$1,4.10^{-7}$,	$1,1.10^{-8}$ centim.

OSTMANN, *Verh. d. d. phys. Ges.*, t. V, 1903, p. 340, qui trouve : sur des diapasons graves $a = 0^{\text{mm}},07$; élevés $a = 1,6.10^{-8}$ millim.

DEUXIÈME PARTIE.

LES PLAQUES.

I. — Préliminaires.

1. Nous nous proposons, dans cette seconde Partie, d'étendre à l'étude thermomécanique des plaques, le mode d'investigation qui nous a servi pour les tiges.

Les plaques considérées sont, ou homogènes, ou constituées par des feuillets de nature différente accolés les uns aux autres; nous admettrons seulement que tout plan parallèle au *feuillet moyen* de la plaque est un plan de symétrie de contexture. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser un certain nombre de formules et de résultats établis dans la première Partie, et, en même temps, d'obtenir la solution du problème à une approximation plus élevée. Sous le nom de *feuillet moyen*, nous entendons la surface matérielle, sensiblement parallèle aux deux faces de la plaque, qui contient les centres de gravité des normales, menées à cette même surface et d'une face à l'autre dans l'état primitif, les centres dont il s'agit étant déterminés d'après la supposition que chaque élément des normales ait une masse, par unité de longueur, égale à la valeur du coefficient d'élasticité C (¹) sur cet élément.

2. Supposons la plaque divisée en tronçons sensiblement prismatiques, dont chacun, limité par la surface même du corps et par deux couples de plans parallèles menés normalement à la surface, ait ses trois dimensions comparables entre elles. Sauf certaines régions peu étendues, telles que les bords de la plaque, deux tronçons voisins quelconques sont généralement dans des conditions physiques *presque*

(¹) Ce coefficient C sera défini un peu plus loin.

identiques; on atteint, par suite, une *première approximation*, en supposant que les six déformations (∂, g) et la température θ ne varient pas sur toute l'étendue d'une couche parallèle aux bases d'un tronçon, pris isolément; de plus, l'excellente conductibilité de la plaque, comparée à celle de l'atmosphère ambiante, assure l'uniformité de la température le long d'une perpendiculaire quelconque aux bases du tronçon considéré. La conclusion de notre analyse sera donc : *En tous les points d'un tronçon quelconque, pris isolément, la température est la même.*

Ainsi, nous pourrons étendre aux plaques le procédé, déjà employé pour les tiges, qui consiste à appliquer, pour l'étude de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon *à l'instant t*, les équations *ordinaires* de l'élasticité, en comptant les déplacements et les déformations à partir de l'état naturel relatif à la température θ effective.

3. Soit un tronçon quelconque dans son *état primitif* qui, par définition, sera l'*état naturel correspondant à la température* θ, en désignant par θ la température à l'instant t; l'origine des axes se trouve au centre de gravité, le plan local des yz se confond avec le feuillet moyen du tronçon, la perpendiculaire à ce feuillet mené par le centre de gravité est choisie comme axe des x.

Nous négligerons d'abord, pour simplifier notre étude, les actions extérieures directement appliquées aux bases du tronçon et à sa masse (y compris l'inertie dans le cas d'un équilibre dynamique); car celles-ci sont très faibles vis-à-vis des forces qui agissent sur le reste du corps et dont l'ensemble donne lieu aux réactions intérieures N, T.

En vertu de cette simplification et vu le système d'axes choisis, les équations indéfinies du problème seront :

$$(51)\quad \frac{dN_x}{dx}+\frac{dT_z}{dy}+\frac{dT_y}{dz}=0,\quad \frac{dT_z}{dx}+\frac{dN_y}{dy}+\frac{dT_x}{dz}=0,\quad \frac{dT_y}{dx}+\frac{dT_x}{dy}+\frac{dN_z}{dz}=0;$$

les équations définies, spéciales à chacune des deux bases du tronçon, étant

$$(52)\qquad N_x=0,\qquad T_z=0,\qquad T_y=0.$$

1° Envisageons le problème à une *première* approximation, c'est-à-dire, supposons qu'on ait

$$\frac{d(\partial, g)}{d(y, z)} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(\mathrm{N}, \mathrm{T})}{d(y, z)} = 0:$$

les équations indéfinies (51) se réduisent et deviennent respectivement

$$\frac{d\mathrm{N}_x}{dx} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{T}_z}{dx} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{T}_y}{dx} = 0.$$

Ces dernières, combinées avec les équations aux limites (52), admettent les seules solutions $\mathrm{N}_x = \mathrm{T}_z = \mathrm{T}_y = 0$.

Ainsi donc, *à une première approximation, deux feuillets contigus quelconques d'un tronçon de plaque n'exercent entre eux aucune action réciproque.*

2° Passons au cas d'une *seconde* approximation, c'est-à-dire faisons les hypothèses suivantes :

$$(53) \qquad \frac{d(g_y, g_z)}{d(y, z)} = 0, \qquad \frac{d^2(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x)}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)} = 0,$$

exprimant que les quantités $(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x)$, au lieu de rester sensiblement les mêmes, *varient linéairement* d'un tronçon à l'autre, ce qui peut être regardé comme presque rigoureux. Chaque feuillet du tronçon étant d'ailleurs homogène dans toute son étendue, il en résulte, vu les formules (6), auxquelles satisfont les réactions intérieures N, T, lorsqu'il existe un plan de symétrie de contexture, que les relations (53) reviennent à poser

$$(54) \qquad \frac{d(\mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z)}{d(y, z)} = 0, \qquad \frac{d^2(\mathrm{N}_x, \mathrm{N}_y, \mathrm{N}_z, \mathrm{T}_x)}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)} = 0.$$

Dès lors, le système de valeurs vérifiant tant les équations indéfinies (51) que les conditions aux limites (52) sera

$$(55) \qquad \mathrm{N}_x = 0, \qquad \frac{d(\mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z)}{d(y, z)} = 0, \qquad \frac{d^2(\mathrm{N}_y, \mathrm{N}_z, \mathrm{T}_x)}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)} = 0.$$

Donc, *à une seconde approximation, l'action mutuelle de deux feuillets contigus de la plaque se réduit à ses deux composantes tangentielles* T_y, T_z, *ou n'a pas de composante normale sensible* N_x.

4. Ce qui précède nous permet de démontrer la *linéarité* des déformations ∂_y, ∂_z, g_x.

Admettons en effet le système d'égalités (53) qui traduisent les données du problème au second degré d'approximation; puis, dans les quatre équations de ce système, remplaçons g_y, g_z par leurs valeurs respectives $\frac{d\xi}{dz}+\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}$. De là nous tirons aisément, en ajoutant les deux résultats qui renferment le terme $\frac{d^2\xi}{dydz}$, les trois relations suivantes :

$$(56)\qquad \frac{d\partial_y}{dx}=-\frac{d^2\xi}{dy^2},\qquad \frac{d\partial_z}{dx}=-\frac{d^2\xi}{dz^2},\qquad \frac{dg_x}{dx}=-2\frac{d^2\xi}{dy\,dz}.$$

Remarquons que les seconds membres de celles-ci sont *continus* quand x varie; car le déplacement ξ a d'égales valeurs pour deux feuillets contigus du tronçon, même hétérogènes, et parsuite les *dérivées* de ces valeurs *en y et z* sont aussi égales. Si maintenant nous dérivons les équations (56) par rapport à x, nous constatons que les seconds membres ainsi différentiés donnent zéro pour résultat; car, d'après les égalités (53), on a $\frac{d^2\partial_x}{(dy^2,\,dydz,\,dz^2)}=0$. Nous pouvons donc dans les équations (56) remplacer ξ par ξ_0, en appelant ξ_0 le déplacement transversal ξ pour le feuillet moyen. Désignons en outre par ∂_y^0, ∂_z^0, g_x^0, les valeurs des déformations ∂_y, ∂_z, g_x, sur le même feuillet; les équations (56) multipliées par dx, puis intégrées, donneront :

$$(57)\qquad \partial_y=\partial_y^0-x\frac{d^2\xi_0}{dy^2},\qquad \partial_z=\partial_z^0-x\frac{d^2\xi_0}{dz^2},\qquad g_x=g_x^0-2x\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz}.$$

Ainsi, *les déformations ∂_y, ∂_z, g_x, éprouvées par les feuillets dans les sens parallèles à leurs plans, varient linéairement le long d'une normale à la plaque.*

II. — Expressions des efforts tangentiels et tranchants, des couples de flexion et de torsion.

1. Nous avons vu qu'à une première et même à une seconde approximation on a $N_x=0$; on sait, d'autre part, que si l'on admet, outre

l'existence d'un potentiel $\rho\Phi$, la symétrie de contexture relativement au plan yz, les tensions N_x, N_y, N_z, T_x sont les dérivées partielles, par rapport aux déformations simples correspondantes, d'une forme quadratique en ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x.

Annulant N_x et portant la valeur de ∂_x, tirée de là, dans les expressions de N_y, N_z, T_x, on est amené aux relations suivantes, homogènes en ∂_y, ∂_z, g_x et dans lesquelles figurent seulement six coefficients distincts :

$$(58)\qquad \begin{cases} N_y = C(\gamma\partial_y + \varepsilon\partial_z + \varepsilon' g_x), \\ N_z = C(\varepsilon\partial_y + \gamma'\partial_z + \varepsilon'' g_x), \\ T_x = C(\varepsilon'\partial_y + \varepsilon''\partial_z + \gamma'' g_x) \end{cases} \text{ (1).}$$

Nous supposerons que le coefficient positif d'élasticité C puisse *seul* varier d'un feuillet à l'autre, ou que les coefficients γ, γ', γ'', ε, ε', ε'' soient *indépendants de x*; cela revient à admettre que, pour d'égales déformations ∂_y, ∂_z, g_x, éprouvées par tous les feuillets (supposés isolés) dans leurs propres plans, les forces déformatrices N_y, N_z, T_x, conservent, chez tous, les mêmes rapports. Nous continuerons également à négliger l'influence de la température sur les coefficients d'élasticité.

Substituons, dans les expressions (58) de N_y, N_z, T_x, les valeurs de ∂_y, ∂_z, g_x définies par les équations (57), et posons, pour abréger :

$$(59)\qquad \begin{cases} n_y^0 = \gamma\partial_y^0 + \varepsilon\partial_z^0 + \varepsilon' g_x^0, & n_y = \gamma\dfrac{d^2\xi_0}{dy^2} + \varepsilon\dfrac{d^2\xi_0}{dz^2} + 2\varepsilon'\dfrac{d^2\xi_0}{dy\,dz}, \\ n_z^0 = \varepsilon\partial_y^0 + \gamma'\partial_z^0 + \varepsilon'' g_x^0, & n_z = \varepsilon\dfrac{d^2\xi_0}{dy^2} + \gamma'\dfrac{d^2\xi_0}{dz^2} + 2\varepsilon''\dfrac{d^2\xi_0}{dy\,dz}, \\ t_x^0 = \varepsilon'\partial_y^0 + \varepsilon''\partial_z^0 + \gamma'' g_x^0, & t_x = \varepsilon'\dfrac{d^2\xi_0}{dy^2} + \varepsilon''\dfrac{d^2\xi_0}{dz^2} + 2\gamma''\dfrac{d^2\xi_0}{dy\,dz}; \end{cases}$$

il viendra

$$(60)\qquad N_y = C(n_y^0 - x n_y), \qquad N_z = C(n_z^0 - x n_z), \qquad T_x = C(t_x^0 - x t_x).$$

Nous obtenons ainsi, sous une forme simple, l'expression des forces déformatrices N_y, N_z, T_x, en un point quelconque de la plaque.

---

(1) On reconnaît assez facilement l'égalité, deux à deux, des six coefficients ε, ε, ε', ε', ε'', ε'', après élimination de ∂_x, en raison de l'existence du potentiel $\rho\Phi$ et des égalités qu'elle entraînait dans les coefficients d'élasticité primitifs.

2. Cela posé, proposons-nous d'évaluer les actions totales exercées, par unité de longueur, à travers deux sections faites dans la plaque suivant deux surfaces matérielles qui, à l'état primitif, coïncident respectivement avec les plans des xz et des xy. Sur chaque élément plan de la bande des xz, il n'existe, du moins à une première approximation, que deux forces, l'une normale N_y, l'autre tangentielle T_x. Nous aurons donc, en effectuant la sommation des tensions normales N_y,

$$\int_h N_y\, dx = \int_h C(n_y^0 - x n_y)\, dx = n_y^0 \int_h C\, dx - n_y \int_h Cx\, dx,$$

h étant l'épaisseur de la plaque au point considéré.

Or la seconde partie de cette somme est nulle; car le feuillet moyen se confondant, à l'état primitif, avec le plan des yz, on a $\int_h Cx dx = 0$.

Par suite la réduction des forces N_y donnera lieu :

1° A une traction résultante, appliquée au centre de gravité de la bande et dirigée suivant Oy, qui aura pour expression

$$\mathfrak{N}_y = n_y^0 \int_h C\, dx = C' h n_y^0,$$

en appelant C' la valeur moyenne du coefficient d'élasticité C le long d'une perpendiculaire aux faces de la plaque;

2° A un couple, normal à l'axe des z, qui équivaut à l'ensemble des forces $-C n_y x\, dx$ et dont le moment, compté positivement en tournant de Oy vers Ox, sera

$$\nu_y = n_y \int_h Cx^2\, dx = \frac{C'' h^3}{12} n_y,$$

le coefficient C'' étant défini par l'égalité $\frac{C'' h^3}{12} = \int_h Cx^2\, dx$.

Un raisonnement analogue s'applique à la sommation des forces tangentielles T_x, qui donnent après réduction : 1° une traction résultante $\mathfrak{T}_x = C' h t_x^0$, appliquée au centre de gravité de la bande, mais ayant la direction Oz; 2° un couple normal à Oy et dont le moment, compté positivement en tournant de Oz vers Ox, sera $\tau_x = \frac{C'' h^3}{12} t_x$.

De même, les forces N_z, T_x, exercées sur la bande des xy, équivalent par unité de longueur : 1° à deux forces $\mathfrak{N}_z = C'hn_z^0$, $\mathfrak{T}_x = C'ht_x^0$, l'une normale, l'autre tangentielle, appliquées à son centre de gravité; 2° à deux couples $\nu_z = \frac{C''h^3}{12} n_z$, $\tau_x = \frac{C''h^3}{12} t_x$, qui se trouvent, le premier, normal à Oy, le second, normal à Oz.

5. Les résultantes $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{T}_x$, dont les lignes d'action sont dans le plan des yz, c'est-à-dire dans le plan qui coïncide primitivement avec le feuillet moyen, sont appelées *efforts tangentiels;* elles provoquent les déformations ∂_x^0, ∂_y^0, g_z, éprouvées par le feuillet moyen du tronçon dans des sens parallèles à sa position primitive.

Les couples ν_y, ν_z perpendiculaires aux intersections respectives des deux bandes par le feuillet moyen, ont reçu le nom de *couples de flexion;* les deux autres, agissant dans le plan même des bandes et dont la valeur commune est sensiblement τ_x, celui de *couples de torsion*. Ces divers couples ont pour effet d'incurver le feuillet moyen, supposé primitivement plan, et les quantités $\frac{d^2 \zeta_0}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)}$ qui figurent dans l'expression de n_y, n_z, t_x, et par suite dans celle de ν_y, ν_z, τ_x, caractérisent la *courbure* prise, après déformation, par le feuillet moyen au point considéré.

La sommation des forces T_y, T_z, qui ne peuvent pas être négligées à une seconde approximation, introduit deux résultantes $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, appelées *efforts tranchants* et dont les valeurs respectives, rapportées à l'unité de longueur des bandes, sont, pour la bande des xz, $\mathfrak{F}_y = \int_h T_z\,dx$; pour celle des xy, $\mathfrak{F}_z = \int_h T_y\,dx$.

III. — Équations de l'équilibre et du mouvement d'un tronçon de plaque dans le cas réel.

1. Pour arriver aux conclusions qui précèdent, nous avons dû supposer, d'une part, qu'à l'intérieur du tronçon considéré la constitution et l'état de la matière ne variaient pas, ou, du moins, ne variaient que linéairement le long d'une couche quelconque parallèle au feuillet moyen; d'autre part, que la masse et les bases du tronçon étaient libres

de toute action extérieure. Or, il est évident que, pratiquement, ces conditions ne sont jamais réalisées. Nous pourrons néanmoins appliquer à l'étude du cas réel les formules déjà obtenues, pourvu que l'épaisseur de la plaque soit une fraction assez petite de ses autres dimensions. En effet, à cause de la continuité, les expressions des forces et couples ($\mathfrak{N}$, ϖ, ν, τ) ne pourront pas différer notablement de ce qu'elles étaient dans le cas idéal précédemment envisagé; de même, les efforts tranchants $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}_z$, nuls à une première approximation, auront toujours des valeurs faibles, comparées à celles des forces ($\mathfrak{N}$, ϖ) ou du moins à leurs composantes.

2. Limitons notre étude au cas d'une plaque primitivement plane et peu déformée; le feuillet moyen, dans son état d'équilibre primitif, étant choisi comme plan *général* des yz, construisons en un point dont les coordonnées *primitives* sont y, z, un prisme élémentaire ayant pour hauteur, l'épaisseur h de la plaque, et pour section normale, un rectangle infiniment petit $dy\,dz$ du feuillet moyen.

Les axes *locaux*, rapportés à l'*état primitif* du tronçon, c'est-à-dire à l'*état naturel correspondant à la température* 0, sont : Ox, la perpendiculaire au feuillet moyen; Oy et Oz, les deux fibres rectangulaires dy, dz, situées dans le même feuillet.

Après déformation, le point matériel (y, z) d'où partent les fibres dy, dz, a subi de petits déplacements ξ_0, η_0, ζ_0 ; par suite, les éléments rectilignes dy, dz auront pour projections respectives, sur les axes locaux de coordonnées, le premier, $\frac{d\xi_0}{dy}dy$, $\left(1+\frac{d\eta_0}{dy}\right)dy$, $\frac{d\zeta_0}{dy}dy$; le second, $\frac{d\xi_0}{dz}dz$, $\frac{d\eta_0}{dz}dz$, $\left(1+\frac{d\zeta_0}{dz}\right)dz$.

De là on déduit les cosinus directeurs des fibres qui, primitivement, se confondaient avec les axes locaux. Ces cosinus sont : pour l'élément dy, $\frac{d\xi_0}{dy}$, 1, $\frac{d\zeta_0}{dy}$; pour l'élément dz, $\frac{d\xi_0}{dz}$, $\frac{d\eta_0}{dz}$, 1 ; pour une perpendiculaire au feuillet moyen, 1, $-\frac{d\xi_0}{dy}$, $-\frac{d\xi_0}{dz}$.

3. Cela posé, passons en revue les forces qui agissent sur le filet de matière ainsi construit :

1° Les forces *extérieures*; si l'on désigne par ρ la densité au point considéré, par X, Y, Z, les composantes de l'action extérieure, rapportée à l'unité de masse, les forces extérieures appliquées au tronçon ont pour expressions $\rho h \mathrm{X}\, dy\, dz$, $\rho h \mathrm{Y}\, dy\, dz$, $\rho h \mathrm{Z}\, dy\, dz$.

2° Les forces *intérieures* $(\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$; pour la face $h\, dz$, les résultantes des actions déformatrices sont sensiblement $-\mathcal{F}_y\, dz$, $-\mathcal{N}_y\, dz$, $-\mathcal{T}_x\, dz$; de même, pour la face $h\, dy$, elles sont $-\mathcal{F}_z\, dy$, $-\mathcal{T}_x\, dy$, $-\mathcal{N}_z\, dy$. Quant aux forces $(\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ qui s'exercent sur les faces opposées aux précédentes, leurs expressions sont pareilles, mais changées de signe et augmentées de leurs différentielles par rapport à y ou par rapport à z.

Il est clair que le raisonnement, que nous venons de tenir pour les forces $(\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, s'étend naturellement aux couples (ν, τ), agissant sur les quatre faces du prisme.

Remarquons de suite que, dans l'application, qui sera faite ultérieurement, des théorèmes des quantités de mouvement et des moments par rapport aux axes locaux de coordonnées, il faudra multiplier les différentes expressions des $(\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{F}, \nu, \tau)$, par les petits cosinus $\frac{d\xi_0}{dy}$, $\frac{d\zeta_0}{dy}$, ... et par leurs dérivées. Nous négligerons alors, devant les dérivées $\frac{d(\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{F}, \nu, \tau)}{d(y, z)}$, les produits, par ces petits cosinus et leurs dérivées, soit des forces $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ qui sont de l'ordre des petites déformations ∂_y^0, ∂_z^0, g_x^0, soit des couples (ν, τ) qui sont de l'ordre des faibles courbures $\frac{d^2\xi_0}{(dy^2, dy\, dz, dz^2)}$. Nous pourrons opérer de même, et à fortiori, pour les produits des efforts tranchants $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, par les mêmes quantités; car ceux-ci, nuls à une première approximation, seront toujours très inférieurs aux forces $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$.

4. Appliquons au tronçon ou filet le théorème des quantités de mouvement, par rapport aux axes Oy, Oz, Ox; nous sommes conduits aux équations suivantes :

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{N}_y}{dy} + \frac{d\mathcal{T}_x}{dz} + \rho h \mathrm{Y} = 0, \\ &\frac{d\mathcal{T}_x}{dy} + \frac{d\mathcal{N}_z}{dz} + \rho h \mathrm{Z} = 0; \end{aligned}\right.$$

$$(62)\qquad \frac{d}{dy}\left(\mathcal{F}_y + \mathcal{N}_y \frac{d\xi_0}{dy} + \mathcal{T}_x \frac{d\xi_0}{dz}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mathcal{F}_z + \mathcal{T}_x \frac{d\xi_0}{dy} + \mathcal{N}_z \frac{d\xi_0}{dz}\right) + \rho h \mathrm{X} = 0.$$

L'équation (62) développée peut s'écrire

$$(63)\qquad \left(\frac{d\mathfrak{F}_y}{dy}+\frac{d\mathfrak{F}_z}{dz}\right)+\left(\mathfrak{N}_y\frac{d^2\xi_0}{dy^2}+2\mathfrak{T}_x\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz}+\mathfrak{N}_z\frac{d^2\xi_0}{dz^2}\right)$$
$$+\frac{d\xi_0}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}+\frac{d\mathfrak{T}_x}{dz}\right)+\frac{d\xi_0}{dz}\left(\frac{d\mathfrak{T}_x}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}_z}{dz}\right)+\rho hX=0.$$

Remplaçant $\left(\frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}+\frac{d\mathfrak{T}_x}{dz}\right)$, $\left(\frac{d\mathfrak{T}_x}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}_z}{dz}\right)$, par les valeurs $-\rho hY$, $-\rho hZ$, tirées de (61), nous introduirons dans l'équation précédente la somme suivante $\rho h\left(X-Y\frac{d\xi_0}{dy}-Z\frac{d\xi_0}{dz}\right)$, qui représente la projection totale, sur la normale au feuillet moyen, de l'action extérieure rapportée à l'unité de surface de celui-ci; or, cette somme pouvant être généralement confondue avec ρhX, l'équation (63) deviendra

$$(64)\qquad \left(\frac{d\mathfrak{F}_y}{dy}+\frac{d\mathfrak{F}_z}{dz}\right)+\left(\mathfrak{N}_y\frac{d^2\xi_0}{dy^2}+2\mathfrak{T}_x\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz}+\mathfrak{N}_z\frac{d^2\xi_0}{dz^2}\right)+\rho hX=0.$$

5. Il reste, pour déterminer $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, à appliquer aux forces et aux couples qui sollicitent le tronçon, le théorème des moments par rapport aux axes Oy et Oz.

A une première approximation, nous pouvons ici faire abstraction :

1° Des actions extérieures exercées sur le filet; celles-ci, en effet, n'auront que leurs composantes parallèles au feuillet moyen, dont les bras de levier soient sensibles, et ces composantes, en tout de l'ordre du produit $dy\,dz$, ne donneront que des moments totaux négligeables si elles se trouvent distribuées à peu près pareillement de part et d'autre du feuillet moyen;

2° Des tensions déformatrices $(\mathfrak{N}, \mathfrak{T})$; car celles-ci, d'une part, étant pour chaque face de l'ordre de dy ou de dz, d'autre part, étant tangentes au feuillet moyen, et, par suite, passant à des distances infiniment petites du second ordre, sinon même nulles, des axes Oy et Oz, ne sont pas susceptibles de donner lieu à des moments appréciables.

Seuls doivent donc entrer en ligne de compte les couples (ν, τ), et leurs différentielles en y et z, ainsi que les efforts tranchants $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$.

Dès lors, par l'application du théorème des moments relativement aux axes Oy et Oz, nous obtenons les équations qui déterminent $\mathfrak{F}_y$ et $\mathfrak{F}_z$:

$$(65)\qquad \mathfrak{F}_z=-\left(\frac{d\tau_x}{dy}+\frac{d\nu_z}{dz}\right),\qquad \mathfrak{F}_y=-\left(\frac{d\nu_y}{dy}+\frac{d\tau_x}{dz}\right).$$

En substituant dans l'équation (64) les valeurs trouvées pour $\mathcal{J}_z$ et $\mathcal{J}_y$, cette dernière s'écrit

$$(66)\qquad -\left(\frac{d^2\nu_y}{dy^2}+2\frac{d^2\tau_x}{dy\,dz}+\frac{d^2\nu_z}{dz^2}\right) +\left(\mathfrak{N}_y\frac{d^2\xi_0}{dy^2}+2\mathfrak{C}_x\frac{d^2\xi_0}{dy\,dz}+\mathfrak{N}_z\frac{d^2\xi_0}{dz^2}\right)+\rho h\mathrm{X}=0.$$

6. Les équations (61) et (66) conviennent à l'*équilibre* d'un tronçon de plaque. Les deux égalités (61), dans lesquelles on portera les valeurs de $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{C}_x$, connues en fonction de n_y^0, n_z^0, t_x^0, ou encore, eu égard aux formules (59), en fonction de $\partial_y^0=\frac{d\eta_0}{dy}$, $\partial_z^0=\frac{d\zeta_0}{dz}$, $g_x^0=\frac{d\eta_0}{dz}+\frac{d\zeta_0}{dy}$, régissent l'équilibre d'*extension* ou de *contraction* de la plaque; elles permettent de calculer les déplacements η_0, ζ_0, éprouvés par le feuillet moyen dans les sens des coordonnées, y, z, parallèles à son plan primitif.

La relation (66), dans laquelle les (ν, τ) auront été également remplacés par leurs valeurs en fonction de n_y, n_z, t_x, ou de $\frac{d^2\xi_0}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)}$, fera connaître la *courbure* prise, après déformation, par le feuillet moyen de la plaque au point considéré.

Remarquons en outre que si, dans les équations précitées, on vient à introduire les composantes de la *force d'inertie*, on obtiendra les équations du mouvement, soit *tangentiel*, soit *transversal*, des plaques.

IV. — Introduction de la température θ dans les équations.

1. Pour des raisons identiques à celles données antérieurement, lorsqu'il s'agissait d'un tronçon de tige (*voir* première Partie, § VI, n° 1), nous prendrons, comme terme de comparaison, l'*état naturel relatif à la température spéciale* $\theta=0$. Or, on connaît, par les égalités (28), les relations qui existent entre les déformations (∂', g') comptées à partir de l'*état naturel relatif à la température* $\theta=0$, les déformations (∂, g) comptées à partir de l'*état naturel correspondant à une température* θ *quelconque*, et les déformations *purement thermiques* qui sont ici simplement, dans l'hypothèse d'un plan de symétrie de contexture, $(D_x, D_y, D_z, G_x)\,\theta$.

On a vu d'autre part, également à propos des tiges, que, *si l'on admet à toute température* θ *un état naturel ou sans tension pour l'ensemble du tronçon*, ce que nous supposons ici, les déformations purement thermiques doivent satisfaire aux conditions (29). Celles-ci, dans le cas d'une première approximation, donnent

$$\frac{d^2 D_y}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 D_z}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 G_x}{dx^2} = 0.$$

De là il résulte que, le coefficient D_x, n'ayant aucune relation à vérifier, pourra varier, d'une manière quelconque, en passant d'une couche parallèle à la suivante; au contraire, les coefficients D_y, D_z, G_x seront, au plus, des *fonctions linéaires* de la petite coordonnée transversale x, c'est-à-dire que leur expression la plus générale sera

$$(67) \qquad D_y = D_y^0 - \mathfrak{S}x, \qquad D_z = D_z^0 - \mathfrak{S}'x, \qquad G_x = G_x^0 - 2\mathfrak{S}''x.$$

Les coefficients D_y^0, D_z^0, G_x^0 se rapportent au feuillet moyen; quant aux facteurs $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, ils seront *constants* pour un *même* tronçon, mais varieront généralement d'un tronçon à l'autre.

Remarquons que, pour toutes les valeurs de D_y, D_z, G_x, autres que celles définies par les équations (67), il existera bien à la température θ un état naturel ou sans tension pour chaque particule imperceptible du tronçon, prise isolément et supposée soustraite à toute pression; mais cet état naturel ne sera pas réalisé dans l'ensemble du tronçon, autrement dit, toutes ces particules, après avoir éprouvé chacune ses dilatations thermiques, ne pourront pas reconstituer le tronçon *continu* par simple soudure ou sans faire naître des réactions intérieures.

2. Les déplacements et les déformations étant maintenant comptés à partir de l'*état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$, il reste à voir comment la température figure dans l'expression des efforts tangentiels, des couples de flexion et de torsion, des efforts tranchants.

1° *Efforts tangentiels*. — Ils sont donnés par les formules suivantes :

$$\mathfrak{N}_y = C'hn_y^0, \qquad \mathfrak{N}_z = C'hn_z^0, \qquad \mathfrak{T}_x = C'ht_x^0.$$

Le premier groupe des équations (59) détermine les quantités n_y^0, n_z^0, t_x^0. Dès lors, si nous y remplaçons les (∂^0, g^0) par leurs valeurs connues en fonction des (∂'^0, g'^0) et des $(D^0, G^0)\theta$, nous obtiendrons une première série de coefficients n'^0_y, n'^0_z, t'^0_x, qui se déduisent des expressions de n_y^0, n_z^0, t_x^0, en substituant aux (∂^0, g^0) les (∂'^0, g'^0) et de même une seconde série de coefficients n''^0_y, n''^0_z, t''^0_x, qui seront le résultat de la substitution des (D^0, G^0) aux (∂^0, g^0). En définitive, nous pourrons écrire :

$$(68)\qquad \mathfrak{N}_y = C'h(n'^0_y - n''^0_y\theta),\qquad \mathfrak{N}_z = C'h(n'^0_z - n''^0_z\theta),\qquad \mathfrak{T}_x = C'h(t'^0_x - t''^0_x\theta).$$

Les efforts tangentiels $(\mathfrak{N}, \mathfrak{T})$ dépendent donc *linéairement* de la température, du moins, pour des écarts modérés de θ.

2° *Couples de flexion et de torsion.* — Les relations (57) qui démontrent la linéarité des déformations ∂_y, ∂_z, g_x, ont été établies, en admettant la *graduelle* variation des déformations dans les sens *parallèles au feuillet moyen* de la plaque. Or, il est clair que ce principe, d'après lequel les déformations varient, en général, incomparablement plus vite dans les sens transversaux que dans les sens tangentiels, s'applique tant aux déformations complètes ou *comptées à partir de l'état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$, qu'à celles qui sont *purement mécaniques*. Par conséquent, nous pourrons écrire, en introduisant les déplacements ξ', η', ζ', comptés à partir du *même état primitif* $\theta = 0$,

$$\partial'_y = \partial'^0_y - x\frac{d^2\xi'_0}{dy^2},\qquad \partial'_z = \partial'^0_z - x\frac{d^2\xi'_0}{dz^2},\qquad g'_x = g'^0_x - 2x\frac{d^2\xi'_0}{dy\,dz}.$$

Occupons-nous de l'une de ces formules, la première, par exemple. On sait, vu les relations (28), que $\partial_y = \partial'_y - D_y\theta$; on aura, par suite,

$$\partial_y = \partial'^0_y - D_y\theta - x\frac{d^2\xi'_0}{dy^2}.$$

Or, en vertu des égalités (67), on a $D_y = D_y^0 - \mathfrak{D}x$; il vient donc pour ∂_y :

$$\partial_y = (\partial'^0_y - D_y^0\theta) - x\left(\frac{d^2\xi'_0}{dy^2} - \mathfrak{D}\theta\right).$$

Par identification de cette dernière relation avec la première du système (57), qui définit précisément ∂_y on est amené à conclure que

$$\frac{d^2\xi_0}{dy^2} = \frac{d^2\xi'_0}{dy^2} - \Theta\theta.$$

Un raisonnement identique établirait que

$$\frac{d^2\xi_0}{dz^2} = \frac{d^2\xi'_0}{dz^2} - \Theta'\theta, \qquad \frac{d^2\xi_0}{dy\,dz} = \frac{d^2\xi'_0}{dy\,dz} - \Theta''\theta.$$

Cela posé, puisque les couples de flexion et de torsion ν_y, ν_z, τ_x sont des fonctions *linéaires et homogènes* des dérivées secondes $\frac{d^2\xi_0}{(dy^2, dy\,dz, dz^2)}$, il est facile de se rendre compte qu'en remplaçant ces dérivées par les valeurs trouvées, on obtiendra, pour définir les couples (ν, τ), les formules suivantes :

$$(69)\quad \nu_y = \frac{C''h^3}{12}(n'_y - n''_y\theta), \qquad \nu_z = \frac{C''h^3}{12}(n'_z - n''_z\theta), \qquad \tau_x = \frac{C'h^3}{12}(t'_x - t''_x\theta).$$

Dans ces formules, les coefficients n'_y, n'_z, t'_x, et de même les suivants n''_y, n''_z, t''_x, se déduisent de l'expression des coefficients correspondants n_y, n_z, t_x, déterminés par le second groupe d'égalités du système (59), les premiers, en remplaçant ξ_0 par ξ'_0, les seconds, en remplaçant les dérivées secondes $\frac{d^2\xi_0}{(dy^2, dz^2, dy\,dz)}$ par Θ, Θ', Θ''.

Nous voyons donc que si Θ, Θ', Θ'' sont *nuls* (c'est le cas de l'*homogénéité thermique* des couches primitivement parallèles au feuillet moyen), les facteurs n''_y, n''_z, t''_x sont nuls également et par suite la température *n'influe pas* sur les couples de flexion et de torsion.

Au contraire, si Θ, Θ', Θ'' sont *différents de zéro*, ce qui revient à supposer que les coefficients de dilatation thermique des couches considérées *varient* dans le sens de l'épaisseur de la plaque, les facteurs n''_y, n''_z, t''_x n'étant pas nuls, la température *intervient* dans l'expression des couples et la modifie *proportionnellement* à l'écart θ.

3° *Efforts tranchants.* — Les efforts tranchants $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, nuls dans le mode de *déformation type*, ont, dans les modes *réels*, leurs petites valeurs liées aux couples (ν, τ) par les égalités (65). Donc ils dépendent de la température dans la mesure où ces couples eux-mêmes en dépendront.

3. Essayons de mettre en évidence le rôle joué par la température dans le mouvement, soit tangentiel, soit transversal, des plaques.

1° *Mouvement tangentiel.* — Les équations (61) dans lesquelles on aura introduit les composantes, suivant les y et les z, de la force d'inertie régissent le mouvement tangentiel des plaques. Il suffit d'y remplacer $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{T}_x$, par leurs valeurs tirées des formules (68) pour constater immédiatement que le mouvement *tangentiel* est *fonction de la température* θ.

2° *Mouvement transversal.* — De même, en introduisant dans l'équation (66) la composante, suivant les x, de la force d'inertie, on obtient la loi qui régit les vibrations transversales. L'équation (66), ainsi complète, se simplifie même, du moins lorsque les plaques considérées ont une certaine épaisseur; car alors les produits de $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{T}_x$, par les dérivées secondes de ξ_0, sont insensibles et il reste

$$(70) \qquad \left(\frac{d^2\nu_y}{dy^2} + 2\frac{d^2\tau_x}{dy\,dz} + \frac{d^2\nu_z}{dz^2}\right) - \rho h\left(X - \frac{d^2\xi_0'}{dt^2}\right) = 0.$$

Cette dernière équation nous apprend que, si les couples de flexion et de torsion (ν, τ) *ne dépendent pas* de la température (c'est le cas de l'*homogénéité thermique* des couches primitivement parallèles au feuillet moyen), celle-ci *n'influe pas* sur le mouvement transversal. Le contraire a lieu lorsque les couples considérés sont *fonction de* θ.

V. — Équations du mouvement des plaques homogènes et isotropes.

1. Voyons ce que deviennent, dans le cas présent, les coefficients C, γ, γ', γ'', ε, ε', ε'' des égalités (58) qui définissent les réactions intérieures N_y, N_z, T_x.

Partant des expressions bien connues des six tensions déformatrices (N, T), dans le cas d'un milieu *homogène et isotrope*, il suffit d'annuler N_x, d'en tirer la valeur de ∂_x en fonction de ∂_y, ∂_z, puis de transporter celle-ci dans les expressions de N_y, N_z. En procédant par identification, on trouvera, pour les coefficients mentionnés, les valeurs suivantes : $C = 1$, $\gamma = \gamma' = \mu\,\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}$, $\gamma'' = \mu$, $\varepsilon = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}$, $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$.

Ensuite, vu l'homogénéité de la plaque, on a $C = C' = C'' = 1$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'' = 0$; et d'autre part, en vertu de son isotropie, nous aurons $D_y = D_z = D$, $G_x = 0$.

Il viendra donc finalement, comme expression des forces $(\mathfrak{N}, \mathfrak{T})$ et des couples (ν, τ), en posant, pour abréger, $\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} = a$:

$$(^1)\quad \mathfrak{N}_y = h\mu[a(\partial_y + \partial_z) - 2\partial_z - 2(a-1)D\theta],$$

$$\mathfrak{N}_z = h\mu[a(\partial_y + \partial_z) - 2\partial_y - 2(a-1)D\theta], \qquad \mathfrak{T}_x = h\mu g_x;$$

$$\nu_y = \frac{h^3}{12}\mu\left(a\,\Delta\xi - 2\frac{d^2\xi}{dz^2}\right), \qquad \nu_z = \frac{h^3}{12}\mu\left(a\,\Delta\xi - 2\frac{d^2\xi}{dy^2}\right), \qquad \tau_x = \frac{h^3}{6}\mu\frac{d^2\xi}{dy\,dz},$$

où Δ désigne le symbole opératoire $\frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$.

2. On peut dès lors former des équations *indéfinies* du mouvement :

1° Celles du mouvement *tangentiel*, en portant les valeurs de $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{T}_x$ dans les équations (61), ce qui donne

$$(71)\quad \begin{cases} \mu\left[\Delta\eta + (a-1)\frac{d}{dy}\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} - 2D\theta\right)\right] + \rho\left(Y - \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) = 0, \\ \mu\left[\Delta\zeta + (a-1)\frac{d}{dz}\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} - 2D\theta\right)\right] + \rho\left(Z - \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = 0; \end{cases}$$

2° Celles du *mouvement transversal*, en portant les valeurs de ν_y, ν_z, τ_x dans l'équation (70); d'où il vient

$$(72)\qquad \mu a\frac{h^2}{12}\Delta(\Delta\xi) - \rho\left(X - \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = 0.$$

3. Cherchons les conditions *définies aux limites*, correspondantes, en supposant que les seules pressions extérieures qui s'exercent sur la plaque sont des pressions appliquées exclusivement sur ses bords. Ces conditions, spéciales au contour, sont au nombre de quatre et reviennent à dire que l'action totale extérieure, exercée sur une bande du cylindre contournant la plaque, comprise entre deux génératrices infiniment voisines, équivaut statiquement à trois forces dirigées

(1) Jusqu'ici nous avions affecté de l'indice o tout ce qui se rapportait au feuillet moyen; comme aucune confusion n'est possible, nous le supprimerons dorénavant.

suivant les axes locaux et à un couple perpendiculaire au contour. En effet, menons, par un point quelconque de l'une des génératrices considérées, trois axes rectangulaires tels que le premier soit normal au cylindre et le second dans le sens de la largeur ds de la bande; et prenons les composantes totales et les moments totaux, par rapport à ces axes, des forces extérieures appliquées à la bande. Le dernier des trois moments est de l'ordre de ds^2, c'est-à-dire négligeable; par suite, ces forces équivalent statiquement à trois composantes $P_n ds$, $P_s ds$, $P_x ds$, appliquées respectivement le long des trois axes, à un couple $M_s ds$ normal à l'élément ds du contour de la plaque, et à un second couple, $-M_n ds$. Ce dernier, résultant de forces tangentielles parallèles à ds, peut être remplacé statiquement par un couple formé de deux forces normales au feuillet moyen de la plaque et agissant aux extrémités du bras de levier ds. Ces deux forces, au commencement et à l'extrémité de ds, seront M_n et $-M_n$; sur l'élément ds qui suit, ces deux forces seront remplacées par $M_n + \frac{dM_n}{ds} ds$ et $-M_n - \frac{dM_n}{ds} ds$. Donc au point de séparation des deux éléments ds, on a les deux forces $-M_n$ et $M_n + \frac{dM_n}{ds} ds$ qui, à cause de la solidarité des bandes, se fondent en une résultante égale à $\frac{dM_n}{ds} ds$. Cette résultante se joint à la force $P_x ds$ qui est de même sens, et de la sorte l'action totale, exercée sur une bande du cylindre contournant, sera bien réduite statiquement, par unité de longueur du contour, aux trois composantes P_n, P_s, $P_x + \frac{dM_n}{ds}$ et au couple M_s, normal au contour.

Cela posé, appelons, par unité de surface, p_y, p_z, p_x, les composantes de l'action extérieure exercée sur un élément du contour et p_n, p_s, les composantes de la même action suivant la normale et la tangente au contour. Soit α l'angle de la normale extérieure avec Oy; des formules connues de la théorie de l'élasticité donnent

$$p_y = N_y \cos\alpha + T_x \sin\alpha, \qquad p_z = T_x \cos\alpha + N_z \sin\alpha, \qquad p_x = T_z \cos\alpha + T_y \sin\alpha,$$

et il est d'ailleurs aisé de voir que

$$\begin{aligned} p_n &= p_y \cos\alpha + p_z \sin\alpha = N_y \cos^2\alpha + N_z \sin^2\alpha + 2T_x \sin\alpha\cos\alpha, \\ p_s &= -p_y \sin\alpha + p_z \cos\alpha = -(N_y - N_z)\sin\alpha\cos\alpha + T_x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \end{aligned}$$

De là on déduit

$$P_n = \int_h p_n dx = \mathfrak{N}_y \cos^2\alpha + \mathfrak{N}_z \sin^2\alpha + 2\mathfrak{T}_x \sin\alpha\cos\alpha,$$

$$P_s = \int_h p_s dx = -(\mathfrak{N}_y - \mathfrak{N}_z)\sin\alpha\cos\alpha + \mathfrak{T}_x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

$$P_x = \int_h p_x dx = \mathfrak{F}_y\cos\alpha + \mathfrak{F}_z\sin\alpha = -\left[\left(\frac{d\nu_y}{dy} + \frac{d\tau_x}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\nu_z}{dz}\right)\sin\alpha\right],$$

$$M_n = \int_h p_s x\, dx = -[-(\nu_y - \nu_z)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)],$$

$$M_s = \int_h p_n x\, dx = -(\nu_y\cos^2\alpha + \nu_z\sin^2\alpha + 2\tau_x\cos\alpha\sin\alpha).$$

Par substitution des valeurs trouvées pour $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{T}_x$, ν_y, ν_z, τ_x, il vient

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} P_n &= h\mu\left[\sin 2\alpha\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + \cos 2\alpha\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz}\right)\right. \\ &\qquad\left. + (a-1)\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} - 2D\vartheta\right)\right], \\ P_s &= h\mu\left[2\cos 2\alpha\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) - \sin 2\alpha\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz}\right)\right]; \end{aligned}\right.$$

$$P_x = -\frac{h^3\mu}{12} a \frac{d}{dn}(\Delta\xi),$$

$$M_n = -\frac{h^3\mu}{12}\left[\sin 2\alpha\left(\frac{d^2\xi}{dy^2} - \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) - 2\cos 2\alpha\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right];$$

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} M_s &= -\frac{h^3\mu}{12}\left[\cos 2\alpha\left(\frac{d^2\xi}{dy^2} - \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) + \sin 2\alpha\frac{d^2\xi}{dy\,dz} + \frac{a-1}{2}\Delta\xi\right], \\ P_x + \frac{dM_n}{ds} &= -\frac{h^3\mu}{12}\left\{\frac{d}{ds}\left[\sin 2\alpha\left(\frac{d^2\xi}{dy^2} - \frac{d^2\xi}{dz^2}\right)\right.\right. \\ &\qquad\left.\left. - 2\cos 2\alpha\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\right] + a\frac{d}{dn}(\Delta\xi)\right\}. \end{aligned}\right.$$

4. Il suffit maintenant de joindre aux deux équations (71) les expressions (73) de P_n et de P_s, ces forces étant des fonctions données sur le contour, pour obtenir le système qui détermine le mouvement tangentiel; et, de même, de joindre à l'équation indéfinie (72) les

expressions (74) également données de M_s et de $P_x + \frac{dM_n}{ds}$, pour obtenir le système qui détermine le mouvement transversal. On constate alors aisément que la température θ figure dans les équations du premier système; qu'elle ne paraît pas, au contraire, dans celles du second; et, par suite, nous sommes amenés à conclure que, pour ce qui est des plaques *homogènes et isotropes*, le mouvement *tangentiel* est *fonction de la température*, celle-ci *n'influant pas* sur le mouvement *transversal* au degré d'approximation auquel nous nous sommes bornés.