JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. GAU

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de M. Darboux

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 7 (1911), p. 123-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__123_0>

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de M. Darboux;

PAR M. E. GAU.

INTRODUCTION.

La méthode de M. Darboux constitue, dans l'état actuel de la Science, le moyen le plus puissant dont on dispose pour intégrer une équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire pour ramener son intégration à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires.

En ce qui concerne les équations du second ordre, cette méthode peut se résumer en quelques mots; elle repose essentiellement sur la remarque suivante : si

$$U(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}$$

et

$$V(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}$$

sont deux combinaisons intégrables distinctes de l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation proposée, c'est-à-dire si U et V sont deux invariants distincts pour ce système de caractéristiques, l'équation $U = f(V)$, où f est une fonction arbitraire, admet avec la proposée une intégrale commune dépendant d'une fonction arbitraire ; on peut dire encore : quelle que soit la forme de f, l'équation $U = f(V)$ forme avec la proposée un *système en involution*, en adoptant la définition communément admise, proposée par M. Goursat (¹), des systèmes en involution.

Dans ce cas, on démontre facilement que la solution du problème de Cauchy se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires (²).

S'il existe deux invariants distincts pour chacun des deux systèmes de caractéristiques, l'intégrale générale de l'équation peut s'exprimer par des formules qui donnent x, y, z en fonction de deux variables indépendantes α et β, de p fonctions arbitraires de α, de q fonctions arbitraires de β et des dérivées de ces fonctions en nombre fini, les p fonctions de α étant assujetties à vérifier $p - 1$ équations différentielles d'ordre quelconque, ainsi que les q fonctions de β : nous dirons dans ce cas, avec M. Goursat, que l'intégrale générale est de la *première classe* (³).

La réciproque de cette propriété est vraie, ainsi que l'avait annoncé M. Darboux dans son Mémoire ; M. Goursat en a donné une démonstration très simple (⁴).

La méthode consiste donc essentiellement à chercher des invariants pour les caractéristiques d'ordres croissants $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Malheureusement, on ne connaît aucun moyen pour déterminer *a priori* l'ordre de ces invariants, ou même une limite supérieure de cet ordre ; de sorte que lorsqu'on a constaté qu'une équation donnée n'admet pas deux invariants d'ordre inférieur ou égal à n pour l'un des systèmes, rien ne prouve qu'il n'existe pas deux invariants d'ordre inférieur ou égal à $n + 1$; l'application de la méthode de M. Darboux conduit donc, en général, à une infinité d'opérations.

Un fait analogue se produit lorsqu'on veut intégrer une équation

---

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, Chap. VI, p. 82.

(2) *Ibid.*, Chap. VII, p. 139.

(3) *Ibid.*, Chap. VIII, p. 217.

(4) *Ibid.*, p. 220.

linéaire de la forme $s = ap + bq + cz$ par la méthode de Laplace : on ne sait pas *a priori* si l'une des deux suites d'invariants se terminera au bout d'un nombre fini de termes ; d'ailleurs, dans ce cas, la méthode de Laplace et celle de M. Darboux conduisent aux mêmes opérations.

Depuis la publication du Mémoire de M. Darboux ([1]) plusieurs géomètres se sont attachés à montrer l'importance de la nouvelle méthode, à la perfectionner et à en donner des applications ; on peut citer en particulier M. Speckmann ([2]) et surtout M. Goursat, qui a consacré à ce sujet un des plus beaux Chapitres de ses *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*. Quelques travaux, peu nombreux, ont été publiés sur l'application de cette méthode à certains types d'équations ; on peut citer deux Mémoires de M. Goursat ([3]), où l'auteur a classé et intégré toutes les équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ qui admettent un invariant d'ordre inférieur ou égal à deux, distinct de x ou y, pour chaque système de caractéristiques. M. von Boer a traité la même question pour les équations de la forme $s = f(r, t)$ ([4]).

Le problème général de la recherche des invariants d'ordre quelconque n'a été résolu jusqu'ici, à ma connaissance, que pour l'équation $s = f(z)$ par Sophus Lie ([5]), et pour l'équation plus générale $s = f(x, y, z)$ par M. Clairin ([6]).

Ces deux exemples ont été traités avec une élégante simplicité ; néanmoins, en général, ces questions exigent des calculs compliqués,

---

([1]) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1re série, t. VII. Ce Mémoire est reproduit à la fin du Tome IV des *Leçons sur la théorie des surfaces* (Note X).

([2]) *La Méthode de M. Darboux pour l'intégration d'équations aux dérivées partielles, non linéaires du second ordre* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, t. XXVII, 1894).

([3]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899.

([4]) *Application de la Méthode de Darboux à l'intégration de l'équation différentielle* $s = f(r, t)$. (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, t. XXVII, 1894.)

([5]) La démonstration de Sophus Lie est reproduite dans les *Leçons* de M. Goursat, t. II, p. 182.

([6]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXIX, 1905, p. 177.

qui deviennent inabordables lorsque l'équation n'a pas une forme simple.

Les progrès de cette théorie dépendent de la connaissance approfondie de la structure des invariants, mais ce problème lui-même apparaît comme très difficile, malgré les beaux théorèmes énoncés à ce sujet par M. Goursat.

Le présent travail est divisé en trois Parties :

Dans la première, j'expose tout d'abord un nouveau moyen pour former des invariants : lorsqu'on connaît trois équations distinctes, d'ordre supérieur à trois, en involution avec la proposée et du même système, on peut en déduire un invariant par des opérations simples n'exigeant aucune intégration; si l'on connaît quatre équations en involution, on peut former deux invariants et, par suite, une intégrale intermédiaire : l'équation s'intègre par la Méthode de M. Darboux.

Cela met en évidence la relation étroite qui existe entre le problème de la recherche des invariants et celui de la recherche des équations en involution; lorsqu'on a trouvé une telle équation, non seulement on peut en déduire pour l'équation proposée une infinité d'intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, mais encore on peut considérer qu'on a fait un progrès dans la recherche de l'intégrale générale elle-même. Je crois d'ailleurs qu'il y a, en général, intérêt à remplacer la recherche des invariants par celle des équations en involution, dans l'application de la méthode de M. Darboux.

En second lieu, je démontre, dans le cas des équations de forme quelconque, un théorème démontré par M. Goursat pour les équations $s=f(x,y,z,p,q)$: *tout invariant d'ordre supérieur à trois peut s'écrire sous forme linéaire par rapport aux dérivées d'ordre supérieur;* cette propriété permet de simplifier la recherche des invariants : dans tous les cas, l'ordre des équations aux dérivées partielles qui interviennent est abaissé au moins d'une unité; j'ai donné également une forme réduite simple pour les invariants du troisième ordre.

Le Chapitre II est consacré à l'étude des équations de la forme $s=f(x,y,z,p,q)$; les résultats précédents deviennent particulièrement simples dans ce cas; il suffit de deux équations en involution pour former un invariant, et l'on peut voir nettement l'avantage qu'il y a à substituer à la recherche des invariants celle des équations en involution. J'ai étudié, en outre, la forme des expressions $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$, qui sont d'une importance capitale dans cette théorie, et j'en ai déduit deux remarques d'une application très générale, et une condition nécessaire, simple, pour qu'une équation de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ admette un invariant autre que x ou y.

Dans le Chapitre III, j'ai étudié les équations de la forme

$$s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z)$$

au point de vue de l'existence des invariants; j'ai dû me borner, afin de ne pas donner à ce calcul un développement exagéré, au cas où a et b dépendent effectivement de la variable z, ce qui revient à supposer $ab \neq 0$, et à indiquer sommairement les résultats dans le cas où l'un des coefficients a, b est nul; le cas où l'équation considérée est réductible à la forme $s = a(x, y, z)pq$ est étudié complètement.

Les calculs sont longs, mais les résultats sont simples; ils permettent, étant donnée une équation déterminée, de vérifier, par des opérations élémentaires, si elle peut admettre une intégrale générale de la première classe, et dans ce cas de ramener son intégration à celle d'une équation linéaire. Pour l'équation $s = a(x, y, z)pq$ la conclusion est encore plus simple : il n'y a que trois formes d'équations de ce genre dont l'intégrale générale soit de la première classe; l'équation donnée doit se réduire à l'une de ces trois formes par une transformation simple, et, dans ce cas, l'intégration est immédiate.

L'étude du cas où l'équation $s = ap + bq + c$ est en involution avec deux équations de systèmes différents et d'ordre supérieur à l'unité, sans être en involution avec une équation d'ordre inférieur, fournit un résultat qui est, je crois, susceptible de généralisation; dans ce cas, en effet, sans supposer l'existence d'invariants, l'équation est nécessairement du type des équations trouvées par M. Moutard, et, par suite, elle se ramène à une équation linéaire par une transformation connue; or, pour une équation linéaire, la connaissance d'une seule équation en involution suffit pour former un invariant. Il est probable que ce fait est général et que, lorsqu'une équation du second ordre peut former un système en involution avec une autre d'ordre quelconque, il existe une transformation qui permet de ramener l'équation proposée à une équation de même nature, mais où les coefficients sont tels que le nombre minimum d'équations en involution, nécessaires pour former un invariant, est diminué d'une unité.

M. Goursat a bien voulu s'intéresser à ce travail et m'encourager pendant mes recherches ; qu'il me permette de lui en exprimer ici ma vive reconnaissance.

CHAPITRE I.

LES INVARIANTS DES CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE.

---

1. Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre quelconque, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, d'après les notations habituelles. Si cette équation contient effectivement la dérivée seconde r, on pourra l'écrire sous la forme

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0. \tag{1}$$

Si elle ne contient pas r, mais contient t, on pourra encore la mettre sous la forme précédente, en échangeant simplement le rôle des variables x et y. Enfin, si F ne contient ni r, ni t, elle peut s'écrire

$$s = f(x, y, z, p, q). \tag{2}$$

On pourrait encore ramener cette équation à la forme (1) ; il suffirait de faire le changement de variables indépendantes bien connu,

$$x = x' + y', \qquad y = x' - y',$$

mais l'équation (2) étant plus facile à étudier et conduisant à des résultats particulièrement simples, nous l'étudierons directement.

Dans la suite, nous poserons comme d'habitude $p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x_i \partial y_k}$; l'équation (1) et celles qu'on en déduit par des différentiations répétées permettent d'exprimer toutes les quantités p_{ik}, au moyen de celles dont l'indice i a l'une des valeurs o ou 1 [1].

Soit $U(x, y, z, p_{no}, \ldots, p_{on})$ une fonction de x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre n. Si dans U nous remplaçons les dérivées p_{ik} par leur valeur en fonction des dérivées p_{0k} et p_{1k} tirées de l'équation (1), nous obtenons une fonction de x, y, z, p_{01}, ..., p_{0n}, p_{10}, ..., $p_{1,n-1}$. Nous désignerons cette opération par le symbole [U].

Si l'on différentie la fonction U, i fois par rapport à x et k fois par rapport à y successivement, en considérant z et ses dérivées p_{ik} comme des fonctions de x, y, on obtient une fonction de x, y, z, et des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+i+k$; nous la désignerons par $\frac{d^{i+k}U}{dx^i dy^k}$; supposons que, dans cette dernière expression, on supprime les termes qui contiennent les dérivées d'ordre $n+i+k$ et que dans le résultat obtenu on remplace encore les quantités p_{ik} en fonction de p_{0k} et p_{ik} d'après l'équation (1) : on obtient ainsi une expression que nous désignerons par $\left(\frac{d^{i+k}U}{dx^i dx^k}\right)$. On a donc l'identité

$$\left[\frac{d^{i+k}U}{dx^i\,dx^k}\right] = \left[\frac{\partial U}{\partial p_{n0}} p_{n+i,k} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial p_{0n}} p_{i,n+k}\right] + \left(\frac{d^{i+k}U}{dx^i\,dy^k}\right).$$

Ces notations, qui simplifient considérablement l'écriture, sont en grande partie empruntées à M. Goursat.

2. Nous allons, maintenant, faire une remarque fondamentale, au sujet de la forme des expressions $\left[\frac{d^n f}{dy_n}\right]$. On a tout d'abord

$$\left[\frac{df}{dy}\right] = p_{1,2}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0,3}\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{df}{dy}\right).$$

Nous poserons

$$H = \left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}.$$

On a ensuite

$$\left[\frac{d^2 f}{dy^2}\right] = p_{1,3}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0,4}\frac{\partial f}{\partial t} + p_{1,2}\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right] + p_{0,3}\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right] + \left[\frac{dH}{dy}\right]$$

[1] *Voir* Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 78.

en développant les calculs, on trouve facilement

$$(3)\quad \left[\frac{d^2f}{dy^2}\right] = p_{1.3}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0,4}\frac{\partial f}{\partial t} + p_{1,2}^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2p_{1,2}p_{0,3}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} + p_{0,3}^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$
$$+ p_{1,2}\left[\left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right) + \frac{\partial H}{\partial s}\right] + p_{0.3}\left[\left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\right] + \left(\frac{dH}{dy}\right).$$

Calculons encore $\left[\frac{d^3f}{dy^3}\right]$; on a

$$(4)\quad \left[\frac{d^3f}{dy^3}\right] = p_{1,4}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0.5}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$+ p_{1,3}\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right] + 2p_{1,2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2p_{0.3}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} + \left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right) + \frac{\partial H}{\partial s}\right\}$$
$$+ p_{0,4}\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right] + 2p_{1,2}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} + 2p_{0.3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\right\} + J_3.$$

J_3 ne dépendant pas des dérivées d'ordre supérieur à trois. On voit que l'expression précédente est linéaire par rapport aux dérivées : $p_{1,4}$, $p_{0,5}$, $p_{1,3}$, $p_{0,4}$. Je dis que, d'une façon générale, on a, si $n > 2$,

$$\left[\frac{d^nf}{dy^n}\right] = p_{1.n+1}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0,n+2}\frac{\partial f}{\partial t} + p_{1,n}M_n + p_{0.n+1}N_n + J_n,$$

J_n ne dépendant pas des dérivées d'ordre supérieur à n; en effet, la proposition est vraie pour $n = 3$; supposons qu'elle le soit pour la valeur $n - 1$ de l'indice, c'est-à-dire qu'on ait

$$\left[\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right] = p_{1.n}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0.n+1}\frac{\partial f}{\partial t} + p_{1,n-1}M_{n-1} + p_{0,n}N_{n-1} + J_{n-1};$$

on en déduit, par une dérivation,

$$\left[\frac{d^nf}{dy^n}\right] = p_{1,n+1}\frac{\partial f}{\partial s} + p_{0.n+2}\frac{\partial f}{\partial t} + p_{1.n}\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right] + M_{n-1}\right\}$$
$$+ p_{0.n+1}\left\{\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right] + N_{n-1}\right\} + J_n.$$

Si $n > 2$, les coefficients de $p_{1,n}$ et de $p_{0,n+1}$ ne dépendent pas de ces dérivées, ce qui démontre la proposition énoncée. On voit, en outre, qu'on a

$$M_n = M_{n-1} + \left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right],$$
$$N_n = N_{n-1} + \left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right].$$

Ces formules permettent de calculer M_n et N_n par voie de récurrence. On déduit de la première, par le procédé classique

$$M_n = M_3 + (n-3)\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right]. \tag{5}$$

La valeur de M_3 se tire immédiatement de la relation (4); après quelques simplifications, on trouve sans difficulté

$$\left\{\begin{aligned} &M_n = n\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right] + \frac{\partial f}{\partial p}, \\ &\text{et, de même,} \\ &N_n = n\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right] + \frac{\partial f}{\partial q}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

3. Cela posé, soit $\varphi(x, y, z, p_{n,0}, \ldots, p_{0,n}) = 0$ une équation aux dérivées partielles d'ordre n, formant avec la proposée $r + f = 0$ un système en involution. Il est clair que si l'on remplace dans φ les dérivées p_{ik} en fonction de p_{0k} et p_{1k} au moyen de l'équation (1), on obtient encore une équation d'ordre n, en involution avec la proposée; nous supposerons toujours, dans la suite, que cette opération a été effectuée et que φ est de la forme

$$\varphi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-1}).$$

Dans ces conditions, pour que le système considéré soit en involution il est nécessaire et suffisant que φ vérifie l'un des deux systèmes d'équations [1] :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} - m_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ &\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0; \end{aligned}\right. \tag{A}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} - m_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ &\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_1\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{B}$$

---

[1] Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 83.

en appelant m_1 et m_2 les deux racines de l'équation qui détermine les caractéristiques

$$(7) \qquad m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Il suffit, d'ailleurs, que le système (A) ou (B) soit vérifié en tenant compte de la relation $\varphi = 0$ elle-même. Supposons, par exemple, que φ vérifie le système (A), nous dirons pour abréger que φ est du système (A).

La première équation (A) montre que $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \neq 0$, sans quoi on aurait aussi $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} = 0$, et l'équation $\varphi = 0$ serait d'ordre inférieur à n, ce qui est absurde. On peut donc toujours résoudre $\varphi = 0$ par rapport à $p_{1,n-1}$ et écrire

$$(8) \qquad \varphi \equiv p_{1,n-1} + \psi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = 0,$$

la première équation (A) devient alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}} - m_1 = 0.$$

Si $n > 2$, on aura donc

$$(9) \qquad \psi \equiv m_1 p_{0,n} + u(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}).$$

La première équation (A) est alors identiquement vérifiée, et il reste la seule condition

$$(10) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0,$$

qui doit être vérifiée identiquement lorsqu'on y fait $p_{1,n-1} = -\psi$. Or, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = p_{0,n}\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + \left[\frac{du}{dx}\right],$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \left(\frac{d\psi}{dy}\right) = p_{0,n}\left[\frac{dm_1}{dy}\right] + \left[\frac{du}{dy}\right]$$

et

$$\left[\frac{du}{dx}\right] = \frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} p_{1,n-1} - \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\left[\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right] + \left(\frac{du}{dx}\right),$$
$$\left[\frac{du}{dy}\right] = \frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} p_{0,n} + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} p_{1,n-1} + \left(\frac{du}{dy}\right).$$

Ces deux dernières égalités ne sont exactes que si u dépend effectivement de l'une au moins des dérivées d'ordre $n-1$; s'il n'en est pas ainsi $\left[\frac{du}{dx}\right]$ et $\left[\frac{du}{dy}\right]$ ne dépendent pas des dérivées d'ordre n; comme dans ce qui suit, nous ne nous servons jamais des expressions $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$ elles-mêmes, mais simplement de ce fait qu'elles ne dépendent pas des dérivées d'ordre n, on voit que nous pouvons nous servir des égalités précédentes, sans rien changer aux raisonnements, même lorsque $\frac{\partial u}{dp_{0,n-1}}$ et $\frac{\partial u}{dp_{1,n-2}}$ sont nuls; d'ailleurs, il est facile de faire directement le calcul dans ce cas et de vérifier qu'on arrive aux mêmes résultats.

Dans ces conditions, la relation (10) se met sous la forme

$$(11)\quad p_{0,n}\left\{\left[\frac{dm_1}{dx}\right]+m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right]\right\}+\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}}(p_{1,n-1}+m_2p_{0,n})$$
$$-\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\left[\frac{\partial f}{\partial s}p_{1,n-1}+\frac{\partial f}{\partial t}p_{0,n}+\left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right)-m_2p_{1,n-1}\right]$$
$$+\left(\frac{du}{dx}\right)+m_2\left(\frac{du}{dy}\right)-\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

Supposons d'abord $n>3$. On a alors, d'après la remarque faite précédemment,

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)=\mathrm{M}_{n-1}p_{1,n-1}+\mathrm{N}_{n-1}p_{0,n}+\mathrm{J}_{n-1}.$$

Si dans la relation (11) on fait

$$p_{1,n-1}=-\psi=-(m_1p_{0,n}+u),$$

on obtient une relation linéaire en $p_{0,n}$, qui doit être une identité. Écrivons en particulier que le coefficient de $p_{0,n}$ est nul; en tenant compte des relations

$$m_1+m_2=\frac{\partial f}{\partial s},\qquad m_1m_2=\frac{\partial f}{\partial t},$$

la condition ainsi obtenue se met facilement sous la forme

$$(12)\quad\left[\frac{dm_1}{dx}\right]+m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right]$$
$$+(m_2-m_1)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}}-m_1\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\right)+m_1\mathrm{M}_{n-1}-\mathrm{N}_{n-1}=0.$$

Dans ce qui suit, nous nous occuperons plus spécialement des équations à caractéristiques distinctes; d'ailleurs, M. Goursat a déterminé toutes les équations du second ordre à caractéristiques confondues auxquelles s'applique la méthode de M. Darboux ([1]), ce qui diminue de beaucoup l'intérêt de notre étude dans ce cas. Nous appellerons caractéristiques (I) celles qui correspondent à la racine m_1, et caractéristiques (II) celles qui correspondent à m_2.

Supposons qu'on se déplace sur une caractéristique d'ordre n du système (II); dans ces conditions les quantités y, z, $p_{0,1}$, ..., $p_{0,n}$, $p_{1,0}$, ..., $p_{1,n-1}$ sont des fonctions de la seule variable x; si l'on substitue ces valeurs dans φ, on obtient une fonction de x dont la dérivée a pour expression

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dp_{1,n-1}}{dx} + m_1 \frac{dp_{0,n}}{dx} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right).$$

Or, l'une des équations qui définissent les caractéristiques d'ordre n du système (II) est

$$dp_{1,n-1} + m_1\, dp_{0,n} + \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) dx = 0.$$

On aura donc, en tenant compte de cette relation ([2]),

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right),$$

c'est-à-dire, précisément, le premier membre de l'équation (10); si nous remplaçons φ par $p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2})$, nous aurons donc le premier membre de l'équation (11); dans cette expression (11) remplaçons, maintenant, $p_{1,n-1}$ par $\varphi - \psi$, il vient

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi\left[\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} - \mathrm{M}_{n-1}\right] + \mathrm{K},$$

K est précisément le résultat de la substitution de $p_{1,n-1}$ par $-\psi$ dans le premier membre de l'équation (11), nous avons vu qu'il était

---

([1]) Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 164.
([2]) *Voir*, à ce sujet, Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 91.

identiquement nul. Donc on a

$$(13)\qquad \frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} - M_{n-1}\right)\varphi.$$

Comme nous avons $m_1 - m_2 \neq 0$, nous pouvons tirer

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\right)$$

de l'équation (12), il vient

$$\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} - M_{n-1} = \frac{1}{m_1 - m_2}\left\{\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right] + m_2 M_{n-1} - N_{n-1}\right\},$$

en remplaçant M_{n-1}, N_{n-1} par leurs valeurs, on trouve, après quelques réductions,

$$(14)\qquad \frac{d\varphi}{dx} = \varphi(An + B),$$

en posant

$$A = -\left[\frac{dm_2}{dy}\right],$$

$$B = \frac{1}{m_2 - m_1}\left\{(m_2 - m_1)\left[\frac{dm_2}{dy}\right] + \frac{\partial f}{\partial q} - m_2\frac{\partial f}{\partial p} - \left[\frac{dm_1}{dx}\right] - m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right]\right\}.$$

A et B sont donc des quantités absolument indépendantes de φ, et que l'on calcule facilement en partant de l'équation proposée $r + f = 0$; il faut remarquer, d'ailleurs, que nous avons établi la relation (14) en supposant $n > 3$.

Sur toute caractéristique d'ordre n du système (II), qui ne vérifie pas l'équation $\varphi = 0$, c'est-à-dire qui n'est pas caractéristique du système en involution

$$r + f = 0, \qquad \varphi = 0,$$

on aura donc

$$(15)\qquad \frac{d\log\varphi}{dx} = An + B;$$

si l'on connaît trois équations distinctes en involution $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$ d'ordre n, m, k respectivement, on aura aussi

$$\frac{d\log\psi}{dx} = Am + B, \qquad \frac{d\log\theta}{dx} = Ak + B;$$

en éliminant les quantités A et B entre ces trois équations, par un déterminant, on obtient immédiatement

$$\frac{d\log\varphi}{dx}(m-k)+\frac{d\log\psi}{dx}(k-n)+\frac{d\log\theta}{dx}(n-m)=0,$$

d'où, en intégrant

$$\varphi^{m-k}\psi^{k-n}\theta^{n-m}=\text{const.} \tag{16}$$

Nous obtenons donc ainsi un *invariant* pour le système (II) de caractéristiques.

En particulier, si l'on connaît deux équations du même ordre telles que φ, soient $\varphi=0$ et $\theta=0$, on aura

$$\frac{d\log\varphi}{dx}=An+B,$$

$$\frac{d\log\theta}{dx}=An+B,$$

d'où

$$\frac{\varphi}{\theta}=\text{const.}$$

et l'on obtient ainsi un invariant; bien entendu, il faut pour cela que les premiers membres des équations en involution soient mis sous la forme (8).

Si l'on connaît quatre équations en involution $\varphi=0$, $\psi=0$, $\theta=0$, $\tau=0$, d'ordres n, m, k, h respectivement, on pourra associer ψ, θ, τ, et l'on formera ainsi un deuxième invariant qui sera évidemment distinct du premier si φ et ζ sont distincts. *On pourra donc intégrer l'équation proposée par la méthode de M. Darboux.*

Parmi les quatre invariants qu'on peut former en associant les premiers membres φ, ψ, θ, τ, trois à trois, il n'y en a que deux distincts. Ainsi, par exemple, les trois invariants

$$I_1=\varphi^{m-k}\psi^{k-n}\theta^{n-m},$$

$$I_2=\psi^{k-h}\theta^{h-m}\tau^{m-k},$$

$$I_3=\theta^{h-n}\tau^{n-k}\varphi^{k-h}$$

ne sont pas distincts; on vérifie immédiatement qu'il existe la relation

$$I_1^{h-k}I_2^{k-n}I_3^{m-k}=1.$$

On associera donc ces premiers membres, de manière à rendre le résultat le plus simple possible.

4. Considérons maintenant un invariant d'ordre quelconque

$$(17)\qquad \pi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-1}) = h.$$

Si nous donnons à h deux valeurs différentes, h_1 et h_2, nous obtenons deux équations,

$$\pi = h_1, \qquad \pi = h_2,$$

qui n'ont évidemment aucune intégrale commune ; donc ces équations ne peuvent être conséquences d'une même troisième $\varpi = 0$, car elles admettraient, dans ce cas, comme intégrales communes, toutes les intégrales de cette dernière

Supposons, maintenant, que l'ordre de l'invariant soit supérieur à trois et soient h_1 et h_2 deux valeurs de h différentes. On peut écrire les équations

$$\pi = h_1, \qquad \pi = h_2$$

sous la forme

$$p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u_1(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = 0,$$
$$p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u_2(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = 0.$$

D'après ce qui a été démontré au paragraphe précédent, ces deux équations étant distinctes, le quotient de leurs premiers membres sera un invariant d'ordre n

$$\frac{p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u_1}{p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u_2} = k,$$

qui peut s'écrire encore, par une transformation bien connue, et en changeant la constante

$$(18)\qquad \frac{p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u_1}{u_2 - u_1} = k.$$

On remarquera que cette forme est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n.

Nous allons voir que cet invariant n'est pas distinct de celui dont nous sommes partis $\pi = h$. Considérons, en effet, une caractéristique d'ordre n du système (II), appartenant à l'équation proposée ; sur cette caractéristique y, z et les dérivées $p_{i,k}$ sont des fonctions de la seule variable x; si nous transportons ces valeurs dans π et dans le premier membre de (18), ces fonctions sont indépendantes de x et se réduisent, l'une à une valeur numérique h, l'autre à une valeur numérique k; il existe, entre ces valeurs numériques h et k, une correspondance manifeste qui se traduit par une relation de la forme $k = f(h)$; d'autre part, on voit facilement, en tenant compte des équations qui expriment que π est un invariant, que π est de la forme (¹) :

$$\pi(p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n}; x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}).$$

De l'équation (18), on tire

$$p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} = (u_2 - u_1) f(h) - u_1,$$

en transportant cette valeur dans l'équation (17), et en tenant compte de la forme de π par rapport aux dérivées d'ordre n, il vient

$$\pi[(u_2 - u_1) f(h) - u_1; x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}] = h, \tag{19}$$

relation qui doit être vérifiée identiquement sur toute caractéristique d'ordre n du système (II). Si cette relation contient effectivement h, elle peut s'écrire

$$\varphi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = h$$

et l'on voit que φ est un invariant d'ordre inférieur à n. Donc l'invariant π s'exprime en fonction de l'invariant (18) et d'un invariant d'ordre inférieur : c'est ce qu'on exprime en disant que les invariants (17) et (18) ne sont pas distincts.

Si la relation (19) ne contient pas h, elle se réduit à une expression

$$\varphi(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}) = 0,$$

qui est identiquement nulle sur toute caractéristique d'ordre n du système (II); si elle est identiquement nulle, π s'exprime en fonction de l'invariant (18); sinon elle constitue encore un invariant d'ordre inférieur à n et le raisonnement s'achève comme précédemment.

(¹) *Voir* Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 150.

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Tout invariant n d'ordre supérieur à trois peut se mettre sous la forme

$$(20) \qquad \frac{p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} + u(x, y, z, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2})}{v(x, y, z, p_{01}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2})} = k,$$

linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n.

Ce résultat permet de simplifier considérablement la recherche des invariants de l'équation proposée. M. Goursat ([1]) l'avait déjà énoncé au sujet des équations de la forme particulière

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

Si l'on considère deux invariants d'ordre supérieur à trois, en mettant l'un d'eux sous la forme (20) on pourra appliquer, sans y rien changer, le raisonnement que nous avons fait pour démontrer que les invariants (17) et (18) n'étaient pas distincts. Cela prouve que deux invariants du même ordre ne sont jamais distincts lorsque cet ordre est supérieur à trois. Ce fait a été d'ailleurs démontré, au moyen d'une méthode différente, par M. Goursat ([2]).

5. De toute façon, on voit qu'on peut substituer à la recherche des invariants d'ordre supérieur à trois, celle des équations en involution avec la proposée; or, le premier membre d'une équation en involution pouvant toujours être mis sous la forme (8), sa structure, par rapport aux dérivées d'ordre supérieur, est beaucoup plus simple que celle d'un invariant; il s'ensuit que l'équation aux dérivées partielles à intégrer se ramène aussi à une forme plus simple.

Ce fait sera, d'ailleurs, mis en évidence d'une manière beaucoup plus nette dans le Chapitre suivant, au sujet des équations de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

([1]) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, 1er Mémoire.

([2]) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 152.

6. Nous avons constamment supposé, jusqu'ici, que l'ordre de l'invariant ou de l'équation en involution considérés était supérieur à trois. Lorsque cet ordre est inférieur ou égal à trois, les raisonnements déjà faits ne s'appliquent plus et les résultats sont notablement modifiés; mais, comme il est toujours possible, au moyen d'un nombre fini d'opérations, de voir si une équation donnée $r+f=0$ admet un invariant d'ordre inférieur ou égal à trois, les modifications en question n'ont théoriquement qu'une importance tout à fait secondaire.

Supposons, par exemple, qu'on connaisse une équation en involution avec la proposée du troisième ordre, elle sera de la forme

$$(21)\qquad \varphi = p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u(x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{0,1}, p_{0,2}),$$

avec la condition

$$(22)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) = 0,$$

qui doit être vérifiée identiquement lorsqu'on y fait $p_{1,2} = -m_1 p_{0,3} - u$.

Or, on a ici

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = p_{0,3}\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + \frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} p_{1,2} - \left[\frac{df}{dy}\right]\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}} + \left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = p_{0,3}\left[\frac{dm_1}{dy}\right] + \frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} p_{0,3} + \frac{\partial u}{\partial p_{1,1}} p_{1,2} + \left(\frac{du}{dy}\right);$$

en outre, m_1 et m_2 étant fonctions des dérivées du second ordre, on a

$$\left[\frac{dm_1}{dx}\right] = \frac{\partial m_1}{\partial p_{0,2}} p_{1,2} - \frac{\partial m_1}{\partial p_{1,1}}\left[\frac{df}{dy}\right] + \left(\frac{dm_1}{dx}\right),$$

$$\left[\frac{dm_1}{dy}\right] = \frac{\partial m_1}{\partial p_{0,2}} p_{0,3} + \frac{\partial m_1}{\partial p_{1,1}} p_{1,2} + \left(\frac{dm_1}{dy}\right).$$

Enfin, on a vu précédemment qu'on a

$$\left[\frac{df}{dy}\right] = \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,3} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,2} + \mathrm{H},$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) = p_{0,3}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 p_{0,3} p_{1,2} \frac{\partial^2 f}{\partial s\, \partial t} + p_{1,2}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \mathrm{E} p_{0,3} + \mathrm{F} p_{1,2} + \mathrm{G}.$$

en posant

$$E=\left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{\partial H}{\partial t},\qquad F=\left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial s}\right)+\frac{\partial H}{\partial s},\qquad G=\left(\frac{dH}{dy}\right).$$

En transportant toutes ces expressions dans l'équation (21), on obtient au premier membre un polynome du second degré en $p_{0,3}$, $p_{1,2}$. Si l'on fait alors $p_{1,2}=-m_1 p_{0,3}-u$, on constate facilement que le terme en $p_{0,3}^2$ est identiquement nul, en vertu de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial s}(m_1 m_2)=\frac{\partial}{\partial t}(m_1+m_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}.$$

En égalant à zéro le coefficient de $p_{0,3}$, on obtient l'équation

$$u\left(\frac{\partial m_1}{\partial s}m_1-\frac{\partial m_1}{\partial t}\right)+\left(\frac{dm_1}{dx}\right)+m_2\left(\frac{dm_1}{dy}\right)+m_2\frac{\partial u}{\partial p_{0,2}}-\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial m_1}{\partial s}H-m_1\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,2}}-m_1\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\right)+2u\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}-2m_1 u\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-E+Fm_1=0,$$

qui est de la forme

$$(23)\qquad (m_2-m_1)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,2}}-m_1\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\right)=uI+K,$$

en posant

$$I=m_1\frac{\partial m_1}{\partial s}-2m_2\frac{\partial m_1}{\partial s}+\frac{\partial m_1}{\partial t},$$
$$K=E-Fm_1-\left(\frac{dm_1}{dx}\right)-m_2\left(\frac{dm_1}{dy}\right)+\frac{\partial m_1}{\partial s}H.$$

Cela posé, supposons encore qu'on se déplace sur une caractéristique du troisième ordre du système (II); dans ces conditions φ devient une fonction de la seule variable x dont la dérivée est, comme dans le cas général,

$$\frac{d\varphi}{dx}=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+m_2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)-\left(\frac{d^3 f}{dy^3}\right),$$

remplaçons dans le second membre $p_{1,2}$ par $\varphi-m_1 p_{0,3}-u$; on obtiendra, dans ce cas, un polynome du second degré en φ, le terme indépendant de φ étant identiquement nul d'après un raisonnement déjà fait. En faisant le calcul, on trouve facilement

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi\left[p_{0,3}\left(\frac{\partial m_1}{\partial t} - m_1\frac{\partial m_1}{\partial s}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} - m_1\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}} \right.$$
$$\left. - 2p_{0,3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial s} + 2(m_1 p_{0,3} + u)\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \mathrm{F}\right] - \varphi^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}.$$

Pour obtenir une formule analogue à celle du cas général, il faudra remplacer dans l'expression précédente la quantité $\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} - m_1\frac{\partial u}{\partial p_{1,1}}\right)$ par sa valeur tirée de l'équation (23), puis u par $(\varphi - p_{1,2} - m_1 p_{0,3})$.

On constate alors, sans difficulté, que l'équation précédente se met sous la forme

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi(3\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C}\varphi^2.$$

A et B conservant la même signification que précédemment, et en posant

$$\mathrm{C} = \frac{1}{m_2 - m_1}\left(m_2\frac{\partial m_2}{\partial s} - \frac{\partial m_2}{\partial t}\right).$$

Cette formule diffère de la formule (14) par la présence du terme $\mathrm{C}\varphi^2$. On peut en tirer encore des conséquences intéressantes au point de vue de la recherche des invariants. Posons $-\frac{1}{\varphi} = \lambda$; l'équation précédente prend alors la forme

$$\frac{d\lambda}{dx} = \lambda(3\mathrm{A} + \mathrm{B}) - \mathrm{C}.$$

Si l'on connaît deux équations en involution du troisième ordre mises sous la forme (21), soient $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, en appelant λ_1 et λ_2 les inverses des premiers membres, on aura, sur toute caractéristique de l'équation proposée qui n'est pas située sur une surface intégrale de $\varphi_1 = 0$ ou $\varphi_2 = 0$,

$$\frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{dx} = (\lambda_1 - \lambda_2)(3\mathrm{A} + \mathrm{B}),$$

la quantité $(\lambda_1 - \lambda_2)$ jouera donc, dans la recherche des invariants, le même rôle que les premiers membres des équations en involution d'ordre supérieur à trois, puisqu'elle satisfait à une équation de la forme (14); au point de vue de la recherche générale des invariants, la connaissance de deux équations en involution du troisième ordre, équivaut à celle d'une équation en involution d'ordre supérieur à trois.

En particulier, si l'on connaît trois équations en involution, mises sous la forme (21), soient $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, en appelant $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les inverses des premiers membres, on voit immédiatement que l'expression $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}$ est un invariant du troisième ordre pour les caractéristiques du système (II). Cet invariant peut se mettre sous la forme équivalente

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_3} \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = k;$$

or on a

$$\varphi_1 = p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u_1, \qquad \varphi_2 = p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u_2, \qquad \varphi_3 = p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u_3;$$

on peut donc écrire l'invariant précédent sous la forme

$$\frac{p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u_3}{p_{1,2} + m_1 p_{0,3} + u_2} \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3} = k, \tag{24}$$

Réciproquement, étant donné un invariant du troisième ordre

$$\pi(x, y, z, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{1,0}, p_{1,1}, p_{1,2}) = h,$$

en considérant trois valeurs h_1, h_2, h_3, on en déduira trois équations en involution φ_1, φ_2, φ_3, qui permettront de mettre l'invariant considéré sous la forme (24). Donc :

Tout invariant du troisième ordre peut se mettre sous la forme (24). Cette forme n'est plus linéaire par rapport aux dérivées d'ordre supérieur.

7. Dans le cas où $n \leqq 2$, les résultats sont tout à fait différents. En particulier, une équation en involution du second ordre étant mise sous la forme (8)

$$\varphi = p_{1,1} + \psi(x, y, z, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{1,0}),$$

ψ satisfait toujours à l'équation $\frac{\partial \psi}{\partial p_{0,2}} = m_1$; mais, m_1 dépendant des dérivées du second ordre, on ne peut plus en conclure que ψ est linéaire par rapport à $p_{0,2}$.

Les raisonnements précédents doivent donc être complètement modifiés dans ce cas. Comme nous avons surtout en vue la recherche générale des invariants des caractéristiques d'une équation du second ordre et qu'il est facile de voir si une équation donnée admet des invariants d'ordre inférieur ou égal à deux, nous laisserons cette étude de côté.

8. Il est bien clair que tout ce qui a été dit pour les invariants relatifs au système (II) de caractéristiques peut se répéter au sujet du système (I); il suffit de permuter le rôle de m_1 et m_2 dans les raisonnements et de remplacer les équations en involution du système (A) par celles du système (B). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si une équation $r+f=0$ forme un système en involution avec quatre équations distinctes du système (A) *et quatre équations du système* (B), *ces équations étant toutes d'ordre supérieur à trois, chaque système de caractéristiques admet deux invariants distincts et, par suite, l'équation considérée admet une intégrale générale de la première classe.*

On peut remarquer, d'ailleurs, que deux équations en involution du troisième ordre jouent le rôle d'une seule équation d'ordre supérieur et il est facile de modifier dans ce sens l'énoncé précédent.

CHAPITRE II.

LES INVARIANTS DES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS DE LA FORME $s=f(x, y, z, p, q)$.

1. On peut ramener, ainsi que nous l'avons remarqué, une équation de la forme $s=f(x, y, z, p, q)$ à la forme générale

$$r+f(x, y, z, p, q, s, t)=0;$$

mais comme les raisonnements et les résultats sont particulièrement simples dans ce cas, nous étudierons directement la forme des invariants des caractéristiques de cette équation.

Remarquons tout d'abord que l'équation

$$(1) \qquad s = f(x, y, z, p, q)$$

permet d'exprimer toutes les dérivées $\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$ en fonction de celles de ces dérivées où l'un des indices i ou k est nul [1], c'est-à-dire, d'une manière plus précise, en fonction de x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\ldots$, $\frac{\partial^i z}{\partial x^i}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\ldots$, $\frac{\partial^k z}{\partial y^k}$.

Nous poserons, pour simplifier les notations,

$$\frac{\partial^i z}{\partial x^i} = p_i, \qquad \frac{\partial^k z}{\partial y^k} = q_k,$$

et nous désignerons par $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f par rapport à x où l'on a exprimé toutes les dérivées partielles de z en fonction de x, y, z, p_1, $\ldots$ p_n, q_1, en partant de la relation (1); on peut immédiatement remarquer qu'on a

$$(2) \qquad \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = \frac{\partial f}{\partial p} p_{n+1} + F_n(x, y, z, q_1, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Les caractéristiques de l'équation (1) sont définies par les équations $x =$ const. ou $y =$ const. Nous appellerons *système* (I) de caractéristiques, le système correspondant à $x =$ const. et *système* (II), celui qui correspond à $y =$ const.

On connaît donc toujours un invariant pour chacun des deux systèmes de caractéristiques. Pour qu'on puisse intégrer l'équation par la méthode de M. Darboux, il faut et il suffit qu'il existe un deuxième invariant pour l'un des systèmes de caractéristiques; s'il existe un deuxième invariant pour chacun des deux systèmes, la méthode de M. Darboux réussira pour chacun de ces systèmes et l'intégrale générale de l'équation sera de la première classe.

---

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 104.

Considérons un invariant du système (I); il est facile de voir que cet invariant sera de la forme $\varphi(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ s'il est d'ordre n (1). Dans ces conditions, il est nécessaire et suffisant pour que φ soit un invariant d'ordre n, que l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} + f \frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = 0$$

soit vérifiée *identiquement*.

Nous voyons qu'il n'y a pas d'invariant d'ordre zéro, distinct de l'invariant x connu, car si φ est d'ordre zéro, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

et par suite

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

On sait, d'autre part (2), que φ peut toujours se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \varphi \equiv A(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1}) p_n + B(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1}).$$

Si nous portons cette expression dans l'équation (3), en tenant compte de la relation (2), on peut égaler à zéro le coefficient de p_n et le terme indépendant de p_n:

$$(5) \qquad \frac{\partial A}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A}{\partial z} + f \frac{\partial A}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial A}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial A}{\partial p_{n-1}} + A \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial B}{\partial y} + q_1 \frac{\partial B}{\partial z} + f \frac{\partial B}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial B}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial B}{\partial p_{n-1}} + A F_{n-1} = 0.$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que $\varphi = A p_n + B$ soit un invariant d'ordre n, du système (I).

2. Nous allons, maintenant, établir la condition pour qu'une équation aux dérivées partielles forme avec (1) un système en involution.

---

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 106.

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899: Mémoire de M. Goursat, p. 163.

Tout d'abord, cette équation ne doit dépendre que de $x, y, z, p_1 \dots p_m$ ou de $x, y, z, q_1 \dots q_m$ (¹); nous dirons qu'elle correspond au système (I) de caractéristiques dans le premier cas, au système (II) dans le deuxième. Prenons une équation du système (I); si elle est d'ordre m, on pourra la résoudre par rapport à p_m et l'écrire sous la forme

$$(7) \qquad p_m + \psi(x, y, z, p_1, \dots, p_{m-1}) = 0,$$

que nous appellerons *forme réduite*. Dans ces conditions, on doit avoir, en supposant $m > 1$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} + f \frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \dots + \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

en tenant compte de l'équation (7) elle-même. Comme cette dernière équation ne contient qu'un seul terme en p_m, on devra donc avoir identiquement, en appelant F_{m-1} la fonction correspondante à F_n dans la formule (2),

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} + f \frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \dots + \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} + F_{m-1} = \psi \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Cette condition se met sous une forme simple, en ajoutant aux deux membres le terme $p_m \dfrac{\partial f}{\partial p_1}$,

$$(8) \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} + f \frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \dots + \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) = (p_m + \psi)\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Pour que l'équation (7) forme avec (1) un système en involution, il faut et il suffit que la condition (8) soit vérifiée identiquement.

3. Cela posé, considérons les équations (5) et (6) qui déterminent A et B, et posons $B = \theta A$; comme $A \neq 0$, par hypothèse, on constate facilement, en tenant compte de la relation (5), que l'équation (6) prend la forme

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\theta}{\partial z} + f \frac{\partial\theta}{\partial p_1} + \dots + \left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-1}} + F_{n-1} = \theta \frac{\partial f}{\partial p_1}$$

(¹) Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. II, p. 106.

ou encore, en ajoutant $p_n \frac{\partial f}{\partial p_1}$ aux deux membres,

$$(9)\quad \frac{\partial \theta}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + f \frac{\partial \theta}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \theta) \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Ce qui montre que l'équation $p_n + \theta = 0$ forme avec la proposée un système en involution. D'autre part, M. Goursat a déjà montré (¹) que de la relation (5) on déduit, en appelant m l'ordre maximum des dérivées entrant effectivement dans le terme A, et en supposant $m > 1$,

$$A = \frac{X(x)}{p_m + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{m-1})},$$

X, étant une fonction de la seule variable x, est donc lui-même un invariant et l'on peut prendre $X = 1$; en outre, $p_m + \psi$ vérifie identiquement la condition (8), ce qui prouve que l'équation $p_m + \psi = 0$ forme également un système en involution avec l'équation (1). On a donc le résultat suivant :

Tout invariant du système (I), *dont le terme* A *dépend des dérivées d'ordre supérieur à* 1 *est de la forme* $\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}$, $p_n + \theta = 0$ *et* $p_m + \psi = 0$ *étant deux équations formant chacune avec l'équation* (1) *un système en involution.*

Réciproquement : Si l'on a deux équations mises sous forme réduite $p_m + \theta = 0$ *et* $p_m + \psi = 0$ *formant chacune avec l'équation* (1) *un système en involution, l'expression* $\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}$ *est un invariant pour le système* (I) *de caractéristiques, en supposant toutefois m et n supérieurs à l'unité.*

En effet, si $m < n$, par exemple, en posant $A = \frac{1}{p_m + \psi}$ et $B = A\theta$, l'expression $Ap_n + B$ prend la forme indiquée, et les équations (5) et (6) qui sont équivalentes à (8) et (9) sont évidemment vérifiées identiquement.

Si l'on avait $m = n$, on pourrait voir facilement que l'équation (3) est encore vérifiée dans ce cas pour $\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}$, mais tous ces résultats

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. I, p. 461.

découlent de l'interprétation géométrique de l'équation (8) : lorsqu'on se déplace sur une caractéristique $x = \text{const.}$, toutes les quantités z, p_1, p_2, ..., p_m, q_1 sont des fonctions de la seule variable y; $p_m + \psi$ devient aussi une fonction de y dont la dérivée a pour expression le premier membre de l'équation (8); cette équation exprime donc que, sur toute caractéristique de système (I), on a

$$\frac{d}{dx}\log(p_m + \psi) = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Le second membre ne dépend que de l'équation proposée et non de ψ; si l'on connaît deux équations en involution avec la proposée et irréductibles, on aura donc sur toute caractéristique du système (I),

$$\frac{d}{dx}\mathrm{L}(p_n + \theta) - \frac{d}{dx}\mathrm{L}(p_m + \psi) = 0,$$

c'est-à-dire que l'expression $\dfrac{p_n + \theta}{p_m + \psi}$ est un invariant.

4. Supposons maintenant que A ne dépende pas des dérivées d'ordre supérieur à 1. En posant toujours $\mathrm{B} = \mathrm{A}\theta$, θ sera toujours déterminé par une équation de la forme (9); mais A sera déterminé par l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} + q_1\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} + \mathrm{A}\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{10}$$

Posons $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\mathrm{A}_1}$, on aura identiquement

$$\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial p_1} = \mathrm{A}_1\frac{\partial f}{\partial p_1}. \tag{11}$$

Cette condition montre que la relation $\dfrac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial y} + q_1\dfrac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z} + f\dfrac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial p_1} = 0$ est une conséquence de $\mathrm{A}_1 = 0$: or, c'est là précisément la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\mathrm{A}_1 = 0$ forme un système en involution avec l'équation (1); mais, dans ce cas, A_1 n'est plus le premier membre d'une équation quelconque du premier ordre en involution avec la proposée : il faut, en outre, que la condition (11) soit vérifiée identiquement.

Enfin, si l'on peut trouver une fonction $\mathrm{A}_1(x, y, z)$ indépendante des dérivées et vérifiant identiquement la relation,

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} = A_1 \frac{\partial f}{\partial p_1}, \tag{12}$$

tout invariant d'ordre $n > 1$ pourra se mettre sous la forme $\varphi = \frac{p_n + \theta}{A_1(x, y, z)}$ et réciproquement, dès qu'on connaîtra une équation irréductible $p_n + \theta = 0$, formant avec la proposée un système en involution, on en déduira un invariant $\varphi = \frac{p_n + \theta}{A_1}$.

5. Dans les raisonnements précédents, nous avons écarté le cas où l'invariant serait du premier ordre. Nous allons voir qu'il n'y a rien de changé dans ce cas; en effet, l'équation (1) admettra un invariant de la forme $s = A(x, y, z)p_1 + B(x, y, z)$ si l'on a identiquement

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y} p_1 + \frac{\partial B}{\partial y}\right) + q_1\left(\frac{\partial A}{\partial z} p_1 + \frac{\partial B}{\partial z}\right) + fA = 0. \tag{13}$$

L'équation (1) doit donc être nécessairement de la forme

$$s = f = \alpha(x, y, z)p_1 q_1 + \beta(x, y, z)p_1 + \gamma(x, y, z)q_1 + \delta(x, y, z). \tag{14}$$

De l'identité (13) on tire

$$\frac{\partial A}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A}{\partial z} + A(\alpha q_1 + \beta) = 0.$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} + q_1 \frac{\partial B}{\partial z} + A(\gamma q_1 + \delta) = 0.$$

Si l'on pose encore $A = \frac{1}{A_1}$, en remarquant que, dans ce cas, $\frac{\partial f}{\partial p_1} = \alpha q_1 + \beta$, on retrouve les conditions (12).

Si l'on pose $B = A\theta$, on peut mettre la deuxième des relations précédentes sous la forme

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + f = (p_1 + \theta)\frac{\partial f}{\partial p_1}. \tag{15}$$

C'est une équation de la forme (9), où l'on aurait fait $n = 1$. D'autre part dans le cas où f est de la forme (14), la condition pour que l'équation $p + \theta(x, y, z) = 0$ forme avec (1) un système en involution, peut se mettre sous la forme (15), ainsi qu'il est facile de le vérifier.

Donc les résultats énoncés dans le paragraphe précédent s'étendent sans aucun changement au cas où $n = 1$.

6. En résumé, d'une manière précise, pour trouver un invariant de l'équation proposée, différent de x, on procédera de la manière suivante :

On cherchera d'abord s'il existe une fonction $A_1(x, y, z, p)$ vérifiant identiquement l'une des équations (11) ou (12) ; s'il en est ainsi il ne restera plus qu'à chercher une équation différente de $A_1 = 0$ et formant avec (1), un système en involution : en mettant cette équation sous la forme réduite $p_n + \theta = 0$ on aura un invariant

$$\varphi = \frac{p_n + \theta}{A_1}.$$

S'il n'existe pas de quantité A_1 vérifiant les conditions précédentes, on cherchera deux équations d'ordre supérieur à 1 et formant avec la proposée des systèmes en involution. En les mettant sous la forme réduite $p_n + \theta = 0$ et $p_m + \psi = 0$, on aura un invariant

$$\varphi = \frac{p_n + \theta}{p_m + \psi}.$$

7. Il est facile de trouver toutes les équations pour lesquelles il existe une fonction $A_1(x, y, z)$ vérifiant identiquement la condition (12).

En posant $A_1 = e^{u(x,y,z)}$ on tire en effet de cette relation

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où, en intégrant par rapport à p,

$$f = \frac{\partial u}{\partial z} pq + \frac{\partial u}{\partial y} p + v(x, y, z, q).$$

Étant donnée une équation $s = f$, correspondant à la forme précédente du second membre, il suffira de connaître une seule équation en involution pour en déduire un invariant.

Ce résultat s'applique aux équations linéaires,

$$s = a(x, y)p + b(x, y)q + c(x, y)z + d(x, y),$$

étudiées par Laplace; on peut dire, par conséquent : *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation linéaire*

$$s = ap + bq + cz + d$$

s'intègre par la méthode de Laplace, est qu'il existe une autre équation aux dérivées partielles formant avec celle-ci un système en involution. Cette remarque avait déjà été faite dans ce cas particulier par M. Goursat([1]); on voit qu'elle se rattache à une proposition beaucoup plus générale.

En particulier, si l'on a $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$, on peut toujours prendre $A_1 = 1$.

Si f est de la forme $f = u(x, p)v(x, y, z, q)$, l'équation (11) sera identiquement vérifiée en prenant $A = u(x, p)$: il suffira donc encore de connaître une seule équation en involution avec la proposée, d'ordre supérieur à l'unité, pour en déduire un invariant.

8. Nous allons maintenant formuler deux remarques dont l'application simplifie considérablement les calculs dans la recherche des invariants de l'équation (1). Nous aurons d'ailleurs souvent l'occasion d'appliquer ces remarques dans le Chapitre suivant.

Remarque I. — Soit m l'ordre de la fonction $A_1(x, y, z, p_1, p_2, \ldots)$ d'ordre le plus petit qui vérifie identiquement une relation de la forme

$$(16)\quad \frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + f\frac{\partial A_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial A_1}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)\frac{\partial A_1}{\partial p_m} = A_1\frac{\partial f}{\partial p_1},$$

c'est-à-dire de la fonction A_1 qu'on peut prendre comme dénominateur de l'invariant cherché; si l'on sait d'autre part qu'il existe une relation de la forme

$$(17)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q_1\frac{\partial \lambda}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial p_k} + i\lambda\frac{\partial f}{\partial p_1} + \varphi(x, y, z, p_1, \ldots, p_k) \equiv 0, \end{aligned}$$

([1]) *Leçons sur l'intégration, etc.*, t. II, p. 182.

où l'on a $k < m$, $\frac{\partial^h \varphi}{\partial p_k^h} \equiv 0$, i étant un nombre entier, positif, négatif ou nul.

Je dis que, si $h + i \neq 0$, on aura aussi $\frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} \equiv 0$, c'est-à-dire que λ et φ sont deux polynomes de même degré $h - 1$ par rapport à la variable p_k; si $h + i = 0$, λ est un polynome de degré h, le premier terme étant $X(x) p_k^h$ et pouvant d'ailleurs être nul.

En effet, dérivons l'identité précédente h fois successivement par rapport à p_k; en posant $\frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} = \lambda'$ et en tenant compte de la relation (2), il vient

$$(18) \quad \frac{\partial \lambda'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \lambda'}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \lambda'}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial \lambda'}{\partial p_k} + (h+i) \lambda' \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0;$$

si $h + i \neq 0$, on peut poser $\lambda' = u^{-(h+i)}$ et l'équation précédente prend la forme suivante en supprimant le facteur $h + i$:

$$(19) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + f \frac{\partial u}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial u}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial u}{\partial p_k} = u \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

C'est une équation de la forme (16): comme k est inférieur à m notre hypothèse entraîne $u \equiv 0$, c'est-à-dire

$$\lambda' = \frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} \equiv 0.$$

Si $h + i = 0$ l'équation (18) montre que λ' est un invariant d'ordre au plus égal à k; or, d'après l'hypothèse, il ne peut exister d'invariant différent de x et d'ordre inférieur à $m + 1$. Donc

$$\lambda' = \frac{\partial^h \lambda}{\partial p_k^h} = X(x).$$

C. Q. F. D.

En particulier si $\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = 0$, on aura aussi

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_k} = 0,$$

sauf si $i = -1$; dans ce cas on aura

$$\lambda = X p_k + \lambda_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{k-1}).$$

Remarque II. — Conservons les hypothèses sur lesquelles repose la remarque précédente en supposant toutefois $k > m$; supposons en outre qu'il n'existe aucune autre fonction A_1 vérifiant identiquement la relation (16) et dont l'ordre soit un nombre compris entre m et $k+1$, ce qui revient à supposer que toute équation irréductible, en involution avec la proposée et d'ordre supérieur à m, est d'ordre supérieur à k.

En effectuant les mêmes opérations on trouvera encore la relation (18) : si $h+i \neq 0$, on pourra encore poser $\lambda' = u^{-h+i}$ et l'on retrouvera l'équation (19) qui a la forme (16). Cela n'est possible, dans nos hypothèses, que si l'on a

$$u = X(x) A_1,$$

X pouvant d'ailleurs être nul. Par conséquent λ' sera la forme

$$\lambda' = X(x) A_1^{(h+i)},$$

ce qui montre que λ sera un polynome en p_k, d'ordre h, le premier terme étant $\frac{X(x)}{A_1^{h+i}} p_k^h$.

Si $h+i=0$, l'identité (18) montre que λ' est un invariant d'ordre au plus égal à k. Or, d'après nos hypothèses, l'invariant d'ordre le plus petit sera formé en prenant A_1 comme dénominateur, et comme numérateur le premier membre de l'équation irréductible mise sous forme réduite dont l'ordre doit être supérieur à m et le plus petit possible : nous avons supposé que cet ordre était supérieur à k.

Donc, on aura forcément $\lambda' = X(x)$, X pouvant être nulle identiquement; par suite λ sera encore un polynome de degré h en p_k, le premier terme étant Xp_k^h.

Enfin, si l'on avait $k=m$, les calculs de la remarque (I) montrent que la fonction u est identique à $X(x)A_1$; en effet, si nous posons

$$A_1 = e^v, \qquad u = e^w,$$

les équations (16) et (18) prennent la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + f \frac{\partial v}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial v}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}\right) \frac{\partial v}{\partial p_m} = \frac{\partial f}{\partial p},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w}{\partial z} + f \frac{\partial w}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial w}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}\right) \frac{\partial w}{\partial p_m} = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

En retranchant membre à membre les deux relations précédentes, et en posant $\varphi = v - w$, on obtient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_m} = 0$$

qui exprime précisément que φ est un invariant d'ordre au plus égal à m; si cet invariant était différent de x, on en déduirait qu'il existe une fonction A_1 d'ordre inférieur à m, vérifiant une identité de la forme (16), ce qui est contraire à l'hypothèse; donc on a

$$\varphi \equiv v - w \equiv \operatorname{Log}\frac{A_1}{u} \equiv X(x),$$

d'où

$$u \equiv A_1 X(x),$$

X n'étant pas la même fonction que dans l'égalité précédente. Dans ce cas, on aura donc

$$\lambda' = \frac{\partial^h\lambda}{\partial p_k^h} = \frac{X(x)}{A^{h+i}}.$$

Comme A_1 dépend de p_k, λ n'est plus forcément un polynome en p_k.

9. Nous allons maintenant étudier les expressions $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ qui forment les coefficients de l'équation aux dérivées partielles (8) qui détermine les équations en involution avec l'équation proposée.

On a d'abord

$$(20)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = p_2\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1} = p_2\frac{\partial f}{\partial p_1} + H(x, y, z, p_1, q_1),$$

puis

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = p_3\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\left[\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial H}{\partial p_1}\right] + \frac{\partial H}{\partial x} + p_1\frac{\partial H}{\partial z} + f\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

qui est de la forme

$$(21)\quad \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = p_3\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + p_2\alpha(x, y, z, p_1, q_1) + \beta(x, y, z, p_1, q_1)$$

avec

$$(22)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1\, \partial x} + p_1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1\, \partial z} + f \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1\, \partial q_1} + \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \beta = \dfrac{\partial H}{\partial x} + p_1 \dfrac{\partial H}{\partial z} + f \dfrac{\partial H}{\partial q_1}; \end{cases}$$

écrivons encore

$$(23)\quad \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right) = p_4 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_3 \left[\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + 2 p_2 \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + \alpha\right] + K_3(x, y, z, p_1, q_1, p_2).$$

Cette expression est linéaire par rapport à p_3 et p_4; le coefficient de p_4 ne dépend que des dérivées du premier ordre, tandis que celui de p_3 dépend de p_2.

Je dis qu'on a, d'une manière générale,

$$(24)\quad \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = p_{n+1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_n M_n^n + p_{n-1} M_n^{n-1} + \ldots$$
$$+ p_k M_n + K_n(x, y, z, q_1, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}),$$

les coefficients M étant indépendants de $p_{n+1}, p_n, \ldots p_k$, et l'ordre maximum des dérivées contenues dans M_n^h étant $n - h + 2$.

En effet, supposons que cette propriété soit vraie jusqu'à l'ordre n inclusivement; en partant de la relation (24), on aura

$$\left(\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right) = p_{n+2} \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_{n+1} \left[\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + M_n^n\right] + p_n \left[\left(\frac{dM_n^n}{dx}\right) + M_n^{n-1}\right] + \ldots$$
$$+ p_{k+1} \left[\left(\frac{dM_n^{k+1}}{dx}\right) + M_n^k\right] + p_k \left[\left(\frac{dM_n^k}{dx}\right) + \frac{\partial K_n}{\partial p_{k-1}}\right] + \ldots.$$

Cette expression est bien de la forme

$$(24)'\quad \left(\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right) = p_{n+2} \frac{\partial f}{\partial p_1} + M_{n+1}^{n+1} p_{n+1} + M_{n+1}^n p_n + \ldots$$
$$+ p_{k+1} M_{n+1}^{k+1} + p_k M_{n+1}^k + K_{n+1}(x\, y, z, q_1, p_1, \ldots, p_{k-1})$$

et l'on a

$$M_{n+1}^{h+1} = \left(\frac{dM_n^{h+1}}{dx}\right) + M_n^h.$$

Si h est supérieur à k, M_n^{h+1} ne contient pas de dérivée d'ordre h et par suite M_{n+1}^{h+1} ne contient pas la dérivée p_{h+1}. D'autre part, l'ordre maximum des dérivées contenues dans le coefficient M_{n+1}^{h+1} d'après l'expression précédente est encore $n-h+2$ qui peut s'écrire $(n+1)-(h+1)+2$. Donc l'expression précédente est linéaire par rapport aux dérivées $p_{n+2}, \ldots, p_{k+1}$; si le terme M_n^k dépend de p_{k-1}, le coefficient M_{n+1}^k dépendra de p_k et par suite il faudra faire entrer le terme $p_k M_{n+1}^k$ dans le terme K_{n+1} afin de conserver la forme (24); mais ce fait découle aussi immédiatement de l'application de la règle $n-h+2$; en effet, puisque M_n^k dépend de p_{k-1}, on a par hypothèse

$$n-k+2 \geqq k-1,$$

donc

$$(n+1)-k+2 \geqq k,$$

ce qui montre que le coefficient M_{n+1}^k dans l'expression $(24)'$ peut dépendre de p_k et que nous devons le faire entrer dans le terme K_{n+1}.

Si au contraire, M_n^k ne dépendait pas de p_{k-1}, on a

$$n-k+2 < k-1,$$
$$(n+1)-k+2 < k,$$

et l'expression $(24)'$ est encore linéaire par rapport à p_k.

Donc la forme (24) est générale; il faudra s'arrêter au terme p_k, k étant *le plus petit nombre* qui vérifie l'inégalité

$$n+2-k < k,$$

d'où

$$k > \frac{n+2}{2};$$

si n est pair, en posant $n=2n'$ on aura $k > n'+1$, donc il faudra prendre $k=n'+2$. Si n est impair, en posant $n=2n'+1$ on aura $k > n'+\frac{3}{2}$; donc il faudra prendre encore $k=n'+2$.

Les coefficients M se calculent facilement par voie de récurrence d'après la formule

$$M_{n+1}^{h+1} = \left(\frac{dM_n^{h+1}}{dx}\right) + M_n^h.$$

Nous allons chercher l'expression du premier M_n^n dont nous aurons besoin dans la suite. On a

$$M_n^n = \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + M_{n-1}^{n-1},$$

on en tire facilement

$$M_n^n = (n-3)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + M_3^3.$$

Or, d'après la formule (23), on a

$$M_3^3 = \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + 2p_2\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + \alpha.$$

Si l'on tient compte de la valeur de α, on trouve finalement

$$M_n^n = n\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}. \tag{25}$$

Cette expression est valable pour $n > 2$.

10. Voici une première application des remarques précédentes.

Étant donnée une équation $s = f(x, y, z, p, q)$, supposons qu'il n'existe aucune fonction A_1 vérifiant identiquement l'équation (16) lorsque $m \leqq 2$: il est toujours facile de voir s'il en est ainsi. Dans ce cas, nous savons que le dénominateur d'un invariant quelconque, autre que x, du système (I), sera le premier membre de l'équation irréductible $p_m + \psi = 0$ d'ordre le plus petit possible, formant avec la proposée, un système en involution ; et l'on aura identiquement

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) \equiv (p_m + \psi)\frac{\partial f}{\partial p_1} \qquad (m > 1).$$

Cette relation, en fait, ne contient pas p_m. Dérivons les deux membres par rapport à p_{m-1}, en posant $\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} = \psi'$, il vient

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p_{m-1}} + M_{m-1}^{m-1} = 0,$$

à condition toutefois que $m - 1 > 1$, c'est-à-dire $m > 2$, ce que nous avons supposé.

Comme M_{m-1}^{m-1} est une fonction linéaire de p_2, ne dépendant pas des dérivées d'ordre supérieur à 2, et qu'il n'existe d'autre part aucune équation d'ordre inférieur à m, formant avec la proposée un système en involution, l'application de la remarque (I) montre que ψ' ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à 2 et qu'on a

$$\psi' = \psi_1(x, y, z, p_1)p_2 + \psi_2(x, y, z, p_1)$$

avec

$$(26)\qquad \frac{\partial\psi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p_1} + \psi_1\left(\frac{df}{dx}\right) + (m-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} \equiv 0.$$

De cette identité on peut tirer plusieurs conditions; en particulier on a une relation simple en égalant à zéro le coefficient de p_2 :

$$(27)\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1} + \psi_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + (m-1)\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0;$$

on peut donc énoncer le résultat suivant :

Une équation $s = f(x, y, z, p, q)$ étant donnée, si l'on a constaté que l'équation (16) *ne peut être vérifiée pour $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, ce qui est toujours possible au moyen d'un nombre fini d'opérations, pour que cette équation forme un système en involution avec une autre équation du système* (I), *il est nécessaire que f vérifie la condition* (26) *et en particulier la condition plus simple* (27).

On a donc là une condition nécessaire dont la vérification n'exige qu'un nombre fini d'opérations; on posera $\psi_1 = (m-1)\alpha(x, y, z, p_1)$ et il faudra que le système

$$\frac{\partial\alpha}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} + q_1\frac{\partial\alpha}{\partial z} + f\frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0$$

soit compatible.

On aura encore une autre condition nécessaire en égalant à zéro, le terme indépendant de p_2 dans l'identité (26)

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_2}{\partial p_1} + \psi_1\left[\frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right] + (m-1)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\,dx} + p_1\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\,\partial q_1}\right] + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0;$$

mais on ne peut appliquer cetté condition que lorsqu'on a fait la vérification de la précédente et qu'on en a tiré l'expression de la fonction ψ_1.

Dans le cas particulier où l'on aurait $\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0$, c'est-à-dire

$$f = u(x, y, z, q_1) p_1 + v(x, y, z, q_1),$$

la première condition entraînerait $\alpha \equiv 0$ et il faudrait que le système

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}$$
$$+ (m-1)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z} + (u p_1 + v)\frac{\partial u}{\partial q_1}\right] + \frac{\partial u}{\partial z} p_1 + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial q_1} = 0$$

soit compatible.

En échangeant le rôle des variables x et y, on aurait de même un criterium nécessaire pour qu'il existe une équation en involution du système (II).

11. Nous aurons besoin, dans le Chapitre suivant, d'une expression plus détaillée de certains coefficients de $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ dans le cas où f a l'une des deux formes suivantes :

$$f = a(x, y, z) p_1 + b(x, y, z) q_1 + c(x, y, z),$$
$$f = a(x, y, z) p_1 q_1.$$

Afin de n'avoir pas à revenir sur ces calculs, nous allons chercher dans ces deux cas les expressions des coefficients M dont nous aurons à nous servir.

Premier cas : $f = ap + bq + c$. — Dans ce cas on aura, d'après la formule (25),

$$M_n^n = n\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$\text{(28)} \qquad M_n^n = n\left(\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \frac{\partial a}{\partial z}\right) + \frac{\partial a}{\partial z} p_1 + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab.$$

On peut remarquer que dans ce cas M_n^n ne dépend que des dérivées du premier ordre et non de p_2 comme dans le cas général.

Nous allons calculer le coefficient M_n^{n-1} ; pour cela remarquons que l'on a

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = ap_2 + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{df}{dz} + bf = ap_2 + \mathrm{H}(x, y, z, p_1, q_1),$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = ap_3 + p_2\left[\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}\right] + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + p_1\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}.$$

Or

$$\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1} = 2\frac{\partial a}{\partial x} + 3\,p_1\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab.$$

Nous voyons que $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$ *est linéaire par rapport à* p_2 *et le coefficient de* p_2 *s'obtient en faisant* $n = 2$ *dans la formule* (28). Donc, on pourra écrire

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = ap_3 + \mathrm{M}_2^1 p_2 + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + p_1\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}\right),$$

ce qui n'arrive pas dans le cas général. Nous poserons

$$m(x, y, z, p_1\, q_1) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + p_1\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1};$$

en effectuant les calculs on trouve

$$m = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}p_1^3 + g(x, y, z, q_1)\, p_1^2 + h(x, y, z, q_1)\, p_1 + k(x, y, z, q_1).$$

En posant

$$g = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + 2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + 2a\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2},$$

$$h = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2\,q_1\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial z} + 2\frac{\partial^2 c}{\partial x\,\partial z} + 2\,a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial x}$$
$$+ 2\frac{\partial b}{\partial z}(bq_1 + c) + b\left(\frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + ab^2,$$

on aura ensuite

$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right) = ap_4 + \mathrm{M}_3^2 p_3 + p_2\left[\left(\frac{d\mathrm{M}_2^1}{dx}\right) + \frac{\partial m}{\partial p_1}\right] + \frac{\partial m}{\partial x} + p_1\frac{\partial m}{\partial z} + f\frac{\partial m}{\partial q_1}$$

qui est de la forme

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = ap_4 + \mathrm{M}_3^2 p_3 + 3\,p_2^2\frac{\partial a}{\partial z} + p_2\, n(x, y, z, p_1, q_1) + l(x, y, z, p_1, q_1)$$

en posant

$$n = \frac{\partial m}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab + 3p_1\frac{\partial a}{\partial z}\right)$$
$$+ p_1\frac{\partial}{\partial z}\left(2\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab + 3p_1\frac{\partial a}{\partial z}\right) + f\frac{\partial b}{\partial z},$$
$$l = \frac{\partial m}{\partial x} + p_1\frac{\partial m}{\partial z} + f\frac{\partial m}{\partial q_1};$$

enfin on aura

$$\left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right) = ap_5 + M_4^4 p_4 + M_4^3 p_3 + K_4(x, y, z, p_1, p_2),$$

avec

$$M_4^3 = \left(\frac{dM_3^3}{dx}\right) + 6p_2\frac{\partial a}{\partial z} + n.$$

D'une manière générale, on a

$$M_n^{n-1} = \left(\frac{dM_{n-1}^{n-1}}{dx}\right) + M_{n-1}^{n-2}.$$

On tire de cette relation de récurrence, par un procédé bien connu,

$$(29)\quad M_n^{n-1} = \left[\frac{d}{dx}(M_{n-1}^{n-1} + M_{n-2}^{n-2} + \ldots + M_3^3)\right] + 6p_2\frac{\partial a}{\partial z} + n(x, y, z, p_1, q_1),$$

$$(30)\quad M_{n-1}^{n-1} + M_{n-2}^{n-2} + \ldots + M_3^3 = \left[\frac{n(n-1)}{2} - 3\right]\left(\frac{da}{dx}\right)$$
$$+ (n-3)\left[\frac{\partial a}{\partial z}p_1 + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right],$$

d'après la formule (28). On voit que M_n^{n-1} est un polynome du premier degré en p_2 et l'on aura

$$(31)\qquad M_n^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}\frac{\partial a}{\partial z}p_2 + N_n^{n-1}(x, y, z, p_1, q_1);$$

en effectuant les calculs, on obtient

$$(32)\quad N_n^{n-1} = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}p_1^2\frac{n(n+1)}{2}$$
$$+ p_1\left[n^2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + n\left(\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial(ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right)\right] + L(x, y, z, q_1),$$

L étant une certaine fonction indépendante de p_1.

Deuxième cas : $f = a(x, y, z)p_1 q_1$. — On a tout d'abord, dans ce cas,

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = q_1\left[ap_2 + \frac{\partial a}{\partial x}p_1 + \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)p_1^2\right],$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = q_1[ap_3 + P_2^2 p_2 + I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1]$$

en posant

$$q_1 P_2^2 = M_2^2 = q_1\left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right],$$

$$I = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + a\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right),$$

$$J = 2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + 3a\frac{\partial a}{\partial x}, \qquad K = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

On voit que, dans ce cas comme dans le précédent, $\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$ est linéaire par rapport à p_2, ce qui n'arrive pas dans le cas où f est quelconque.

Ecrivons encore

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = q_1\left[ap_4 + P_3^2 p_3 + 3p_2^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R(x, y, z, p_1)p_2 + R'(x, y, z, p_1)\right]$$

où l'on a

$$q_1 P_3^3 = M_3^3 = q_1\left[3\frac{\partial a}{\partial x} + 4p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right],$$

$$R = 6 I p_1^2 + p_1\left[5J - a\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z}\right] + 3K.$$

Enfin

$$\left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right) = q_1[ap_5 + P_4^4 p_4 + P_4^3 p_3 + \ldots],$$

les termes non écrits ne contenant pas les dérivées d'ordre supérieur à deux. On a ici

$$q_1 P_4^4 = M_4^4, \qquad P_4^3 = \left(\frac{dP_3^3}{dx}\right) + 6p_2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R + ap_1 P_3^3.$$

D'une manière générale, on aura

$$\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = q_1[ap_{n+1} + p_n P_n^n + p_{n-1}P_n^{n-1} + \ldots],$$

les termes non écrits ne contenant pas de dérivée d'ordre supérieur à $n-2$, à condition qu'on ait $n>3$.

D'après la formule (25) du cas général

$$q_1 P_n^n = M_n^n = n\left(\frac{d(aq_1)}{dx}\right) + \frac{\partial a}{\partial z} p_1 q_1 + a^2 p_1 q_1,$$

d'où

$$P_n^n = n\frac{\partial a}{\partial x} + (n+1)p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right);$$

en outre, on obtient facilement la relation récurrente

$$P_n^{n-1} = \left(\frac{dP_{n-1}^{n-1}}{dx}\right) + P_{n-1}^{n-2} + ap_1 P_{n-1}^{n-1};$$

on en déduit

$$P_n^{n-1} = \left(\frac{d(P_{n-1}^{n-1} + P_{n-2}^{n-2} + \ldots + P_3^3)}{dx}\right) + ap_1(P_{n-1}^{n-1} + \ldots + P_3^3) + 6p_2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R.$$

Or

$$P_{n-1}^{n-1} + P_{n-2}^{n-2} + \ldots + P_3^3 = \left[\frac{n(n-1)}{2} - 3\right]\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left[\frac{n(n+1)}{2} - 6\right]\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right);$$

en effectuant le calcul, on trouve

$$\begin{aligned} P_n^{n-1} = {} & \frac{n(n+1)}{2} p_2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) \\ & + \frac{n(n+1)}{2} I p_1^2 + p_1\left[n^2\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + \frac{(n+1)(3n-2)}{2} a\frac{\partial a}{\partial x}\right] + \frac{n(n-1)}{2} K, \end{aligned}$$

I et K ayant toujours la même signification.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z)$.

1. Je me propose, dans ce Chapitre, d'appliquer les résultats précédents à l'équation

$$(1) \qquad s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z)$$

et, en particulier, de déterminer toutes les équations de cette forme qui admettent une intégrale générale de la première classe, au sens qui a été donné à ce terme.

Je supposerai toutefois qu'on a $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial b}{\partial z} \neq 0$; si l'on avait par exemple $\frac{\partial a}{\partial z} = 0$, un changement de variable de la forme $z' = \omega(x, y)z$ permettrait de ramener l'équation proposée à la forme

$$s = b(x, y, z)q + c(x, y, z);$$

dans ce cas les calculs sont plus compliqués et le nombre des cas à examiner est plus grand à cause de la dissymétrie de l'équation : je me bornerai à énoncer quelques résultats dans un dernier paragraphe ; lorsque a et b sont nuls, l'équation (1) a la forme $s = f(x, y, z)$ et les méthodes de calcul qui vont être développées permettent de retrouver très facilement les résultats de M. Clairin au sujet de cette équation, et de Sophus Lie au sujet de l'équation $s = f(z)$.

Nous nous bornerons donc au cas où a et b dépendent effectivement de la variable z, et nous exprimerons que chacun des deux systèmes de caractéristiques admet un deuxième invariant, autre que x ou y.

Soit φ l'invariant d'ordre minimum, autre que x, du système (1); il sera de la forme

$$\varphi = \frac{p_n + \theta(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})}{A_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_m)} \qquad (m < n).$$

D'après les résultats du Chapitre précédent, nous aurons A_1 en cherchant d'abord s'il existe une fonction $A_1(x, y, z, p_1)$ qui vérifie identiquement la relation

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial A_1}{\partial p_1} = A_1 a;$$

s'il n'en existe pas, nous savons que A_1 sera de la forme

$$A_1 = p_m + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{m-1})$$

$p_m + \psi$ étant le premier membre de l'équation irréductible d'ordre le plus petit qui forme avec la proposée un système en involution, et l'on aura identiquement

$$(\text{II})\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\dots\\ +\left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}}+\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)=(p_m+\psi)\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

On voit d'ailleurs que l'équation (I) n'a pas de solution si l'on fait $\frac{\partial A_1}{\partial p_1}=0$, car on en déduirait dans ce cas $\frac{\partial A_1}{\partial z}=0$, $\frac{\partial A_1}{\partial y}=a\,A_1$, ce qui est impossible si $\frac{\partial a}{\partial z}\neq 0$. Donc les invariants de l'équation (1) auront un dénominateur d'ordre au moins égal à l'unité.

En considérant de même l'invariant d'ordre minimum du système (II) on verrait que son dénominateur satisfait à l'une des relations (I)′ et (II)′ qu'on déduit de (I) et (II) en intervertissant le rôle des variables x et y. On aura donc simultanément l'une des conditions (I)(II) et l'une des conditions (I)′ (II)′; il y aura par suite quatre cas à distinguer correspondant aux quatre couples de relations :

(II)(II)′, (I)(II)′, (II)(I)′, (I)(I)′;

il est clair d'ailleurs que les deux cas (I)(II)′ et (II)(I)′ conduiront à des résultats symétriques par rapport à x et y. Il n'y a donc en réalité que trois cas distincts.

Nous allons examiner séparément ces trois cas.

2. *Premier cas : Conditions* (II) *et* (II)′. — Considérons la relation (II),

$$(2)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\dots\\ +\left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}}+\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)=(p_m+\psi)\frac{\partial f}{\partial p_1}\qquad (m>1).$$

Par hypothèse, il n'existe aucune fonction A_1 d'ordre inférieur à m, et vérifiant une relation de la forme

$$(3)\qquad \frac{\partial A_1}{\partial y}+q_1\frac{\partial A_1}{\partial z}+f\frac{\partial A_1}{\partial p_1}+\dots+\left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial A_1}{\partial p_k}=A_1\frac{\partial f}{\partial p_1},$$

sans quoi on pourrait prendre A_1 comme dénominateur de l'invariant au lieu de $p_m + \psi$.

Dérivons l'identité (2) par rapport à p_{m-1}, en supposant $m > 2$ et en posant $\frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}} = \psi'$, il vient

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial p_{m-1}} + M_{m-1}^{m-1} = 0.$$

Nous avons vu que M_{m-1}^{m-1}, dans le cas où f est linéaire par rapport à p et q, ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à 1; la remarque (I) du Chapitre précédent, montre que ψ' ne peut pas dépendre des dérivées d'ordre supérieur à 1, et l'on a

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p_1} + M_{m-1}^{m-1} = 0,$$

ou encore, en remplaçant M_{m-1}^{m-1} par sa valeur,

$$(4)\quad \frac{\partial\psi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p_1} + (m-1)\frac{\partial a}{\partial x} + mp_1\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Supposons maintenant $m = 2$, cas que nous avons écarté : l'équation (2) s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) = (p_2+\psi)\frac{\partial f}{\partial p_1}$$

ou encore

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) = \psi\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Posons $\frac{\partial\psi}{\partial p_1} = \psi'$ et dérivons par rapport à p_1 l'identité précédente; on obtient

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} + 2p_1\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Cette équation n'est autre que l'équation (4) où l'on aurait fait $m = 2$. Dans tous les cas, on a donc la relation (4). Appliquons à cette relation la remarque (I) : ici $i = 0$ et $h = 2$, donc $h + i \neq 0$

et l'on en déduit que ψ' est de la forme

$$\psi' = \lambda(x, y, z)p_1 + \mu(x, y, z),$$

d'où l'identité

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}p_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y} + q_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z}p_1 + \frac{\partial\mu}{\partial z}\right] + (ap_1 + bq_1 + c)\lambda$$
$$+ (m-1)\frac{\partial a}{\partial x} + mp_1\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0,$$

et l'on en déduit

(5) $$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} + a\lambda + m\frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

(6) $$\frac{\partial\mu}{\partial z} + b\lambda + \frac{\partial b}{\partial z} = 0,$$

(7) $$\frac{\partial\mu}{\partial y} + c\lambda + (m-1)\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Remarquons maintenant que $\frac{\partial a}{\partial z}$ étant différent de zéro, λ ne peut pas être nul et l'on tire de l'équation (5), en intégrant

$$a = \alpha(x, y)\, e^{\omega(x,y)z} - \frac{\partial \log\omega}{\partial y} \qquad (\alpha \neq 0),$$

avec

$$\lambda = -m\,\omega(x, y).$$

On aurait de même, en raisonnant sur l'équation (II)' comme nous l'avons fait sur l'équation (II),

$$b = \beta(x, y)\, e^{\omega_1(x,y)z} - \frac{\partial \log\omega_1}{\partial x} \qquad (\beta \neq 0).$$

Écrivons maintenant la condition d'intégrabilité entre les équations (6) et (7) en y remplaçant λ par $-m\omega$; il vient

(8) $$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + (m-1)\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z} + m\omega\frac{\partial b}{\partial y}$$
$$= m\omega\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial^2 b}{\partial z\,\partial y} - mb\frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

Nous tirerons de même de l'équation (II)' la condition symétrique

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}+(m_1-1)\frac{\partial^2 b}{\partial y\,\partial z}+a\frac{\partial b}{\partial z}+b\frac{\partial a}{\partial z}+m_1\omega_1\frac{\partial a}{\partial x}$$
$$=m_1\omega_1\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x}-m_1 a\frac{\partial \omega_1}{\partial x},$$

en appelant m_1 l'ordre de l'expression $q_{m_1}+\psi_1$ qui satisfait à la relation (II)$'$.

Retranchons les égalités (8) et (9) membre à membre, il vient

$$(10)\qquad mb\frac{\partial\omega}{\partial y}-m_1 a\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+m\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x}$$
$$+m\omega\frac{\partial b}{\partial y}-m_1\frac{\partial^2 b}{\partial z\,\partial y}-m_1\omega_1\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial c}{\partial z}(m\omega-m_1\omega_1).$$

3. Supposons d'abord $m\omega-m_1\omega_1\neq 0$; si l'on remplace a et b par les expressions trouvées, on voit qu'on peut tirer de là une relation de la forme

$$(11)\qquad \frac{\partial c}{\partial z}=(Cz+C')+(C_1z+C_1')e^{\omega z}+(C_2z+C_2')e^{\omega_1 z},$$

les fonctions C étant indépendantes de z. Portons cette expression dans l'équation (8) par exemple : nous devons obtenir une identité en z. En particulier si $\omega+\omega_1\neq 0$, le terme en $e^{(\omega+\omega_1)z}$ doit avoir un coefficient nul; or ce coefficient est très facile à calculer; il a pour expression $\alpha\beta(\omega+\omega_1)$; comme nous avons supposé $\alpha\beta\neq 0$, il faut donc nécessairement

$$\omega+\omega_1=0.$$

Dans ces conditions, si l'on pose $z'=\omega z$, l'équation du second ordre proposée conserve la même forme et l'on a

$$\omega=1,\qquad \omega_1=-1.$$

Par suite

$$a=\alpha(x,y)e^{z},\qquad b=\beta(x,y)e^{-z},$$

et la relation (10) s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}e^{z}+\frac{\partial\beta}{\partial y}e^{-z},$$

d'où, en intégrant,

$$c = \frac{\partial\alpha}{\partial x}e^{z} - \frac{\partial\beta}{\partial y}e^{-z} + \mathrm{K}(x, y).$$

L'équation proposée peut donc s'écrire

$$s = \alpha e^{z} p + \beta e^{-z} q + \frac{\partial\alpha}{\partial x}e^{z} - \frac{\partial\beta}{\partial y}e^{-z} + \mathrm{K}(x, y)$$

ou encore

$$s = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha e^{z}) - \frac{\partial}{\partial y}(\beta e^{-z}) + \mathrm{K}(x, y).$$

Une transformation de la forme $z' = z + \theta(x, y)$ permet de faire disparaître le terme K en posant $\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = -\mathrm{K}$. On aura ainsi, en changeant la signification de α et β,

$$s = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha e^{z}) - \frac{\partial}{\partial y}(\beta e^{-z}).$$

C'est là précisément le type des équations trouvées par M. Moutard. On sait que ces équations se ramènent à une équation linéaire par une transformation simple. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce résultat.

4. Nous avons raisonné au sujet de l'équation (10) dans l'hypothèse où $m\omega - m_1\omega_1 \neq 0$; supposons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi et qu'on ait

$$\frac{\omega}{m_1} = \frac{\omega_1}{m} = \theta(x, y).$$

Nous pouvons poser, sans changer la forme de l'équation proposée : $z' = z\theta$, ce qui revient à prendre

$$\omega = m_1, \qquad \omega_1 = m$$

et par suite

$$a = \alpha(x, y)\, e^{m_1 z}, \qquad b = \beta(x, y)\, e^{mz}.$$

Dans ce cas, les conditions (8) et (9) sont identiques et se ramènent à la suivante :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - mm_1\frac{\partial c}{\partial z} + (m + m_1)ab + m_1(m - 1)\frac{\partial a}{\partial x} + m(m_1 - 1)\frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

en remplaçant a et b par leurs valeurs, on intègre facilement cette équation différentielle, c étant la fonction inconnue; et l'on obtient

$$(12)\qquad c = \frac{1}{m_1}\frac{\partial \alpha}{\partial x}e^{m_1 z} + \frac{1}{m}\frac{\partial \beta}{\partial y}e^{mz} + \frac{\alpha\beta}{mm_1 - (m+m_1)}e^{(m+m_1)z} + \mathrm{H}(x,y)\,e^{mm_1 z} + \mathrm{K}(x,y),$$

K et H étant deux fonctions arbitraires de x et y.

On a dû supposer, il est vrai, $mm_1 - (m+m_1) \neq 0$; on voit sans peine que l'égalité

$$m + m_1 = mm_1$$

n'est possible en nombres entiers différents de zéro que pour

$$m = m_1 = 2.$$

Nous étudierons à part ce cas en dernier lieu et nous supposerons pour l'instant

$$m > 2, \qquad m_1 > 2.$$

Cela étant, les équations (5), (6), (7) sont compatibles et la condition nécessaire (4) est insuffisante pour résoudre complètement le problème. On en tire simplement

$$\lambda = -mm_1, \qquad \mu = b(m_1 - 1) + \nu(x,y),$$

ν étant une fonction qui doit vérifier l'équation (7).

Nous obtiendrons des conditions nouvelles en repartant de l'équation (2), sachant qu'on a

$$(13)\qquad \psi' = \frac{\partial \psi}{\partial p_{m-1}} = -mm_1 p_1 + b(m_1 - 1) + \nu(x,y).$$

Dans cette équation (2) les termes en p_m et p_{m-1} disparaissent; nous allons considérer les termes en p_{m-2}; mais comme la manière dont p_{m-2} entre dans l'expression $\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)$ dépend essentiellement de la valeur de m, il faudra faire des hypothèses sur cette valeur.

5. Supposons d'abord $m > 4$, c'est-à-dire $m - 1 > 3$. Dans ces conditions, nous savons que $\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)$ est une expression linéaire par rapport à p_m, p_{m-1}, p_{m-2}. On aura en outre

$$\psi = \psi' p_{m-1} + \psi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{m-2})$$

et l'équation (2) peut s'écrire, en supprimant les termes en p_m et p_{m-1},

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{m-3}f}{dx^{m-3}}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial p_{m-2}} + \psi'[\mathrm{M}_{m-2}^{m-2} p_{m-2} + \ldots] + \mathrm{M}_{m-1}^{m-2} p_{m-2} + \ldots = \frac{\partial f}{\partial p_1}\psi_1.$$

les termes non écrits ne renfermant que des dérivées d'ordre inférieur à $m - 2$.

Posons $\psi'_1 = \dfrac{\partial\psi_1}{\partial p_{m-2}}$ et dérivons par rapport à p_{m-2} la relation précédente; il vient

$$(14)\qquad \frac{\partial\psi'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{m-3}f}{dx^{m-3}}\right)\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_{m-2}} + (\psi'\mathrm{M}_{m-2}^{m-2} + \mathrm{M}_{m-1}^{m-2}) = 0.$$

Le terme $\psi'\mathrm{M}_{m-2}^{m-2} + \mathrm{M}_{m-1}^{m-2}$ ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à deux; la remarque (I) nous permet d'en conclure que ψ'_1 ne dépend pas non plus de ces dérivées; en outre, le dernier terme étant un polynome du premier degré en p_2, il en sera de même de ψ'_1, d'après la remarque en question. On peut donc écrire

$$\psi'_1 = \psi_2(x, y, z, p_1)p_2 + \psi_3(x, y, z, p_1).$$

Nous avons vu d'autre part qu'on a

$$\mathrm{M}_{m-2}^{m-2} = (m-2)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\frac{\partial a}{\partial z}\right) + p_1\frac{\partial a}{\partial z} + q_1\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab,$$
$$\mathrm{M}_{m-1}^{m-2} = p_2\frac{m(m-1)}{2}\frac{\partial a}{\partial z} + \mathrm{N}_{m-1}^{m-2},$$

avec

$$(15)\quad \mathrm{N}_{m-1}^{m-2} = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\frac{m(m-1)}{2}p_1^2$$
$$+ p_1\left[(m-1)^2\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x} + (m-1)\frac{\partial(ab)}{\partial z}\right.$$
$$\left. + (m-1)\left(\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right)\right] + \mathrm{L}(x, y, z, q_1).$$

Portons ces expressions dans la relation (14) : nous devons obtenir une identité; en particulier le coefficient de p_2 doit être nul, ce qui donne

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1} + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{m(m-1)}{2} \frac{\partial a}{\partial z} = 0;$$

la remarque (I) montre encore que $\frac{\partial \psi_2}{\partial p_1} = 0$, et par suite le seul terme en q_1 dans l'équation précédente doit disparaître; on a donc

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \psi_2 a + \frac{m(m-1)}{2} \frac{\partial a}{\partial z} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \alpha \psi_2 e^{m_1 z} + \frac{m(m-1)}{2} m_1 \alpha e^{m_1 z} = 0.$$

Comme α n'est pas nul, il est nécessaire et suffisant, pour que ces relations soient vérifiées, qu'on ait

$$\psi_2 = -\frac{m m_1 (m-1)}{2}.$$

Écrivons maintenant que le terme indépendant de p_2, dans l'équation (14), est nul; en tenant compte de la valeur trouvée pour ψ_2, il vient

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \psi_3}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + f \frac{\partial \psi_3}{\partial p_1} \\ &\quad = \frac{m m_1 (m-1)}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) - \psi' M_{m-2}^{m-2} - N_{m-1}^{m-2}. \end{aligned}$$

Le second membre est un polynome du second degré en p_1; d'après la remarque (I) on doit avoir

$$\psi_3 = u(x, y, z) p_1^2 + v(x, y, z) p_1 + w(x, y, z)$$

et, en transportant cette expression dans la relation (16), on aura dans les deux membres des polynomes du second degré en p_1 qui doivent être identiques.

On en tire d'abord

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + 2au = \frac{m m_1 (m-1)}{2} \frac{\partial a}{\partial z} + m m_1 (m-1) \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{m(m-1)}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur, on constate facilement que cette égalité revient à

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad u = \frac{mm_1^2(m-1)}{2}.$$

Écrivons maintenant l'identité des termes en p_1 dans l'équation (16) :

$$\begin{aligned}
(17) \quad & \frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + 2u(bq_1 + c) + av \\
& = \frac{mm_1(m-1)}{2}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + q_1 \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] \\
& \quad - (m-1)\frac{\partial a}{\partial z}[b(m_1 - 1) + \nu] \\
& \quad + mm_1\left[(m-2)\frac{\partial a}{\partial x} + q_1 \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] \\
& \quad - (m-1)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x\, \partial z} - (m-1)\left[\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial(ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right].
\end{aligned}$$

Cette relation contenant q_1 se décompose en deux. On a d'abord

$$\frac{\partial v}{\partial z} + 2ub = \frac{mm_1(m-1)}{2}\frac{\partial b}{\partial z} + mm_1 \frac{\partial b}{\partial z} - (m-1)\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}.$$

On peut intégrer facilement cette équation, en tenant compte de la valeur de b; on trouve ainsi

$$v = kb + v_1(x, y),$$

en posant

$$k = \frac{mm_1(m+1)}{2} - m(m-1) - m_1^2(m-1).$$

Écrivons maintenant les termes indépendants de q_1 dans l'équation (17), en tenant compte de la valeur trouvée pour v; il vient

$$\begin{aligned}
& k\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + 2uc + a(kb + v_1) \\
& = \frac{mm_1(m-1)}{2}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] - (m-1)\frac{\partial a}{\partial z}[b(m_1 - 1) + \nu] \\
& \quad + mm_1\left[(m-2)\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right]. \\
& \quad - (m-1)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x\, \partial z} - (m-1)\left[\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial(ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right].
\end{aligned}$$

C'est là une égalité de la forme

$$A(x,y)e^{mz}+B(x,y)e^{m_1z}+C(x,y)e^{(m+m_1)z}+D(x,y)e^{mm_1z}+E(x,y)=0,$$

d'après les valeurs trouvées pour a, b, c. Comme m et m_1 sont différents de zéro et qu'on a supposé

$$m+m'-mm'\neq 0,$$

cette égalité ne peut avoir lieu identiquement que si l'on a

$$C=D=E=0.$$

Écrivons en particulier que le coefficient C est nul; il vient

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta\left[k+\frac{2u}{mm_1-(m+m_1)}\right]\\
&\quad=\alpha\beta\frac{mm_1(m+1)}{2}\left[1+\frac{m+m_1}{mm_1-(m+m_1)}\right]-m_1(m-1)(m_1-1)\alpha\beta\\
&\quad\quad-(m-1)\left[\frac{(m+m_1)^2}{mm_1-(m+m_1)}+(m+m_1)+m\right]\alpha\beta.
\end{aligned}$$

Comme $\alpha\beta\neq 0$, on doit donc avoir l'égalité

$$\begin{aligned}
&k[mm_1-(m+m_1)]+2u\\
&\quad=\frac{mm_1(m+1)}{2}mm_1-m_1(m-1)(m_1-1)[mm_1-(m+m_1)]\\
&\quad\quad-(m-1)[mm_1(m+m_1)+m^2m_1-m(m+m_1)].
\end{aligned}$$

En remplaçant k et u par leur valeur, cette expression se simplifie considérablement : on constate sans peine qu'elle se met sous la forme

$$m_1(m+m_1)(m+1)(m-2)=0. \tag{18}$$

Comme nous avons supposé m et m_1 supérieurs à deux, cette égalité est impossible.

Donc il n'existe pas dans ce cas d'équation irréductible d'ordre supérieur à 4, en involution avec la proposée.

6. Supposons maintenant $m=4$. Dans ce cas l'équation (2) s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_3}+\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)=\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_1+\psi) \tag{19}$$

et l'on a encore

$$\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial p_3} = -mm_1 p_1 + b(m_1 - 1) + \nu(x, y),$$

d'où

$$\psi = \psi' p_3 + \psi_1(x, y, z, p_1, p_2).$$

Nous avons vu, en outre, qu'on a

$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right) = a p_4 + M_3^2 p_3 + 3 p_2^2 \frac{\partial a}{\partial z} + n p_2 + l.$$

L'équation (19) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial p_2}& \\ + \psi'[M_3^2 p_2 + \ldots] + 3p_2^2\frac{\partial a}{\partial z} + n p_2 + l &= \frac{\partial f}{\partial p_1}\psi_1,\end{aligned}$$

les termes non écrits étant indépendants de p_2.

Posons $\frac{\partial\psi_1}{\partial p_2} = \psi'_1$ et dérivons la relation précédente par rapport à p_2; il vient

$$\frac{\partial\psi'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi'_1}{\partial z} + f\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi'_1}{\partial p_2} + \psi' M_2^2 + 6p_2\frac{\partial a}{\partial z} + n(x, y, z, p_1, q_1) = 0. \tag{20}$$

Or nous pouvons remarquer que, si, dans l'expression de M_n^{n-1}, on fait $n = 3$, on obtient précisément la quantité

$$6 p_2 \frac{\partial a}{\partial z} + n(x, y, z, p_1, q_1);$$

cela se voit immédiatement en considérant dans le Chapitre précédent l'expression (29) qui est équivalente à (32) et en remarquant que si l'on fait $n = 3$ dans l'expression de $(M_{n-1}^{n-1} + M_{n-2}^{n-2} + \ldots + M_3^3)$ donnée par la formule (30), on obtient zéro. Donc dans la formule (29), le second membre se réduit bien à $6 p_2 \frac{\partial a}{\partial z} + n$.

La relation (20) a donc la même forme que celle dont nous sommes partis dans le cas précédent (14); si dans cette équation (14) on remplace M_{m-2}^{m-2} et M_{m-1}^{m-2} par leurs valeurs et qu'on fasse ensuite $m - 1 = 3$, c'est-à-dire $m = 4$, on obtient l'équation (20). Comme nous avons constaté que la condition (14) ne pouvait être vérifiée que si l'on a

$$m_1(m_1+m)(m+1)(m-2)=0$$

dans le cas actuel où $m=4$, nous trouverons encore une impossibilité.

7. Supposons $m=3$. L'équation (2) s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_2+\psi), \tag{21}$$

on a encore

$$\psi'=\frac{\partial\psi}{\partial p_2}=-mm_1p_1+b(m_1-1)+\nu(x,y);$$

d'où

$$\psi=\psi' p_2+\psi_1(x,y,z,p_1)$$

et l'équation (21) se réduit à la suivante, en tenant compte des valeurs trouvées pour $\left(\frac{df}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+f\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1}\\&\quad+\psi'\left[\frac{\partial f}{\partial x}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right]+\frac{\partial^2a}{\partial z^2}p_1^3+gp_1^2+hp_1+k=\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\psi_1.\end{aligned}$$

Posons $\frac{\partial\psi_1}{\partial p_1}=\psi_2$ et dérivons l'identité précédente par rapport à p_1 en tenant compte de la valeur de ψ'; il vient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+f\frac{\partial\psi_2}{\partial p_1}+\psi'\left[\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}+p_1\frac{\partial a}{\partial z}+ab\right]\\&\quad-mm_1\left[\frac{\partial f}{\partial x}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+bf\right]+3\frac{\partial^2a}{\partial z^2}p_1^2+2gp_1+h=0.\end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+q_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+f\frac{\partial\psi_2}{\partial p_1}\\&\quad=mm_1\left[\frac{\partial f}{\partial x}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right]\\&\qquad-\psi'\left[\frac{\partial a}{\partial x}+2p\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial b}{\partial z}q+\frac{\partial c}{\partial z}+ab\right]-\left(3\frac{\partial^2a}{\partial z^2}p_1^2+2gp_1+h\right).\end{aligned} \tag{22}$$

On peut voir encore que cette équation a la forme (16) du cas $m > 4$: on la déduit de celle-ci en y remplaçant les quantités M_{m-2}^{m-2} et M_{m-1}^{m-2} par leur expression et en faisant ensuite $m = 3$. En effet si, dans l'expression M_n^n donnée par la formule

$$M_n^n = n\left(\frac{da}{dx}\right) + \frac{\partial a}{\partial z_1}p_1 + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab,$$

on fait $n = 1$, on a précisément le coefficient de ψ' dans l'équation (22).

Considérons maintenant la formule (32) du Chapitre précédent qui donne N_n^{n-1} : si l'on fait $n = 2$, on trouve

$$(23)\quad 3\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}p_1^2 + p_1\left\{4\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x} + 2\left[\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial(ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right]\right\} + L(x, y, z, q_1).$$

Or on a vu que

$$g = 2\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}q_1 + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{\partial(ab)}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z};$$

le coefficient de p_1 dans l'expression (23) est donc égal à $2g$ et par suite la relation (22) ne peut différer de la relation (16) où l'on aurait fait $m = 3$ que par les termes h et L; comme nous n'avons pas fait usage de ce terme L dans les raisonnements, il est clair que l'équation (22) nous conduira aux mêmes conclusions que l'équation (16), c'est-à-dire encore à la condition

$$m_1(m_1 + m)(m + 1)(m - 2) = 0$$

qui n'est pas vérifiée quand $m = 3$. Donc nous trouvons encore une impossibilité.

8. Supposons $m = 2$; en restant toujours dans l'hypothèse

$$m + m_1 \neq m m_1,$$

il est nécessaire qu'on ait $m_1 > 2$. Mais nous venons de voir que, dans le cas que nous étudions, c'est-à-dire dans le cas où

$$a = \alpha(x, y)\,e^{m_1 z}, \qquad b = \beta(x, y)\,e^{mz},$$

il ne peut exister aucune équation irréductible du système (I) d'ordre supérieur à 2, formant avec la proposée un système en involution. Des raisonnements analogues prouveraient évidemment qu'il ne peut exister aucune équation en involution du système (II), d'ordre supérieur à deux. Donc si $m = 2$ il faut $m_1 = 2$.

9. Étudions enfin le cas écarté au début

$$m = m_1 = 2.$$

La relation $m\omega - m_1\omega_1 = 0$ montre dans ce cas que $\omega = \omega_1$; en posant $z' = \omega z$, on aura une équation de même forme; cela revient à prendre

$$\omega = \omega_1 = 1,$$

d'où

$$a = \alpha(x, y)\, e^z, \qquad b = \beta(x, y)\, e^z.$$

Dans ce cas les conditions (8) et (9) sont identiques et se ramènent à

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - 2\frac{\partial c}{\partial z} + 2ab + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

en remplaçant a et b par leurs valeurs, on peut intégrer cette équation, c étant la fonction inconnue; on obtient ainsi

$$c = e^{2z}[\mathrm{K}(x, y) - \alpha\beta z] + e^z\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right] + \mathrm{H}(x, y),$$

K et H étant deux fonctions arbitraires introduites par l'intégration.

L'équation (2) peut s'écrire, dans ce cas,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1} = \psi\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Nous pouvons encore appliquer la remarque (I); ici $i = -1$ et $h = 2$; donc ψ doit être un polynome du second degré par rapport à p_1

$$\psi = u(x, y, z)p_1^2 + v(x, y, z)p_1 + w(x, y, z);$$

en portant cette expression dans l'équation précédente et en écrivant qu'on a une identité en p_1, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + 2au + \frac{\partial a}{\partial z} = au,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + av + 2u(bq_1 + c) + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = av,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w}{\partial z} + v(bq_1 + c) + \frac{\partial b}{\partial x} q + \frac{\partial c}{\partial x} + b(bq_1 + c) = aw.$$

Chacune de ces équations se décompose en deux à cause de la présence de q_1. De la première on tire immédiatement

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

et par suite

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u = -1.$$

De la deuxième on tire

$$\frac{\partial v}{\partial z} - 2b + \frac{\partial b}{\partial z} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$v = b + v_1(x, y)$$

avec

$$\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - 2c + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0;$$

en remplaçant a, b, c par leur valeur, cette relation se réduit à

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2\mathrm{H}.$$

Enfin la troisième se décompose en

$$\frac{\partial w}{\partial z} + vb + \frac{\partial b}{\partial x} + b^2 = 0.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + vc + \frac{\partial c}{\partial x} + bc = aw.$$

En remplaçant v et b par leurs valeurs, on peut facilement intégrer la première

$$w + b^2 + bv_1 + \frac{\partial b}{\partial x} = w_1(x, y),$$

et en portant cette expression dans la deuxième équation, il vient

$$- 2b\frac{\partial b}{\partial y} - b\frac{\partial v_1}{\partial y} - v_1\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y}$$
$$+ c(b + v_1) + \frac{\partial c}{\partial x} + bc + a\left(b^2 + bv_1 + \frac{\partial b}{\partial x} - w_1\right) = 0.$$

Si l'on remplace a, b, c par leurs valeurs, cette relation est de la forme

$$e^{3z}[Az + B] + e^{2z}[A'z + B'] + Ce^z + Dz + E = 0,$$

A, B, A', B', C, D, E étant des fonctions de x et y seulement. Cette relation devant être vérifiée identiquement, on doit avoir

$$A = B = A' = B' = C = D = E = 0.$$

Or, on a

$$A = -2\alpha\beta^2;$$

il ne peut être nul que si α ou β est nul, ce qui est contraire aux hypothèses.

Dans ce cas encore il y a impossibilité.

10. En résumé, nous avons démontré le résultat suivant :

Si une équation de la forme

$$s = a(x, y, z)p_1 + b(x, y, z)q_1 + c(x, y, z),$$

où l'on a $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial b}{\partial z} \neq 0$, *forme séparément un système en involution avec deux équations irréductibles de système différent et d'ordre supérieur à* 1, *sans être en involution avec une équation d'ordre* 1, *elle est nécessairement de la forme trouvée par M. Moutard, et se ramène par conséquent, par une transformation simple, à une équation linéaire.*

En particulier, pour répondre à la question posée au début de ce Chapitre, si une équation $s = ap + bq + c$ admet une intégrale générale de la première classe, les dénominateurs des deux invariants étant d'ordre supérieur à l'unité, c'est une équation de Moutard.

11. *Deuxième cas.* — Nous supposerons maintenant que le dénominateur du premier invariant est d'ordre égal à 1, tandis que celui de l'autre invariant est d'ordre supérieur à l'unité; on aura donc à la fois les équations (I) et (II)'.

Puisque $\frac{\partial b}{\partial z} \neq 0$, l'étude que nous avons faite au début du cas précédent (n° **2**) s'applique ici, sans y rien changer, au dénominateur du deuxième invariant. Par suite, on doit avoir

$$b = \beta(x, y)\, e^{\omega_1(x,y)z} - \frac{\partial \log \omega_1}{\partial x};$$

en posant $z' = \omega_1(x, y)\, z$ l'équation ne change pas de forme, mais le terme $\omega_1(x, y)$ devient identique à l'unité; on peut donc prendre

$$b = \beta(x, y)\, e^{z}.$$

En outre, on aura encore la relation (9), en y faisant $\omega_1 = 1$.

$$(24)\quad \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + (m_1 - 1)\frac{\partial^2 b}{\partial y\, \partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial z} + m_1\frac{\partial a}{\partial x} = m_1\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial^2 a}{\partial z\, \partial x};$$

m_1 est l'ordre du dénominateur de l'invariant : on a donc par hypothèse $m_1 > 1$.

L'équation (I) s'écrit

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial A_1}{\partial p_1} = a A_1.$$

Posons $\frac{\partial A_1}{\partial p_1} = A'_1$ et dérivons par rapport à p_1 l'identité précédente; il vient

$$\frac{\partial A'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A'_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial A'_1}{\partial p_1} = 0,$$

ce qui montre que A'_1 est un invariant du premier ordre de l'équation proposée; l'équation précédente se décompose en deux :

$$\frac{\partial A'_1}{\partial y} + (ap_1 + c)\frac{\partial A'_1}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial A'_1}{\partial z} + b\frac{\partial A'_1}{\partial p_1} = 0.$$

Ces équations sont incompatibles lorsque $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, à moins qu'on n'ait

$$\frac{\partial A'_1}{\partial y} = \frac{\partial A'_1}{\partial z} = \frac{\partial A'_1}{\partial p_1} = 0, \qquad A'_1 = X(x).$$

On aura donc

$$A_1 = X[p_1 + \mu(x, y, z)], \qquad X \neq 0,$$

avec

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} + b q_1 + c = a\mu,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} + b = 0,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} + c = a\mu;$$

en tenant compte de la valeur de b, la première s'intègre facilement et donne $\mu + b = \mu_1(x, y)$; la deuxième permet alors d'écrire

$$c = a(\mu_1 - b) + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \mu_1}{\partial y}.$$

Faisons le changement de variable défini par l'équation $z' = z + \lambda(x, y)$ avec la condition $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \mu_1(x, y)$. On constate facilement que l'équation proposée garde la même forme

$$s = a p_1 + b q_1 + c$$

et l'on a

$$(25) \qquad b = \beta(x, y)\, e^z, \qquad c = \frac{\partial b}{\partial y} - ab;$$

cela revient à faire $\mu_1 = 0$. On prendra donc comme dénominateur du premier invariant

$$A_1 = p - b.$$

Si l'on remarque que dans ce cas $\frac{\partial b}{\partial z} = b$, la relation (24) se met facilement sous la forme

$$(26) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(m_1 a - \frac{\partial a}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[b\left(m_1 a - \frac{\partial a}{\partial z}\right)\right] = 0.$$

12. Soit $p_n + \varphi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1})$ le numérateur de l'invariant du système (I); on a identiquement

$$(27) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \varphi) \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Posons $\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1}} = \varphi'$ et dérivons, par rapport à p_{n-1}, l'égalité précédente; en supposant $n-1>1$, il vient

$$(28)\qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_k} + \mathrm{M}_{n-1}^{n-1} = 0,$$

en appelant k l'ordre des dérivées d'ordre le plus grand dont dépend effectivement φ'. Si $k>2$, en appliquant la remarque (II), on voit qu'on a

$$\varphi' = \frac{\mathrm{X}(x)}{p_1 - b}p_k + \varphi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{k-1}), \qquad \mathrm{X} \neq 0,$$

et

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{k-1}} + \frac{\mathrm{X}}{p_1 - b}(\mathrm{M}_{k-1}^{k-1}p_{k-1} + \ldots) + \mathrm{M}_{n-1}^{n-1} = 0.$$

Posons encore $\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{k-1}} = \varphi_1'$ et dérivons l'identité précédente par rapport à p_{k-1} :

$$\frac{\partial\varphi_1'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi_1'}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi_1'}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)\frac{\partial\varphi_1'}{\partial p_{k-1}} + \frac{\partial f}{\partial p}\varphi_1' + \frac{\mathrm{X}}{p_1 - b}\mathrm{M}_{k-1}^{k-1} = 0;$$

en posant $\varphi_1' = \psi\frac{\mathrm{X}}{p_1 - b}$, l'équation précédente prend la forme

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{k-1}} + \mathrm{M}_{k-1}^{k-1} = 0;$$

elle a une forme analogue à (28), mais l'ordre maximum des dérivées contenues dans la fonction φ' a diminué d'une unité au moins. En répétant l'opération, on arrivera donc certainement à une équation (28) où l'on aura $k \leqq 2$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} + q_1\frac{\partial\lambda}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p_2} + \mathrm{M}_h^h = 0, \qquad h \geqq 2,$$

ou

$$(29)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} + q_1\frac{\partial\lambda}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p_2}$$
$$+ h\frac{\partial a}{\partial x} + (h+1)\frac{\partial a}{\partial z}p_1 + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Si dans l'équation (27) on avait $n - 1 = 1$, elle s'écrirait

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + bf\right) = \varphi a;$$

en posant $\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} = \varphi'$,

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + f\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} + 2p_1\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

Cette équation a la forme (29); il suffit de faire $h = 1$ et $\frac{\partial\lambda}{\partial p_2} = 0$. Donc, dans tous les cas, on aura l'équation (29) avec la condition $h \geqq 1$.

La remarque (II) montre alors qu'on a

$$\lambda = \frac{X(x)}{p_1 - b}p_2 + \lambda_1(x, y, z, p_1),$$

X pouvant d'ailleurs être nul. L'équation (29) se ramène donc à

$$(30)\quad \frac{\partial\lambda_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda_1}{\partial p} + \frac{X}{p_1 - b}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + bf\right) + h\frac{\partial a}{\partial x} + (h+1)p_1\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab = 0.$$

13. Si $X = 0$, en posant $\frac{\partial\lambda_1}{\partial p} = \lambda'_1$ et en dérivant l'équation précédente par rapport à p_1, il vient

$$(31)\quad \frac{\partial\lambda'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\lambda'_1}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda'_1}{\partial p_1} + a\lambda'_1 + (h+1)\frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

la remarque (II) montre alors qu'on a

$$\lambda'_1 = \frac{X_1(x)}{p_1 - b} + u(x, y, z),$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q_1\frac{\partial u}{\partial z} + au + (h+1)\frac{\partial a}{\partial z} = 0$$

qui se décompose en

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$(h+1)\frac{\partial a}{\partial z} + au + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Comme nous avons supposé $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, u ne peut pas être nul. On tire donc de cette équation

$$(32) \qquad a = \alpha(x, y)\, e^{\omega(x,y)z} - \frac{\partial \operatorname{Log} \omega}{\partial y}$$

en posant

$$u + (h+1)\omega = 0.$$

14. Si dans l'équation (30) X n'est pas nul, on peut poser

$$\lambda_1 = \frac{X}{p_1 - b} \mu(x, y, z, p_1);$$

il vient alors

$$(33) \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} + f \frac{\partial \mu}{\partial p_1} - a\mu + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + bf + \frac{p_1 - b}{X}\left[h \frac{\partial a}{\partial x} + (h+1)\frac{\partial a}{\partial z} p_1 + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] = 0.$$

Posons $\frac{\partial^2 \mu}{\partial p_1^2} = \mu''$ et dérivons deux fois successivement cette équation par rapport à p_1; il vient

$$\frac{\partial \mu''}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu''}{\partial z} + f \frac{\partial \mu''}{\partial p_1} + a\mu'' + 2\left(1 + \frac{h+1}{X}\right)\frac{\partial a}{\partial z} = 0;$$

cette relation a absolument la forme (31); si $1 + \frac{h+1}{X} \neq 0$, on en déduira donc encore nécessairement la formule (32).

Enfin si $1 + \frac{h+1}{X} = 0$, l'équation précédente montre, d'après la remarque (II), qu'on a

$$\mu'' = \frac{X_1(x)}{p_1 - b},$$

d'où

$$\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial p} = X_1 \operatorname{Log}(p_1 - b) + u(x, y, z).$$

D'autre part, de l'équation (33) on déduit, en dérivant par rapport à p_1,

$$\frac{\partial \mu'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu'}{\partial z} + f \frac{\partial \mu'}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab + \frac{1}{X}\left[h \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z} q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] - \frac{b}{X}(h+1)\frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

en remplaçant μ' par l'expression trouvée et en faisant $\frac{h+1}{X} = -1$,

$$aX_1 + \frac{\partial u}{\partial y} + q_1\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab + \frac{1}{X}\left[h\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z}q_1 + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] + b\frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z}\left(1 + \frac{1}{X}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + aX_1 + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab + \frac{1}{X}\left[h\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z} + ab\right] + b\frac{\partial a}{\partial z} = 0;$$

de la première on tire, par intégration,

$$u + b\left(1 + \frac{1}{X}\right) = v(x, y).$$

En portant cette expression dans la deuxième et en tenant compte des valeurs de h et c, on constate facilement qu'elle se réduit à

$$aX_1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x}\left(1 + \frac{h}{X}\right) - \frac{b}{X}\frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Si l'on remarque que dans le cas actuel $1 + \frac{h}{X} = -\frac{1}{X}$, la relation précédente prend la forme

$$\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial z} = X_2(x)\,a + w(x, y). \tag{34}$$

D'autre part la relation (26) peut encore s'écrire

$$m_1\left(\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial z}\right) + m_1 ab - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial z}\right) = 0,$$

d'où

$$m_1(X_2 a + w) + m_1 ab - X_2\frac{\partial a}{\partial z} = 0. \tag{35}$$

Si $X_2 \neq 0$, la condition d'intégrabilité entre cette équation et (34) s'écrit

$$a\left[2m_1\frac{b^2}{X_2} + m_1 b + m_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{b}{X_2}\right] + 2m_1\frac{wb}{X_2} + m_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{w}{X_2} = 0, \tag{36}$$

on en tire pour a une valeur de la forme

$$a = -e^{-z}\frac{w e^{z} + B(x, y)}{\beta e^{z} + C(x, y)}.$$

Si l'on transporte cette expression dans l'équation (35), on obtient

$$\begin{aligned}X_2 e^{-z}(w e^{z} + B)(\beta e^{z} + C) - X_2(wC - B\beta)\\ + (m_1\beta e^{z} + m_1 X_2)e^{-z}(w e^{z} + B)(\beta e^{z} + C) = m_1 w(\beta e^{z} + C)^2.\end{aligned}$$

Ce polynome en e^z doit être identiquement nul; le terme en e^{-z} a pour coefficient $(m_1 + 1)X_2 BC$; comme nous avons supposé $X_2 \neq 0$, on aura donc $BC = 0$. Les termes en e^{2z} sont identiques dans les deux membres; en écrivant l'identité des termes en e^z et du terme indépendant de z, on a

$$X_2(m_1 + 1)w\beta + m_1\beta(B\beta - Cw) = 0.$$
$$X_2(m_1 + 1)(Cw + B\beta) - X_2(Cw - B\beta) = m_1 w C^2.$$

Nous savons que β n'est pas nul; w ne peut pas être nul, car s'il en était ainsi, l'équation (36) entraînerait nécessairement $a = 0$ puisque le coefficient de a est différent de zéro. Dans ces conditions, si $C = 0$, la deuxième des équations précédentes s'écrit

$$X_2(m_1 + 2)B\beta = 0,$$

par suite $B = 0$.

Si c'est B qui est nul, le système précédent se réduit à

$$X_2(m_1 + 2) = m_1 C, \qquad X_2 C = m_1 C^2,$$

d'où l'on tire encore $C = 0$. On peut donc écrire dans les deux cas

$$a = -\frac{w}{\beta}e^{-z} = \alpha(x, y)e^{-z}.$$

Nous avons supposé $X_2 \neq 0$; si X_2 est nul, l'équation (35) se réduit à $ab + w = 0$, et l'on en déduit encore $a = \alpha(x, y)e^{-z}$. En portant cette expression dans les équations (34) et (35), on obtient les conditions

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = X_2\alpha, \qquad \alpha\beta + w = 0, \qquad (m_1 + 1)X_2\alpha = 0;$$

la dernière montre que dans tous les cas $X_2 = 0$ et par suite, d'après la première, $\frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0$.

Dans ces conditions, l'équation proposée est de la forme

$$s = Y(y)e^{-z}p + \beta(x, y)e^{z}q + \frac{\partial\beta}{\partial z}e^{z} - \beta Y$$

ou encore

$$(37) \qquad s = \frac{\partial}{\partial x}(Ye^{-z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta e^{z}) - \beta Y.$$

C'est la forme des équations de M. Moutard que nous avons déjà trouvées.

15. Dans tous les autres cas, nous avons trouvé la relation (32); on a donc

$$a = \alpha(x, y)\,e^{\omega(x,y)z} - \frac{\partial \operatorname{Log}\omega}{\partial y}, \qquad b = \beta(x, y)\,e^{z};$$

portons ces valeurs dans la relation (26). Il vient

$$e^{\omega z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\alpha(m_1 - \omega)\right] + z\frac{\partial\omega}{\partial x}e^{\omega z}\alpha(m_1 - \omega)$$
$$- m_1\frac{\partial^2 \operatorname{Log}\omega}{\partial x\,\partial y} + \alpha\beta(m_1 - \omega)(1 + \omega)\,e^{(1+\omega)z} - m_1\beta\frac{\partial \operatorname{Log}\omega}{\partial y}e^{z} = 0.$$

Si $1 + \omega = 0$, la relation précédente se réduit à $\frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0$, puisque $m_1 > 1$ par hypothèse. Nous retrouvons dans ce cas l'équation précédente (37). Si $(1 + \omega) \neq 0$, la relation précédente ne sera identiquement vérifiée que si l'on a $m_1 = \omega$.

Dans ce cas, on aura donc

$$(38) \qquad a = \alpha\,e^{m_1 z}, \qquad b = \beta\,e^{z}, \qquad c = \frac{\partial\beta}{\partial y}e^{z} - \alpha\beta\,e^{(1+m_1)z}.$$

Il est clair que si nous avions pris les équations (I)′ et (II) au lieu de (I) et (II)′, nous aurions trouvé

$$a = \alpha(x, y)\,e^{z}, \qquad b = \beta(x, y)\,e^{mz}, \qquad c = \frac{\partial\alpha}{\partial x}e^{z} - \alpha\beta\,e^{(1+m)z},$$

en appelant m l'ordre du dénominateur de l'invariant relatif au système (I) et sachant que $m > 1$.

Il est facile de voir que nous sommes dans un cas analogue à celui du paragraphe 4 précédent; les formules qui donnent a et b sont les mêmes, en supposant $m_1 = 1$, et la valeur de c précédente s'obtient en faisant dans la formule (12)

$$m_1 = 1, \qquad H = -\frac{1}{m}\frac{\partial\beta}{\partial y}, \qquad K = 0.$$

Or nous avons étudié ce cas en faisant intervenir exclusivement les conditions tirées de l'existence de l'invariant du système (I) dont le dénominateur est d'ordre m. Les calculs et les raisonnements peuvent donc se répéter ici sans y rien changer : or nous avons trouvé dans tous les cas que la possibilité du problème exigeait la relation

$$m_1(m_1+m)(m+1)(m-2) = 0;$$

nous n'avons donc à étudier que le cas $m = 2$.

Dans ce cas, en appelant $p_2 + \psi(x, y, z, p_1)$ le dénominateur du premier invariant, on aura

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + bf = \psi a:$$

d'après la remarque (I), on doit avoir

$$\psi = u(x, y, z)p_1^2 + v(x, y, z)p_1 + w(x, y, z);$$

en portant cette expression dans l'équation précédente et en exprimant que c'est une identité en p_1, on trouve facilement

$$u = -1, \qquad v = X(x),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + q_1\frac{\partial w}{\partial z} + X(bq_1 + c) + \frac{\partial b}{\partial x}q_1 + \frac{\partial c}{\partial x} + b(bq_1 + c) = aw,$$

qui se décompose en deux :

$$\frac{\partial w}{\partial z} + Xb + \frac{\partial b}{\partial x} + b^2 = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + Xc + \frac{\partial c}{\partial x} + bc = aw.$$

Comme on a $b = \beta(x, y)e^{2z}$, la première s'intègre facilement; on en tire

$$w + \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{X}{2} b + \frac{1}{4} b^2 = w_1(x, y);$$

en portant dans la deuxième on obtient, après quelques réductions,

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial x \, \partial y} - \frac{X}{2}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{1}{2} b \frac{\partial b}{\partial y}$$
$$+ X\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{X}{2} ab + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{a}{2}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{3ab^2}{4} = aw_1.$$

Si l'on remplace a et b par leurs valeurs, on constate que cette identité est impossible, à cause de la présence du terme en ab^2.

Par conséquent, dans ce cas, il ne peut exister d'équation satisfaisant aux hypothèses, autre que l'équation (31) qui est une forme particulière des équations de M. Moutard.

16. *Troisième cas.* — Les dénominateurs des invariants sont tous deux d'ordre 1.

On a les équations (I) et (I)', c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $A_1(x, y, z, p_1)$ et $B_1(x, y, z, q_1)$ qui vérifient identiquement les relations

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial A_1}{\partial p_1} = aA_1,$$
$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + p_1\frac{\partial B_1}{\partial z} + (ap_1 + bq_1 + c)\frac{\partial B_1}{\partial q} = bB_1.$$

M. Goursat a montré (¹) que dans ce cas l'équation peut se ramener à la forme

$$s = a(x, y, z) p_1 q_1. \tag{39}$$

En effet, en posant

$$H = \frac{\frac{\partial c}{\partial z} + ab - \frac{\partial b}{\partial y}}{\frac{\partial a}{\partial z}}, \qquad K = \frac{\frac{\partial c}{\partial z} + ab - \frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial b}{\partial z}},$$

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. I, 1899, p. 66.

les équations précédentes conduisent aux conditions

$$b = -\frac{\partial H}{\partial z}, \qquad a = -\frac{\partial K}{\partial z}, \qquad c - aH - \frac{\partial H}{\partial y} = bK - \frac{\partial K}{\partial x},$$

d'où l'on déduit

$$K\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} = H\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial K}{\partial x};$$

c'est précisément là la condition pour que les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} - H\frac{\partial f}{dz} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - K\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

soient compatibles. Si l'on prend pour nouvelle fonction inconnue $z' = U(x, y, z)$, U étant une solution du système précédent, on constate facilement que l'équation proposée prend la forme (39).

Réciproquement, pour toute équation de la forme (39), les équations (I) et (I)' admettent une solution : on peut prendre par exemple

$$A_1 = p_1, \qquad B_1 = q_1.$$

Les deux invariants cherchés seront donc de la forme

$$\varphi = \frac{p_n + \psi(x, y, z, p_1 \ldots p_{n-1})}{p_1}, \qquad \varphi_1 = \frac{q_{n'} + \psi_1(x, y, z, p_1 \ldots p_{n'-1})}{q_1}.$$

Remarquons d'ailleurs que l'équation (39) peut dans certaines conditions admettre un invariant du premier ordre; en effet, soit $\varphi(x, y, z, p_1)$ un tel invariant; on doit avoir identiquement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1\frac{\partial \varphi}{\partial z} + ap_1q_1\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + ap_1\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit compatible est $\frac{\partial a}{\partial y} = 0$. Nous mettrons encore ce cas à part pour le moment, et nous supposerons tout d'abord que l'invariant du système (I) est d'ordre supérieur à 1, c'est-à-dire

$$\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0, \qquad n \geqq 2.$$

Nous aurons plusieurs cas à distinguer suivant la valeur de n.

17. Supposons d'abord $n=2$, c'est-à-dire $\varphi = p_2 + \psi(x, y, z, p_1)$. On doit avoir identiquement

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (p_2 + \psi)\frac{\partial f}{\partial p_1};$$

en tenant compte de l'expression de $\left(\dfrac{df}{dx}\right)$ calculée au Chapitre précédent (n° **11**)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + a p_1 q_1 \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + q_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} p_1 + p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] = a q_1 \psi,$$

d'où

$$(40) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} + a\left[p_1 \frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \psi\right] + \frac{\partial a}{\partial x} p_1 + p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0.$$

C'est là une relation de la forme

$$(41) \qquad p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + \frac{\partial a}{\partial x} = \lambda(x, z, p_1) a + \mu(x, z, p_1).$$

les coefficients de λ et μ ne dépendant pas de y. On en tire, en dérivant par rapport à p_1,

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} a + \frac{\partial \mu}{\partial p_1}.$$

Les quantités $\dfrac{\partial \lambda}{\partial p_1}$ et $\dfrac{\partial \mu}{\partial p_1}$ doivent être indépendantes de p_1, sans quoi, en dérivant encore une fois par rapport à p_1, on obtiendrait

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_1^2} a + \frac{\partial^2 \mu}{\partial p_1^2} = 0,$$

relation impossible si $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial p_1^2}$ et $\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial p_1^2}$ ne sont pas nuls, puisque nous avons supposé $\dfrac{\partial a}{\partial y} \neq 0$ et que λ et μ ne dépendent pas de y.

De la relation (41) on peut donc tirer

$$(\Gamma')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)a + \alpha_1(x, z) \\ \text{et, par suite,} \\ \dfrac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \beta_1(x, z). \end{cases}$$

Portons ces expressions dans l'équation (40), il vient

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + a\left[p_1\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \psi\right] + p_1(\beta a + \beta_1) + p_1^2(\alpha a + \alpha_1) = 0.$$

Cette relation devant être vérifiée identiquement, il faut qu'on ait, puisque $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ est nul,

$$p_1\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \psi + \beta p_1 + \alpha p_1^2 = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + p_1\beta_1 + p_1^2\alpha_1 = 0.$$

Écrivons la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} + p_1\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \alpha_1 p_1,$$

d'où

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = 0, \qquad \alpha_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial z}.$$

Le coefficient a doit donc vérifier le système d'équations

$$(\Gamma)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)a + \dfrac{\partial\alpha}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial a}{\partial x} = X(x)a + \beta_1(x, z). \end{cases}$$

Nous retrouverons ce système (Γ) et nous l'interpréterons après avoir étudié tous les cas.

18. Supposons maintenant $n = 3$, c'est-à-dire

$$\varphi = p_2 + \psi(x, y, z, p_1, p_2);$$

on aura identiquement

$$(42)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = (p_3+\psi)\frac{\partial f}{\partial p_1},$$

en remplaçant les coefficients par leur expression

$$(43)\quad \frac{\partial\psi}{\partial y} + q_1\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + q_1[\mathrm{P}_2^2 p_2 + \mathrm{I}p_1^3 + \mathrm{J}p_1^2 + \mathrm{K}p_1] = \psi\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Nous sommes ici dans le cas d'appliquer la remarque (II), dans le cas particulier où $h=2$, $i=-1$; ψ doit donc être un polynome du second degré en p_2, le premier terme ayant pour coefficient $\mathrm{X}(x)\mathrm{A}_1^{h+i}$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{X}(x)}{2p_1}$; d'où

$$\psi = \frac{\mathrm{X}(x)}{2p_1}p_2^2 + v(x,y,z,p_1)p_2 + w(x,y,z,p_1).$$

Portons cette valeur dans l'équation (43): le terme en p_2^2 disparaît; nous aurons donc, pour exprimer que c'est une identité par rapport à p_2, deux équations dont la première est

$$\frac{\partial v}{\partial y} + q_1\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{\mathrm{X}}{p_1}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q_1}\right] + q\,\mathrm{P}_2^2 = 0,$$

qui peut s'écrire, en explicitant les termes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} + q_1\frac{\partial v}{\partial z} + ap_1q_1\frac{\partial v}{\partial p_1} + \mathrm{X}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]q_1&\\ + \left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]q_1 &= 0;\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(44)\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.\qquad \frac{\partial v}{\partial z} + ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x}(\mathrm{X}+2) + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)(\mathrm{X}+3) = 0.$$

Si $(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)\neq 0$, cette relation a une forme analogue à (41); il est clair qu'on en déduira un système de la forme (Γ') et, en portant ces expressions (Γ') dans la relation précédente (44), on voit sans peine qu'on a encore

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = 0,\qquad \alpha_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial z}.$$

On retrouve donc le système (Γ).

Soit maintenant $X + 3 = 0$; l'équation (44) s'écrit

$$\frac{\partial a}{\partial x} = a p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait au sujet de la relation (41) montre qu'on a

$$p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} = m(x, z), \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = n(x, z),$$

et la condition d'intégrabilité montre que $\frac{\partial m}{\partial z} = 0$.

Donc $v = \frac{X_1(x)}{p_1} + v_1(x, y)$ et l'on a

$$(45) \qquad \frac{\partial a}{\partial x} = X_1(x) a + \beta_1(x, z), \qquad \beta_1 = \frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

Écrivons l'équation qui correspond aux termes indépendants de p_2 dans l'équation (43)

$$(46) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w}{\partial z} + f \frac{\partial w}{\partial p_1} + v \left[\frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q_1} \right] + q_1 [I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1] = a q_1 w,$$

d'où

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial w}{\partial p_1} + (X_1 + v_1 p_1) \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1 = a w.$$

Posons $\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3} = w'$ et dérivons trois fois successivement par rapport à p_1 cette relation; il vient

$$(47) \qquad \frac{\partial w'}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial w'}{\partial p_1} + 3 a w' + 6 I = 0.$$

Or, on a vu que

$$I = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) + a \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right).$$

Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait au sujet de la relation (41), on déduit de là

$$I = \alpha(x, z) a + \alpha_1(x, z).$$

En transportant cette expression dans l'équation (47), celle-ci se décompose en deux, puisque $\frac{\partial w}{\partial y}=0$, et il vient

$$p_1\frac{\partial w'}{\partial p_1}+2w'+6\alpha=0,$$
$$\frac{\partial w'}{\partial z}+6\alpha_1=0.$$

La condition d'intégrabilité donne immédiatement $\alpha_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}$.

Nous voyons que, dans ce cas, $a(x,y,z)$ doit vérifier le système (Δ):

$$(\Delta)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial a}{\partial x}=X_1(x)a+\beta_1(x,z),\\&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)+a\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)=\alpha(x,z)a+\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Soit enfin $X+2=0$ dans l'équation (44); on peut alors l'écrire

$$\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)+a\frac{\partial v}{\partial p_1}+\frac{1}{p_1}\frac{\partial v}{\partial z}=0.$$

On en tire, par un raisonnement déjà fait plusieurs fois, en tenant compte de ce que $\frac{\partial v}{\partial y}=0$,

$$(48)\qquad\begin{gathered}\frac{\partial a}{\partial z}+a^2=\alpha(x,z)a+\frac{\partial\alpha}{\partial z},\\ v=-\alpha p_1+X_1(x).\end{gathered}$$

Dans ces conditions, l'équation (46) s'écrit

$$(49)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial y}=0,\\&\frac{\partial w}{\partial z}+ap_1\frac{\partial w}{\partial p_1}+(X_1-\alpha p_1)\left[p_1\frac{\partial a}{\partial x}+p_1^2\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)\right]\\&\qquad+Ip_1^3+Jp_1^2+Kp_1=aw.\end{aligned}\right.$$

En tenant compte de l'équation (48), on a

$$I=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)+a\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)=a\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\alpha^2\right)+\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}.$$

L'équation (49) peut donc se mettre sous la forme

$$(50)\qquad p_1^2\left[J - \alpha\frac{\partial a}{\partial x}\right] + p_1\left[K + X_1\frac{\partial a}{\partial x}\right] = \lambda(x, z, p_1)a + \mu(x, z, p_1).$$

Cette relation a une forme analogue à celle de l'équation (41); un raisonnement analogue nous permet d'en conclure

$$(51)\qquad \begin{cases} J - \alpha\dfrac{\partial a}{\partial x} = m(x, z)a + n(x, z), \\ K + X_1\dfrac{\partial a}{\partial x} = m'(x, z)a + n'(x, z). \end{cases}$$

Or on a posé

$$J = 2\frac{\partial^2 a}{\partial z\,\partial x} + 3a\frac{\partial a}{\partial x}, \qquad K = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

En tenant compte de la relation (48) on peut écrire

$$J = (2\alpha - a)\frac{\partial a}{\partial x} + 2a\frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial z},$$

et les équations (51) prennent la forme

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \gamma(x, z)a + \delta(x, z), \\ \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} + X_1\dfrac{\partial a}{\partial x} = m'(x, z)a + n'(x, z). \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité entre ces deux équations montre immédiatement qu'on a

$$m' = 0, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial x} + X_1\gamma + n' = 0.$$

En posant $\frac{\partial a}{\partial x} + \gamma = a'$, la dernière équation (52) se réduit à

$$\frac{\partial a'}{\partial x} + X_1 a' = 0.$$

Si l'on pose $X_2 = \int X_1\,dx$, on tire de l'équation précédente

$$a' = \frac{\partial a}{\partial x} + \gamma = e^{-X_2}k(z, y),$$

et cela est vrai même si X_1 est nul, X_2 dans ce cas étant une constante quelconque. On a donc la relation

$$\frac{\partial a}{\partial x} = e^{-X_2} k(z, y) - \gamma(x, z).$$

Pour que cette équation soit compatible avec la première des équations (52), on voit facilement qu'il faut que $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$; mais alors la relation précédente est de la forme

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z);$$

en y joignant la relation (48) déjà trouvée, on obtient précisément le système (Γ) dans le cas où $X = 0$.

Donc dans tous les cas, lorsque $n = 3$, on doit satisfaire à l'un des systèmes (Γ) ou (Δ).

19. Supposons $n = 4$, c'est-à-dire

$$\varphi = p_4 + \psi(x, y, z, p_1, p_2, p_3).$$

On aura identiquement

$$(53)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_3} \\ &\quad + q_1 \left[P_3^3 p_3 + 3 p_2^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) + R p_2 + R' \right] = \psi \frac{\partial f}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons encore appliquer ici la remarque (II), en faisant $h = 2$, $i = -1$; nous en déduisons

$$\psi = \frac{X(x)}{p_1} p_3^2 + v(x, y, z, p_1, p_2) p_3 + w(x, y, z, p_1, p_2);$$

en portant cette valeur dans l'équation (53), les termes en p_3^2 disparaissent; écrivons que le coefficient de p_3 est nul; il vient

$$(54)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + f \frac{\partial v}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial v}{\partial p_2} \\ &\quad + \frac{2X}{p_1} [P_2^2 p_2 + I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1] q_1 + q_1 P_3^3 = 0. \end{aligned}$$

La même remarque (II), appliquée à cette relation en faisant $h = 2$, $i = 0$, nous montre qu'on a

$$v = \frac{X_1(x)}{p_1^2} p_2^2 + v_1(x, y, z, p_1) p_2 + v_2(x, y, z, p_1);$$

en portant cette valeur dans l'équation (54) et en exprimant qu'on a une identité par rapport à p_2, il vient

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial v_1}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial v_1}{\partial p_1} + a v_1 + \frac{2X_1}{p_1}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ & \qquad + \frac{2X}{p_1}\left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial v_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial v_2}{\partial p_1} + v_1\left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ & \qquad + 2X[I p_1^2 + J p_1 + K] + 3\frac{\partial a}{\partial x} + 4p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (55) s'écrit encore

$$(57) \quad \begin{aligned} & p_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + a p_1 \left[p_1 \frac{\partial v_1}{\partial p_1} + v_1\right] + (2X_1 + 4X)\frac{\partial a}{\partial x} \\ & \qquad + p_1(2X_1 + 6X)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Si $(2X_1 + 4X)(2X_1 + 6X) \neq 0$, on tirera de cette équation, par un procédé souvent employé, un système de relations de la forme (Γ'); en portant ensuite les expressions (Γ') dans l'équation précédente, on trouve sans peine

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \qquad \alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

on obtient donc le système (Γ).

20. Supposons qu'on ait $2X_1 + 6X = 0$. L'équation (57) se réduit à

$$2X \frac{\partial a}{\partial x} = a p_1 \left[\frac{\partial v_1 p_1}{\partial p_1}\right] + p_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

Nous mettrons à part le cas où l'on aurait $X = 0$ et par suite $X_1 = 0$; ce cas sera étudié plus loin. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait au sujet de l'équation (41) montre qu'on peut déduire de là

$$c_1 = \frac{X_2(x)}{p_1} \operatorname{Log} p_1 + \frac{n(x, z)}{p_1},$$

et par suite

$$(58) \qquad 2X \frac{\partial a}{\partial x} = aX_2 + \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Considérons l'équation (56); en y remplaçant c_1 par la valeur précédente, elle s'écrit

$$(59) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial c_2}{\partial z} + ap_1 \frac{\partial c_2}{\partial p_1} + [X_2 \operatorname{Log} p_1 + n] \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] \\ &\quad + 2X[Ip_1^2 + Jp_1 + K] + 3 \frac{\partial a}{\partial x} + 4p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Posons $\dfrac{\partial^3 c_2}{\partial p_1^3} = c'_2$ et dérivons trois fois successivement par rapport à p_1 cette relation; il vient

$$\frac{\partial c'_2}{\partial z} + a \left[3c'_2 + p_1 \frac{\partial c'_2}{\partial p_1} \right] - \frac{X_2}{p_1^2} \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) + \frac{2X_2}{p_1^3} \frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

En multipliant tous les termes par p_1^3, on obtient une relation de la forme (41); si $X_2 \neq 0$, on en déduit donc le système (Γ') et en portant ces relations (Γ') dans la précédente on en déduit

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire encore le système (Γ).

Si $X_2 = 0$, on a

$$c_1 = \frac{n(x, z)}{p_1},$$

et le terme logarithmique disparaît dans l'équation (59).

Posons alors

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial p_1^2} = c'_2$$

et dérivons deux fois par rapport à p_1 cette équation (59); il vient

$$\frac{\partial c'_2}{\partial z} + a \left(2c'_2 + \frac{\partial c'_2}{\partial p_1} \right) + 4XI = 0.$$

D'où l'on tire une relation de la forme

$$I = \alpha(x, z)a + \alpha_1(x, z),$$

et en portant cette relation dans la précédente, on constate facilement qu'on doit avoir

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Par suite,

$$I = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z} - a^2\right) + a\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = \alpha(x, z)a + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Cette relation, jointe à la relation déjà trouvée (58), constitue un système de la forme (Δ).

21. Supposons maintenant $2X_1 + 4X = 0$ et mettons toujours à part le cas où l'on aurait $X = X_1 = 0$.

L'équation (57) se réduit alors à

$$2X\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + a\frac{\partial v_1 p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0.$$

D'où l'on déduit, toujours par le même procédé,

$$v_1 p_1 = -2X\alpha p_1 + X_2(x)$$

et

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \tag{60}$$

L'équation (56) s'écrit alors

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} + ap_1\frac{\partial v_2}{\partial p_1} + (X_2 - 2X\alpha p_1)\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]$$
$$+ 2X[Ip_1^2 + Jp_1 + K] + 3\frac{\partial a}{\partial x} + 4p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0.$$

Or, en tenant compte de la relation (60), on a

$$I = a\left(2\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2\right) + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2};$$

l'équation précédente peut donc se mettre sous la forme

$$2Xp_1\left(J - \alpha\frac{\partial a}{\partial x}\right) + 2X\left[K + \frac{X_2 + 3}{2X}\frac{\partial a}{\partial x}\right] = \lambda(x, z, p_1)a + \mu(x, z, p_1).$$

Cette relation a absolument la forme (50), au facteur $\frac{3\mathrm{X}}{p_1}$ près; il suffit d'y poser $\frac{\mathrm{X}_2+3}{3\mathrm{X}} = \mathrm{X}_1$.

Toutes les conclusions que l'on a tirées de cette relation (50) subsistent, puisque nous avons encore

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)a + \frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

donc a vérifie dans ce cas un système de relations de la forme (Γ).

22. Supposons enfin $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 = 0$.

L'équation (57) se réduit dans ce cas à

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} + a\left[p_1 \frac{\partial v_1}{\partial p_1} + v_1\right] = 0,$$

d'où l'on tire

$$v_1 p_1 = \mathrm{X}_2(x).$$

L'équation (56) peut donc s'écrire

$$(61) \qquad \frac{\partial v_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial v_2}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x}(\mathrm{X}_2 + 3) + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)(\mathrm{X}_2 + 4) = 0.$$

Si $(\mathrm{X}_2 + 3)(\mathrm{X}_2 + 4) \neq 0$, on peut encore déduire de cette équation le système de relations (Γ). Si l'un ou l'autre de ces deux facteurs est nul, nous aurons recours à l'équation qui détermine w, obtenue en égalant à zéro le terme indépendant de p_3 dans l'équation (53) :

$$(62) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w}{\partial z} + f \frac{\partial w}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial w}{\partial p_2} \\ &+ v q_1 [\mathrm{P}_2^2 p_2 + \mathrm{I} p_1^3 + \mathrm{J} p_1^2 + \mathrm{K} p_1] \\ &+ q_1\left[3 p_2^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + \mathrm{R} p_2 + \mathrm{R}'\right] = \frac{\partial f}{\partial p_1} w. \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer la remarque (II), en faisant $i = -1$, $h = 3$; nous en déduisons

$$w = \frac{\mathrm{X}_4(x)}{p_1^2} p_2^3 + w_1 p_2^2 + w_2 p_2 + w_3;$$

on a d'ailleurs

$$v = v_1 p_2 + v_2, \qquad v_1 p_1 = \mathrm{X}_2,$$

les quantités w_1, w_2, w_3 étant des fonctions de x, y, z, p_1. En portant cette expression de w dans l'équation (62), on en tire

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + f \frac{\partial w_1}{\partial p_1} + \frac{3 X_3}{p_1^2} \left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] q_1$$
$$+ w_1 q_1 a + v_1 q_1 P_2^2 + 3 q_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) = 0,$$

d'où

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0. \\ & \frac{\partial w_1}{\partial z} + a \left[p_1 \frac{\partial w_1}{\partial p_1} + w_1 \right] + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{3 X_3 + 2 X_2}{p_1} + 3 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) (X_3 + X_2 + 1) = 0. \end{aligned} \right.$$

On a en outre, en partant toujours de l'équation (62),

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} + f \frac{\partial w_2}{\partial p_1} + 2 w_1 q_1 \left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right]$$
$$+ v_2 q_1 P_2^2 + v_1 q_1 [I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1] + q_1 R = 0.$$

d'où

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0. \\ & \frac{\partial w_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial w_2}{\partial p_1} + 2 w_1 p_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] \\ & \quad + v_2 \left[2 \frac{\partial a}{\partial x} + 3 p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + X_2 [I p_1^2 + J p_1 + K] + R = 0. \end{aligned} \right.$$

avec

$$R = 6 I p_1^2 + p_1 \left[5 J - \frac{\partial^2 a}{\partial x \, \partial z} - a \frac{\partial a}{\partial x} \right] + 3 K.$$

Supposons maintenant qu'on ait $X_2 + 3 = 0$. L'équation (61) montre qu'on a

$$(65) \qquad \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z) a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

avec

$$v_2 = - \alpha(x, z) p_1 + X_4(x);$$

en portant cette expression dans l'équation (63), il est facile de voir qu'on en tirera

$$\frac{\partial a}{\partial x} = X(x)a + \beta_1(x, z),$$

à moins que $3X_3 + 2X_2 = 0$, c'est-à-dire $X_3 = 2$.

S'il en est ainsi, cette équation se réduit à

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} + a\frac{\partial w_1 p_1}{\partial p_1} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad w_1 p_1 = X_5(x).$$

L'équation (64) s'écrit alors

$$(66)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial w_2}{\partial z} + ap_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1} + 2X_5\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ &\quad + (X_4 - \alpha p_1)\left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] - 3[Ip_1^2 + Jp_1 + K] + R = 0; \end{aligned}$$

en remplaçant I, J, K, R par leurs valeurs et en tenant compte de la relation (65), cette équation se ramène, après quelques calculs faciles, à la forme

$$(67)\qquad \frac{\partial a}{\partial x}[(\alpha - a)p_1 + 2X_4 + 2X_5] = \lambda(x, z, p_1)a + \mu(x, z, p_1).$$

Si $X_4 + X_5 \neq 0$, on en tire la deuxième équation (Γ). Si $X_3 + X_5 = 0$, on en déduit

$$(68)\qquad \frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).$$

D'ailleurs, en portant cette expression dans l'équation en w_2, on trouve $\gamma = \frac{\partial \beta}{\partial z}$. Écrivons alors les conditions d'intégrabilité entre les équations (65) et (68); on trouve sans difficulté que deux de ces conditions sont

$$2\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial z} + 3\gamma = \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial z};$$

d'où l'on déduit

$$\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial z} = 0.$$

On a par suite

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad \gamma = \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

et la relation (68) peut s'écrire

$$\frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}(\alpha - a);$$

puisque $(\alpha - a)$ ne peut pas être nul, par hypothèse, on a donc

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

et cette équation, jointe à la relation (65), forme encore un système (Γ).

Nous opérerons de même si c'est le facteur $(X_2 + 4)$ qui est nul. Dans ce cas, l'équation (61) permet d'écrire

$$(69)\qquad \frac{\partial a}{\partial x} = X(x)a + \beta(x, z),$$

$$v_2 = X \operatorname{Log} p_1 + v'_2(x, z), \qquad \frac{\partial v'_2}{\partial z} = \beta.$$

D'autre part, l'équation (63) permettra d'écrire la première relation (Γ), sauf toutefois si l'on a $X_3 + X_2 + 1 = 0$, c'est-à-dire $X_3 = 3$.

Dans ce cas elle se réduit à

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} + a\frac{\partial w_1 p_1}{\partial p_1} + \frac{aX + \beta}{p_1} = 0$$

et l'on en tire

$$w_1 p_1 + X \operatorname{Log} p_1 + v'_2 + X_4(x) = 0$$

ou encore

$$w_1 p_1 + v_2 + X_4(x) = 0.$$

L'équation (64) s'écrit alors

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial w_2}{\partial p_1} - 2(v_2 + X_4)\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + v_2\left[2\frac{\partial a}{\partial x} + 3p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] - 4(\mathrm{I}p_1^2 + \mathrm{J}p_1 + \mathrm{K}) + \mathrm{R} = 0$$

ou

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial w_2}{\partial p_1} - 2X_4\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + p_1(X \operatorname{Log} p_1 + v'_2)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) - 4(\mathrm{I}p_1^2 + \mathrm{J}p_1 + \mathrm{K}) + \mathrm{R} = 0.$$

Si nous dérivons trois fois successivement cette expression par rapport à p_1, il vient, puisque R est un polynome du second degré en p_1,

$$\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\left(\frac{\partial w_2}{\partial z}\right) + a\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\left(p_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1}\right) - \frac{X}{p_1^2}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = 0.$$

Si $X \neq 0$, on tire facilement de là la première relation (Γ). Si $X = 0$ l'équation en w_2 s'écrit, en remplaçant R par sa valeur,

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} + ap_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1} - 2X_1\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]$$
$$+ p_1 v_2'\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + 2I p_1^2 + J p_1 - p_1\left(\frac{\partial^2 a}{\partial z\, \partial x} + a\frac{\partial a}{\partial x}\right) - K = 0;$$

d'où, en dérivant deux fois par rapport à p_1,

$$\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial z}\right) + a\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(p_1\frac{\partial w_2}{\partial p_1}\right) + 4I = 0;$$

par suite, d'après un raisonnement souvent répété,

$$I = \alpha(x, z)a + \alpha'(x, z).$$

En transportant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve sans difficulté $\alpha' = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}$; en joignant la relation

$$I = \alpha(x, z)a + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

à la relation (69) déjà trouvée, on obtient le système (Δ).

Donc, lorsque n a l'une des valeurs 2, 3 ou 4, le coefficient $a(x, y, z)$ doit satisfaire à l'un des deux systèmes (Γ) ou (Δ).

23. Étudions maintenant le cas où $n > 4$; on a alors $n - 1 > 3$ et par suite, en appelant $p_n + \varphi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1})$ le numérateur de l'invariant,

$$(70)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1\frac{\partial \varphi}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} + M_{n-1}^{n-1} p_{n-1} + M_{n-1}^{n-2} p_{n-2} + K_{n-1} = \varphi\frac{\partial f}{\partial p_1},$$

K_{n-1} ne dépendant pas des dérivées d'ordre supérieur à $(n - 3)$.

Posons $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} = \varphi'$ et soit k l'ordre maximum des dérivées qui figurent dans φ'; en dérivant l'équation précédente par rapport à p_{n-1}, il vient

$$(71) \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi'}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial \varphi'}{\partial p_k} + \mathrm{M}_{n-1}^{n-1} = 0.$$

Si $k \leqq 1$, cette équation s'écrit, en explicitant les termes,

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + a p_1 q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial p_1} + \left[(n-1)\frac{\partial a}{\partial x} + n p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] q_1 = 0,$$

et l'on en tire facilement le système (Γ).

Supposons $k = 2$. On a, dans ce cas,

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + a p_1 q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi'}{\partial p_2} + q_1 \left[(n-1)\frac{\partial a}{\partial x} + n p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] = 0.$$

La remarque (II) nous montre alors qu'on a

$$\varphi' = \frac{\mathrm{X}(x)}{p_1} p_2 + \mu(x, y, z, p_1),$$

d'où

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} + a p_1 q_1 \frac{\partial \mu}{\partial p_1}$$
$$+ \frac{\mathrm{X}}{p_1} q_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} p_1 + p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + q_1 \left[(n-1)\frac{\partial a}{\partial x} + n p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] = 0;$$

cette équation peut s'écrire

$$(72) \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial \mu}{\partial p_1} + (\mathrm{X} + n - 1)\frac{\partial a}{\partial x} + p_1(\mathrm{X} + n)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + \alpha^2\right) = 0.$$

Si aucun des deux coefficients $(\mathrm{X} + n - 1)$, $(\mathrm{X} + n)$ n'est nul, on tire de là le système (Γ) en appliquant toujours le même procédé. Il n'y a donc qu'à étudier le cas où l'un de ces termes est nul.

Si $\mathrm{X} + n = 0$, on déduit de la relation précédente

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial a}{\partial x} = \mathrm{X}_1(x) a + \beta_1(x, z), \\ & \mu = \mathrm{X}_1 \operatorname{Log} p_1 + \mu_1(x, z), \qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial z} = \beta_1. \end{aligned} \right.$$

Si $X + n - 1 = 0$, on déduit de la même relation

$$(74)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z) + \dfrac{\partial \alpha}{\partial z}, \\ \mu = -\alpha(x, z) p_1 + X_1(x). \end{cases}$$

Dans les deux cas, en appelant m la valeur de $-X$, qui est n ou $n-1$, on a

$$\varphi = \left(\mu - \frac{m}{p_1} p_2\right) p_{n-1} + \varphi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2});$$

en portant cette expression dans l'équation (70), le terme en p_{n-1} disparaît et il reste

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{n-3} f}{dx^{n-3}}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{n-2}}$$
$$+ \left(\mu - \frac{m}{p_1} p_2\right) [M_{n-2}^{n-2} p_{n-2} + \ldots] + M_{n-1}^{n-2} p_{n-2} + \ldots = \frac{\partial f}{\partial p_1} \varphi_1,$$

les termes non écrits ne contenant pas les dérivées d'ordre supérieur à $(n-3)$.

Nous poserons $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial p_{n-2}} = \varphi'_1$; en dérivant par rapport à p_{n-1} l'identité précédente, il vient

$$(75)\qquad \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi'_1}{\partial p_1} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) \frac{\partial \varphi'_1}{\partial p_h} + \left(\mu - \frac{m}{p_1} p_2\right) M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = 0,$$

h étant l'ordre maximum des dérivées dont dépend effectivement φ'_1; remarquons que si l'on remplace M_{n-2}^{n-2} et M_{n-1}^{n-2} par leurs expressions on a

$$\left(\mu - \frac{m}{p_1} p_2\right) M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = q_1 [\lambda p_2 + \lambda_1],$$

en posant

$$\lambda = -\frac{m}{p_1}(n-2) \frac{\partial a}{\partial x} + \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) \frac{(n-1)(n-2m)}{2},$$

$$\lambda_1 = \mu P_{n-2}^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2} L p_1^2$$
$$+ p_1 \left[(n-1)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z\, \partial x} + \frac{n(3n-5)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x}\right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2} K,$$

en conservant toujours aux symboles P, I et K la même signification (Chap. II, n° **11**); le terme λ ne peut être identiquement nul, d'après les hypothèses faites sur les valeurs de m et n, que si l'on a à la fois

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = 0,$$

car le coefficient $(n-1)(n-2m)$ n'est nul pour aucune des deux valeurs de m. Or c'est là une forme particulière du système (Γ). Il s'ensuit que si l'on a $h < 2$ dans l'équation (75), on devra avoir $\lambda = 0$ et par suite le système précédent.

Nous pouvons donc supposer $h \geq 2$.

24. Prenons d'abord $h = 2$. On a alors

$$(76) \qquad \frac{\partial \varphi_1'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1'}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_2} + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0.$$

D'après la remarque (II), nous pouvons écrire

$$\varphi_1' = \frac{X_2(x)}{2p_1^2} p_2^2 + u(x, y, z, p_1)p_2 + v(x, y, z, p_1);$$

en portant cette expression dans l'équation précédente et en égalant à zéro le coefficient de p_2, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + ap_1 q_1 \frac{\partial u}{\partial p_1} + aq_1 u + \frac{X_2}{p_1^2} q_1 \left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + \lambda q_1 = 0$$

qui peut encore s'écrire

$$(77) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} + a\frac{\partial u p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x}\,\frac{X_2 - m(n-2)}{p_1} \\ &\quad + \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\left[X_2 + \frac{(n-1)(n-2m)}{2}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si aucun des deux coefficients de $\frac{\partial a}{\partial x}$ et de $\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ n'est nul, on tirera encore de là le système (Γ); il est facile de le vérifier; supposons donc que l'un d'eux soit nul et posons $X_2 = m'$, m' étant égal suivant le cas à $m(n-2)$ ou $\frac{(2m-n)(n-1)}{2}$.

Écrivons maintenant que le terme indépendant de p_2 dans l'équation (76) est nul :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + q_1\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial p_1} + uq_1\left[p_1\frac{\partial a}{\partial x} + p_1^2\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + q_1\lambda_1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$(78)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + ap_1\dfrac{\partial v}{\partial p_1} + up_1\left[\dfrac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + \mu P_n^{n-2} + \dfrac{n(n-1)}{2}\mathrm{I}p_1^2 \\ \qquad + p_1\left[(n-1)^2\dfrac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial z} - \dfrac{n(3n-5)}{2}a\dfrac{\partial a}{\partial x}\right] + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\mathrm{K} = 0. \end{cases}$$

Supposons alors que $m' = m(n-2)$; l'équation (77) s'écrit

$$\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\frac{n(n-1)-2m}{2} + a\frac{\partial u p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

d'après les hypothèses faites sur les valeurs de m et n, on peut constater facilement que le coefficient $[n(n-1)-2m]$ n'est jamais nul; on tire donc de cette relation

$$(79)\qquad \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha'(x,z)a + \frac{\partial \alpha'}{\partial z}.$$

Si $m = n$, cette relation, jointe à la première relation (73), forme un système (Γ).

Si $m = n-1$, la première relation (74) comparée à celle-ci montre que $\alpha' = \alpha$; on aura alors

$$up_1 = k\alpha p_1 + \mathrm{X}_1(x),$$

en posant

$$k = -\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Portons cette expression ainsi que celle de μ dans l'équation (78); si l'on tient compte de la relation (79), on sait que I est une quantité de la forme $\alpha_1(x,z)a + \alpha_2(x,z)$; cette équation (78) prendra donc la forme

$$
\begin{aligned}
&A(x, z, p_1)a + B(x, z, p_1)\\
&\quad + p_1 \left\{ \frac{\partial a}{\partial x}[k\alpha - (n-2)\alpha] + (n-1)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x\, \partial z} + \frac{n(3n-5)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x} \right\}\\
&\qquad\qquad + X_3(x)\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}K = 0.
\end{aligned}
$$

On en déduit, par le procédé de calcul appliqué à l'équation (41),

$$
\frac{\partial a}{\partial x}\alpha(k - n + 2) + (n-1)^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial z} + \frac{n(3n-5)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).
$$

$$
K + X(x)\frac{\partial a}{\partial x} = m(x, z)a + n(x, z).
$$

Si l'on tient compte de la relation (79), en faisant $\alpha' = \alpha$ et en remplaçant k par sa valeur, on peut voir que la première de ces relations s'écrit aussi

$$
\frac{n^2 - 3n + 4}{2} \frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).
$$

Le coefficient $(n^2 - 3n + 4)$ n'est jamais nul.

Nous obtenons ainsi un système déjà étudié (52) : on a vu qu'on pouvait en déduire le système (Γ).

Supposons maintenant $m' = \frac{(2m-n)(n-1)}{2}$; l'équation (77) s'écrit

$$
\frac{n(n-1) - 2m}{2p_1} \frac{\partial a}{\partial x} = a \frac{\partial u p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial u}{\partial z}; \tag{80}
$$

on en tire immédiatement

$$
\frac{\partial a}{\partial x} = X_1(x)a + \beta_1(x, z). \tag{81}
$$

Si $m = n - 1$, cette relation forme avec la première relation (74) un système (Γ).

Si $m = n$, l'équation (80) montre qu'on a, en posant $k = \frac{n(n-3)}{2}$,

$$
u p_1 = k X_1 \log p_1 + k \mu_1 + X_1'(x),
$$

X_1 et μ_1 représentant les mêmes fonctions que dans le système (73);

l'équation (78) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$(80)\quad \frac{\partial c}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial c}{\partial p_1} + k X_1 \operatorname{Log} p_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]$$
$$+ X_1 \operatorname{Log} p_1 \left[(n-2)\frac{\partial a}{\partial x} + p_1(n-1)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + \varphi(x, y, z, p_1) = 0.$$

φ étant un polynome du second degré en p_1. Supposons $X_1 \neq 0$; si nous dérivons trois fois successivement par rapport à p_1 cette identité, en tenant compte de ce que $\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}(p_1 \operatorname{Log} p_1) = -\frac{1}{p_1^2}$, il vient

$$\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right) + a\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\left(p_1 \frac{\partial c}{\partial p_1}\right) + \frac{2}{p_1^3}\frac{\partial a}{\partial x} X_1(k+n-2) - \frac{X_1}{p_1^2}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)(k+n-1) = 0.$$

Or, on a $k + n - 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$; ce coefficient n'étant pas nul, on tire encore de là la relation

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)a + \frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

il suffit en effet de multiplier l'équation précédente par p_1^3 et de dériver ensuite par rapport à p_1. Comme nous avons déjà la relation (81), nous obtenons donc encore le système (Γ).

Faisons maintenant $X_1 = 0$; μ et $u p_1$ sont alors indépendants de p_1 et l'équation (78) prend la forme

$$\frac{\partial c}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial c}{\partial p_1} + \frac{n(n-1)}{2} \mathrm{I} p_1^2 + \mathrm{A}(x, z)p_1 + \mathrm{B}(x, z) = 0;$$

en dérivant deux fois successivement par rapport à p_1, on en tire

$$\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right) + a\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\left(p_1 \frac{\partial c}{\partial p_1}\right) + n(n-1)\mathrm{I} = 0,$$

et par suite

$$\mathrm{I} = \alpha(x, z)a + \alpha_1(x, z).$$

En portant cette expression dans l'équation précédente, on constate que la condition d'intégrabilité exige qu'on ait $\alpha_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}$.

Cette relation, jointe à la relation (81), forme un système (Δ).

En définitive, lorsque $h = 2$, on a nécessairement l'un des deux systèmes (Γ) ou (Δ).

25. Considérons maintenant le cas $h = 3$. On a

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0.$$

La remarque (II) permet d'écrire

$$\varphi_1 = \frac{X_2(x)}{p_1} p_3 + \varphi_2(x, y, z, p_1, p_2)$$

et, par suite,

$$(82) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} \\ &\quad + \frac{X_2}{p_1} q_1 [P_2^2 p_2 + I p_1^3 + J p_1^2 + K p_1] + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0. \end{aligned}$$

La même remarque (II), appliquée à cette nouvelle équation, montre que

$$\varphi_2 = \frac{X_3(x)}{2 p_1^2} p_2^2 + u(x, y, z, p_1) p_2 + v(x, y, z, p_1).$$

En portant cette expression dans l'équation (82) et en écrivant qu'on a une identité en p_2, on obtient deux relations, dont la première est

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial u}{\partial z} + f \frac{\partial u}{\partial p_1} + a q_1 u + q_1 \frac{X_3}{p_1^2} \left[p_1 \frac{\partial a}{\partial x} - p_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + \frac{X_2}{p_1} q_1 P_2^2 + q_1 \lambda = 0$$

qui s'écrit encore

$$(83) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} + a \frac{\partial u p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{X_3 + 2X_2 - m(n-2)}{p_1} \\ &\quad + \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \left[X_3 + 3X_2 + \frac{(n-1)(n-2m)}{2} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si aucun des coefficients de $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ n'est nul, les conditions qu'on tire de l'équation précédente conduisent encore au système (Γ), comme il est facile de le vérifier. Nous supposerons donc que l'un d'eux au moins est nul; les deux coefficients seront nuls à la fois si l'on a

$$X_2 = \frac{2m - n(n-1)}{2} \qquad X_3 = m(n-4) + n(n-1).$$

La deuxième relation qu'on déduit de l'équation (82) est

$$(84)\quad \frac{\partial v}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial z} + f \frac{\partial v}{\partial p_1} + u p_1 q_1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \right) \right] + X_2 q_1 (I p_1^2 + J p_1 + K) + q_1 \lambda_1 = 0.$$

1° Supposons $X_3 + 2X_2 = m(n-2)$ et

$$X_3 + 3X_2 = \frac{(2m - n)(n-1)}{2}.$$

On tire alors facilement de l'équation (83) la relation

$$(85)\qquad \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha'(x, z) a + \frac{\partial \alpha'}{\partial z}.$$

Si dans ce cas $m = n$, on a en outre les relations (73) et par suite le système (Γ).

Si $m = n - 1$, on a le système (74); on en déduit $\alpha' = \alpha$; en outre, en posant $X_1(x) = X_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, on tire de l'équation (83)

$$u p_1 = -\alpha X_1 p_1 + X_3(x).$$

En tenant compte de ces relations, ainsi que de la valeur de μ qui est donnée par les relations (74), on peut constater que l'équation (84) prend la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$A(x, z, p_1) a + B(x, z, p_1) + p_1 \left[X_2 J - \alpha X_1 \frac{\partial a}{\partial x} - \alpha (n-2) \frac{\partial a}{\partial x} + (n-1)^2 \frac{\partial a}{\partial x} (\alpha - 2a) + \frac{n(3n-5)}{2} a \frac{\partial a}{\partial x} \right] + [X_3 + X_1(n-2)] \frac{\partial a}{\partial x} + K \left[X_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right] = 0.$$

En tenant compte de (85), on a

$$J = 2 \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} + 3a \frac{\partial a}{\partial x} = (2\alpha - a) \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} a + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}.$$

On peut faire entrer dans A et B les termes $p_1\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}a + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\right)$ et dans ces conditions l'équation précédente s'écrit

$$(86)\quad \left(X_2 + \frac{n^2 - 3n + 4}{2}\right)(\alpha - a)\frac{\partial a}{\partial x}p_1$$
$$+ K\left[X_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right] + [X_3 + X_1(n-2)]\frac{\partial a}{\partial x} = Aa + B.$$

Le coefficient de K ne peut pas être nul dans ce cas, car il est égal à X_1 qui est précisément le coefficient de $\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ dans l'équation (83) si l'on fait $m = n - 1$.

Donc, si $X_2 + \frac{n^2 - 3n + 4}{2} \neq 0$, on tirera de là le système déjà étudié (52) :

$$(\alpha - a)\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \gamma(x, z),$$
$$K + X(x)\frac{\partial a}{\partial x} = m(x, z)a + n(x, z).$$

On a vu qu'on pouvait en déduire le système (Γ).

Supposons donc qu'on ait

$$X_2 + \frac{n^2 - 3n + 4}{2} = 0:$$

le coefficient de K se réduit à -1, et l'on peut toujours écrire

$$K + X(x)\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).$$

En portant cette expression dans l'équation (84), il vient

$$\frac{\partial v}{\partial y} + q_1\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial p_1} + \mu p_1^2\left(\alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)q_1$$
$$+ X_2 q_1 I p_1^2 + q_1(n-1)p_1\mu\left(\alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \frac{n(n-1)}{2}I p_1^2 q_1 = (\beta a + \gamma)q_1,$$

en outre

$$I = a\left(2\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2\right) + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2};$$

en égalant à zéro le coefficient de a et le terme indépendant de a et en écrivant les conditions d'intégrabilité entre les équations obtenues, on trouve, par un calcul facile, $\frac{\partial\beta}{\partial z} = 0$. Nous écrirons $\beta = X_1$ et l'on aura les relations

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = a\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + X\frac{\partial a}{\partial x} = X_1 a + \gamma(x, z).$$

La condition d'intégrabilité s'écrit

$$(87)\quad \begin{aligned} &-2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x} - a^2 X_1 \\ &+ a\left[X\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2\gamma + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\right] + \alpha\gamma + \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^2\,\partial z} + X\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial z} = X_1\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}; \end{aligned}$$

en dérivant cette condition par rapport à x, on obtient une relation de la forme

$$(88)\quad \begin{aligned} &-4\frac{\partial a}{\partial x}\left[X_1 a + \gamma - X\frac{\partial a}{\partial x}\right] \\ &+ \frac{\partial a}{\partial x}[-2aX_1 + K(x, z)] + H(x, z)a + L(x, z) - a^2\frac{\partial X_1}{\partial x} = 0; \end{aligned}$$

en ajoutant à celle-ci la précédente multipliée par $2X$, il vient, en supposant $X \neq 0$,

$$(89)\quad \frac{\partial a}{\partial x}[-6X_1 a + K(x, z)] - a^2\left(2X_1 X + \frac{\partial X_1}{\partial x}\right) + H(x, z)a + L(x, z) = 0,$$

en changeant la signification de K, H, L.

Si $X_1 \neq 0$, on peut tirer de là

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{ka^2 + Ka + L}{a + K}, \qquad k = -\frac{1}{6}\left[2X + \frac{\partial \operatorname{Log} X_1}{\partial x}\right];$$

en écrivant la condition d'intégrabilité entre cette équation et celle qui donne $\frac{\partial a}{\partial z}$, on obtient, en chassant le dénominateur $(a + K)^2$, un polynome du quatrième degré en a dont le terme en a^4 se calcule sans difficulté : son coefficient est égal à k; on a donc nécessairement $k = 0$.

Dans ces conditions, si l'on porte la valeur de $\frac{\partial a}{\partial x}$ dans l'équation (87), en opérant de la même manière on a évidemment un polynome du quatrième degré en a, dont le terme du plus haut degré est $-X_1 a^4$; donc $X_1 = 0$. Si K n'est pas nul dans l'équation (89), on en tirera la relation

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z) a + \delta(x, z)$$

et, en portant cette expression dans l'équation (87) où l'on a fait $X_1 = 0$, on voit immédiatement qu'on doit avoir $\beta = 0$; le système de relations que vérifie a se ramène donc au système (Γ). Supposons $K = 0$, on vérifie facilement qu'on a

$$K = 3\left[X \frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2\gamma + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\right].$$

Si K est nul, l'équation (87) se réduit à la forme

$$-3\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x} + H(x, z) = 0;$$

c'est une équation du second degré en $\frac{\partial a}{\partial x}$; on aura donc

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)$$

et par suite encore le système (Γ).

Supposons enfin $X = 0$; si X_1 n'est pas nul, l'équation (88) donne

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{k a^2 + H a + L}{a + K}, \qquad k = -\frac{1}{6}\frac{\partial \operatorname{Log} X_1}{\partial x}.$$

C'est la formule déjà trouvée plus haut, où l'on aurait fait $X = 0$.

Les raisonnements déjà faits prouvent qu'on a nécessairement $X_1 = 0$.

Dans ce cas, l'équation (88) s'écrit

$$\frac{\partial a}{\partial x}\left(-4\gamma + 3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\right) + a\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} + 2\gamma\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^3 \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial z}.$$

Si $3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - 4\gamma \neq 0$, on tirera de là une relation de la forme

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z) a + \delta(x, z)$$

et l'on montrera comme précédemment que β doit être nul, en se servant de l'équation (87). Si $3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 4\gamma$, l'équation précédente doit se réduire à une identité en a, d'où les conditions

$$3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 4\gamma, \qquad \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} = 0, \qquad 2\gamma\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x\, \partial z}.$$

Or, d'après la première, $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$; donc $\gamma\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$; en comparant cette relation avec $3\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 4\gamma$, on voit que, dans tous les cas, $\gamma = 0$ et $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 0$; l'équation (87) se réduit alors à

$$-2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial z},$$

d'où l'on tire encore $\frac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z)$ et par suite le système (Γ).

2° Supposons qu'on ait dans l'équation (83)

$$X_3 + 3X_2 = \frac{(2m-n)(n-1)}{2} \qquad \text{et} \qquad X_3 + 2X_2 \neq m(n-2).$$

De cette équation (83) on déduira la relation

$$\frac{\partial a}{\partial x} = X_1 a + \beta(x, z).$$

Si $m = n - 1$, on a le système (74) et par suite le système (Γ).

Si $m = n$, les fonctions X_1 et β sont les mêmes que dans les relations (73) et l'on aura

$$\mu = X_1 \operatorname{Log} p_1 + \mu_1(x, z),$$
$$ap_1 = -X_4[X_1 \operatorname{Log} p_1 + \mu_1(x, z)] + X_5(x),$$

en posant

$$X_4 = X_2 + \frac{n(n-1)-2m}{2} = X_2 + \frac{n(n-3)}{2}.$$

L'équation (84) prend alors la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1} - X_4 X_1 \operatorname{Log} p_1\left[\frac{\partial a}{\partial x} + p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right]$$
$$+ X_1 \operatorname{Log} p_1\left[(n-2)\frac{\partial a}{\partial x} + p_1(n-1)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] + \varphi(x, y, z, p_1) = 0,$$

φ étant un polynome du second degré en p_1. Cette équation est absolument analogue à l'équation (80)' : nous pouvons donc en déduire le système (Γ), sauf si l'on a $X_1[-X_4+n-1]=0$. Dans ce cas, l'équation (84) s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}+ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1}+\mathrm{I}p_1^2\left(X_2+\frac{n(n-1)}{2}\right)+A(x,y,z)p_1+B(x,y,z)=0.$$

Si $-X_4+n-1=0$, le coefficient de $\mathrm{I}p_1^2$ est égal à $(2n-1)$; on tirera de cette équation, par le procédé de dérivation ordinaire,

$$\mathrm{I}=\alpha(x,z)a+\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}$$

et par suite le système (Δ).

Si c'est le facteur X_1 qui est nul, on a alors $\frac{\partial a}{\partial x}=\beta(x,z)$; si dans la relation précédente le coefficient de I n'est pas nul, les mêmes conclusions subsistent.

Supposons donc $X_2+\frac{n(n-1)}{2}=0$, on a par suite

$$X_4=-n.$$

L'équation (84) s'écrit dans ce cas, en tenant compte de la valeur de $\frac{\partial a}{\partial x}$,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z}+ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1}&+(X_5-X_4\mu_1)\left[\beta+p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)\right]+X_2p_1\left[2\frac{\partial\beta}{\partial z}+3a\beta\right]\\&+X_2\frac{\partial\beta}{\partial x}+\mu_1\left[(n-2)\beta+p_1(n-1)\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)\right]\\&+p_1\left[(n-1)^2\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{n(3n-5)}{2}a\beta\right]+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{\partial\beta}{\partial x}=0.\end{aligned}$$

Le coefficient de $p_1\left(\frac{\partial a}{\partial z}+a^2\right)$ est

$$X_5-X_4\mu_1+(n-1)\mu_1=X_5+\mu_1(2n-1);$$

s'il n'est pas nul on en tirera

$$\frac{\partial a}{\partial z}+a^2=\alpha(x,z)a+\frac{\partial\alpha}{\partial z}$$

et par suite le système (Γ); s'il est nul, c'est que $\frac{\partial \mu_1}{\partial z} = 0$ et par suite $\beta = 0$ d'après les équations (74); donc $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$.

Nous étudierons ce cas en dernier lieu.

3° Supposons maintenant que les deux coefficients de $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ dans l'équation (83) soient nuls simultanément :

$$X_2 = \frac{2m - n(n-1)}{2}, \qquad X_3 = m(n-4) + n(n-1).$$

On en déduit $up_1 = X_4(x)$, X_4 étant une nouvelle fonction inconnue.

Si $m = n$, l'équation (84) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z} + ap_1\frac{\partial v}{\partial p_1} + \mathrm{I}p_1^2\left[X_2 + \frac{n(n-1)}{2}\right] \\ + X_1 \operatorname{Log} p_1\left[\frac{\partial a}{\partial x}(n-2) + p_1(n-1)\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)\right] \\ + A(x, y, z)p_1 + B(x, y, z) = 0.\end{aligned}$$

Si $X_1 \neq 0$, on en déduira, comme on l'a fait pour l'équation (80)$'$, la relation $\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ et par suite, en y joignant les relations (73), le système (Γ).

Si $X_1 = 0$, comme le coefficient de I est égal à n, on obtiendra, en dérivant deux fois l'équation précédente par rapport à p_1, la relation

$$\mathrm{I} = \alpha(x, z)a + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

et, en y joignant les équations (73), on obtient le système (Δ).

Supposons maintenant $m = n - 1$: on a le système (74) et l'équation (84) s'écrit

$$\begin{aligned}A(x, z, p_1)a + B(x, z, p_1) \\ + p_1\left[X_2 \mathrm{J} - \alpha(n-2)\frac{\partial a}{\partial x} + (n-1)^2\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} + \frac{n(3n-5)}{2}a\frac{\partial a}{\partial x}\right] \\ + \frac{\partial a}{\partial x}[X_4 + (n-1)X_1) + \left[X_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]K = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant X_2 par sa valeur dans ce cas, on constate que le coefficient de K est nul; si $X_4+(n-1)X_1$ n'est pas nul, on en déduira facilement la deuxième relation (Γ); si ce coefficient lui-même est nul, on voit facilement que la relation précédente se met sous la forme

$$(90)\qquad A(x, z, p_1)a + B(x, z, p_1) + p_1\frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) = \beta(x, z)a + \gamma(x, z).$$

Un calcul facile montre, en partant toujours de l'équation (84), qu'on a

$$Aa + B \equiv \frac{\partial v}{\partial z} + p_1 a\frac{\partial v}{\partial p_1} + I p_1^2\left(X_2 + \frac{n(n-1)}{2}\right) - \alpha p_1^2(n-1)\left(\alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right).$$

On en déduit immédiatement, en substituant dans l'équation (90),

$$\gamma = \frac{\partial \beta}{\partial z}.$$

On a donc le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial z} + a^2 \qquad &= \alpha(x, z)a + \frac{\partial \alpha}{\partial z},\\ \frac{\partial a}{\partial x}(\alpha - a) &= \beta(x, z)a + \frac{\partial \beta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ce système a déjà été étudié à la fin du n° **22**. Nous avons vu qu'on pouvait en tirer le système (Γ).

En résumé, lorsque $h = 3$, on a ou bien $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$ ou bien l'un des systèmes de relations (Γ) ou (Δ).

26. Revenons à l'équation (75) et supposons qu'on ait $h = 4$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1'}{\partial y} + q_1\frac{\partial \varphi_1'}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_2}\\ &\qquad + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)\frac{\partial \varphi_1'}{\partial_3 p} + \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)\frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_4} + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0. \end{aligned}$$

La remarque (II) permet d'écrire

$$\varphi_1' = \frac{X'(x)}{p_1} p_1 + \varphi_2(x, y, z, p_1, p_2, p_3),$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3} \\ + \frac{X'}{p_1} q_1 \left[P_3^3 p_3 + 3 p_2^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R p_2 + R' \right] + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0.\end{aligned}$$

Comme X' n'est pas nul par hypothèse, nous poserons $\varphi_2 = \frac{X'}{p_1}\psi$; il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p_3} \\ + q_1 \left[P_3^3 p_3 + 3 p_2^2 \left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + R p_2 + R' \right] + q_1 \frac{p_1}{X'}(\lambda p_2 + \lambda_1) = \psi \frac{\partial f}{\partial p_1}.\end{aligned}$$

Cette équation a la même forme que l'équation (53) trouvée dans le cas $n = 4$: il suffit en effet de remplacer dans celle-ci R par $R + \frac{\lambda p_1}{X'}$ et R' par $R' + \frac{\lambda_1 p_1}{X'}$ pour retrouver la précédente.

On peut se rendre compte tout d'abord que la valeur de R' n'est intervenue à aucun moment dans la discussion de l'équation (53); quant à la valeur de R elle-même, elle n'intervient que dans le cas particulier $X = X_1 = 0$ (nº **22**), dans la discussion de l'équation (64). Il est facile de voir les modifications qui s'introduisent; si $X_2 + 3 = 0$ on a la relation

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \tag{65}$$

et, au lieu de l'équation (67), nous aurons

$$\frac{\partial a}{\partial x}[(\alpha - a)p_1 + 2X_4 + 2X_5] - \frac{m(n-2)}{X'} \frac{\partial a}{\partial x} = m(x, z, p_1)a + n(x, z, p_1);$$

le raisonnement s'achève de la même manière, en remplaçant $2X_4 + 2X_5$ par $2X_4 + 2X_5 - \frac{m(n-2)}{X'}$.

Dans le cas où $X_2 + 4 = 0$, on peut voir facilement que le calcul n'utilise que le terme en p_1^2 dans l'expression de R ; or, en remplaçant R par $R + \frac{p_1}{X'}\lambda$, on ne change rien au terme en p_1^2 ; il n'y a donc rien à changer dans ce cas et les conclusions subsistent.

27. Supposons maintenant $h > 4$. L'équation (75) s'écrit

$$\frac{\partial \varphi_1'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1'}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) \frac{\partial \varphi_1'}{\partial p_h} + q_1(\lambda p_2 + \lambda_1) = 0.$$

La remarque (II) montre qu'on peut poser $\varphi_1' = \frac{X(x)}{p_1}(p_h + \varphi_2)$, et il vient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{d^{h-2} f}{dx^{h-2}}\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_{h-1}} + \left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) + \frac{q_1 p_1}{X}(\lambda p_2 + \lambda_1) = (p_h + \varphi_2) \frac{\partial f}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

On a ici $h - 1 > 3$; on peut donc écrire

$$\left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) = p_h \frac{\partial f}{\partial p_1} + M_{h-1}^{h-1} p_{h-1} + M_{h-1}^{h-2} p_{h-2} + K_{h-1}.$$

L'équation précédente ne diffère donc de l'équation (70) que par le terme supplémentaire $\frac{q_1 p_1}{X}(\lambda p_2 + \lambda_1)$ qu'on peut faire entrer dans K_{h-1}, puisque nous avons $h - 2 > 2$; comme les raisonnements faits au sujet de l'équation (70) ne font pas intervenir l'expression du terme K, nous pourrons les répéter au sujet de l'équation précédente, qui est d'ordre moindre. En réduisant ainsi l'ordre de cette équation, nous arriverons nécessairement à l'un des cas étudiés jusqu'ici si l'équation (71) correspondante ne contient que les dérivées d'ordre 2 au plus ; s'il n'est est pas ainsi, nous serons ramenés au cas étudié ci-après.

28. Nous avons étudié complètement le cas où l'on a $k \leqq 2$ dans l'équation (71).

Supposons maintenant $k > 2$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi'}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) \frac{\partial \varphi'}{\partial p_k} + M_{n-1}^{n-1} = 0.$$

La remarque (II) permet de poser

$$\varphi' = \frac{X(x)}{p_1}[p_k + \varphi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{k-1})]$$

et il vient

$$(91) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{k-2} f}{dx^{k-2}}\right) \frac{\partial \varphi_1}{d p_{k-1}} + \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right) + \frac{p_1}{X} M_{n-1}^{n-1} = (p_k + \varphi_1) \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Si $k - 1 > 3$, cette équation a la forme (70), sauf modification du terme K, qui n'intervient pas dans les calculs; comme elle est d'ordre moindre, nous avons ainsi opéré une réduction dans le problème et nous pouvons faire les mêmes raisonnements à partir de l'équation précédente.

Si $k - 1 = 3$, l'équation précédente n'est autre que l'équation (53) où l'on remplacerait R' par $R' + \frac{p_1}{X} M_{n-1}^{n-1}$; comme ce terme R' n'intervient pas dans les calculs, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, les conclusions subsistent.

Enfin si $k - 1 = 2$ l'équation précédente se déduit de l'équation (42) étudiée dans le cas $n = 3$ (n° **18**) en remplaçant dans celle-ci J par $J + \frac{n}{X}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right)$ et K par $K + \frac{n-1}{X}\frac{\partial a}{\partial x}$.

Or ces termes n'interviennent dans le calcul qu'à propos de l'équation (50); dans ce cas on a déjà trouvé, indépendamment des valeurs de J et K, la relation $\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha a + \frac{\partial \alpha}{\partial z}$; en faisant la substitution que nous venons d'indiquer, on ne changera donc pas la forme de la relation (50) : il suffira simplement de modifier la valeur de X_1. Les conclusions qu'on a tirées de cette équation ne dépendant d'aucune hypothèse sur la valeur de X_1, subsistent donc entièrement.

29. En résumé, en supposant simplement $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$, nous avons vu, dans tous les cas, que l'existence d'un invariant du système (I) entraîne soit $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$, soit l'un des deux systèmes de relations (Γ) ou (Δ).

Nous allons montrer tout d'abord que le système (Δ) peut se ramener lui-même à un système analogue à (Γ). En effet, soit le système

$$\frac{\partial a}{\partial x} = X(x)a + \beta(x, z), \tag{92}$$

$$a\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a}{\partial z} + a^2\right) = \gamma(x, z)a + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial z}. \tag{93}$$

La condition d'intégrabilité entre ces deux équations est de la forme

$$3\frac{\partial a}{\partial z}(aX + \beta) + 2Xa^3 + 3\beta a^2 + aM(x, z) + N(x, z) = 0, \tag{94}$$

Si X n'est pas nul, on peut poser $\beta = X\alpha(x, z)$ et l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$3\frac{\partial a}{\partial z} = -2a^2 - \alpha a + \frac{H(x, z)}{a + \alpha} + K(x, z).$$

En écrivant la condition d'intégrabilité entre cette équation et l'équation (92), et en chassant le dénominateur $(a + \alpha)^2$ dans l'expression ainsi obtenue, on a un polynome du quatrième degré en a qui doit être identiquement nul, puisqu'on suppose $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$; or le terme du quatrième degré se calcule immédiatement, son coefficient est $2X$: il faut donc nécessairement $X = 0$.

Dans ce cas la relation (94), si l'on suppose $\beta \neq 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$, prend la forme

$$\frac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)a + \alpha_1(x, z),$$

et, en portant cette expression dans la relation (93), on obtient

$$\alpha_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha^2 = \gamma, \qquad 2\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + 2\alpha\alpha_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial z},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + 2\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + 2\alpha\alpha_1.$$

Si l'on pose

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial z} + u(x, z),$$

cette relation se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial z} + 2u\alpha = 0. \tag{95}$$

Nous pouvons donc remplacer le système Δ par le suivant :

$$(\Gamma_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \beta(x, z), \\ \dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha(x, z)\,a + \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} + u(x, z). \end{cases}$$

Si l'on remarque que la condition d'intégrabilité entre les deux équations du système (Γ) exige $X = 0$, on voit que ce système (Γ) est un cas particulier du précédent, correspondant au cas où $u = 0$.

Ainsi, en supposant $\dfrac{\partial a}{\partial x} \neq 0$ et $\dfrac{\partial a}{\partial y} \neq 0$, la considération de l'invariant du système (I) nous conduit à l'existence du système (Γ_1).

Il est clair que la considération de l'invariant du système (II) nous conduirait de même au système

$$(\Gamma_1)' \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial y} = \beta'(y, z), \\ \dfrac{\partial a}{\partial z} + a^2 = \alpha'(y, z)\,a + \dfrac{\partial \alpha'}{\partial z} + u'(y, z). \end{cases}$$

La condition pour que les équations (Γ_1) soient compatibles est

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = a\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2\beta\right) + \alpha\beta + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial u}{\partial x};$$

on en tire

$$2\beta = \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

c'est-à-dire

$$2\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Les relations $(\Gamma_1)'$ donneraient de même $2\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial \alpha'}{\partial y}$, et par suite on a

$$2a = \alpha(x, z) + \alpha'(y, z) + Z(z);$$

en portant cette expression dans la deuxième équation (Γ_1), on obtient une relation qui peut s'écrire sous la forme

$$2\frac{\partial\alpha'}{\partial z}+\alpha'^2+2\alpha' X+2\frac{\partial Z}{\partial z}+Z^2=2\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\alpha^2+4u.$$

Ce premier membre est indépendant de x, tandis que le deuxième est indépendant de y; leur valeur commune est donc une fonction de la seule variable z, et l'on a

$$\begin{gathered}2\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\alpha^2+4u=Z_1(z),\\ 2\frac{\partial\alpha'}{\partial z}+\alpha'^2+2\alpha' Z+2\frac{\partial Z}{\partial z}+Z^2=Z_1(z).\end{gathered}$$

On aurait de même, en partant des équations $(\Gamma_1)'$,

$$\begin{gathered}2\frac{\partial\alpha'}{\partial z}+\alpha'^2+4u'=Z_2(z),\\ 2\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\alpha^2+2\alpha Z+2\frac{\partial Z}{\partial z}+Z^2=Z_2(z).\end{gathered}\tag{96}$$

En comparant la première et la dernière de ces relations, on voit qu'on peut écrire

$$2u=\alpha Z+Z_3(z).$$

La condition en u (95) donne alors

$$Z\frac{\partial\alpha}{\partial z}+2Z\alpha^2+\alpha\left[\frac{\partial Z}{\partial z}+2Z_3\right]+\frac{\partial Z_3}{\partial z}=0.$$

Si Z n'est pas identiquement nul, cette relation peut encore s'écrire

$$2\frac{\partial\alpha}{\partial z}+4\alpha^2+\alpha f(z)+\varphi(z)=0;$$

en la retranchant de l'équation (96) on obtiendrait une équation du second degré en α : $3\alpha^2+\alpha f(z)+\varphi(z)=0$ et l'on aurait par suite $\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0$; mais dans ce cas a ne dépendrait pas de x, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a donc nécessairement $Z=0$.

D'autre part, l'équation (96) montre dans ce cas que u est une fonction de z seulement : il faut donc que u soit nul, sans quoi la relation (95) donnerait pour α une valeur indépendante de x. On aura de même $u' = 0$ et les relations trouvées en α et α' se réduisent finalement à

$$2a = \alpha(x, z) + \alpha'(y, z),$$

$$(97) \qquad 2\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \alpha^2 = 2\frac{\partial\alpha'}{\partial z} + \alpha'^2 = Z_1(z),$$

Z_1 étant une certaine fonction de la seule variable z. Nous prendrons cette fonction qui est arbitraire sous la forme

$$Z_1 = 2\frac{\partial Z_2}{\partial z} + Z_2^2.$$

Les équations (97) sont alors des équations de Riccati qui admettent la solution $Z_2(z)$; leur intégration se ramène donc à celle d'une équation linéaire. On trouve ainsi sans difficulté

$$\alpha = -\frac{Z''}{Z'} + \frac{2Z'}{Z+X},$$

$$\alpha' = -\frac{Z''}{Z'} + \frac{2Z'}{Z+Y},$$

Z étant une fonction arbitraire de z dont la valeur se déduit de Z_2, Z' et Z'' étant les dérivées première et seconde de cette fonction; X et Y sont deux fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y, introduites par l'intégration.

Donc, si $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial a}{\partial y}$ sont différents de zéro, l'équation doit être de la forme

$$s = \left(-\frac{Z''}{Z'} + \frac{Z'}{Z+X} + \frac{Z'}{Z+Y}\right)pq.$$

En faisant le changement de variables défini par les équations

$$x' = X(x), \qquad y' = Y(y), \qquad z' = Z(z),$$

cette équation se ramène à la forme simple

$$(98) \qquad s = pq\left[\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z}\right].$$

Cette équation a été trouvée par M. Goursat dans un Mémoire déjà cité [1] : elle admet deux intégrales intermédiaires du second ordre.

---

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, p. 66.

Si l'on prend pour fonction inconnue $u = \operatorname{Log}\left(\frac{x+z}{y+z}\right)$, elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^u}{y-x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-u}}{x-y}\right) = 0;$$

c'est encore là une équation de M. Moutard. On peut donc ramener son intégration à celle d'une équation linéaire, mais l'intégration directe de l'équation (98) ne présente pas de bien grande difficulté; on peut vérifier que l'intégrale générale de cette équation est

$$(99) \qquad z = \frac{X + Y - (xX' + yY')}{X' + Y'},$$

où X et Y sont deux fonctions arbitraires, l'une de la seule variable x, l'autre de la seule variable y; X' et Y' représentent les dérivées de ces fonctions par rapport à la variable correspondante.

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation de la forme $s = a(x, y, z)pq$, où $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial a}{\partial y}$ sont différents de zéro, admette une intégrale générale de la première classe est qu'il existe une transformation de la forme $z' = Z(z)$, $x' = X(x)$, $y' = Y(y)$ qui ramène l'équation proposée à la forme (98); *dans ce cas l'intégrale générale est donnée par la formule* (99).

30. Nous avons supposé jusqu'ici que $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial a}{\partial y}$ étaient différents de zéro.

Supposons maintenant $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$, par exemple; en appelant $b(y, z)$ une fonction telle que $\frac{\partial \operatorname{Log} b}{\partial z} = a$, l'équation proposée s'écrit

$$s = \frac{\partial \operatorname{Log} b}{\partial z} p_1 q_1;$$

d'où, en intégrant,

$$q_1 = b(y, z) Y(y);$$

l'équation proposée admet donc une intégrale intermédiaire du premier ordre et son intégration se ramène à celle d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'une fonction arbitraire de la variable indépendante.

Si nous transformons l'équation en question en une équation de la forme $s = ap + bq + c$, celle-ci admettra également un invariant du premier ordre pour le système (II) de caractéristiques : nous avons vu que dans ce cas on a $\frac{\partial b}{\partial z} = 0$, et par une transformation simple on peut ramener l'équation à $s = a(x, y, z)\,p + c(x, y, z)$.

Cette équation rentre dans le type que nous avons écarté au début de cette étude. Nous allons néanmoins terminer le calcul dans ce cas particulier afin de compléter l'étude qui a été faite des équations $s = a(x, y, z)\,pq$.

L'équation

$$s = ap_1 + c$$

admettra un invariant du premier ordre et du système (II) si l'on a

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial z}.$$

En outre le dénominateur de l'invariant du système (I) devant être du premier ordre, on a vu (n° **11**) qu'on devait avoir la relation (25),

$$c = \frac{\partial b}{\partial y} - ab,$$

qui dans ce cas donne $c = 0$ et par suite $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$.

Nous avons donc à étudier l'équation

$$s = a(y, z)\,p_1.$$

Les expressions $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ se simplifient considérablement dans ce cas; on a, en particulier,

$$M_n^n = (n+1)\,p_1 \frac{\partial a}{\partial z}, \qquad M_n^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} p_2 \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{n(n+1)}{2} p_1^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

Le dénominateur de l'invariant sera égal à p_1 ; soit

$$p_n + \varphi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1})$$

son numérateur. On a identiquement

$$(100) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + ap_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = (p_n + \varphi)\,a;$$

n est au moins égal à 2, sans quoi on aurait $\frac{\partial a}{\partial z}=0$ et l'équation proposée est linéaire et s'intègre immédiatement.

Si $n=2$, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}+ap_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\left(ap_2+p_1^2\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+3p_2\frac{\partial a}{\partial z}+p_1^3\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}=a\varphi.$$

La remarque (II) montre qu'on a

$$\varphi=\frac{X(x)}{2p_1}p_2^2+u(x,y,z,p_1)p_2+v(x,y,z,p_1)$$

et, en appliquant toujours la même méthode de calcul, on tire de l'équation précédente l'une ou l'autre des conditions

$$(101)\qquad \frac{\partial a}{\partial z}=\alpha(y)a+\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

$$(102)\qquad \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}=\alpha(y)a+\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

Si $n=3$, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+ap_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}$$
$$+4p_1\frac{\partial a}{\partial z}p_3+3p_2^2\frac{\partial a}{\partial z}+6p_2p_1^2\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}+l(x,y,z,p)=\varphi a.$$

On écrit encore, d'après la remarque (II),

$$\varphi=\frac{X}{2p_1}p_3^2+u(x,y,z,p_1,p_2)p_3+v(x,y,z,p_1,p_2).$$

Une discussion absolument analogue à celle qui a été faite dans le cas précédent, mais beaucoup plus simple, montre qu'on a encore l'une des équations (101) ou (102).

Il en est de même si $n=4$: la marche à suivre est exactement la même que dans la discussion du cas $n=4$ au n° **19**; on arrive encore sans difficulté aux équations (101) et (102).

Si $n>4$, en posant $\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1}}=\varphi'$ et en dérivant l'équation (100) par rapport à p_{n-1}, il vient

$$(103)\qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial y}+q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+ap_1\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1}+\ldots+\left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_k}+M_{n-1}^{n-1}=0,$$

en appelant k l'ordre maximum des dérivées dont dépend φ'. Si dans cette identité on a $k>2$, la remarque (II) permet de poser

$$\varphi' = \frac{X(x)}{p_1}(p_k + \varphi_1),$$

et l'on a, en chassant le facteur $\frac{X}{p_1}$ qui est nécessairement différent de zéro,

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^{k-2}f}{dx^{k-2}}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{k-1}} + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right) + \frac{p_1}{X}M_{n-1}^{n-1} = (p_k + \varphi_1)a;$$

cette équation est analogue à l'équation (100), puisque $k-1>1$. En posant $\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_{k-1}} = \varphi'_1$, on en déduira

$$(104)\qquad \frac{\partial\varphi'_1}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'_1}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_k} + M_{k-1}^{k-1} = 0.$$

Or, d'après les expressions de M_{n-1}^{n-1} et M_{k-1}^{k-1}, on voit qu'on a identiquement

$$kM_{n-1}^{n-1} - nM_{k-1}^{k-1} \equiv 0.$$

Si l'on pose $\theta = k\varphi' - n\varphi'_1$, on tire des équations (103) et (104)

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q_1\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p_1} + \ldots + \left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial p_k} = 0,$$

ce qui montre que θ est un invariant d'ordre $k<n$. Or θ ne peut pas être identique à une fonction de x, puisque φ'_1 est d'ordre au plus égal à $k-1$. Si nous supposons que n est l'ordre de l'invariant d'ordre inférieur, le résultat précédent est absurde, ce qui prouve qu'on doit avoir $k \leqq 2$ dans l'équation (103) :

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + q_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\varphi'}{\partial p_1} + \left(ap_2 + p_1^2\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi'}{\partial p_2} + np_1\frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

On aura encore

$$\varphi' = \frac{X(x)}{p_1}p_2 + \mu(x, y, z, p_1),$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial y} + q_1\frac{\partial\mu}{\partial z} + ap_1\frac{\partial\mu}{\partial p_1} + Xp_1\frac{\partial a}{\partial z} + np_1\frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Si $X + n \neq 0$, on en déduit la relation (101). Sinon on aura $\mu_1 = X_1(x)$ et par suite $\varphi' = \left(X_1 - \frac{n}{p_1} p_2\right)$, d'où

$$\varphi = \left(X_1 - \frac{n}{p_1} p_2\right) p_{n-1} + \varphi_1(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2}).$$

En portant cette expression dans l'équation (100), il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{d^{n-3} f}{dx^{n-3}}\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{n-2}} + \left(X_1 - \frac{n}{p} p_2\right)[M_{n-2}^{n-2} p_{n-2} + \ldots] + M_{n-1}^{n-2} p_{n-2} + \ldots = a \varphi_1.
\end{aligned}$$

Nous poserons $\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{n-2}} = \varphi'_1$ et, en dérivant l'équation précédente par rapport à p_{n-2},

$$\begin{aligned}
(105) \qquad &\frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial z} + f \frac{\partial \varphi'_1}{\partial p_1} + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{d^{h-1} f}{dx^{h-1}}\right) \frac{\partial \varphi'_1}{\partial p_h} + \left(X_1 - \frac{n}{p_1} p_2\right) M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = 0.
\end{aligned}$$

Nous pourrons encore poser

$$\left(X_1 - \frac{n}{p_1} p_2\right) M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = \lambda p_2 + \lambda_1$$

avec

$$\lambda = -\frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial a}{\partial z}, \qquad \lambda_1 = X_1 (n-1) p_1 \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{n(n-1)}{2} p_1^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

On montrerait, par une discussion absolument semblable à celle du n° **27**, que la relation précédente se ramène au cas où $h \leq 4$. D'autre part, si $h < 2$, l'identité (105) montre que $\lambda = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial a}{\partial z} = 0$, cas écarté.

Si $h = 2$,

$$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial z} + a p_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial p_1} + \left(a p_2 + p_1^2 \frac{\partial a}{\partial z}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \lambda p_2 + \lambda_1 = 0;$$

d'où, d'après la remarque (II),

$$\varphi'_1 = \frac{X(x)}{2 p_1^2} p_2^2 + u(x, y, z, p_1) p_2 + v(x, y, z, p_1);$$

en portant cette expression dans l'équation précédente et en écrivant qu'on a une identité, on retrouve les relations (101) ou (102).

Si $h=3$,

$$\frac{\partial\varphi'_1}{\partial y}+{}_1q\,\frac{\partial\varphi'_1}{\partial z}+ap_1\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_1}+\left(ap_2+p_1^2\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_2}$$
$$+\left(ap_3+\mathrm{M}_2^2\,p_2+p_1^3\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\varphi'_1}{\partial p_3}+\lambda\,p_3+\lambda_1=0.$$

On écrira encore

$$\varphi'_1=\frac{\mathrm{X}}{p_1}p_3+\varphi_2(x,y,z,p_1,p_2)$$

et

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+q_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+ap_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1}$$
$$+\left(ap_2+p_1^2\frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_2}+\mathrm{X}\left[3\frac{\partial a}{\partial z}p_2+p_1^2\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right]+\lambda\,p_2+\lambda_1=0.$$

La remarque (II) donne dans ce cas

$$\varphi_2=\frac{\mathrm{X}_1(x)}{2p_1^2}p_2^2+u(x,y,z,p_1)p_2+v(x,y,z,p_1);$$

le calcul se continue toujours de la même façon et l'on trouve encore les relations (101) et (102).

Enfin, si $h=4$, on posera encore

$$\varphi'_1=\frac{\mathrm{X}}{p_1}[\,p_4+\varphi_2(x,y,z,p_1,p_2,p_3)]$$

et l'on aura une équation qui ne diffère de l'équation (100) dans le cas $n=4$ que par des termes dont la modification ne change pas le résultat du calcul.

Dans tous les cas, on aura donc la relation (101) ou la relation (102).

31. Supposons qu'on ait

$$\frac{\partial a}{\partial z}=\alpha(y)\,a+\frac{\partial\alpha}{\partial y};$$

on en tire, par intégration,

$$a = Y(y)\,e^{\alpha z} - \frac{\partial \operatorname{Log} \alpha}{\partial y};$$

en prenant pour nouvelle fonction inconnue $z' = \alpha z + \operatorname{Log} Y$, l'équation proposée prend la forme

$$s = e^{z} p \tag{106}$$

qui admet les deux intégrales intermédiaires

$$q = e^{z} + Y(y), \qquad p_2 = p^2 + p X(x);$$

cette équation peut d'ailleurs s'intégrer sans aucune quadrature et son intégrale générale est donnée par la relation

$$e^{z} = \frac{Y'}{X - Y}.$$

Si l'on a la deuxième relation

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \alpha(y)\,a + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

en posant $\alpha(y) = \omega^2(y)$, on a par intégration

$$a = Y_1(y)\,e^{\omega z} + Y_2(y)\,e^{-\omega z} - \frac{\partial \operatorname{Log} \omega}{\partial y}.$$

Prenons pour nouvelle fonction inconnue $z' = \omega z + \operatorname{Log} Y_3(y)$ et pour nouvelle variable $y : y' = Y_4(y)$; l'équation proposée devient

$$s = \frac{1}{Y_4'}\left[Y_1 Y_3 e^{z} + \frac{Y_2}{Y_3} e^{-z}\right] p.$$

On peut déterminer les fonctions Y_3 et Y_4 de manière qu'on ait

$$Y_1 Y_3 = Y_4', \qquad Y_2 = Y_3 Y_4',$$

à moins que l'une des fonctions Y_1, Y_2 ne soit nulle, ce qui ramènerait l'équation à la forme (106). Donc on peut écrire l'équation proposée sous la forme

$$s = p[e^{z} + e^{-z}]. \tag{107}$$

Cette équation admet une intégrale intermédiaire du premier ordre,

$q = e^z - e^{-z} + Y(y)$, et une du troisième ordre,

$$\frac{1}{p_1}\left[p_3 - \frac{3}{2}\frac{p_2^2}{p_1} - \frac{p_1^3}{2}\right] = X(x).$$

Pour l'intégrer, nous considérerons la première intégrale intermédiaire : $q = e^z - e^{-z} + Y(y)$; si l'on pose $u = e^z$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - 1 + Yu;$$

c'est une équation de Riccati qui peut s'intégrer précisément à cause de la présence de la fonction arbitraire Y; prenons en effet cette fonction sous la forme $Y = \frac{Y_1' + 1 - Y_1^2}{Y_1}$, Y_1 étant une nouvelle fonction arbitraire et Y_1' désignant sa dérivée; l'équation précédente admet alors la solution particulière $u = Y_1$, et en posant $u = Y_1 + v$ on ramène l'intégration à celle d'une équation linéaire, dont un coefficient dépend d'une fonction arbitraire de y.

L'intégrale générale de l'équation (107) est donnée par la formule

$$e^z = Y_1 - \frac{Y'}{X + Y},$$

X étant une fonction arbitraire de x, Y et Y_1 deux fonctions de y liées par la relation

$$\frac{1 + Y_1'}{Y_1} + Y_1 = \frac{-Y''}{Y'}.$$

D'ailleurs cette équation fait partie d'un type étudié par M. Goursat [1]. Si l'on fait la transformation de Bäcklund $p = e^{z'}$, elle s'écrit

$$s' = e^{z'}\sqrt{q'^2 - 4}.$$

Si l'on pose alors

$$z = z' + 2y \qquad \text{et} \qquad y' = -e^{-4y},$$

cette équation prend la forme

$$s = e^z\sqrt{yq^2 + q}$$

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1899, p. 71.

qui est le type (VII) des équations étudiées par M. Goursat dans le Mémoire cité.

32. Par conséquent, si une équation de la forme $s = a(y, z)p_1q_1$ est de la première classe, on peut la réduire par un simple changement de variables de la forme

$$z' = A(y, z), \qquad x' = X(x), \qquad y' = Y(y)$$

à l'une des formes (106) ou (107) et dans ce cas on sait effectuer l'intégration. Le problème est donc complètement résolu pour ces équations.

Dans le cas où l'équation $s = a(x, y, z)\,p + b(x, y, z)\,q + c(x, y, z)$ n'est pas réductible à la forme précédente, c'est-à-dire dans le cas où l'on ne peut pas vérifier à la fois les équations (I) et (I)′, si l'on a $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$ et $\frac{\partial b}{\partial z} \neq 0$, nous avons vu qu'il était nécessaire, pour que l'intégrale générale soit de la première classe, que cette équation puisse se ramener à la forme

$$(108) \qquad s = \frac{\partial}{\partial x}[A(x, y)e^z] - \frac{\partial}{\partial y}[B(x, y)e^{-z}],$$

et cela par un simple changement de variable de la forme

$$z' = \alpha(x, y)z + \beta(x, y).$$

Cette condition est en général facile à vérifier.

Les équations (108) ont été trouvées par M. Moutard en cherchant les équations qui admettent une intégrale générale de la forme

$$z = f(x, y, X, X', \ldots, X^{(n)}, Y, Y', \ldots, Y^{(m)}).$$

Les résultats de M. Moutard ont été démontrés par M. Cosserat([1]); on sait ainsi que l'équation (108) se ramène à une équation linéaire, qui est

$$(109) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, dy} - \frac{\partial \operatorname{Log} B}{dy}\frac{\partial u}{\partial x} - AB\,u = 0;$$

([1]) Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, Note 3. — *Voir* aussi Goursat, *Leçons sur l'intégration, etc.*, t. II, Chap. IX.

la correspondance entre les intégrales des deux équations est définie par les formules

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{A}\, e^{z} + \frac{\partial \operatorname{Log} u}{\partial y}, \qquad \mathrm{B}\, e^{-z} = -\frac{\partial \operatorname{Log} u}{\partial x}.$$

M. Darboux[1] a donné le moyen de former d'une manière explicite toutes les équations linéaires dont la suite de Laplace est limitée dans les deux sens, c'est-à-dire dont l'intégrale générale est de la première classe. Il est aisé d'en déduire toutes les équations de la forme (109), et par suite toutes les équations de la forme (108) dont l'intégrale générale est de la première classe.

33. Ainsi que nous l'avons déjà dit, nous ne développerons pas les calculs dans le cas de l'équation générale

$$s = b(x, y, z)\, q + c(x, y, z).$$

On retrouve d'ailleurs les mêmes résultats, c'est-à-dire les équations linéaires et les équations de M. Moutard, sauf toutefois lorsque l'équation considérée admet une intégrale intermédiaire du premier ordre. Dans ce cas on peut toujours l'écrire sous la forme

$$(110) \qquad s = q \frac{\partial}{\partial z} \beta(x, y, z) + \frac{\partial \beta}{\partial y};$$

elle admet l'intégrale intermédiaire $p = \beta(x, y, z) + \mathrm{X}(x)$ et l'intégration se ramène à celle d'une équation différentielle ordinaire dépendant du paramètre y et de la fonction arbitraire X. La présence de cette fonction X simplifie quelquefois l'intégration, ainsi qu'on l'a vu à propos de l'équation de Riccati (97). Il existe des équations de la forme (110) qui admettent une intégrale générale de la première classe et qui ne se ramène ni à une équation linéaire, ni à une équation de M. Moutard : on en a vu un exemple dans l'équation (107).

La détermination de toutes les équations de la forme (110) qui sont

---

(1) *Théorie des surfaces*, t. II, Chap. II.

de la première classe est un peu plus difficile; elle est pourtant possible par l'application des méthodes de calcul développées précédemment et fera l'objet d'un autre Mémoire.