JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. DE SÉGUIER

Sur la représentation linéaire homogène des groupes symétrique et alterné

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 7 (1911), p. 113-121.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__113_0>

Sur la représentation linéaire homogène des groupes symétrique et alterné;

PAR M. J. DE SÉGUIER.

Dans un Mémoire paru ici-même (¹) sous le même titre, j'ai étudié la structure des figuratifs du groupe symétrique et du groupe alterné de degré n. Peu après, M. Schur publiait dans le *Journal de Crelle*, t. 139, p. 155-250 (1911), un Mémoire plus étendu où certaines de mes assertions relatives aux cas $n = 6, 7$ étaient contredites.

J'ai donc été amené à revoir mes démonstrations relatives à ces cas particuliers, qui demandent un traitement spécial, et j'y ai reconnu certaines inexactitudes que je voudrais rectifier. Je profiterai de l'occasion pour ajouter quelques observations. Les notations seront toujours celles qui ont été indiquées précédemment (*M.*, p. 387 et p. 413) (²).

1. Tout figuratif $\mathcal{G}$ du g^t symétrique ($t \geqq 4$) Γ de champ $1, \ldots, t$ a pour équations (*M.*, 25)

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2 = \alpha, \quad b^t = \beta, \quad (ba)^{t-1} = \gamma, \quad (ab^{-1}ab)^3 = \delta, \quad (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon \\ \qquad \left(j = 2, \ldots, \tau, \quad \tau \text{ étant le plus grand entier } \leqq \frac{t}{2}\right), \\ \alpha = \varepsilon^x, \quad \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2}x + \frac{\tau(\tau-1)}{2} + ty}, \quad \gamma = \beta\varepsilon^y, \quad \delta = \varepsilon^{x+t+1} \quad (x = 0, 1), \\ \qquad \varepsilon^2 = 1, \quad a^{-1}\varepsilon a = b^{-1}\varepsilon b = \varepsilon, \end{array}\right.$$

la détermination de y n'influant pas sur $\mathcal{G}$.

(¹) *J. M.*, 1910, p. 387-436. Je renverrai à ce Mémoire par la lettre *M.*

(²) Il faut lire L (2, π) au lieu de Γ (2, π) à la ligne 3 du nº 26.

Les transpositions de Γ sont toutes conjuguées, et à chacune d'elles répondent deux éléments de $\mathcal{G}$ ayant pour carré $a^2 = \alpha$. Or, si $t \neq 6$, le système des transpositions de Γ est caractéristique, c'est-à-dire que tout automorphisme de Γ transforme ce système en lui-même (Hölder, *M. A.*, t. XLVI, p. 345). Il est clair alors que les deux déterminations de $\mathcal{G}$ répondant à $x = 0$, 1 sont distinctes.

Mais si $t = 6$, on ne peut rien conclure, parce que Γ a alors des automorphismes contragrédients qui transforment ses transpositions en s_2^6 auxquelles répondent dans $\mathcal{G}$ les conjugués des deux éléments de $a.b^{-2}ab^2.b^{-4}ab^4 \{\varepsilon\}$ (Hölder, *loc. cit.*, p. 339). Or, en supposant $x = 1$ (donc $\beta = 1$), l'un quelconque d'entre eux, tel que $ab^{-2}ab^{-2}ab^{-2}$ a pour carré $(ab^{-2}a)\,b^{-2}\,(ab^{-2}a)\,b^{-2}\,(ab^{-2}a)\,b^{-2} = 1$. Les deux figuratifs sont donc isomorphes (*Cf.* Schur, *Cr.*, t. 139, p. 165).

On peut le voir d'une autre manière qui présente un intérêt particulier. Considérons le groupe $J = \{U(2, 9), |\xi^3, \eta^3| = \sigma\}$ d'ordre 2.720. Les substitutions

$$(2)\qquad a = \sigma\begin{vmatrix} \xi \\ i^2\xi + \eta \end{vmatrix}, \qquad b = \sigma\begin{vmatrix} i^2\xi + i^2\eta \\ i^2\xi \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix},$$

où i est une racine primitive de C_9 annulant $i^2 + i - 1$, vérifient les équations (1) *pour* $x = 0$ et engendrent J (dont les facteurs de composition sont 2, 360, 2). Les substitutions

$$(3)\qquad a' = \sigma\begin{vmatrix} i^2\xi - \eta \\ -\xi + i^2\eta \end{vmatrix}, \qquad b' = \sigma\begin{vmatrix} i^2(\xi - \eta) \\ i^2\xi + \eta \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix},$$

vérifient les équations (1) (où l'on remplace a par a' et b par b') *pour* $x = 1$ et engendrent J. *Donc* J *est l'unique figuratif de* Γ.

2. Voici comment l'on est conduit aux formules (2) et (3). On sait que le g_{1440} $\{\mathfrak{V}(2, 9), i\zeta, \zeta^3\}$ contient trois g_{720} non isomorphes $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{V}, i\zeta\}$, $\mathfrak{L}' = \{\mathfrak{V}, \zeta^3\}$ isomorphe à Γ et $\mathfrak{L}'' = \{\mathfrak{V}, i\zeta^3\}$ (Hölder, *loc. cit.*, p. 343). Écrivons $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l$ respectivement pour $1, i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, 0, \infty$. $\mathfrak{L}'$ représente le groupe des substitutions opérées sur les 10 g_9 $\{123, 456\}$, $\{124, 356\}$, $\{125, 346\}$, $\{126, 345\}$, $\{134, 256\}$, $\{135, 246\}$, $\{136, 245\}$, $\{145, 236\}$, $\{146, 235\}$, $\{156, 234\}$ de Γ quand on les transforme par Γ, et l'on voit, en les désignant respectivement par o, i^2, i^7, i, i^6, i^5, i^3, i^4, i^8, ∞, ou par k, c, h, b, g, f, d, e, a, l (alors $i\zeta = abcdefgh = \varphi$), que (¹)

$$
\begin{array}{lcr}
a = 12 & \text{correspond à} & af.de.gl = (\zeta^3)\left(\dfrac{\zeta}{i^2\zeta+1}\right), \\
b = 123456 & \text{à} & ahegdc.bkl = (\zeta^3)\left(\dfrac{i\zeta+1}{\zeta}\right), \\
i^2\zeta = \varphi^2 = aceg.bdfh & \text{à} & 14.2536, \\
\xi + i = \chi = ahc.bfk.deg & \text{à} & 156.234, \\
-\zeta^{-1} = \psi = ae.bd.fh.kl & \text{à} & 14.56, \\
\zeta^3 = \omega = bd.cg.fh & \text{à} & 23.
\end{array}
$$

Or φ transforme

$$
\begin{array}{ccl}
\varphi^2 & \text{en} & \varphi^2, \\
\chi & \text{en} & adb.cgk.efh = \chi\varphi^2\chi\varphi^{-2}, \\
\psi & \text{en} & ag.bf.ce.kl = \psi\varphi^2, \\
\omega & \text{en} & ag.ce.dh = \omega\varphi^{-2},
\end{array}
$$

et comme $b = \psi\chi\upsilon$ [en posant $\upsilon = (\varphi^2\chi)^{-1}\,\omega\varphi^2\chi$ et en désignant par la même lettre les substitutions correspondantes de Γ et de $\mathfrak{C}'$] $a = b\omega b^{-1}$, l'automorphisme correspondant de Γ change b en 134.56 et a en 15.26.34. Or 15.26.34 est transformé en 12.34.56 par

$$25 = ab^{-4}ab^4.\upsilon.ab^{-4}ab^4 = bl.ce.fk = (\zeta^3)\left(\frac{i\zeta-1}{\zeta-i^3}\right) = \theta.$$

Donc, quand on transforme $\mathfrak{C}'$ par $\varphi\theta$,

$$
\begin{array}{llll}
a & \text{est remplacé par} & a' = 12.34.56 & = ab^{-2}ab^2.b^2ab^{-2} = (ab^{-2})^3 \\
 & & & = bh.ck.lg = (\zeta^3)\left(\dfrac{\zeta+i^2}{i^2\zeta+1}\right), \\
b & \text{par} & b' = 134.26 & = a.b^{-2}ab^2.b^{-1}ab.a.a.bab^{-1}.a \\
 & & & = ab^{-2}abab^2ab^{-1}a \\
 & & & = akhcdl.bef = (\zeta^3)\left(\dfrac{\zeta-1}{\zeta-i}\right).
\end{array}
$$

Les substitutions a, b, a', b' des formules (2), (3) répondent dans J à a, b, a', b' de Γ.

(¹) On ne confondra pas les *substitutions* que je vais désigner par a, b, avec les *symboles* a, b.

Il est clair qu'on pourrait vérifier directement que les équations (1) sont satisfaites quand on y remplace a par $a' = (ab^{-2})^3$ et b par $b' = ab^{-2}\,ab\,ab^2\,ab^{-1}\,a$.

3. Le second point que je voudrais rectifier est relatif au cas particulier $n = 7$. Il s'agissait de savoir si le multiplicateur du g^7 alterné est d'ordre 2 ou 6, et cela revenait à chercher s'il existait un groupe X d'ordre $3.\frac{1}{2}(7!)$ vérifiant

$$(4)\quad \begin{cases} a^2 = 1, \quad b^5 = 1, \quad (ba)^4 = 1, \quad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \quad (ab^{-2}ab^2)^2 = 1, \\ c^3 = 1, \quad (ca)^3 = 1, \quad (cb^{-1}ab)^2 = 1, \quad (cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda, \quad (cb^{-3}ab^3)^2 = 1, \\ \lambda^3 = 1, \quad a^{-1}\lambda a = b^{-1}\lambda b = c^{-1}\lambda c = \lambda. \end{cases}$$

J'ai montré que, si X existe, il admet une représentation X′ de degré 63 et une représentation X″ de degré 45. Mais, par suite de fautes de calcul, j'ai conclu à la non-existence de X′ et X″. C'est ce calcul que je vais reprendre brièvement en commençant par X′. Considérons les substitutions

$$\begin{aligned} a_\alpha &= (\alpha_2\alpha_8)(\alpha_3\alpha_7)(\alpha_4\alpha_9)(\alpha_5\alpha_{10})(\alpha_6\alpha_{11})(\alpha_{12}\alpha_{16})(\alpha_{14}\alpha_{17})(\alpha_{15}\alpha_{18}) \quad (^1), \\ b_\alpha &= (\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6)(\alpha_7\alpha_8\alpha_9\alpha_{10}\alpha_{11})(\alpha_{12}\alpha_{16}\alpha_{19}\alpha_{21}\alpha_{15})(\alpha_{13}\alpha_{17}\alpha_{20}\alpha_{14}\alpha_{18}), \\ c_\alpha &= (\alpha_1\alpha_2\alpha_7)(\alpha_3\alpha_{12}\alpha_8)(\alpha_4\alpha_{13}\alpha_9)(\alpha_5\alpha_{14}\alpha_{10})(\alpha_6\alpha_{15}\alpha_{11}), \end{aligned}$$

qui vérifient les équations déduites de (4) en y faisant $\lambda = 1$ et fournissent par suite une représentation du g^7 alterné ($M.$, 28). Désignons par a_ξ, b_ξ, c_ξ ce que deviennent a_α, b_α, c_α quand on y remplace les α par des ξ, et posons

$$\begin{gathered} a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma, \\ \sigma_i = (\alpha_i\beta_i\gamma_i), \qquad \lambda = \Pi_1^{21}\sigma_i, \qquad x = \Pi_1^{21}\sigma_i^{x_i}, \qquad z = \Pi_1^{21}\sigma_i^{z_i}. \end{gathered}$$

Si X′ existe, on peut déterminer les x_i et les z_i de manière que $a = a_0 x$, $b = b_0$, $c = c_0 z$ vérifient (4). Les équations de la première ligne de (4) donnent par la méthode indiquée ($M.$, 34) les congruences

(1) Dans l'expression de a_α, à la page 430 de mon Mémoire, il faut lire $\alpha_{20}.\alpha_{21}$ pour $\alpha_{20}\alpha_{21}$. A la page 429, dans la formule (55), il faut lire $\gamma = \varepsilon'\lambda'^{-x'-y'}$ au lieu de $\gamma = \varepsilon^{-x'-y'}$. A la page 431, dans la définition de $\alpha_2, \ldots, \alpha_{15}$, il faut lire partout y au lieu de x.

suivantes (mod 3) :

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \equiv x_1 \equiv x_{12} \equiv x_{13} \equiv x_{14} \equiv x_{15} \equiv x_{16} \equiv x_{17} \equiv x_{18} \equiv x_{19} \equiv x_{20} \equiv x_{21}, \\ x_{11} \equiv x_9 \equiv -x_6 \equiv -x_4, \ x_{10} \equiv -x_5, \ x_8 \equiv x_7 \equiv x_4 + x_5 \equiv -x_3 \equiv -x_2. \end{array} \right.$$

Les équations de la seconde ligne de (4) donnent, en tenant compte de (5),

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \equiv z_{16} \equiv z_{21}, \qquad 1 \equiv z_{17} \equiv -z_{18} \equiv -z_{19} \equiv z_{20}, \\ z_{15} \equiv z_{12} \equiv x_2 - z_8 - 1, \qquad z_{14} \equiv z_{13} \equiv x_7 - z_8, \\ z_{11} \equiv z_{10} - 1 \equiv z_9 - 1 \equiv z_8, \qquad z_7 \equiv x_2 + 1, \qquad z_6 \equiv z_3 \equiv 1 - x_2, \\ z_5 \equiv z_4 \equiv -x_2 - 1, \qquad z_1 \equiv -1 - x_2 - z_2, \\ x_4 \equiv -x_2 - 1, \qquad x_5 \equiv 1 - x_2. \end{array} \right.$$

Les x_i et les z_i sont ainsi déterminés, mod 3, en fonction de x_2, z_2, z_8 qui restent arbitraires. M. Schur m'ayant communiqué (sous une forme un peu différente) la solution répondant à $x_2 = z_2 = 0$, $z_8 = -1$, j'ai pu trouver plus vite où mon calcul était en défaut. Je ne reproduis pas d'ailleurs ce calcul, qui est sans intérêt une fois la méthode indiquée. En faisant x_2, z_2 et z_8 nuls, on a

$$\begin{aligned} a = {} & a_0 \sigma_4^2 \sigma_5 \sigma_6^2 \sigma_9 \sigma_{10}^2 \sigma_{11} \\ = {} & (\alpha_2\alpha_8)(\alpha_3\alpha_7)(\alpha_{13}\alpha_{16})(\alpha_{14}\alpha_{17})(\alpha_{15}\alpha_{18})(\alpha_4\beta_9)(\alpha_5\gamma_{10})(\alpha_6\beta_{11}) \\ & (\beta_2\beta_8)(\beta_3\beta_7)(\beta_{13}\beta_{16})(\beta_{14}\beta_{17})(\beta_{15}\beta_{18})(\beta_4\gamma_9)(\beta_5\alpha_{10})(\beta_6\gamma_{11}) \\ & (\gamma_2\gamma_8)(\gamma_3\gamma_7)(\gamma_{13}\gamma_{16})(\gamma_{14}\gamma_{17})(\gamma_{15}\gamma_{18})(\gamma_4\alpha_9)(\gamma_5\beta_{10})(\gamma_6\alpha_{11}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = {} & c_0 \sigma_1^2 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_5^2 \sigma_6 \sigma_7 \sigma_9 \sigma_{10} \sigma_{12}^2 \sigma_{15}^2 \sigma_{17} \sigma_{18}^2 \sigma_{19}^2 \sigma_{20} \\ = {} & (\alpha_1\alpha_2\beta_7)(\alpha_3\gamma_{12}\gamma_8)(\alpha_4\alpha_{13}\beta_9)(\alpha_5\alpha_{14}\beta_{10})(\alpha_6\gamma_{15}\gamma_{11}) \\ & (\beta_1\beta_2\gamma_7)(\beta_3\alpha_{12}\alpha_8)(\beta_4\beta_{13}\gamma_9)(\beta_5\beta_{14}\gamma_{10})(\beta_6\alpha_{15}\alpha_{11}) \\ & (\gamma_1\gamma_2\alpha_7)(\gamma_3\beta_{12}\beta_8)(\gamma_4\gamma_{13}\alpha_9)(\gamma_5\gamma_{14}\alpha_{10})(\gamma_6\beta_{15}\beta_{11}) \\ & (\alpha_{17}\beta_{17}\gamma_{17})(\alpha_{18}\gamma_{18}\beta_{18})(\alpha_{19}\gamma_{19}\beta_{19})(\alpha_{20}\beta_{20}\gamma_{20}). \end{aligned}$$

4. Pour former X″, considérons les substitutions

$$\begin{aligned} a_\alpha &= (\alpha_1\alpha_{12})(\alpha_2\alpha_{14})(\alpha_3\alpha_8)(\alpha_5\alpha_{15})(\alpha_6\alpha_{13})(\alpha_7\alpha_{10}), \\ b_\alpha &= (\alpha_1\alpha_5\alpha_8\alpha_6\alpha_{12})(\alpha_2\alpha_{15}\alpha_4\alpha_{13}\alpha_7)(\alpha_3\alpha_{11}\alpha_{14}\alpha_{10}\alpha_9), \\ c_\alpha &= (\alpha_1\alpha_5\alpha_{13})(\alpha_2\alpha_6\alpha_8)(\alpha_3\alpha_{15}\alpha_{10})(\alpha_4\alpha_{11}\alpha_9)(\alpha_7\alpha_{12}\alpha_{14}), \end{aligned}$$

qui vérifient aussi les équations déduites de (1) en y faisant $\lambda = 1$, et fournissent par suite une représentation du g^7 alterné. On obtient cette représentation soit comme je l'ai indiqué (*M.*, 37), soit en formant, dans le $g^{15}_{\frac{8!}{2}}$ des substitutions linéaires à quatre variables (mod 2) isomorphe au g^8 alterné (Jordan, *Traité*, n° 516) A_8, le diviseur correspondant au diviseur de A_8 qui fixe un symbole (*voir S.*, 70).

Posons encore, en gardant les mêmes notations,

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma,$$
$$\sigma_i = (\alpha_i \beta_i \gamma_i), \qquad \lambda = \Pi_1^{15} \sigma_i, \qquad x = \Pi_1^{15} \sigma_i^{x_i}, \qquad z = \Pi_1^{15} \sigma_i^{z_i}.$$

Si X″ existe, on peut déterminer les x_i et les z_i, de manière que $a = a_0 x$, $b = b_0$, $c = c_0 z$ vérifient (4).

Les équations de la première ligne de (4) donnent (mod 3)

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \equiv x_1 \equiv x_4 \equiv x_9 \equiv x_{11} \equiv x_{12}, \qquad 1 \equiv x_5 \equiv x_6, \qquad -1 \equiv x_{13} \equiv x_{15}, \\ \qquad x_{14} \equiv x_{10} \equiv -x_7 \equiv -x_2, \qquad x_8 \equiv x_2 + 1. \end{array} \right.$$

Celles de la seconde ligne de (4) donnent, en tenant compte de (7),

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \equiv z_1 \equiv z_2 \equiv z_5 \equiv z_6 \equiv z_8 \equiv z_{13}, \qquad 1 \equiv z_3 \equiv z_9 \equiv z_{12}, \\ z_{11} \equiv z_{10} \equiv -x_2, \qquad z_7 \equiv x_2 + 1, \qquad z_{15} \equiv -z_{14} \equiv z_4 \equiv x_2 - 1, \\ \qquad x_3 \equiv -x_2 - 1, \end{array} \right.$$

et x_2 reste arbitraire. En faisant $x_2 = 0$, on a la solution

$$\begin{aligned} a = a_0 \sigma_3^2 \sigma_5 \sigma_6 \sigma_8 \sigma_{13}^2 \sigma_{15}^2 &= (\alpha_1 \alpha_{12})(\alpha_2 \alpha_{14})(\alpha_7 \alpha_{10})(\alpha_3 \beta_8)(\alpha_5 \gamma_{15})(\alpha_6 \gamma_{13}) \\ &\quad (\beta_1 \beta_{12})(\beta_2 \beta_{14})(\beta_7 \beta_{10})(\beta_3 \gamma_8)(\beta_5 \alpha_{15})(\beta_6 \alpha_{13}) \\ &\quad (\gamma_1 \gamma_{12})(\gamma_2 \gamma_{14})(\gamma_7 \gamma_{10})(\gamma_3 \alpha_8)(\gamma_5 \beta_{15})(\gamma_6 \beta_{13}), \\ c = c_0 \sigma_3 \sigma_4^2 \sigma_7 \sigma_9 \sigma_{12} \sigma_{14} \sigma_{15}^2 &= (\alpha_1 \alpha_5 \alpha_{13})(\alpha_2 \alpha_6 \alpha_8)(\alpha_3 \gamma_{15} \gamma_{10})(\alpha_4 \alpha_{11} \beta_9)(\alpha_7 \beta_{12} \gamma_{14}) \\ &\quad (\beta_1 \beta_5 \beta_{13})(\beta_2 \beta_6 \beta_8)(\beta_3 \alpha_{15} \alpha_{10})(\beta_4 \beta_{11} \gamma_9)(\beta_7 \gamma_{12} \alpha_{14}) \\ &\quad (\gamma_1 \gamma_5 \gamma_{13})(\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8)(\gamma_3 \beta_{15} \beta_{10})(\gamma_4 \gamma_{11} \alpha_9)(\gamma_7 \alpha_{12} \beta_{14}). \end{aligned}$$

3. Le figuratif $\mathcal{G}$ du g^6 alterné Γ contient un diviseur isomorphe à U(2, 5). Car soit $\mathfrak{M} = \{\varepsilon, \lambda\}$ ($\varepsilon^2 = \lambda^3 = 1$, $\lambda\varepsilon = \varepsilon\lambda$), le multiplicateur (d'ordre 6). Au g_{60} A déjà considéré (*M.*, 34) de $\mathcal{G}|\mathfrak{M}$ répond dans $\mathcal{G}|\{\lambda\}$, un g_{120} B *qui n'est pas produit direct* (puisque ε est le carré des s_4 de B qui répondent aux s_2 de A) et qui est par conséquent isomorphe à U(2, 5) (Hölder, *M. A.*, t. XLVI, p. 354-355). Le $g_{3.120}$ C qui correspond à A dans $\mathcal{G}$ est le produit direct de B par $\{\lambda\}$ (Hölder, *loc. cit*).

$\mathcal{G}$ contient aussi un figuratif F du g^4 symétrique, F étant défini par

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2=\varepsilon,\quad b^4=\varepsilon,\quad (ba)^3=\varepsilon,\quad (ab^{-1}ab)^2=1,\quad (ab^{-2}ab^2)^2=\varepsilon,\\ \qquad\qquad \varepsilon^2=1,\qquad a\varepsilon=\varepsilon a,\qquad b\varepsilon=\varepsilon b,\end{array}\right.$$

et isomorphe à $\{U(2,3), |\rho\xi, =\rho\eta|\}$ ($\rho^2=-1$) ($M.$, 26). Car sans cela les équations de $\mathcal{G}$ établiraient entre a et b des relations autres que les conséquences de F, relations qui résulteraient des équations de $\mathcal{G}$ jointes à $\lambda=1$. Or le groupe $\mathcal{G}_1$ défini par les équations de $\mathcal{G}$ jointes à $\lambda=1$, n'étant pas le produit direct d'un g_{360} simple par $\{\varepsilon\}$ (puisque ε est dans son commutant), est isomorphe à $U(2,9)$ ($S.$, 92), et, en identifiant les éléments correspondants de ces deux groupes, on peut prendre

$$a=\begin{vmatrix}\rho\xi+\rho\eta\\ -\rho\eta\end{vmatrix},\qquad b=\begin{vmatrix}-\rho\xi+\rho\eta\\ -\rho\xi-\rho\eta\end{vmatrix},\qquad c=\begin{vmatrix}-\xi\\ \rho\xi-\eta\end{vmatrix}.$$

Le diviseur $\{a,b\}$ de $U(2,9)$, vérifiant (9) et contenant $\varepsilon=|-\xi,-\eta|$ est isomorphe à F. Donc les équations de $\mathcal{G}_1$ n'établissent pas entre a et b d'autres relations que les conséquences de F.

Soient maintenant $\mathcal{G}$ le figuratif du g^7 alterné Γ et $\mathfrak{M}=\{\varepsilon,\lambda\}$ ($\varepsilon^2=\lambda^3=1$, $\lambda\varepsilon=\varepsilon\lambda$) son multiplicateur. On voit de même que $\mathcal{G}|\{\lambda\}$ contient un g_{336} B isomorphe à $U(2,7)$, et $\mathcal{G}$ un $g_{3.336}$C produit direct de B par $\{\lambda\}$. $\mathcal{G}|\{\lambda\}$ contient aussi un diviseur X isomorphe à un figuratif du g^5 symétrique défini par les équations de $\mathcal{G}$ jointes à $c=\lambda=1$. En effet, $\mathcal{G}|\mathfrak{M}$ contenant un groupe isomorphe au g^5 symétrique (défini par les équations de $\mathcal{G}$ jointes à $\varepsilon=\lambda=c=1$), pour que X ne divisât pas $\mathcal{G}|\{\lambda\}$, il faudrait que les équations de $\mathcal{G}$ jointes à $\lambda=1$ entraînassent $\varepsilon=1$, ce qui n'a évidemment pas lieu [$\mathcal{G}|\{\lambda\}$ serait d'ordre $\frac{1}{2}(7!)$]. On voit en même temps que X est isomorphe à G'_5 ($M.$, 26). Au $g_{2.120}$ X répond dans $\mathcal{G}$ un $g_{6.120}$ Y dont le commutant Q y a l'indice 2 ou 6. Cet indice n'est pas 2, car Y serait figuratif du g^5 symétrique. Il est donc 6, et λ est hors de Q. Donc Y est le produit direct de Q par $\{\lambda\}$. Le même raisonnement montrerait, indépendamment des théorèmes cités de M. Hölder, que le groupe nommé C pour $n=6$ ou 7 est un produit direct.

Il est clair d'ailleurs que, pour $n>7$, le figuratif $\mathcal{G}$ du g^n alterné Γ contient le figuratif du g^t symétrique ($t=n-2$) pour lequel $\alpha=\varepsilon$.

6. Il me reste à indiquer comment des équations que j'ai obtenues pour les figuratifs du symétrique et de l'alterné on déduit celles de M. Schur et inversement.

Posons, dans les équations (1) du figuratif du symétrique,

$$(10)\qquad a = s_1, \qquad b^{-i}ab^i = s_{i+1}\varepsilon^{i(t-1)} \qquad (i = 1, \ldots, t-2);$$

d'où

$$s_{t-1}s_{t-2}\ldots s_1 = b^{1-t}(ab)^{t-1}\varepsilon^{(t-1)[1+2+\ldots+(t-2)]} = b\beta^{-1}\gamma\varepsilon^{\frac{(t-1)^2(t-2)}{2}};$$

$$\frac{(t-1)^2(t-2)}{2} \equiv \begin{cases} \tau - 1 & \text{si} \quad t = 2\tau \\ 0 & \text{si} \quad t = 2\tau+1 \end{cases} \pmod 2.$$

On aura

$$(11)\qquad \begin{cases} s_h^2 = \varepsilon^x, \qquad \varepsilon^2 = 1, \qquad \varepsilon s_h = s_h\varepsilon, \qquad (s_i s_{i+1})^3 = \varepsilon^x \\ (h = 1, \ldots, t-1;\ i = 1, \ldots, t-2;\ x = 0 \text{ ou } 1), \\ \quad (s_j s_{j+k})^2 = \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad s_j s_{j+k} = \varepsilon s_{j+k} s_j \\ \quad (j = 1, \ldots, t-3;\ k = 2, \ldots, t-j-1). \end{cases}$$

Inversement, en posant $s_1 = a$, $b = s_{t-1}s_{t-2}\ldots s_1$, on aura d'abord, d'après (11),

$$b^{-1}s_h b = s_{h+1}\varepsilon^{t-1},$$

donc

$$s_{h+1} = b^{-1}s_h b\varepsilon^{t-1} = \ldots = b^{-l-1}s_{h-l}b^{l+1}\varepsilon^{(l+1)(t-1)} = \ldots = b^{-h}s_1 b^h\varepsilon^{h(t-1)},$$

puis, par récurrence, en observant que

$$(s_1\ldots s_{h-1})s_h(s_{h-1}\ldots s_1) = (s_h s_{h-1}\ldots s_2)s_1(s_2\ldots s_h),$$

$$(s_h\ldots s_1)^l = (s_h\ldots s_2)^r s_1\ldots s_r(s_h\ldots s_1)^{l-r}\varepsilon^{h\frac{r(r-1)}{2}};$$

d'où, pour $h = r = l-1$,

$$(s_{l-1}\ldots s_1)^l = (s_{l-1}\ldots s_2)^{l-1}\varepsilon^{x(l-1)+\frac{(l-1)^2(l-2)}{2}} = \ldots$$
$$= \varepsilon^{x[(l-1)+(l-2)+\ldots+1]+\frac{1}{2}[(l-1)^2(l-2)+(l-2)^2(l-3)+\ldots+2^2.1]},$$

ou, en désignant par λ le plus grand entier $\leqq \frac{l}{2}$,

$$(12)\qquad (s_{l-1}\ldots s_1)^l = \varepsilon^{x\frac{l(l-1)}{2}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}.$$

Donc

$$b^t = \varepsilon^{x\frac{t(t-1)}{2}+\frac{\tau(\tau-1)}{2}};$$

$$(ba)^{t-1} = \varepsilon^{x\frac{t(t-1)}{2}+\frac{\tau(\tau-1)}{2}+y}, \qquad y \equiv \begin{cases} \tau - 1 & \text{si} \quad t = 2\tau \\ 0 & \text{si} \quad t = 2\tau+1 \end{cases} \pmod 2.$$

On obtient d'ailleurs de suite

$$(ab^{-1}ab)^3 = \varepsilon^{x+t+1}, \qquad (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon \qquad (j = 2, \ldots, \tau).$$

Il est clair, d'après (11), que le figuratif $\{s_1, \ldots, s_{t-1}\}$ contient le figuratif $\{s_h, \ldots, s_{h+q}\}$; (12) permet de calculer l'ordre des deux éléments correspondant, dans ce dernier groupe, au cycle $(h, h+1, \ldots, h+q+1)$ de Γ et par suite l'ordre des éléments répondant, dans $\{s_1, \ldots, s_{t-1}\}$, à toute substitution de Γ.

Pour $n > 7$ ou $n = 4, 5$, les équations du figuratif du g^n alterné que j'ai obtenues sont :

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = \varepsilon, \quad b^t = \beta, \quad (ba)^{t-1} = \gamma, \quad (ab^{-1}ab)^3 = \varepsilon^t, \quad (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1, \\ \qquad\qquad c^3 = \varepsilon^{1+x}, \qquad (ac)^3 = \varepsilon^{1+z}, \qquad (cb^{-k}ab^k)^2 = \varepsilon; \\ \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2}+ty+\frac{\tau(\tau-1)}{2}}, \qquad \gamma = \beta\varepsilon^y, \qquad t = n-2 = 2\tau+1 \quad \text{ou} \quad 2\tau; \\ \quad j = 2, \ldots, \tau; \qquad k = 1, \ldots, t-2; \qquad x, y, z \text{ sont arbitraires.} \\ \text{Si } n = 5, \text{ il faut supprimer l'équation } (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon; \text{ si } n = 4, \text{ il faut} \\ \quad \text{supprimer toutes les équations où figure } b \ [(ba)^{t-1} = \gamma \text{ permet alors} \\ \quad \text{d'exprimer } b \text{ par } a]. \end{array} \right.$$

En faisant, dans les équations de la première ligne, le changement de générateurs (10) et en prenant $x = z = 0$, on obtient un système formé des équations (11) où $x = 0$ et des équations

$$(14)\qquad c^3 = \varepsilon, \qquad (ac)^3 = \varepsilon, \qquad (cs_{k+1})^2 = \varepsilon.$$

C'est le système de M. Schur d'où l'on revient comme précédemment à (13).

Pour $n = 6$ et 7, il suffit, dans (13), de remplacer $(cb^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon$ par $(cb^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon\lambda$ ($\lambda^3 = 1$, $a^{-1}\lambda a = b^{-1}\lambda b = c^{-1}\lambda c = \lambda$) et, dans (14), $(cs_3)^2 = \varepsilon$ par $(cs_3)^2 = \varepsilon\lambda$, le changement de générateurs restant le même.