JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SÉGUIER

# Sur la représentation linéaire homogène des groupes symétrique et alterné

*Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série*, tome 6 (1910), p. 387-436.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1910_6_6__387_0>

# *Sur la représentation linéaire homogène des groupes symétrique et alterné;*

**Par M. de SÉGUIER.**

---

La théorie générale de la représentation des groupes de substitutions linéaires et homogènes est due à M. Schur [1]. Mais, pour l'application que j'ai en vue, je suis obligé de la reprendre d'abord brièvement sous une forme différente.

On sait qu'un groupe G de substitutions linéaires, à variables homogènes ou non, est dit *représenter* un groupe abstrait Γ quand G est simplement ou multiplement homomorphe à Γ [2]. Chaque substitution de G qui correspond à une substitution $\sigma$ de Γ est dite *représenter* $\sigma$. Je dirai que la représentation est *propre* ou *impropre* selon que G est simplement ou multiplement homomorphe à Γ. Deux représentations G, G′ de Γ sont *équivalentes* ou *indistinctes* s'il existe un changement de variables transformant G en G′ de telle manière qu'une substitution quelconque $s$ de G et sa transformée $s'$ de G′ représentent toujours la même substitution de Γ.

**I.** Soit $\Gamma = \{\beta_1, \ldots, \beta_\nu\}$ un $g_N$ fini, défini par $B_j(\beta) = 1$ $(j = 1, \ldots, m)$, en désignant d'une manière générale par $X(\beta)$ un produit d'éléments $\beta_i$. De toute représentation homogène G′ (propre ou impropre)

---

(1) *Cr.*, t. 127, 1904, et t. 132, 1907.

(2) Je me servirai de la même terminologie que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, auxquels je renverrai par la lettre *E*, et mes *Éléments de la théorie des groupes de substitutions*, auxquels je renverrai par la lettre *S*.

de $\Gamma$ on déduit, en y regardant les variables comme non homogènes et en adjoignant des similitudes [1] arbitraires, un groupe fini ou infini $G = \{b_1, \ldots, b_\nu, a_1, \ldots, a_\lambda, a_1^{-1}, \ldots, a_\lambda^{-1}\}$ ($\lambda \geqq m$) où les $a_k^{\pm 1}$ sont des similitudes, vérifiant les équations (cf. *E.*, 18)

$$(1) \qquad B_j(b) = a_j, \qquad b_l^{-1} a_k b_l = a_k, \qquad A_i(a) = 1,$$

les $A_i(a) = 1$ se composant : 1° des conséquences $A_{i_1}(a) = 1$ ($i_1 = 1, 2, \ldots$) des $B_j = a_j$ et des $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$ entre $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$, parmi lesquelles figurent les équations exprimant que $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$ sont permutables entre eux [$a_k$, permutable à chaque $b$ en vertu de $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, l'est à chaque $B_j(b)$] ; 2° des équations $A_{i_2}(a) = 1$ exprimant que $a_{m+1}^{\pm 1}, \ldots, a_\lambda^{\pm 1}$ sont permutables entre eux et à $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$ (il est clair qu'aucune des équations $A_{i_2} = 1$ ne résulte de $A_{i_1} = 1$). Inversement, tout groupe linéaire vérifiant (1) et où les $a$ sont des similitudes, fournit, en y regardant les variables comme homogènes, une représentation homogène de $\Gamma$.

Je dirai que G est une *hyperreprésentation de* $\Gamma$ (*propre* ou *impropre* selon que G′ est propre ou impropre) *répondant* au *système* ($\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m$), en désignant d'une manière générale par $\check{s}$ le multiplicateur commun des variables dans une similitude $s$, et en appelant *système* ($x_1, \ldots, x_m$) tout ensemble de $m$ nombres vérifiant $A_i(x) = 1$ ($x_i$ étant mis à la place de $a_i$). Les hyperreprésentations *d'un même nombre n de variables*, qui se déduisent de l'une d'elles G en multipliant chaque substitution de G par une similitude arbitraire (ce qui laisse les commutateurs inaltérés) et en adjoignant aux générateurs d'autres similitudes arbitraires seront dites *associées* entre elles et former une *catégorie*. Cette définition est évidemment indépendante du choix fait parmi elles de G et les changements de variables. Il est clair aussi qu'on obtient toutes les hyperreprésentations de la catégorie de G en y remplaçant $b_l$ par $\tau_l b_l$, $\tau_l$ étant une similitude arbitraire, et le groupe $\{a_{m+1}^{\pm 1}, \ldots, a_\lambda^{\pm 1}\}$ par un groupe quelconque de similitudes de degré $n$ : quand on remplace les $b_l$ par les $\tau_l b_l$, $a_1, \ldots,$

---

(1) J'entends par *similitude* une substitution qui multiplie toutes les variables (supposées non homogènes) par un même nombre.

$a_m$ sont remplacés par $\sigma_1 a_1, \ldots, \sigma_m a_m$, les similitudes $\sigma$ vérifiant $B_j(\tau) = \sigma_j$ et par suite $A_i(\sigma) = 1$.

Désignons par $Q_h(a) = 1$ $(h = 1, 2, \ldots)$ les conséquences entre $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$ des équations $B_j(b) = a_j$, $b_k b_l = b_l b_k$ $(k, l = 1, \ldots, \nu)$ : les $Q_h = 1$ comprennent évidemment les $A_{i_1} = 1$, et pour qu'il existe des similitudes $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$ telles que $B_j(\tau) = \sigma_j$, il faut et suffit que $Q_h(\sigma) = 1$. Les systèmes $(\check{\sigma}_1 \check{a}_1, \ldots, \check{\sigma}_m \check{a}_m)$ tels que $Q_h(\check{\sigma}) = 1$ seront dits *associés* et former une *catégorie*. Pour que deux hyperreprésentations de même degré répondant respectivement aux systèmes $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ et $(\check{\sigma}_1 \check{a}_1, \ldots, \check{\sigma}_m \check{a}_m)$ soient associées, il faut évidemment que les deux systèmes le soient.

**2.** Considérons le groupe $\mathcal{G}_0$, fini ou non, *défini* par les équations (1). Les équations $A_{i_1} = 1$ équivalent [en prenant la notation additive elles reviennent à un système linéaire (cf. *E.*, 205, 207)] à des équations de la forme $a_1'^{e_1} = 1, \ldots, a_r'^{e_r} = 1$, $a'_\iota a'_\varkappa = a'_\varkappa a'_\iota$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, m)$, $r$ étant $\leqq m$, et $a'^{\pm 1}_{r+1}, \ldots, a'^{\pm 1}_m$ étant d'ordre infini : les $a'_\iota$ sont ici des produits des $a_i$, soit $a'_\iota = A_\iota(a)$ ; et, si $A_{i_1} = \Pi a_k^{\alpha_{i_1 k}}$, les $e_i$ sont les diviseurs élémentaires $\gtrless 1$ de la matrice des entiers $\alpha_{i_1 k}$. En adjoignant donc les générateurs $a_k'^{\pm 1} = a_k^{\pm 1}$ $(k = m + 1, \ldots, \lambda)$ et les équations $A_{i_2}(a') = 1$, on voit que le groupe $\mathcal{A}_0$ défini par les $A_i = 1$ est le produit direct de $\mathcal{A} = \{a'_1, \ldots, a'_r\}$ par $\mathcal{A}_1 = \{a'_{r+1}, \ldots, a'_\lambda, a'^{-1}_{r+1}, \ldots, a'^{-1}_\lambda\}$; tout groupe $X$ dont le produit direct par $\mathcal{A}$ est $\mathcal{A}_0$ est d'ailleurs engendré par des éléments de la forme $x_i = \alpha_i a'_i$, $x_i^{-1} = \alpha_i^{-1} a_i'^{-1}$ $(i = r + 1, \ldots, \lambda)$, $\alpha_i$ étant quelconque dans $\mathcal{A}$, puisque X est dans $\mathcal{A}\mathcal{A}_1$ et ne contient aucun élément de $\mathcal{A}$. Si $\alpha_{11}$, par exemple, est égal à 1, on peut évidemment remplacer partout $a_1$ par $\Pi_2^m a_k^{-\alpha_{1k}}$ et prendre $A_1$ pour $a'_1$. Alors $a'_1 = 1$, $e_1 = 1$, et $\mathcal{A} = \{a'_2, \ldots, a'_r\}$, $a'_2, \ldots, a'_r$ étant des fonctions de $a_2, \ldots, a_m$. Si $A_1, \ldots, A_h$ sont résolus par rapport à $a_1, \ldots, a_h$, on pourra évidemment éliminer de même $a_1, \ldots, a_h$.

Si un groupe quotient $\mathcal{A}_0 | \mathcal{D}$ est fini, $\mathcal{D}$ contient nécessairement une puissance de tout élément $c$ de $\mathcal{A}_1$, sans quoi $\mathcal{A}_0 | \mathcal{D}$ contiendrait des complexes $\mathcal{D}c^\rho$ en nombre infini. $\mathcal{G}_0 | \mathcal{A}_0$ est isomorphe à $\Gamma$, et toute représentation entière de $\mathcal{G}_0$ où les $a$ sont des similitudes est une hyperreprésentation de $\Gamma$ répondant à $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ ou, comme je dirai encore, à $(\check{a}'_1, \ldots, \check{a}'_m)$. On remarquera que, dans les divers systèmes $(\check{a}'_1, \ldots, \check{a}'_m)$ qui répondent biunivoquement aux systèmes $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$, $a'_{r+1}, \ldots, a_m$ prennent des valeurs absolument arbitraires, puisque, d'après ce qu'on vient de voir, les équations $A_i(\check{a}) = 1$ laissent $\check{a}'_{r+1}, \ldots, \check{a}'_\lambda$ indéterminés. Quant à $\check{a}'_1, \ldots, \check{a}'_s$, *ils constituent un caractère de* $\mathfrak{A}$, et à la représentation correspondante de $\mathfrak{A}$ répond au moins une représentation irréductible de $\mathfrak{G}_0 | \mathfrak{A}$ (1). En lui adjoignant des similitudes de même degré et de multiplicateurs $\check{a}'^{\pm 1}_{r+1}, \ldots, \check{a}'^{\pm 1}_\lambda$ on en déduit une représentation irréductible de $\mathfrak{G}_0$. Ainsi *à chaque système* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ *répond au moins une hyperreprésentation irréductible de* $\Gamma$.

**3.** Supposons G irréductible. Parmi les hyperreprésentations $\{\tau_1 b_1, \ldots, \sigma_1 a_1, \ldots\}$ associées à $G = \{b_1, \ldots, a_1, \ldots\}$, déterminons-en une, que j'appellerai *unitaire*, par la condition que $a_{m+1} = \ldots = a_\lambda = 1$ et que $|\tau_l| = |b_l|^{-1}$. Alors tous les $|\sigma_k a_k|$ seront égaux à 1. Or $n$ divise N (2). On peut donc représenter chaque catégorie par un système $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ où $\check{a}_1^N = \ldots = \check{a}_m^N = 1$. *Le nombre des catégories de systèmes* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ *est donc fini.*

Désignons ces catégories par $C_1, \ldots, C_\mu$, $C_1$ étant celle où $\check{a}_1 = \ldots = \check{a}_m = 1$. Si $(\check{a}_{\alpha 1}, \ldots, \check{a}_{\alpha m})$ et $(\check{a}_{\beta 1}, \ldots, \check{a}_{\beta m})$ sont deux systèmes représentant respectivement les catégories $C_\alpha$ et $C_\beta$, la catégorie $C_\gamma$ du système $(\check{a}_{\alpha 1}\check{a}_{\beta 1}, \ldots, \check{a}_{\alpha m}\check{a}_{\beta m})$ (évidemment existant), entièrement déterminée par $C_\alpha$ et $C_\beta$, sera dite *composée* de $C_\alpha$, $C_\beta$. *Les* $C_\alpha$ *forment donc un* $g_\mu$ *abélien* $\mathfrak{M}$ dit *multiplicateur de* $\Gamma$ [on verra (**4**, **6**) que $\mathfrak{M}$ est indépendant des équations choisies pour $\Gamma$]. Comme $\check{a}_k^N = 1$, tout invariant (*E.*, 118) de $\mathfrak{M}$ et par suite tout facteur premier de $\mu$ divise N. *Si* $\mu = 1$, $\Gamma$ *est dit fermé.*

**4.** On obtient donc tous les systèmes $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ en prenant $\check{a}_j = \sigma_j u_j$, les $u_j$ étant des racines N^ièmes de 1 convenablement choisies

---

(1) Frobenius, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

(2) Schur, *Crelle*, t. 127, p. 44-46.

qui caractérisent les diverses catégories, et les $\sigma$ vérifiant $B_j(\tau) = \sigma_j$ où les $\tau$ sont arbitraires. Or, si l'on porte $\sigma_j = B_j(\tau)$ dans $A_{i_t}(\sigma) = 1$, on obtient, entre $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$, des identités qui équivalent à $A'_\theta(\sigma)^{e_\theta} = 1$ $(\theta = 1, \ldots, r)$, c'est-à-dire à $A'_\theta(\sigma) = 1$ (sans quoi les $\tau$ ne seraient pas indépendants). Donc $\check{a}'_\theta = A'_\theta(\sigma u) = A'_\theta(u)$. *Ainsi, quand le système* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ *parcourt une catégorie, les* $\check{a}'_j$ *correspondants sont assujettis à la condition que* $\check{a}'_1, \ldots, \check{a}'_r$ *restent fixes,* $\check{a}'_{r+1}, \ldots, \check{a}'_m$ *(et de même* $\check{a}'_{m+1}, \ldots, \check{a}'_\lambda$*) variant arbitrairement.*

Considérons le *groupe fini* $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_0 \,|\, \mathcal{A}_1$ *défini par les équations de* $\mathcal{G}_0$ *auxquelles on adjoint* $a'_{r+1} = \ldots = a'_\lambda = 1$ (même après la fixation de $\mathcal{G}_0$, qui dépend du choix des équations de $\Gamma$, $\mathcal{G}$ dépend encore du choix de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_0$). $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{A}$ (*E.*, 18), $\mathcal{G} \,|\, A \equiv \Gamma$, et, dans toute représentation irréductible de $\mathcal{G}$, les $a$ sont (¹) des similitudes (²). Or, d'après ce qu'on vient de voir, les diverses représentations irréductibles de $\mathcal{A}$ fournies par les représentations entières irréductibles de $\mathcal{G}$ et par suite aussi les caractères de $\mathcal{A}$ (³) répondent biunivoquement aux catégories des systèmes $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$. *Donc le nombre* $\mu$ *de ces catégories est* $e_1 \ldots e_r$, *plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre* $r$ *de la matrice des* $\alpha_{i_t k}$. De plus les formules $a'_t = A'_t(a)$ montrent que ces catégories se composent comme les caractères de $\mathcal{A}$ (⁴). *Donc* $\mathcal{A} \equiv \mathfrak{M}$.

On remarquera que toute conséquence de $A_{i_t} = 1$ peut ici se ramener

---

(¹) Pour abréger le langage, j'identifierai souvent dans ce qui suit les groupes abstraits avec leurs représentations.

(²) Voir, par exemple, SCHUR, *S. A. B.*, 1905, p. 409, et 1906, p. 166.

(³) FROBENIUS, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

(⁴) *Cf.* FROBENIUS, *S. A. B.*, 1899, p. 330-334; BURNSIDE, *P. L. M. S.*, 2ᵉ série, t. I, 1903, p. 120-122. $g_1, \ldots, g_n$ étant une base d'un groupe abélien H, $\gamma_i$ l'ordre de $g_i$ et $\theta_i$ une racine primitive $\gamma_i^{\text{ième}}$ de 1, les $\theta_i$ seront dits *racines fondamentales* de H et les quantités $\theta_i^{\rho_i}$ où $\rho_i$ parcourt un système de restes de $\gamma_i$ *caractères fondamentaux* de H (ils dépendent donc du choix de la base et de celui des $\theta_i$). La valeur pour l'élément $h = \Pi g_i^{x_i}$ du caractère $\chi_r$ déterminé par $\theta_1^{\rho_1}, \ldots, \theta_n^{\rho_n}$ $(r = \Pi \theta_i^{\rho_i})$ est $\Pi \theta_i^{\rho_i x_i} = \chi_r(h)$. $\chi_r$ sera dit *associé* à $r$. Le caractère composé $\chi_r \chi_s$ est évidemment $\chi_{rs}$. $d$ parcourt un diviseur D de H, les éléments $e$ tels que $\chi_d(e) = 1$ forment un groupe E. Comme $\chi_e(d) = \chi_d(e)$, les groupes D et E sont dits *réciproques*.

à la forme $\Pi_{i_1} A_{i_1}^{\nu_{i_1}} = 1$ (cf. *E.*, 17) ou $\Pi_k a_k^{\xi_k} = 1$ $(\xi_k = \Sigma_{i_1} \alpha_{i_1 k} \nu_{i_1})$. *Donc, dans tout système* $\Pi_k a_k^{\xi_{jk}} = 1$ *de semblables conséquences, les diviseurs élémentaires de la matrice* $\xi$ *des* $\xi_{jk}$ *sont des multiples des* $e_i$, *et le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre* $r$ *de* $\xi$ *est un multiple de* $\mu$ (*E.*, 197).

**5.** Partons d'un autre système $\overline{B}_j(\overline{\beta}) = 1$ $(j = 1, \ldots, \overline{m})$ d'équations de $\Gamma$, les $\overline{\beta}$ étant de nouveaux générateurs, et opérons de même en désignant les éléments, groupes, nombres correspondant à ceux introduits précédemment par les mêmes lettres surmontées d'un trait. *On va voir que* $\overline{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}$ $(\equiv \mathfrak{M})$, *et que les déterminations de* $\overline{\mathcal{G}}$ *sont les mêmes que celles de* $\mathcal{G}$.

Supposons d'abord que $\overline{\beta}_l = \beta_l$, et que $\overline{\nu} = \nu$ ($\overline{m}$ pouvant être différent de $m$). $B_j(\beta)$ peut se mettre identiquement sous la forme $\Pi V^{-1}(\beta)(\overline{B}_h^{\pm 1}(\beta)) V(\beta)$ (*E.*, 17). Donc, en mettant $\overline{b}$ pour $\beta$, et en observant que $\overline{b}_l^{-1} \overline{a}_k \overline{b}_l = \overline{a}_k$, $B_j(\overline{b}) = \alpha_j$, $\alpha_j$ étant une fonction des $\overline{a}_h$. Inversement l'expression des $\overline{B}$ par les $B$ fournit les $\overline{a}$ en fonction des $\alpha$. Donc les $\alpha$ engendrent le même groupe que les $\overline{a}$. Or les équations $B_j(\overline{b}) = \alpha_j$, $\overline{b}_l^{-1} \alpha_k \overline{b}_l = \alpha_k$ définissent évidemment le même groupe abstrait $\mathcal{G}_0$ que $B_j(b) = a_j$, $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, $\overline{b}_l$ jouant le rôle de $b_l$, et $\alpha_k$ celui de $a_k$. Donc $\overline{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}$, et $\overline{\mathcal{G}}$ a les mêmes déterminations que $\mathcal{G}$.

Supposons maintenant $\overline{\nu} > \nu$, $\overline{\beta}_l = \beta_l$ pour $l = 1, \ldots, \nu$, $\overline{B}_j = B_j$ pour $j = 1, \ldots, m$, et que les autres $\overline{B}_j$ soient de la forme $\overline{\beta}_h^{-1} \varphi_h(\beta) = 1$ $(h = \nu + 1, \ldots, \overline{\nu})$, $\varphi_h$ ne contenant que $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ (cf. *E.*, 19). La somme des exposants de $\overline{b}_h$ dans les conséquences des $\overline{B}_j(\overline{b}) = \overline{a}_j$ entre les $\overline{a}_j$ mises sous forme typique doit être nulle. Donc $\overline{a}_h$ disparaît en vertu de $\overline{b}_l^{-1} \overline{a}_k \overline{b}_l = \overline{a}_k$, $\overline{A}_i(\overline{a}) = 1$, et il ne reste entre les $\overline{a}$ que les mêmes conséquences $A_{i_1}(\overline{a}) = 1$ qu'entre les $a$. Donc $\overline{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}$, et les déterminations de $\overline{\mathcal{G}}$ coïncident avec celles de $\mathcal{G}$.

Passons au cas général. On pourra, sans changer $\mathcal{A}$ ni les déterminations de $\mathcal{G}$, adjoindre aux équations $B_j(\beta) = 1$ les expressions $\overline{\beta}_h = \varphi_h(\beta)$ des $\overline{\beta}$ par les $\beta$ [$\overline{B}_j(\overline{\beta}) = 1$ résulte du système ainsi formé (cf. *E.*, 19)]. On pourra de même, sans changer $\overline{\mathcal{A}}$ ni les déterminations de $\overline{\mathcal{G}}$, adjoindre aux équations $\overline{B}_j(\overline{\beta}) = 1$ les expressions

$\beta_h = \overline{\varphi}_h(\overline{\beta})$ des $\beta$ par les $\overline{\beta}$. On se trouve alors dans le premier cas particulier considéré.

**6.** C désignant le commutant de $\mathcal{G}_0$, on obtient les équations de $\mathcal{G}_0 | \mathcal{C}$ en adjoignant à celles de $\mathcal{G}_0$ les relations $b_l b_k = b_k b_l$ (*E.*, 66). Comme, d'ailleurs, l'élimination des $\sigma_j$ entre les $B_j(\tau) = \sigma_j$ entraîne les identités $A'_0(B(\tau)) = 1$, on voit qu'*en regardant les $b$ comme permutables, on aura identiquement* $a'_0 = A'_0(a) = 1$, $(0 = 1, \ldots, r)$, $a'_{r+1}, \ldots, a'_\lambda$ *restant indéterminés*. Donc $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{A}$ et est premier à $\mathcal{A}_1$ (*E.*, 66). Donc $\mathcal{C}\mathcal{A}_1$ est un produit direct qui se réduit à $\mathcal{C}$ quand on fait $a'_{r+1} = \ldots = a'_\lambda = 1$. *Donc $\mathcal{C}$ est le commutant de $\mathcal{G}$* (*E.*, 63). *Donc $\mathcal{C}$ est fini, et $\mathcal{C} | \mathcal{A}$ est isomorphe au commutant* K *de* $\Gamma$, *tandis que* $\mathcal{G}_0 | \mathcal{C}\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{G} | \mathcal{C} \equiv \Gamma | K$.

Soit G une hyperreprésentation *propre*, finie ou non, de $\Gamma$, vérifiant (1) et $G^0$ l'hyperreprésentation associée où $a'_{r+1} = \ldots = a'_\lambda = 1$. $G^0$ est évidemment homomorphe à $\mathcal{G}$, l'unité de $G^0$ répondant à un diviseur $\mathfrak{D}^0$ de $\mathcal{A}$. Soit $A^0 \equiv \mathcal{A} | \mathfrak{D}^0$ le diviseur de $G^0$ répondant à $\mathcal{A}$. On aura $G^0 | A^0 \equiv \mathcal{G} | \mathcal{A} \equiv \Gamma$, et le commutant $C^0$ de $G^0$, répondant à $\mathcal{C} | \mathfrak{D}^0$ (*E.*, 63), contient $A^0$.

**7.** En considérant les $b$ comme permutables (ce qui fournit les équations de $\mathcal{G}^0 | \mathcal{C}$) et en les éliminant (ou en les considérant comme des paramètres variables), on obtient, d'après ce qui précède, les équations de $\mathcal{A}_1$. Or, prenons la notation additive, et supposons que le déterminant $\Delta$ des coefficients des $b$ dans $B_1, \ldots, B_\nu$ est $\neq 0$ (on peut toujours supposer, par exemple, que, pour $l \leqq \nu$, $B_l$ est de la forme $b_l^{q_l}$). On voit alors de suite que l'élimination des $b$ fournit $a_{\nu+1}, \ldots, a_\lambda$ en fonction de $a_1, \ldots, a_\nu$ qui restent indéterminés. *Donc* $\mathcal{A}_1 = \{a_1, \ldots, a_\nu\}$, et $\nu = \lambda - r$. Pour un même groupe $\Gamma$ on peut faire varier à volonté $\nu$ et $\lambda$ à partir d'un certain minimum (on peut, par exemple, répéter plusieurs fois une équation $B_j(\beta) = 1$, ou introduire des générateurs fictifs $\beta_h$ avec les équations $\beta_h = 1$). Mais, $\mathfrak{M}$ ne variant pas (**8**), les $e_i \neq 1$ ne varient pas. En particulier *on peut toujours faire* $\lambda = m$, *et alors* $\nu = m - r$.

Si $\Gamma$ est fermé, on peut supposer $\nu = m = 1$. Donc *tout groupe cyclique est fermé.*

**8**. Considérons un groupe *fini* $G_0$ défini par $B_j(b) = a_j$, $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, $A_{0i}(a) = 1$, le système des $A_{0i} = 1$ comprenant entre autres toutes les équations $A_i = 1$. Soit $A_0$ le diviseur (*E.*, 18) abélien de $G_0$ défini par les $A_{0i} = 1$ (je dirai que $G_0$ est une *extension* de $\Gamma$ par $A_0$ où $A_0$ est l'*extenseur* de $\Gamma$), $C_0$ le commutant de $G_0$, et $D_0$ le plus grand commun diviseur de $A_0$, $C_0$. Le commutant de $G_0 | A_0 \equiv \Gamma$ est $A_0 C_0 | A_0$, et $(G_0 | A_0) | (A_0 C_0 | A_0)$ est isomorphe à $G_0 | A_0 C_0$, $A_0 C_0 | A_0$ à $C_0 | D_0$, $A_0 C_0 | C_0$ à $A_0 | D_0$. Chaque représentation entière irréductible de $G_0$ est une hyperreprésentation de $\Gamma$ correspondant à un système $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$, puisque les $a_i$ y sont des similitudes (*cf.* 4). Une fois choisis les caractères fondamentaux de $A_0$, il y a un caractère de $A_0$ et un seul $\chi'_\alpha$ ($\alpha$ étant ici l'élément de $A_0$ associé à ce caractère) tel que $\chi'_\alpha(a_k) = \check{a}_k$ pour $k = 1, \ldots, \lambda$. Je dirai que le système $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ et sa catégorie *répondent* à $\chi'_\alpha$ ou à $\alpha$, et de même que l'hyperreprésentation considérée *répond* à $\chi'_\alpha$ ou à $\alpha$, et l'on sait obtenir toutes les hyperreprésentations irréductibles de $\Gamma$ répondant à $\alpha$ (¹).

Soient $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ répondant à $\alpha$ et $(\sigma_1 \check{a}_1, \ldots, \sigma_m \check{a}_m)$ répondant à $\alpha'$ deux systèmes associés; $\tau_1, \ldots, \tau_\nu, \sigma_1, \ldots, \sigma_\lambda$ des similitudes de degré $n$ telles que $B_j(\tau) = \sigma_j$, d'où $A_i(\sigma) = 1$; T le plus petit commun multiple des $\sigma$, $\tau$, et S celui des $\sigma$. T est une représentation de $G_0 | C_0$ dans laquelle S est une représentation de $A_0 | D_0 \equiv A_0 C_0 | C_0$ (d'où $T | S \equiv G_0 | A_0 C_0$). Le multiplicateur d'une variable dans T est donc un caractère linéaire $\chi$ de $G_0$ ayant la propriété de se réduire dans $A_0$ à un caractère $\chi'_f$ de $A_0 | D_0$, et l'on a $\chi'_{\alpha'} = \chi'_\alpha \chi'_f$ ou $\alpha' = \alpha f$. Soit inversement $f$ un élément de $A_0$ tel qu'à $\chi'_f$ réponde un caractère linéaire $\chi$ de $G_0$, et $\chi(b_l) = \check{\tau}_l$, $\chi(a_k) = \check{\sigma}_k$. La représentation correspondant à $\chi$ donnera $B_j(\check{\tau}) = \check{\sigma}_j$, en sorte que $(\check{\sigma}_1 \check{a}_1, \ldots, \check{\sigma}_m \check{a}_m)$ est associé à $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$. Il est clair que, si à $\chi'_f$ et à $\chi'_g$ répondent respectivement les caractères linéaires $\chi$ et $\psi$ de $G_0$, le caractère linéaire $\chi\psi$ répondra à $\chi'_{fg}$, c'est-à-dire que *les éléments de l'espèce de f forment un groupe* $F_0$. $F_0$ *est le réciproque de* $D_0$ : en effet, à tout caractère linéaire $\chi$ de $G_0$ répond un caractère $\chi'_f$ de $A_0 = \Sigma\alpha$, et $D_0$, plus grand

(¹) Frobenius, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

commun diviseur de $A_0$, $C_0$ est formé des $\alpha$ tels que $\chi_{\cdot}(\alpha)=1$, c'est-à-dire tels que $\chi'_f(\alpha)=1$. On peut exprimer le résultat obtenu en disant qu'*à deux éléments* $\alpha$ *et* $\alpha'$ *de* $A_0$ (*autrement dit aux caractères* $\chi'_\alpha$ et $\chi'_{\alpha'}$) *répondent deux systèmes* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ *associés ou non selon que* $\alpha \equiv \alpha'$ *ou* $\alpha \not\equiv \alpha'$ mod $F_0$.

Si d'ailleurs $A_0|F_0=\Sigma F_0\alpha_i$, et si $C_{\alpha_1}$, $C_{\alpha_2}$ sont les catégories répondant à $\alpha_1$, $\alpha_2$, la catégorie répondant à $\alpha_1\alpha_2$ sera évidemment $C_{\alpha_1\alpha_2}$. *Donc* $A_0|F_0 \equiv D_0$ *est isomorphe à un diviseur de* $\mathfrak{M}$. Je dirai que l'extension $G_0$ de $\Gamma$ par $A_0$ est *normale* si $F_0=1$, et *antinormale* si $D_0=1$. Si $D_0 \equiv \mathfrak{M}$, les représentations de $G_0$ fournissent, en y regardant les variables comme homogènes, toutes les représentations homogènes de $\Gamma$, et $G_0$ sera dit *représentatif de* $\Gamma$. Ainsi $\mathcal{G}$ est un représentatif de $\Gamma$. Un représentatif de $\Gamma$ peut se définir, *indépendamment des équations choisies pour* $\Gamma$, comme *un groupe dont les représentations fournissent, en y regardant les variables comme homogènes, toutes les représentations homogènes de* $\Gamma$. Si $A_0=D_0\equiv\mathfrak{M}$, je dirai que $G_0$ est *figuratif de* $\Gamma$ : ainsi $\mathcal{G}$ est un figuratif de $\Gamma$, et *les diverses déterminations de* $\mathcal{G}$ *fournissent évidemment tous les figuratifs de* $\Gamma$. Un groupe $G_0$ figuratif de $\Gamma$ peut donc se définir à nouveau, indépendamment des équations de $\Gamma$, comme un *représentatif d'ordre minimum de* $\Gamma$, ou comme *une extension normale d'ordre maximum, c'est-à-dire comme un groupe d'ordre maximum dont le central et le commutant ont un diviseur commun* $A_0$ *tel que* $G_0|A_0\equiv\Gamma$. *Ce diviseur commun* $A_0$, *étant isomorphe à* $\mathfrak{M}$, *est le même dans tous les figuratifs, et le multiplicateur se trouve ainsi défini à nouveau indépendamment des équations de* $\Gamma$. *Aucun diviseur de* $A_0$ *ne se sépare de* $G_0$, *car ce diviseur devrait être premier à* $C_0$ (*E.*, 53, 63).

*Supposons* $G_0$ *figuratif de* $\Gamma$. $G_0$ *étant, d'après ses équations, partiellement homomorphe à* $\mathcal{G}_0$, *son commutant* $C_0$, *qui répond à* $\mathfrak{S}$ *et a le même ordre, est isomorphe à* $\mathfrak{S}$. *Si donc* $\Gamma$ *est parfait* (*E.*, 55), $G_0$, *qui coïncide alors avec* $C_0$, *est unique.*

**9.** Considérons les diverses extensions de $\Gamma$ par un groupe donné $A=\Sigma\alpha=\Sigma\beta$. Soient $a_i^{\alpha_i}=1$, $a_ia_k=a_ka_i$ $(i, k=1,\ldots,\rho)$ les équations de A. Celles d'une extension G de $\Gamma$ par A seront de la forme

$B_j(b) = c_j$, $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, $a_i^{\alpha_i} = 1$, $a_i a_k = a_k a_i$, les $c_j$ étant des fonctions des $a_i$ (vérifiant, en vertu des équations de A, toutes les conséquences des $B_j = c_j$ entre les $c$ (*E.*, 19). *Ainsi,* Γ *et* A *étant donnés,* G *est défini par les* $c_j$ qui seront dits *éléments définissants de* G. En prenant les générateurs $b'_l = \xi_l b_l$ (les $\xi_l$ étant quelconques dans A) et les $a_k$, G se trouve défini par les éléments $B_j(\xi) c_j = c'_j$ qui (relativement à A) seront dits former un système d'éléments *associé* à celui des $c_j$ et appartenir à une même *catégorie* [les *systèmes* de nombres correspondants $(\chi_\alpha(c_1), \ldots, \chi_\alpha(c_m))$ et $(\chi_\alpha(c'_1), \ldots, \chi_\alpha(c'_m))$, (*cf.* **I, 8**), $\chi_\alpha$ étant un caractère quelconque de A, sont évidemment associés]. *Deux systèmes d'éléments associés définissent donc le même groupe abstrait. De même si un automorphisme* (*E.*, 117) *de* A *fait correspondre à l'élément général* $\alpha$ *l'élément* $\alpha''$, *l'extension* G″ *définie par* $c''_1, \ldots, c''_m$ *est isomorphe à* G, $b_i \alpha''$ *de* G″ *répondant à* $b_i \alpha$ *de* G, car les $c''_j$ sont les mêmes fonctions des $a''_i$ que les $c_j$ des $a_i$, et A est défini par les mêmes équations entre les $a''_i$ qu'entre les $a_i$.

*Supposons que* G *soit une extension normale de* Γ. Soit $C_\alpha$ la catégorie du système $(\chi_\alpha(c_1), \ldots)$. Quand $\alpha$ parcourt A, $C_\alpha$ parcourt (A, 1) catégories distinctes (**8**). Soit $G^0$ un *figuratif* de Γ défini par les éléments $d_1^0, \ldots, d_m^0$ de $\mathfrak{M}$, et $C_x^0$ la catégorie du système $(\psi_x(d_1^0), \ldots, \psi_x(d_m^0))$, $\psi_x$ étant un caractère de $\mathfrak{M} = \Sigma x$. Soit $C_{x_\alpha}^0 = C_\alpha$. On aura $C_{x_\alpha x_\beta}^0 = C_{\alpha\beta}$, donc $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha\beta}$, et les $x_\alpha$ forment un groupe $\mathfrak{M}' \equiv A$. Soit $\mathfrak{N}$ son réciproque dans $\mathfrak{M}$ (pour un choix déterminé de la base et des racines fondamentales). $\psi_{x_\alpha}$, égal à 1 dans $\mathfrak{N}$, est un caractère de $\mathfrak{M} | \mathfrak{N}$, et à chaque élément $\beta$ de A on peut faire correspondre un élément $\mathfrak{N}\beta^0$ de $\mathfrak{M} | \mathfrak{N}$ tel que $\psi_{x_\alpha}(\beta^0) = \chi_{\alpha'}(\beta)$, $\alpha'$ dépendant de $\alpha$ [la correspondance $(\alpha, \alpha')$ est un automorphisme de A]. *Identifions* $\mathfrak{N}\beta^0$ *avec* $\beta$, et soit $d_j = \mathfrak{N} d_j^0$. L'extension $G \equiv G^0 | \mathfrak{N}$ de Γ par A définie par $d_1, \ldots, d_m$ est normale, puisque $(\psi_{x_\alpha}(d_1^0), \ldots)$ ou $(\chi_{\alpha'}(d_1), \ldots)$ parcourt (A, 1) catégories quand $x_\alpha$ parcourt $\mathfrak{M}'$, et $(\chi_\alpha(c_1), \ldots)$ est associé à $(\chi_{\alpha'}(d_1), \ldots)$. A l'automorphisme $(\alpha, \alpha')$ de A en correspond un autre $(\beta, \beta'')$ défini par la condition que $\chi_\alpha(\beta) = \chi_{\alpha'}(\beta'')$ quel que soit $\alpha$ dans A. En effet, cette relation, qui équivaut à $\chi_\beta(\alpha) = \chi_{\beta''}(\alpha')$, fait correspondre à chaque $\beta$ un $\beta''$ complètement déterminé, et au produit de deux $\beta$ le produit des $\beta''$ correspondants. Si donc $(\beta, \beta'')$ fait correspondre $c''_j$ à $c_j$, $(\chi_{\alpha'}(d_1), \ldots)$ sera associé à $(\chi_{\alpha'}(c''_1), \ldots)$, et $(\chi_{\alpha'}(c''_1 d_1^{-1}), \ldots)$ *représente* $C_1$ *quel que soit* $\alpha'$. Posons $c''_j d_j^{-1} = e_j$, et considérons l'extension G′ de Γ par A définie par les $e_j$ (qui vérifient évidemment les conditions requises). Comme toute hyperreprésentation de Γ fournie par G′ appartient à la catégorie $C_1$, *l'extension* G′ *est antinormale. Si inversement les* $e_j$ *définissent une extension antinormale* G′ *de* Γ *par* A, *l'extension* H *définie par les* $d_j e_j$ *est une extension normale de* Γ *par* A, puisque les systèmes $(\chi_\alpha(d_1 e_1), \ldots)$ appartiennent à des catégories distinctes.

*Si donc on a déterminé s systèmes non associés* $e_{k1}, \ldots, e_{km}$ $(k = 1, \ldots, s)$ *définissant respectivement des extensions antinormales* $G_k$ *de* Γ *par* A, *s étant maximum, toute extension normale de* Γ *par* A *sera définie par un des systèmes* $d_1 e_{k1}, \ldots, d_m e_{km}$. Je désignerai par $H_k$ l'extension définie par $d_1 e_{k1}, \ldots, d_m e_{km}$.

*Ces s extensions ne sont pas toujours toutes distinctes* (*cf.* **10**, **11**). *Mais elles le sont toujours si* Γ *est complet* (¹). Il suffit de montrer que, si $H_1$, $H_2$, par exemple, sont isomorphes, l'automorphisme de Γ fourni par cet isomorphisme (qui fait correspondre A et $H_2 | A$ de $H_2$ à A et $H_1 | A$ de $H_1$, puisque le central de Γ est 1) est contragrédient. Or, s'il était cogrédient, on pourrait le ramener à l'unité en transformant $H_2$ par un de ses éléments, et il y aurait un isomorphisme de $H_1$ à $H_2$ faisant correspondre à $d_j e_{2j}$ un élément de la forme $B_j(\xi) d_j e_{1j}$, $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ étant dans A. En désignant alors généralement par $\alpha'$ l'élément que l'automorphisme ainsi obtenu pour A fait correspondre à $\alpha$, $B_j(\xi) d_j e_{1j}$ est égal à $d'_j e'_{2j}$, et l'extension définie par $e'_{21}, \ldots, e'_{2m}$, *isomorphe à* $G_2$, est antinormale. Donc $(\chi_\alpha(e'_{21}), \ldots)$, comme $(\chi_\alpha(e_{11}), \ldots)$, appartient, quel que soit $\alpha$, à $C_1$. Donc, $(\chi_\alpha(d_1 e_{11}), \ldots)$ et $(\chi_\alpha(d'_1 e'_{21}), \ldots)$ étant associés, $(\chi_\alpha(d_1), \ldots)$ et $(\chi_\alpha(d'_1), \ldots)$ ou [en

---

(¹) Un groupe $G = \Sigma x = \Sigma x'$ est dit *complet* quand il n'a pas d'élément normal $\neq 1$ et qu'il n'admet que des automorphismes *cogrédients* : on appelle *cogrédient* tout automorphisme $(x, x')$, où $x'$ est, quel que soit $x$, de la forme $a^{-1} x a$, $a$ étant dans G ; les autres automorphismes sont dits *contregrédients*. L'automorphisme $(x, x)$ est dit *automorphisme unité*. Voir Hölder, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 324-325.

déterminant $\alpha''$ par la condition que $\chi_{\alpha}(\beta') = \chi_{\alpha''}(\beta)$ quel que soit $\beta$ dans A] $(\chi_{\alpha''}(d_1), \ldots)$ le sont. Or l'extension définie par $d_1, \ldots$ est normale. Donc $\alpha'' = \alpha$, et $\chi_{\alpha}(d'_j) = \chi_{\alpha}(d_j)$ quel que soit $\alpha$, d'où $d'_j = d_j$. Donc l'automorphisme considéré de A fait correspondre $e_{2j}$ à $B_j(\xi)e_{1j}$. Donc $G_2$ serait isomorphe à $G_1$ contre l'hypothèse.

**10.** Cherchons maintenant à construire les $G_k$, ce qui donnera en même temps $s$. Un quelconque d'entre eux G' a un commutant C' isomorphe au commutant K de $\Gamma$ et des équations de la forme $g_i^{\gamma_i} = \eta_i \zeta_i$, $g_i g_j = g_j g_i \eta_{ij} \zeta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, \sigma)$, $g_i^{-1} f_k g_i = f_{ki}$ ($f_k$ parcourant les générateurs de C', $\eta_i$, $\eta_{ij}$ étant dans A et $\zeta_i$, $\zeta_{ij}$, $f_{ki}$ dans C') jointes à celles de A et de C' et à celles exprimant que $a_1, \ldots, a_\rho$ sont normaux dans G'. En réduisant C' à 1, les $g$ deviennent permutables; donc $\eta_{ij} = 1$. En réduisant A à 1, on a les équations d'un groupe de commutant C', isomorphe à $\Gamma$; donc les $\zeta_i$ et les $\zeta_{ij}$ sont complètement déterminés quand les $g_i$ le sont. On voit d'ailleurs de suite, d'après la forme typique des conséquences des équations de G'(*E.*, 17) ou en adjoignant successivement les $g_i$ à AC', que, quels que soient les $\eta_i$ dans A, G' sera une extension antinormale de $\Gamma$ par A (*E.*, 19). Or, en remplaçant $g_i$ par un élément de $Ag_i$, $\eta_i$ est remplacé par $\eta_i \theta_i^{\gamma_i}$, $\theta_i = \Pi_1^\rho a_k^{t_{ik}}$ étant quelconque dans A. Donc $s$ est le nombre des manières de choisir les $t_{ik}$ $(0 \leqq t_{ik} < \alpha_k)$, deux systèmes de $t_{ik}$ tels que $t'_{11}, t'_{12}, \ldots$ et $t''_{11}, t''_{12}, \ldots$ étant regardés comme indistincts si chaque différence $t'_{ik} - t''_{ik}$ est de la forme $x\alpha_k + y\gamma_i$, c'est-à-dire si elle est un multiple du plus grand commun diviseur $\delta_{ik}$ de $\alpha_k$ et de $\gamma_i$. *Donc* $s = \Pi_{ik}\delta_{ik}$. En particulier, *si* $(\Gamma, K)$ *est premier à* $(A, 1)$, $s = 1$, *et il n'y a qu'une extension normale de* $\Gamma$ *par* A.

*Si* $H_1, H_2, \ldots$ *sont les divers figuratifs de* $\Gamma$, *les extensions normales de* $\Gamma$ *par* A *figurent toutes parmi les groupes* $H_i | \mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{N}$ *étant le même diviseur de* $\mathfrak{M}$ *qu'au n°* **9**. Soit en effet H' une extension normale quelconque de $\Gamma$ par A. On peut la construire comme au n° **8** en partant de l'extension antinormale G' ayant pour équation $g_i^{\gamma_i} = \eta_i \zeta_i, \ldots$ : H' est défini par $d, e_1, \ldots, e_i$ étant égal à $\eta_i$ pour $i \leqq \sigma$ et à 1 pour $i > \sigma$ (il suffit pour cela de ranger convenablement les équations). Or si, dans cette construction, A est remplacé par $\mathfrak{M}$, et chaque $e_i$ par un élément de $\mathfrak{N}e_i^0$, $\mathfrak{N}e_i^0$ correspondant à $e_i$

dans un isomorphisme de A à $\mathfrak{M} \mid \mathfrak{N}$, H′ est remplacé par un figuratif H, et $H \mid \mathfrak{N} = H'$.

**11.** Je supposerai désormais $\lambda = m$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Prenons par exemple pour $\Gamma$ le $g_{2n} (n \geqq 2)$ diédral. $\mathcal{G}_0$ est défini par $a^n = \alpha$, $b^2 = \beta$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$ et les équations exprimant que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont normaux; $r = m - \nu$ est ici égal à 1. Toute conséquence de ces équations où ne figurent que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se réduit, d'après sa forme typique (*E.*, 17) (la somme des exposants de $a$ ou de $b$ devant s'annuler), à $\alpha^{2x}\gamma^{-nx} = 1$. On a d'ailleurs, en élevant $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$ à la puissance $n$, $\alpha^2\gamma^{-n} = 1$. Donc $\mathcal{A}_0$ est ici défini par $\alpha^2 = \gamma^n$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, $\beta\gamma = \gamma\beta$. *Donc $\mu = 2$ si $n$ est pair, et $\Gamma$ est fermé si $n$ est impair.*

Soit $n$ pair $= 2n'$, et prenons pour générateurs $\alpha' = \alpha\gamma^{-n'}$, $\beta$, $\gamma$. $\mathcal{A} = \{\alpha'\}$ est défini par $\alpha'^2 = 1$, et $\mathcal{A}_1$ a les déterminations

$$\{\beta, \beta^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}\}, \quad \{\alpha\beta, (\alpha\beta)^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}\},$$
$$\{\beta, \beta^{-1}, \alpha\gamma, (\alpha\gamma)^{-1}\}, \quad \{\alpha\beta, (\alpha\beta)^{-1}, \alpha\gamma, (\alpha\gamma)^{-1}\}.$$

Les déterminations correspondantes de $\mathcal{G}$ sont $a^{2n} = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; $a^{2n} = 1$, $b^2 = a^n$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; $a^{2n} = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{n-1}$ si $n'$ est pair, ou $a^n = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$, $\gamma^2 = 1$, $a\gamma = \gamma a$, $b\gamma = \gamma b$ si $n'$ est impair; $a^{2n} = 1$, $b^2 = a^n$, $b^{-1}ab = a^{n-1}$ si $n'$ est pair, ou $a^n = 1$, $b^2 = \gamma$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$, $\gamma^2 = 1$, $a\gamma = \gamma a$ si $n'$ est impair. La dernière détermination se ramène, quel que soit $n$, à la précédente en remplaçant $b$ par $ba$. On voit que *le maximum du nombre des figuratifs indiqué au n° **10** n'est pas toujours atteint.*

**12.** Le symétrique $\Gamma$ de degré $t \geqq 4$ (le symétrique et l'alterné de degré $< 4$ rentrent dans les cas précédemment traités) est défini par les équations (*S.*, 69)

$$(2) \quad \begin{cases} b^t = 1, \quad a^2 = 1, \quad (ba)^{t-1} = 1, \quad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \quad (ab^{-j}ab^j)^2 = 1, \\ j = 2, \ldots, \tau, \quad \tau \text{ étant le plus grand entier } \leqq \frac{t}{2}. \end{cases}$$

On a à considérer le groupe $\mathcal{G}_0$ défini par les équations

$$(3) \quad \begin{cases} b^t = \beta, \quad a^2 = \alpha, \quad (ba)^{t-1} = \gamma, \quad (ab^{-1}ab)^3 = \delta, \quad (ab^{-j}ab^j) = \varepsilon_j, \\ j = 2, \ldots, \tau; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_j \text{ sont permutables à } a, b \text{ (donc entre eux).} \end{cases}$$

Ici $m = \tau + 3$, $\nu = 2$, $\mathcal{A}_0 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau\}$.

Comme dans tout produit $a^x b^y a^{x'} b^{y'} \ldots$ *appartenant à* $\mathcal{A}_0$ on peut toujours faire passer à gauche le dernier élément à droite, je considérerai, dans un tel produit (que l'on peut évidemment écrire en commençant par un quelconque de ses éléments), le premier élément à gauche comme suivant le dernier à droite.

Je poserai $(a b^{-h} a b^h)^{\rho_h} = \varepsilon_h$ ($h$ étant pris mod $t$; $\varepsilon_1 = \delta$; $\rho_h = 3$, si $h \equiv \pm 1 \bmod t$; $\rho_h = 2$, si $h \not\equiv \pm 1 \bmod t$ : il est clair que $\varepsilon_h = \varepsilon_{-h}$). Pour abréger je dirai « transformer $ab^h a$ » au lieu « de remplacer $ab^h a$ par l'expression égale $b^h a b^{-h} a b^h a b^{-h} a b^h \delta \alpha^{-1}$, si $h \equiv \pm 1 \bmod t$, ou $b^h a b^{-h} a b^h \varepsilon_h \alpha^{-2}$, si $h \not\equiv \pm 1 \bmod t$ ».

Il s'agit maintenant de former les conséquences des équations (3) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau$.

**13.** *Supposons d'abord un instant a permutable à b.* Soit (3 *bis*) le système obtenu en adjoignant à (3) $ba = ab$. Ce système (3 *bis*) équivaut évidemment à

$$b^t = \beta, \qquad a^2 = \alpha, \qquad b^{t-1} a^{t-1} = \gamma, \qquad \delta = \alpha^3, \qquad \varepsilon_j = \alpha^2, \qquad ba = ab,$$

et l'équation $b^{t-1} a^{t-1} = \gamma$ s'écrit, en vertu de $b^t = \beta$, $a^2 = \alpha$,

$$\alpha^{t-1} = b\gamma\beta^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad a^{t(t-1)} = \beta^{1-t}\gamma^t \qquad \text{ou} \qquad \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}} = \beta^{1-t}\gamma^t.$$

Toute conséquence de (3 *bis*) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau$ se ramène, en tenant compte de $\delta = \alpha^3$, $\varepsilon_j = \alpha^2$, à une relation entre $\alpha, \beta, \gamma$ seuls. D'ailleurs toute conséquence de (3 *bis*) peut se mettre, en vertu des équations exprimant que les générateurs sont permutables, sous la forme $\Phi = 1$, $\Phi$ étant un produit de puissances de $b^t\beta^{-1}$, $a^2\alpha^{-1}$, $b^{t-1}a^{t-1}\gamma^{-1}$, $\delta\alpha^{-3}$, $\varepsilon_j\alpha^{-2}$ (*E.*, 17). Une conséquence entre $\alpha, \beta, \gamma$ seuls est donc de la forme

$$(a^2\alpha^{-1})^x (b^t\beta^{-1})^y (b^{t-1}a^{t-1}\gamma^{-1})^z = 1.$$

Pour que $b$ disparaisse, il faut que $ty + (t-1)z = 0$, d'où $y = (t-1)\xi$, $z = -t\xi$. Pour que $a$ disparaisse, il faut que $2x + (t-1)z = 0$, d'où $x = \frac{t(t-1)}{2}\xi$. Donc la relation cherchée sera de la forme

$$\left(\alpha^{-\frac{t(t-1)}{2}} \beta^{1-t}\gamma^t\right)^\xi = 1.$$

Donc les conséquences de (3 *bis*) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau$ *coïncident* avec les conséquences de

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta^{1-t}\gamma^t = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}, \qquad \delta = \alpha^3, \qquad \varepsilon_j = \alpha^2, \\ \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon_j \quad \text{étant permutables.} \end{array} \right.$$

**14.** *Ne supposons plus a permutable à b. A priori* toutes les conséquences de (3) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau$ résultent aussi de (3 *bis*).

On a d'ailleurs

$$(5) \qquad \delta^2 = \delta\, a^{-1} \delta\, a = (ab^{-1}ab)^3 a^{-1} (ab^{-1}ab)^3 a = \alpha^6,$$

$$(6) \qquad \varepsilon_j^2 = \varepsilon_j a^{-1} \varepsilon_j a = (ab^{-j}ab^j)^2 a^{-1} (ab^{-j}ab^j)^2 a = \alpha^4.$$

A la relation

$$(i+1, i+3, i+2)^{-1}.(12)(i+1, i+2).(i+1, i+3, i+2)$$
$$= (12)(i+2, i+3) \qquad [i \not\equiv \pm 1 \pmod t]$$

du g' symétrique de champ 1, ..., $t$, isomorphe à $\Gamma$, répond dans $\mathcal{G}_0$ la relation

$$(7) \qquad b^{-i}(ab^{-1}ab)^{-2} b^i . ab^{-i}ab^i . b^{-i}(ab^{-1}ab)^2 b^i = ab^{-i-1}ab^{i+1}\xi,$$

$\xi$ étant dans $\mathcal{A}_0$, ou, en remplaçant $(ab^{-1}ab)^{-2}$ par $\delta^{-1}ab^{-1}ab$, et en développant $(ab^{-1}ab)^2$,

$$\delta^{-1}\alpha b^{-i}ab^{-1}.ab^{i+1}a.b^{-i-1}ab\,ab^{-1}ab^{i+1} = ab^{-i-1}ab^{i+1}\xi,$$

ou, en transformant $ab^{i+i}a$,

$$\delta^{-1}\varepsilon_{i+1}.b^{-i}ab^iab^{-i}a.b^{-1}ab^{i+1} = ab^{-i-1}ab^{i+1}\xi,$$

ou, en remplaçant $b^{-i}ab^iab^{-i}a$ par $a^{-1}b^{-i}\varepsilon_i = \alpha^{-1}\varepsilon_i ab^{-i}$

$$\alpha^{-1}\delta^{-1}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = \xi, \qquad \text{d'où} \qquad \xi^2 = 1.$$

Or, en élevant (7) au carré, on a $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}\xi^2$. Donc

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_\tau \qquad \text{soit} \qquad = \varepsilon.$$

On a ensuite

$$\gamma = (ba)^{t-1} = bab^{-1}.b^2ab^{-2}\ldots b^{t-2}ab^{2-t}.b^{t-1}a,$$

ou, en remplaçant $bab^{-1}$ par $abab^{-1}abab^{-1}a\,\alpha^{-5}\delta$ et $b^jab^{-j}$ $(j \geqq 2)$

par $ab^j ab^{-j} a \alpha^{-3} \varepsilon$,

$$\gamma = ab\, ab^{-1}\, ab\, ab^{-1} a . ab^2 ab^{-2} a . ab^3 ab^{-3} a \ldots ab^{t-2} ab^{2-t} a . b^{t-1} a\, \alpha^{1-3t} \delta \varepsilon^{t-3}$$
$$= ab\, ab^{-1} a (ba)^{t-2} b^{2-t} ab^{t-1} a \alpha^{1-2t} \delta \varepsilon^{t-3}.$$

ou, puisque $b^t = \beta$,

$$\gamma = ab\, ab^{-2} \gamma b^2 ab^{-1} a \alpha^{1-2t} \delta \varepsilon^{t-3}$$

ou

$$\delta \varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-3}. \tag{8}$$

*Si $t$ est impair*, $\varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-6}$. Donc

$$\delta = \alpha^3 \quad \text{ou} \quad \delta = \alpha^{-1} \varepsilon. \tag{9}$$

*Si $t$ est pair*, $\varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-8} \varepsilon$. Donc

$$\delta \varepsilon = \alpha^5 \quad \text{ou} \quad \delta = \alpha \varepsilon. \tag{10}$$

On peut donc supprimer les générateurs $\delta, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\tau$ de $\mathcal{H}_0$, et supposer que, dans (3), $\varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\tau$ désignent $\varepsilon_2 = \varepsilon$, et que $\delta$ désigne $\alpha^3$ si $t$ est impair, $\alpha\varepsilon$ si $t$ est pair. Toutes les conséquences de (3) entre $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ résultent alors de $\beta^{1-t} \gamma^t = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$.

**15.** Prenons maintenant la formule $\beta = b^t = (aba)^t \bmod \{\alpha\}$, et sous-entendons désormais le module $\{\alpha\}$. En transformant $aba$ on a

$$\beta \equiv (b\, ab^{-1} ab\, ab^{-1} ab)^t,$$

ou, en faisant commencer le second membre à la quatrième lettre

$$\beta \equiv (ab\, ab^{-1} ab^2 ab^{-1})^t.$$

d'où, en transformant $ab^2 a$,

$$\beta \varepsilon^{-t} \equiv (ab\, ab\, ab^{-2} ab)^t \equiv [ab^{-2} (ab)^3]^t$$

ou, puisque $(ab)^3 = (ab)^{t-1} (ab)^{4-t} = \gamma (ab)^{4-t}$,

$$\begin{aligned} \beta (\gamma\varepsilon)^{-t} &\equiv [ab^{-2} (ab)^{4-t}]^t \equiv [ab^{-2} (b^{-1} a)^{t-4}]^t \\ &\equiv [ab^{-3} a (b^{-1} a)^{t-6} b^{-1} a]^t \\ &\equiv [b^{-4} a (b^{-1} a)^{t-6}]^t \\ &\equiv [ab^{-4} (ab^{-1})^{t-6}]^t. \end{aligned} \tag{11}$$

Si $t=4$, on obtient de suite, en transformant un des $ab^{-2}a$ de la première expression de $\beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$, $\beta^{t-1}\gamma^{-t}\equiv 1$. Si $t=5$, on obtient de même, en transformant un des $ab^{-3}a$ de la seconde expression de $\beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$, $\beta^{t-1}\gamma^{-t}\equiv\varepsilon$. Ces formules rentrent dans les formules générales que nous obtiendrons tout à l'heure.

**16.** Considérons l'élément $e_x=[ab^{-2x}(ab^{-1})^{t-2x-2}]^t\ (1\leqq x\leqq\tau-1)$, et admettons qu'il est dans $\mathfrak{A}_0$ [on vient de voir que $e_2\equiv\beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$]. En transformant $ab^{-2x}a$ on obtient

$$e_x\equiv[ab^{2x}ab^{-2x-1}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-2x-1}]^t\varepsilon^t, \tag{12}$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x-1}a$,

$$e_x\equiv[ab^{-2x-2}ab^{2x+1}ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{t-2x-6}ab^{-2x-2}ab^{2x+1}]^t\varepsilon^t,$$

d'où, en transformant le deuxième et le troisième $ab^{-2x-2}$ du crochet,

$$e_x\equiv[ab^{-2x-2}ab^{-1}ab^{2x+2}ab^{-2x-3}(ab^{-1})^{t-2x-8}ab^{-2x-3}ab^{2x+2}ab^{-1}]^t\varepsilon^t,$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_x\equiv[&ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{2x+n+1}ab^{-2x-n-2}\\ &\times(ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-2x-n-2}ab^{2x+n+1}(ab^{-1})^n]^t\varepsilon^t. \end{aligned}\tag{13}$$

**17.** *Soit d'abord $t$ impair $=2\tau+1$, et supposons d'abord* $x\leqq\tau-3$. On aura, en faisant $n=\tau-x-3$,

$$\begin{aligned} e_x\equiv[&ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-2}ab^{-x-\tau+1}\\ &\times ab^{-1}ab^{-x-\tau+1}ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t\varepsilon, \end{aligned}\tag{14}$$

d'où, en transformant partout $ab^{-x-\tau+1}a$,

$$e_x\equiv[ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-1}ab^{-t-2x+2}ab^{x+\tau-1}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]^t\varepsilon. \tag{15}$$

Si $x=1$, cette formule donne $e_1\equiv e_2\varepsilon$, et, comme $e_2$ est dans $\mathfrak{A}_0$ (**15**), $e_1$ y est aussi. Soit désormais $x\geqq 2$. *Supposons établie, pour $i$ impair, la généralisation suivante de* (15)

$$e_x\equiv[ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-i}ab^{-t-2x+2i}ab^{x+\tau-i}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]\varepsilon^i, \tag{16}$$

qui donne, pour $x=i$, d'après la définition de $e_x$, $e_i\equiv e_{i+1}\varepsilon^i$. On en tire, en transformant $ab^{-t-2x+2i}$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+i-1}ab^{t+2x-2i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]^t \varepsilon^{i+1},$$

et généralement

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{n+2+i}ab^{-n-3-i} \\ \times (ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-n-3-i}ab^{n+2+i}(ab^{-1})^n]^t \varepsilon^{i+1},$$

d'où, en faisant $n = 0$, et en transformant les $ab^{2+i}$,

$$(17) \qquad e_x \equiv [ab^{-2x+2(i+1)}ab^{-i-2}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-i-2}]^t \varepsilon^{i+1}.$$

Si $x = i+1$, cette formule donne, d'après la définition de $e_x$, $e_{i+1} \equiv e_{i+2}\varepsilon^{i+1}$. De là, en transformant $ab^{-2x+2(i+1)}$,

$$e_x \equiv [ab^{2x-2(i+1)}ab^{-2x+i}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-2x+i}]^t \varepsilon^{i+2},$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x+i}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}ab^{2x-i}ab^{-2x+i-1}(ab^{-1})^{t-2x-6}ab^{-2x+i-1}ab^{2x-i}]^t \varepsilon^{i+2},$$

et généralement

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{2x+n-i}ab^{-2x-n+i-1} \\ \times (ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-2x-n+i-1}ab^{2x+n-i}(ab^{-1})^n]^t \varepsilon^{i+2}.$$

d'où, pour $n = \tau - x - 3$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-i-3}ab^{-x-\tau+i+2} \\ \times ab^{-1}ab^{-x-\tau+i+2}ab^{x+\tau-i-3}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t \varepsilon^{i+2}.$$

En transformant partout $ab^{-x-\tau+i+2}a$, on obtient alors la formule (16) où $i$ est changé en $i+2$.

On a donc, d'une manière générale, quel que soit $x$,

$$(18) \qquad e_x \equiv e_{x+1}\varepsilon^x.$$

**18.** Nous avons supposé jusqu'ici $x \leqq \tau - 3$. *Soit maintenant* $x = \tau - 2$. On partira alors de la définition de $e_x$, qui jouera le rôle de (14), et qui s'écrit ici

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-2\tau+4}(ab^{-1})^{t-2\tau+2}]^t \equiv [ab^5(ab^{-1})^3]^t \beta^{-t}.$$

On en déduit successivement par le même procédé

$$\begin{aligned} e_{\tau-2} &\equiv [ab^{-5}ab^{4} \quad ab^{-1}ab^{4} \quad ]^{t}\beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{7} \quad ab^{-4}ab^{3} \quad ab^{-4}]^{t}\beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{-7}ab^{3} \quad ab^{3} \quad ab^{3} \quad ]\,\beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{9} \quad ab^{-3}ab^{-1}ab^{-3}]\,\beta^{-t} \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_{\tau-2} &\equiv [ab^{4n+1} \quad ab^{1-2n} \quad ab^{-1}ab^{1-2n} \quad ]^{t}\beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-4n-1} \quad ab^{2n+2} \quad ab^{-1}ab^{2n+2} \quad ]^{t}\beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{4n+3} \quad ab^{-2n-2} \quad ab^{3} \quad ab^{-2n-2} \quad ]^{t}\beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{-4n-3} \quad ab^{2n+1} \quad ab^{3} \quad ab^{2n+1} \quad ]^{t}\beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{4(n+1)+1}ab^{1-2(n+1)}ab^{-1}ab^{1-2(n+1)}]\,\beta^{-t} \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On s'arrêtera à la première formule où apparaît $b^{t}$. Cette formule s'écrit, quel que soit $t$,

$$e_{\tau-2} \equiv \beta^{-t}(ab^{3}ab^{-1})^{t}\varepsilon^{\tau} \equiv e_{\tau-1}\varepsilon^{\tau} \equiv e_{\tau-1}\varepsilon^{\tau-2}, \tag{19}$$

c'est-à-dire que la formule (18) s'applique encore pour $x = \tau - 2$.

**19.** *Soit* $x = \tau - 1$. C'est encore la définition de $e_x$ qui jouera le rôle de (14). On partira donc de

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{-2\tau+2}(ab^{-1})^{t-2\tau}]^{t} \equiv [ab^{3}ab^{-1}]^{t}\beta^{-t},$$

d'où l'on déduit, toujours par le même procédé,

$$\begin{aligned} e_{\tau-1} &\equiv [ab^{-3} \quad ab^{5} \quad ]^{t}\beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{-5} \quad ab^{7} \quad ]^{t}\beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-7} \quad ab^{9} \quad ]^{t}\beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\equiv [ab^{-4n-1}\,ab^{4n+3}]^{t}\beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-4n-3}\,ab^{4n+5}]^{t}\beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\equiv [ab^{2-t} \quad ab^{t} \quad ]^{t}\beta^{-t}\varepsilon^{\tau-1}. \end{aligned}$$

On a donc ici

$$e_{\tau-1} \equiv \beta^{2-t}\varepsilon^{\tau-1}. \tag{20}$$

Ainsi en multipliant les formules déduites de (18) pour $x = 2, \ldots, \tau - 3$, par (19) et (20),

$$e_2 \equiv \beta^{2-t} \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2} - 1}. \tag{21}$$

Or $e_2 \equiv \beta(\gamma\varepsilon)^{-t} \equiv \beta\gamma^{-t}\varepsilon$ (**15**). Donc, en éliminant $e_2$,

$$\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

**20.** *Soit maintenant $t$ pair $= 2\tau$, et supposons d'abord $x \leqq \tau - 3$.* La formule (13) donne, pour $n = \tau - x - 3$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-2}ab^{-x-\tau+1}ab^{-x-\tau+1}ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant le premier $ab^{-x-\tau+1}a$ du crochet,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-1}ab^{-t-2x+2}ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant $ab^{-t-2x+2}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+1}ab^{t+2x-2}ab^{-x-\tau}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t.$$

Si $x = 1$, cette formule donne $e_1 \equiv e_2$. Donc $e_1$ est, comme $e_2$, dans $A_0$ (**15**). Supposons établie la formule plus générale

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+i}ab^{t+2x-2i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t, \tag{22}$$

d'où, pour $x = i$, $e_i \equiv e_{i+1}$. On en tire, en transformant $ab^{-x-\tau+i}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{-x-\tau+i-1}ab^{x+\tau-i}ab^{x+\tau-i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-x-\tau+i-1}$, et en introduisant $b^t b^{-t} b^t b^{-t}$,

$$\begin{aligned} e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-4}ab^{\tau-x+i-2}ab^{x-\tau-i+1} \\ \times (ab^{-1})^2 ab^{x-\tau-i+1}ab^{\tau-x+i-2}(ab^{-1})^{\tau-x-4}]^t, \end{aligned}$$

et généralement

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{n+i+2}ab^{-n-i-3}(ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-n-i-3}ab^{n+i+2}(ab^{-1})^n]^t,$$

d'où, en faisant $n = 0$, et en transformant partout $ab^{t+2}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x+2(i+1)}ab^{-i-2}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-i-2}]^t, \tag{23}$$

qui, pour $x = i + 1$, donne $e_{i+1} \equiv e_{i+2}$. En transformant $ab^{-2x+2(i+1)}a$, on en tire

$$e_x \equiv [ab^{2x-2(i+1)}ab^{-2x+i}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-2x+i}]^t,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x+i}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}ab^{2x-i}ab^{-2x+i-1}(ab^{-1})^{t-2x-6}ab^{-2x+i-1}ab^{2x-i}]^t,$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_x \equiv [\,& ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{2x+n-i}ab^{-2x-n+i-1} \\ & \times (ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-2x-n+i-1}ab^{2x+n-i}(ab^{-1})^n]^t, \end{aligned}$$

d'où, pour $n = \tau - x - 3$,

$$\begin{aligned} e_x \equiv [\,& ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-i-3} \\ & \times ab^{-x-\tau+i+2}ab^{-x-\tau+i+2}ab^{x+\tau-i-3}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t, \end{aligned}$$

et, en transformant le premier $ab^{-x-\tau+i+2}a$ du crochet,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-i-2}ab^{-2x-t+2i+4}ab^{x+\tau-i-3}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t.$$

En transformant $ab^{-2x-t+2i+4}a$, on en déduit la formule (22) où $i$ est remplacé par $i+2$. On a donc généralement $e_x \equiv e_{x+1}$. Donc $e_1 \equiv e_{\tau-3}$.

**21.** *Soit maintenant* $x = \tau - 2$. La définition de $e_x$ donne

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-t+4}(ab^{-1})^2]^t \equiv [ab^4(ab^{-1})^2]^t\beta^{-t}.$$

On en déduit, en transformant $ab^4a$,

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-4}ab^3ab^3]^t\beta^{-t},$$

d'où, en transformant le premier $ab^3a$, puis, par des transformations successives analogues,

$$\begin{aligned} e_{\tau-2} &\equiv [ab^6 \quad ab^{-1} \quad ab^{-3}]^t\beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-6} \quad ab^5 \quad ab^3]^t\beta^{-t} \\ &\equiv [ab^8 \quad ab^{-1} \quad ab^{-5}]^t\beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-8} \quad ab^7 \quad ab^3]^t\beta^{-t} \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et généralement

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
e_{\tau-2} &\equiv [ab^{2n} \quad ab^{-1} \quad ab^{3-2n} \quad ]^t \beta^{-t}\\
e_{\tau-2} &\equiv [ab^{-2n} \quad ab^{2n-1} ab^{3} \quad ]^t \beta^{-t}\\
&\equiv [ab^{2(n+1)} ab^{-1} \quad ab^{3-2(n+1)}]^t \beta^{-t}\\
&\equiv \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

La formule (24) donne pour $n=\tau$

$$e_{\tau-2} \equiv (ab^2)^t \beta^{-t} \equiv e_{\tau-1}.$$

**22.** *Soit* $x=\tau-1$, et $e_x = e_{\tau-1} = (ab^2)^t \beta^{-t}$.
Posons $t=qt'$, $t'$ étant impair, et $q=2^\theta=2q'$. Alors $e_{\tau-1}=[(ab^2)^q]^{t'}\beta^{-t}$.
Transformons un des $ab^2 a$ du crochet. Il viendra

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^4 ab^{-2} ab^4 (ab^2)^{q-3}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon,$$

d'où, en transformant partout $ab^4 a$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^6 ab^{-4})^2 ab^6 (ab^2)^{q-5}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon,$$

et généralement

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{2n+2} ab^{-2n})^n ab^{2n+2} (ab^2)^{q-2n-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

On tire de là, pour $n=q'-1$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^q ab^{2-q})^{q'-1} ab^q ab^2]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{q'(q'-1)}{2}}.$$

Si $t$ est $> q$, on continuera en transformant partout $ab^q a$, ce qui donne

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{2q+2} ab^{-q} (ab^{q+2} ab^{-q})^{q'-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{q'(q'+1)}{2}}.$$

d'où, en transformant partout $ab^{q+2} a$ et $ab^{2q+2} a$,

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{2q+4} ab^{-2q-2} ab^{2q+4} ab^{-q-2} (ab^{q+4} ab^{-q-2})^{q'-2}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{(q'+1)(q'+2)}{2}+1},$$

et généralement

$$
\begin{aligned}
e_{\tau-1} \equiv [&(ab^{2q+2n+2} ab^{-2q-2n})^n ab^{2q+2n+2} ab^{-q-2n}\\
&\times (ab^{q+2n+2} ab^{-q-2n})^{q'-n-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{(q'+n)(q'+n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}},
\end{aligned}
$$

d'où, pour $n = q' - 1$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{3q}ab^{2-3q})^{q'-1}ab^{3q}ab^{-2q+2}]^{t'}\beta^{-t}\varepsilon^{\frac{3q'(3q'-1)}{2}},$$

et généralement, *pour n impair*),

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{nq}ab^{2-nq})^{q'-1}ab^{nq}ab^{-(n-1)q+2}]^{t'}\beta^{-t}\varepsilon^{\frac{nq'(nq'-1)}{2}},$$

d'où, pour $n = t'$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{t}ab^{2-t})^{q'-1}ab^{t}ab^{-t+q+2}]^{t'}\beta^{-t}\varepsilon^{\frac{t'(t'-1)}{2}} \equiv \beta^{2-t}\varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

Donc

$$e_2 \equiv e_{\tau-1} \equiv \beta^{2-t}\varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

Or $e_2 \equiv \beta\gamma^{-t}$ (**15**). Donc, en éliminant $e_2$,

$$\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

**23.** On a donc, quel que soit $t$,

(25) $$\beta^{1-t}\gamma^{t}\varepsilon^{l}\alpha^{m} = 1, \qquad l = \frac{\tau(\tau-1)}{2},$$

$m$ étant encore inconnu. Cette relation étant une conséquence de $\beta^{1-t}\gamma^{t} = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$ (**14**), son premier membre est de la forme

(26) $$\left(\beta^{1-t}\gamma^{t}\alpha^{-\frac{t(t-1)}{2}}\right)^{x}(\varepsilon\alpha^{-2})^{y}.$$

Donc $x = 1$, $y = l$, et

(27) $$m = -\frac{t(t-1)}{2} - 2l = -\frac{t(t-1)}{2} - \tau(\tau-1).$$

Il est clair qu'on aurait pu déterminer $m$, mais plus péniblement, en conservant $\alpha$ dans les calculs qui ont fourni $\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv \varepsilon^{l}$.

**24.** *Toute conséquence des équations* (3) *entre* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varepsilon$ *résulte de celles qui ont été trouvées.*

En effet, une telle conséquence $\Phi = 1$, devant résulter de $\beta^{1-t}\gamma^{t} = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$ (**14**), a un premier membre $\Phi$ de la forme (26).

Mais $\beta^{1-t}\gamma^{t}\varepsilon^{t}\alpha^{m}$ ayant aussi cette forme, $\Phi = 1$ se ramène, en vertu des relations trouvées, à la forme $(\alpha^{-2}\varepsilon)^{x} = 1$ ($x = 0$ ou $1$). Il s'agit de montrer que, dans toute conséquence de cette forme, $x$ est nécessairement nul. Il suffit pour cela de construire un groupe d'ordre $2(t!)$ défini par

$$(28)\quad \left\{ \begin{array}{c} a^2 = 1, \qquad b^t = \beta, \qquad (ab)^{t-1} = \gamma, \qquad (ab^{-1}ab)^3 = \delta, \\ (ab^{-j}ab^{j})^2 = \varepsilon, \qquad (j = 2, \ldots, \tau), \qquad \varepsilon^2 = 1; \\ \delta = 1 \text{ si } t \text{ est impair}; \qquad \delta = \varepsilon \text{ si } t \text{ est pair}; \qquad \beta, \gamma \text{ sont dans } \{\varepsilon\} = E. \end{array} \right.$$

Admettons l'existence d'un tel groupe abstrait X, et cherchons à construire un groupe analogue $\overline{X}$ où $t$ soit remplacé par $t+1$. Je désignerai par $\bar{\tau}$, $\bar{\varepsilon}$, $\overline{E}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, ... les objets analogues à $\tau$, $\varepsilon$, ... et relatifs à $\overline{X}$.

Soit G la représentation régulière de X et $S_t$ le symétrique de champ $1, \ldots, t$. $X\,|\,E \equiv S_t$ est représenté régulièrement par le plus petit commun multiple $\Gamma$ des substitutions $(Ea) = (Ex, Exa)$, (*S.*, 57) et $(Eb) = (Ex, Exb)$, $Ex$ parcourant $X\,|\,E$ : je supposerai que $(Ea)$ répond à la substitution $(12)$ et $(Eb)$ à $(12\ldots t)$ ; je désignerai d'une manière générale par $(Ez)$ la substitution de $\Gamma$ qui répond à l'élément $Ez$ de $X\,|\,E$, et par $(z)$ la substitution de G qui répond à $z$ de X.

Les éléments de $X\,|\,E$ se partagent en couples tels que $Ex$, $Exa$. Désignons par $Ex$ un élément arbitrairement choisi dans chacun de ces couples et par $x$ un élément arbitrairement choisi dans $Ex$. Alors les $x$ et les $xa$ formeront un système déterminé $R_1$ de restes de X mod E, et les $\varepsilon x$ et les $\varepsilon xa$ un autre système de restes $R_2$. On pourra donc écrire

$$(\varepsilon) = (x_1, x_2)(x_2, x_1)$$

$$(x_i \text{ parcourant } R_i, \text{ et } x_j \equiv x_i\varepsilon \text{ si } j \neq i;\ i, j \equiv 0, 1 \bmod 2);$$

$$(a) = a_1 a_2, \qquad a_1 = (x_1, x_1 a), \qquad a_2 = (x_2, x_2 a),$$

$$(b) = (x_1, x_1 b)(x_2, x_2 b).$$

Soit $x_i b \varepsilon^{f(x_i, b)}$ celui des deux éléments de $Ex_i b$ qui est dans $R_i$, et posons $(x_i, x_i b\,\varepsilon^{f(x_i, b)}) = b_i$, $b_1 b_2 = b_0$. $(b)$ se déduit de $b_0$ en remplaçant les $\varepsilon^{f}$ par $1$. Si $b^t = \varepsilon\theta$, $(b)^t = (x_1, x_1 b^t)(x_2, x_2 b^t)$ se réduit à $(\varepsilon)^\theta$. Si $(\mathrm{E}\, a^{\lambda_1} b^{\mu_1} a^{\lambda_2} b^{\mu_2} \ldots a^{\lambda_k} b^{\mu_k})$ remplace $\mathrm{E}\, x_i$ par $\mathrm{E}\, y_i$, $y_i$ étant dans $\mathrm{R}_i$, il est clair que $a_i^{\lambda_1} b_i^{\mu_1} \ldots a_i^{\lambda_k} b_i^{\mu_k}$ remplace $x_i$ par $y_i$, et inversement. Donc $\Gamma_i = \{ a_i, b_i \}$ est semblable à $\Gamma$.

Considérons maintenant un groupe $\overline{\mathrm{G}}$ ayant $t+1$ constituants transitifs $\mathrm{G}^{(0)}, \ldots, \mathrm{G}^{(t)}$ semblables à $\mathrm{G}^{(0)} = \mathrm{G}$. Soit en général $\overline{s} = \Pi_0^t s^{(k)}$ la substitution de $\mathrm{G}$ qui répond aux substitutions $s^{(0)}, \ldots, s^{(t)}$ de $\mathrm{G}^{(0)}, \ldots, \mathrm{G}^{(t)}$. Désignons par $a^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$, $\Gamma_i^{(k)}$, … les objets jouant relativement à $\mathrm{G}^{(k)}$ le rôle de $(a) = a^{(0)}$, $a_i = a_i^{(0)}$, $(\varepsilon) = \varepsilon^{(0)}$, $\Gamma_i = \Gamma_i^{(0)}$ relativement à $\mathrm{G} = \mathrm{G}^{(0)}$. Soit $\overline{a}_i = \Pi_0^t a_i^{(k)}$, $\overline{b}_i = \Pi_0^t b_i^{(k)}$ et $\overline{\Gamma}_i = \{ \overline{a}_i, \overline{b}_i \}$. Soit $\mathrm{K}_i$ une représentation régulière du symétrique $\mathrm{S}_{t+1}$ de champ $1, \ldots, t+1$ dans le champ de $\overline{\Gamma}_i$. Soit $c_i$ la $s_2^{(t+1)!}$ de $\mathrm{K}_i$ qui répond à $(t, t+1)$ de $\mathrm{S}_{t+1}$, et $c = c_1 c_2$. On peut supposer que $\mathrm{K}_i = \{ \overline{\Gamma}_i, c_i \}$. Soit $\mathrm{K}$ le groupe ayant pour constituants $\mathrm{K}_1$ et $\mathrm{K}_2$, et où la substitution $s$ qui répond à $s_i$ de $\mathrm{K}_i$ est $s_1 s_2$. Soit $\overline{\Gamma}$ le diviseur de $\mathrm{K}$ qui a pour constituants $\overline{\Gamma}_1$ et $\overline{\Gamma}_2$. Toute substitution $\overline{a}^{\lambda} \overline{b}_0^{\mu} c^{\nu} \overline{a}^{\lambda'} \overline{b}_0^{\mu'} c^{\nu'} \ldots$ de $\mathrm{K}$ étrangère à $\overline{\Gamma}$ est régulière et remplace chaque $x_i^{(k)}$ par un $x_i^{(k)}$ d'indice *supérieur* différent (¹). Donc la substitution correspondante $\overline{a}^{\lambda} \overline{b}^{\mu} c^{\nu} \overline{a}^{\lambda'} \overline{b}^{\mu'} c^{\nu'} \ldots$ de $\{ \overline{\mathrm{G}}, c \}$, qui ne s'en distingue qu'en ce que certaines séquences de la forme $x_i^{(k)} x_i^{(l)}$ $(l \neq k)$ sont remplacées par $x_i^{(k)} x_j^{(l)}$ $(j \neq i)$, déplace aussi tous les symboles. De plus $\{ \overline{\mathrm{G}}, c \}$ est transitif, puisque $\mathrm{K}_i$ l'est entre $x_i^{(0)}, \ldots, x_i^{(t)}$, et que $\overline{\mathrm{G}}$ contient $(\overline{\varepsilon})$. *Donc* $\{ \overline{\mathrm{G}}, c \}$ *est régulier*. D'ailleurs $(\overline{\varepsilon})\, c\, (\overline{\varepsilon}) = c_1 c_2 = c$. Donc $(\overline{\varepsilon})$, permutable à $\overline{a}$ et à $\overline{b}$, est normale dans $\{ \overline{\mathrm{G}}, c \}$.

$(c\overline{b}_0)^{t+1}$, qui correspond dans $\mathrm{K}$ à $(1, \ldots, t+1)^{t+1}$, est égale à $1$. Donc $(c\overline{b})^{t+1}$ est un produit de transpositions de la forme $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, et, comme $\{ \overline{\mathrm{G}}, c \}$ est régulier, $(c\overline{b})^{t+1}$ contient toutes ces transpositions, ou se réduit à $1$. De même, $(\overline{a} c \overline{b}_0)^t$, qui correspond à $[(1\,2)(1, \ldots, t+1)]^t$, étant égale à $1$, $(\overline{a}\, c\, \overline{b})^t$ est dans $\{ (\overline{\varepsilon}) \}$.

---

(¹) Soit, en général, $\mathrm{A} = \Sigma a$ un diviseur d'un groupe $\mathrm{G} = \Sigma g = \Sigma x = \Sigma z \mathrm{A}$, et $\Sigma (x, xg)$ la représentation régulière de $\mathrm{G}$ où la substitution $(x, xg)$ répond à $g$. Si $g$ est hors de $\mathrm{A}$, tout élément $za$ d'un complexe quelconque $z\mathrm{A}$ sera remplacé par un élément $zag$ d'un complexe $z\mathrm{A}g \neq z\mathrm{A}$.

Pour $1 \leqq i \leqq \tau$, $(c\bar{b}_0)^{-i}\bar{a}(c\bar{b}_0)^i$, qui correspond à la transformée de (12) par $(1, 2, \ldots, t+1)^i$, coïncide avec $\bar{b}_0^{-i}\bar{a}\bar{b}_0^i$, qui correspond à la transformée de (12) par $(12\ldots t)^i$. D'après la règle usuelle de transformation, il est dès lors évident que les transformées de $\bar{a}$ par $(c\bar{b})^i$ et par $\bar{b}^i$ coïncident. Donc $\bar{a}(c\bar{b})^{-i}\bar{a}(c\bar{b})^i$ coïncide avec $\bar{a}\bar{b}^{-i}\bar{a}\bar{b}^i$.

Si $t = 2\tau + 1$, $\bar{\tau} = \tau + 1$. Mais $(\bar{a}(c\bar{b})^{-\tau-1}\bar{a}(c\bar{b})^{\tau+1})^2$ est égale à $(\bar{\varepsilon})$ ou à 1 en même temps que $(\bar{a}(c\bar{b})^{-2}\bar{a}(c\bar{b})^2)^2$ : cela résulte des équations que vérifie $\{\bar{G}, c\}$ (**14**).

Donc $\{\bar{G}, c\}$ est une représentation régulière de $\bar{X}$, qui, par suite, existe quand X existe.

Il reste à montrer que X existe pour $t = 4$. Or considérons le groupe L (2, 3) des substitutions $\begin{vmatrix} \lambda\xi + \mu\eta \\ \lambda'\xi + \mu'\eta \end{vmatrix}$ mod 3. En posant

$$\begin{vmatrix} \xi \\ \xi - \eta \end{vmatrix} = a, \qquad \begin{vmatrix} -\xi + \eta \\ -\xi - \eta \end{vmatrix} = b, \qquad \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix} = \varepsilon,$$

on a

$$a^2 = 1, \qquad b^4 = \varepsilon, \qquad (ba)^3 = \varepsilon, \qquad (ab^{-1}ab)^3 = \varepsilon, \qquad (ab^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon.$$

**23.** En posant $\alpha = \alpha'$, $\beta\gamma^{-1} = \beta'$, $\beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^l\alpha^m = \gamma'$ (d'où $\beta'^t\gamma' = \beta\varepsilon^l\alpha^m$, $\beta'^{t-1}\gamma' = \gamma\varepsilon^l\alpha^m$), $\alpha^{-2}\varepsilon = \varepsilon'$, les équations de $\mathcal{A}_0$ deviennent $\gamma' = 1$, $\varepsilon'^2 = 1$, $\alpha'$ et $\beta'$ restant indéterminés. Donc le multiplicateur $\mathfrak{M}$ de $\Gamma$ est d'ordre $\mu = 2$. Les divers groupes infinis, dont le produit direct par $\mathcal{A} = \{\varepsilon'\}$ $(\equiv \mathfrak{M})$ est $\mathcal{A}_0$, sont contenus dans la formule

$$\mathcal{A}_1 = \{\alpha'\varepsilon'^x, (\alpha'\varepsilon'^x)^{-1}, \beta'\varepsilon'^y, (\beta'\varepsilon'^y)^{-1}\},$$

où $x$ et $y$ peuvent être pris indépendamment l'un de l'autre égaux à 0 ou à 1 (2). Les divers figuratifs de $\Gamma$, qui s'obtiennent en faisant $\mathcal{A}_1 = 1$, sont donc fournis par les équations (3) où l'on fait (après avoir remplacé $\delta$ par $\alpha^2$ si $t$ est impair, par $\alpha\varepsilon$ si $t$ est pair)

$$(29) \qquad \alpha' = \varepsilon'^{-x}, \qquad \beta' = \varepsilon'^{-y}, \qquad \gamma' = 1, \qquad \varepsilon'^2 = 1,$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de $\varepsilon'$ mod 2, et en remarquant que $\varepsilon' = \varepsilon$ (puisque $\alpha^2 = \alpha'^2 = 1$) et que $m \equiv \frac{t(t-1)}{2}$ mod 2,

$$(30) \qquad \alpha = \varepsilon^x, \qquad \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2}x + ty + t}, \qquad \gamma = \beta\varepsilon^y, \qquad \delta = \varepsilon^{x+t+1}.$$

En prenant au besoin $b\varepsilon^y$ pour $b$, on peut toujours annuler $y$. *On a donc au plus deux figuratifs répondant aux choix* $x = 0, 1$.

Le symétrique étant complet pour $t \neq 6$ (1), il résulte des n$^{os}$ **9** et **10** que ces figuratifs sont distincts si $t \neq 6$. Mais on peut le voir directement, et même pour $t = 6$, comme il suit.

Soient $\mathcal{G}$ un quelconque de ces figuratifs, et $\mathcal{S}$ son commutant (isomorphe au $g^t$ alterné). $\mathcal{A}\ (< \mathcal{S})$ est le central de $\mathcal{G}$, et, dans l'homomorphisme de $\mathcal{G}$ à $\Gamma$, $\mathcal{S}$ répond au commutant $K (\equiv C)$ de $\Gamma$. Les transpositions de $\Gamma$ sont toutes conjuguées, et à chacune d'elles répondent deux éléments de $\mathcal{G}$ situés hors de $\mathcal{S}$ et ayant pour carré $a^2 = \alpha$. Donc tous les éléments de $\mathcal{G}$ répondant aux $s_2$ impaires de $\Gamma$ ont pour carré $\alpha$, c'est-à-dire que, si $\mathcal{S}Y$ est le système des $e_2$ de $\mathcal{G} \mid \mathcal{S}$, tous les $e_2$ de $\mathcal{G}$ qui figurent dans $\mathcal{S}Y$ ont pour carré $\alpha$. *Donc les deux déterminations de* $\mathcal{G}$, dans lesquelles $\alpha$ est un élément distinct de $\mathcal{A}$, *sont elles-mêmes distinctes.*

**26.** Avant de faire une application aux cas $t = 4, 5$, je dois rappeler quelques résultats généraux.

Soit $\Gamma(2, \pi)$ ($\pi = p^M$; $p$ premier, M entier) le groupe des substitutions $\left|\begin{matrix}\lambda\xi + \mu\eta \\ \lambda'\xi + \mu'\eta\end{matrix}\right|$, $\lambda$, $\mu$, $\lambda'$ $\mu'$ parcourant le champ de Galois $C_\pi$ d'ordre $\pi$; $U(2, \pi)$ le diviseur de $L(2, \pi)$ formé des substitutions de $L(2, \pi)$ dont le déterminant est 1; $\mathcal{L}(2, \pi)$ le groupe des substitutions $\left(\dfrac{\lambda\zeta + \mu}{\lambda'\zeta + \mu'}\right)$ où $\lambda$, $\mu$, $\lambda'$, $\mu'$, parcourent $C_\pi$ et $\infty$; $\mathcal{U}(2, \pi)$ le diviseur de $\mathcal{L}(2, \pi)$ formé des substitutions dont le déterminant est un carré.

Soit $i$ une racine primitive de $C_\pi$. M. Schur a démontré (*Cr.*, t. 132, p. 113-123) *que les diviseurs de* $L(2, \pi^2)$ *de la forme* $G^{(\rho)} = \{U(2, \pi), |\rho\xi, \rho i^{-1}\eta| = s\}$ *pour lesquels* $s^2$ *est dans* $U(2, \pi)$, *c'est-à-dire pour lesquels* $\rho^4 = i^2$, *sont des figuratifs de* $\mathcal{L}(2, \pi)$. Comme $U(2, \pi)$, contient $|-\xi, -\eta|$, $G^{(\rho)}$ a au plus deux déterminations, l'une $G'_\pi = G'$ répondant à $\rho^2 = i$, l'autre $G''_\pi = G''$ répondant à $\rho^2 = -i$ (d'où $\rho i^{-1} = -\rho^{-1}$). $G'$ est dans $U(2, \pi^2)$ et n'a par suite qu'un $e_2$. $G''$ a plusieurs $e_2$; car, pour que $\left|\begin{matrix}\lambda\xi + \mu\eta \\ \lambda'\xi + \mu'\eta\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}\rho\xi \\ -\rho^{-1}\eta\end{matrix}\right|$ $(\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1)$ soit

(1) Hölder, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 333-345.

d'ordre 2, $\lambda, \mu, \lambda'\mu'$ étant dans $C_\pi$, il faut et suffit, on le voit directement, ou que $\mu\lambda'$ soit $\neq 0$ avec $\mu' = -i\lambda$ et $\mu\lambda' = -1 - i\lambda^2$, ou que $\mu = \lambda' = 0$ avec $\mu' = \lambda^{-1}$ et $i\lambda^2 = -1$ (ce qui exige que $-1$ soit non carré, donc que $\pi \equiv 3 \bmod 4$) (¹).

*Si* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, $L(2, \pi)$ *a un diviseur* A *formé des substitutions de déterminant* $\pm 1$, *dans lequel* $U(2, \pi)$ *est aussi d'indice* 2. *Mais* A *n'est pas un figuratif de* $\mathfrak{L}(2, \pi)$. En effet, $-1$ étant ici carré, $-1 - i\lambda^2$ est $\neq 0$, quel que soit $\lambda$, $G''$ a $\pi(\pi - 1)e_2$, et $G'$ un seul, tandis que A en a $\pi + 2$, comme on le voit aussi directement. *Si* $\pi \equiv 3$ *mod* 4, $-i$ est carré, et $\rho^2 = -i$ est résoluble dans $C_\pi$; $G''$ est alors identique au groupe $\{U(2, \pi), |\xi, -\eta|\}$.

Pour $t = 4\,[\tau = 2;\ \Gamma \equiv \mathfrak{L}(2, 3)]$, $L(2, 3) = U'_3 = G''_3$ est le figuratif de $\Gamma$ répondant au choix $x = 0$ (**24**). Celui répondant à $x = 1$ est $G'_3\,(i = -1,\ \rho^2 = -1)$ (alors $i = -1$ et $\rho^2 = -1$). Car, en posant

$$b = \begin{vmatrix} -\rho\xi + \rho\eta \\ -\rho\xi - \rho\eta \end{vmatrix}, \qquad a = \begin{vmatrix} \rho\xi + \rho\eta \\ -\rho\eta \end{vmatrix} \qquad \left(\text{si } u = \begin{vmatrix} \xi + \eta \\ \eta \end{vmatrix},\ a = u^{-1}su\right),$$

on a

$$a^2 = \varepsilon, \qquad b^4 = \varepsilon, \qquad (ab)^3 = \varepsilon, \qquad (ab^{-1}ab)^3 = \varepsilon, \qquad (ab^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon.$$

Pour $t = 5\,[\tau = 2;\ \Gamma \equiv \mathfrak{L}(2, 5)]$, $G'_5$, qui n'a qu'un $e_2$, répond à $x = 1$, et $G''_5$ à $x = 0$. On obtient des représentations des figuratifs dans $C_5$ en prenant

$$b = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\xi - \eta \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix}, \qquad a = \rho \begin{vmatrix} \lambda\xi + \theta\eta \\ \lambda'\xi - \lambda\eta \end{vmatrix}$$
$$(\theta = \pm 1,\ \lambda' = -\theta(\lambda^2 + 3));$$

pour $\rho^2 = 2$, le figuratif obtenu est $G'_5$; pour $\rho^2 = 3$, il est $G''_5$.

Aucun $g_{2.120}$ X du $g_{4.120}$ $L(2, 5)$ n'est isomorphe à $G'_5$ ou à $G''_5$. En effet, soit A le $g_{2.120}$ de $L(2, 5)$ formé des substitutions de déterminant $\pm 1$. X et A sont normaux dans L, et le plus grand commun diviseur $\Delta$ de X et de A est un $g_{120}$ normal dans L. Donc $\Delta$ coïncide avec U, sans quoi leur plus grand commun diviseur serait normal dans L et d'ordre $> 2$, ce qui ne se peut. Donc X contient U. Mais

(¹) SCHUR, *loc. cit.*

$\mathrm{L}\,|\,\mathrm{U}$, qui est un $g_4$ cyclique, n'a qu'un $g_2$. Donc $\mathrm{X}=\mathrm{A}$. Or on a vu que A n'est pas un figuratif de $\mathcal{L}(2,5)$.

**27.** $\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{A}$ est isomorphe au $g^t$ alterné, et $\mathfrak{S}$ contient $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{S}$ est une extension normale du $g^t$ alterné (**8**). Donc *le multiplicateur du $g^t$ alterné est d'ordre* $\geqq 2$.

**28.** L'alterné $\Gamma$ *de degré* $n \geqq 4$ est défini, $t=n-2$ étant sa transitivité, par les équations ($S.$, 70).

$$
(31)\quad \left\{\begin{array}{l}
b^t=c^3=a^2=(ba)^{t-1}=(ac)^3=(ab^{-1}ab)^3=(ab^{-j}ab^j)^2=(cb^{-k}ab^k)^2=1\,; \\
j=2,\ \ldots,\ \tau,\ \tau \text{ étant le plus grand entier } \leqq \dfrac{t}{2};\ k=1,\ \ldots,\ t-2=n-4\,; \\
\qquad \text{si } n \leqq 5, \text{ il faut supprimer l'équation } (ab^{-j}ab^j)^2=1\,; \\
\text{si } n=4, \text{ il faut en outre supprimer } (ab^{-1}ab)^3=1 \text{ et } (cb^{-k}ab^k)^2=1.
\end{array}\right.
$$

On en a une représentation $\mathrm{A}_n$ dans les symboles $1, \ldots, n$, en prenant $a=12.34$, $c=132=12.23$, et $b=34\ldots n$, si $n$ est impair, $b=12.34\ldots n$, si $n$ est pair. $\{b, c\}$, contenant $123$, $124$, ..., $12n$, coïncide avec $\mathrm{A}_n$ ($S.$, 38) : on vérifie d'ailleurs directement que $a=cb^{-1}cbc$ pour $n$ pair, et que $a=c^2b^{-1}cbc^2$ pour $n$ impair.

Nous avons à considérer ici le groupe $\mathcal{G}_0$ défini par les équations

$$
(32)\quad \left\{\begin{array}{l}
\qquad a^2=\alpha, \quad b^t=\beta, \quad (ba)^{t-1}=\gamma, \quad c^3=\varkappa, \quad (ac)^3=\zeta, \\
\qquad\quad (ab^{-1}ab)^3=\delta, \quad (ab^{-j}ab^j)^2=\varepsilon_j, \quad (cb^{-k}ab^k)^2=\eta_k, \\
\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varkappa,\ \zeta,\ \delta,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_\tau,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_{t-2} \text{ sont permutables à } a,\ b,\ c \text{ (donc} \\
\quad \text{entre eux)};\ j=2,\ \ldots,\ \tau;\ k=1,\ \ldots,\ t-2;\ \text{si } n \leqq 5, \text{ il faut supprimer} \\
\quad \text{l'équation } (ab^{-j}ab^j)^2=\varepsilon_j;\ \text{si } n=4, \text{ il faut en outre supprimer} \\
\quad (ab^{-1}ab)^3=\delta \text{ et } (cb^{-k}ab^k)^2=\eta_k.
\end{array}\right.
$$

Je désignerai par $\mathcal{M}_0$ le plus petit commun multiple de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varkappa$, $\zeta$, $\delta$, $\varepsilon_2$, ..., $\varepsilon_\tau$, $\eta_1$, ..., $\eta_{t-2}$. Comme au n° **12** on a, en posant $(ab^{-h}ab^h)^{\rho_h}=\varepsilon_h$ ($h$ étant pris mod $t$; $\rho_h=3$, si $h\equiv\pm 1$; $\rho_h=2$, si $\rho\not\equiv\pm 1$), $\varepsilon_h=\varepsilon_{-h}$. J'emploierai aussi dans le même sens l'expression « transformer $ab^h a$ ». Je dirai de même « transformer $cb^k a$ » pour « remplacer $cb^{-k}a$ par $b^{-k}a^{-1}b^k c^{-1}b^{-k}\eta_k=b^{-k}ab^k c^2 b^{-k}\eta_k\alpha^{-1}\varkappa^{-1}$ ». Comme $c^2b^{-k}ab^k=c.cb^{-k}ab^k$ devient, en transformant $cb^{-k}a$, $cb^{-k}ab^{-k}c^2\eta_k\alpha^{-1}\varkappa^{-1}$ et, en transformant de nouveau $cb^{-k}a$,

$b^{-k}ab^kcb^{-k}\eta_k^2\alpha^{-2}\varkappa^{-1}$, je dirai encore « transformer $c^2b^{-k}a$ » pour « remplacer $c^2b^{-k}a$ par $b^{-k}ab^kcb^{-k}\eta_k^2\alpha_k^{-2}\varkappa^{-1}$ ».

$\Gamma$ *étant parfait, on sait à priori qu'il n'a qu'un figuratif* (8).

**29.** Considérons un instant le groupe $\mathcal{G}'_0$ défini par les équations ($32\,bis$) formées des équations (32) jointes à $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$. Des équations de $\mathcal{G}'_0$ résultent, entre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varkappa$, $\zeta$, $\delta$, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau$, $\eta_1, \ldots, \eta_{t-2}$ les équations (4) et, en outre,

$$(33) \qquad \eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{t-2}, \qquad \eta_1^3 = \zeta^2 = \alpha^3\varkappa^2.$$

Toute conséquence des équations de $\mathcal{G}'_0$ entre $\alpha, \ldots, \eta_{t-2}$ peut s'écrire, en tenant compte de $\delta = \alpha^3$, $\varepsilon_j = \alpha^2$, $\eta_k = \eta_1$,

$$\alpha^X\beta^Y\gamma^Z\varkappa^x\eta_1^y\zeta^z = 1$$

et a une forme typique ($E.$, 17) où la somme $-2y - 3z - 2X$ des exposants de $a$ et celle $-2y - 3x - 3z$ des exposants de $c$ sont nulles. Donc $y \equiv 0 \bmod 3$, et $x \equiv z \equiv 0 \bmod 2$. Donc la conséquence considérée se ramène, en vertu de (33), à une conséquence entre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\eta_1$ seuls, et celle-ci se ramène à son tour, comme au n° **15**, à la forme

$$\left(\alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}\beta^{t-1}\gamma^{-t}\right)^\lambda \alpha^{-3u}\eta_1^{3u} = 1,$$

ou, d'après (4), à $\eta_1^{3u} = \alpha^{3u}$, ou, en remplaçant $\eta_1^3$ par $\alpha^3\varkappa^2$, à $\varkappa^{2u} = 1$. Or, dans une telle conséquence mise sous forme typique, la somme des exposants de $c$ est $-6u$. Donc $u = 0$. Donc les conséquences des équations de $\mathcal{G}'_0$ entre $\alpha, \ldots, \eta_{t-2}$ coïncident avec les conséquences de (4) et de (33).

**30.** Revenons maintenant à $\mathcal{G}_0$. Des équations $a^2 = \alpha$, $b^t = \beta$, $(ba)^{t-1} = \gamma$, $(ab^{-1}ab)^3 = \delta$, $(ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon_j$, qui font partie de (32), on déduit d'abord comme précédemment

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_j = \varepsilon_2 \text{ soit } = \varepsilon; \quad \varepsilon^2 = \alpha^4; \quad \delta = \alpha^3 \text{ pour } n \text{ impair}; \quad \delta = \alpha\varepsilon \text{ pour } n \text{ pair}; \\ \beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^l\alpha^m = 1, \qquad l = \dfrac{\tau(\tau-1)}{2}, \qquad m = -\dfrac{t(t-1)}{2} - 2l. \end{array} \right.$$

On a ensuite

$$(35)\ \eta_k^3 = \eta_k c^{-1}\eta_k c . c^{-2}\eta_k c^2 = (cb^{-k}ab^k)^2 c^{-1}(cb^{-k}ab^k)^2 . c^{-1}(cb^{-k}ab^k)^2 c^2 = \alpha^3\varkappa^2.$$

A la relation $(24)(56).(123).(24)(56) = (143)$ de $A_n$ répond dans $\mathcal{G}_0$ ($24.56$ est la transformée de $34.56$ par $132$)

$$(36) \qquad (c^{-1}ab^{-2}ab^2c)^{-1}.c^2.(c^{-1}ab^{-2}ab^2c) = ca\xi,$$

$\xi$ étant dans $\mathcal{A}_0$, ou

$$\alpha^{-2}c^{-1}b^{-2}ab^2ac^2ab^{-2}ab^2c = ca\xi,$$

ou, en remplaçant $ac^2a$ par $cac\zeta^{-1}\alpha^2\varkappa$, et en multipliant à droite par $a\alpha^{-1}$ et à gauche par $c^{-1}$,

$$\alpha^{-1}\zeta^{-1}cb^{-2}ab^2cacb^{-2}ab^2ca = \xi,$$

ou, en remplaçant deux fois $cb^{-2}ab^2$ par $\eta_2 b^{-2}ab^2c^{-1}\alpha^{-1}$,

$$\alpha^{-3}\zeta^{-1}\eta_2^2 b^{-2}ab^2ab^{-2}ab^2a = \xi$$

ou

$$\alpha^{-3}\zeta^{-1}\eta_2^2\varepsilon = \xi.$$

Or le cube de $(36)$ est $\varkappa^2 = \zeta\xi^3$. Donc

$$\varkappa^2 = \zeta\alpha^{-9}\zeta^{-3}\eta_2^6\varepsilon^3 = \alpha^{-3}\varepsilon^3\varkappa^4\zeta^{-2}$$

ou

$$(37) \qquad \zeta^2 = \alpha\varepsilon\varkappa^2 = \eta_2^3(\alpha^{-2}\varepsilon).$$

On voit que *les équations de* $\mathcal{G}_0$ *ne peuvent entraîner la conséquence* $\zeta^2 = \eta_2^3$, car elles entraîneraient aussi la conséquence $\varepsilon = \alpha^2$ contrairement à l'exemple construit au n° **24**.

**31.** *Supposons maintenant n impair.* On aura d'abord (cf. **28**)

$$a = \varkappa^{-1}a\varkappa = \varkappa^{-2}c^2.cac.c^2 = \alpha^{-2}\zeta\varkappa^{-3}c^2.ac^2a.c^2.$$

Or de $(b^{-k}ab^kc)^2 = \eta_k$ on déduit

$$c^2 = \eta_k^{-1}\varkappa b^{-k}ab^kcb^{-k}ab^k \qquad \text{et} \qquad c = \alpha^{-2}\eta_k\varkappa^{-1}b^{-k}ab^kc^2b^{-k}ab^k.$$

Donc

$$c^2 = \alpha^{-2}\eta_k^{-1}\eta_{k+1}b^{-k}ab^k.b^{-k-1}ab^{k+1}c^2b^{-k-1}ab^{k+1}.b^{-k}ab^k.$$

Par suite, en répétant la transformation pour $k = 1, 3, 5, \ldots, n-6$,

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha^{-2}\zeta\varkappa^{-3}\eta_1^{-1}\varkappa c^2.a.b^{-1}ab.b^{-2}ab^2.c^2b^{-2}ab^2.b^{-1}ab.a.c^2\\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= \alpha^{-2}\zeta\varkappa^{-3}\eta_1^{-1}\eta_2\eta_3^{-1}\eta_4\ldots\eta_{n-6}^{-1}\eta_{n-5}\eta_{n-4}^{-1}\alpha^{5-n}\varkappa\\
&\quad\times c^2.a.b^{-1}ab.b^{-2}ab^2\ldots b^{4-n}ab^{n-4}.c.b^{4-n}ab^{n-4}\ldots b^{-2}ab^2.b^{-1}ab.a.c^2,
\end{aligned}
$$

ou, en posant

$$
\eta_1\eta_2^{-1}\eta_3\eta_4^{-1}\ldots\eta_{n-6}\eta_{n-5}^{-1}\eta_{n-4} = \theta \qquad (\theta^3 = \alpha^3\varkappa^2),
$$

$$
a = \alpha^{3-n}\zeta\varkappa^{-2}\theta^{-1}c^2(ab^{-1})^{n-3}b^{n-3}cb^{3-n}(ba)^{n-3}c^2 = \zeta\varkappa^{-2}\theta^{-1}c^2b^{-1}cbc^2
$$

ou

$$
c^2b^{-1}cbc^2a^{-1} = \zeta^{-1}\varkappa^2\theta. \tag{38}
$$

Or, à la relation

$$
\begin{aligned}
&[(12)(45\ldots n)]^{-1}.(13)(k+3, k+4).(12)(45\ldots n)\\
&\quad = (132)^{-1}.(13)(k+4, k+5).(132)
\end{aligned}
$$

entre les substitutions de $A_n$, répond dans $\mathcal{G}_0$

$$
(ba)^{-1}cb^{-k}ab^k.ba = c^{-1}.cb^{-k-1}ab^{k+1}c\xi_k, \quad \xi_k \text{ étant dans } \mathfrak{H}_0. \tag{39}
$$

ou, en transformant $ab^{k+1}a$ au premier membre,

$$
\alpha^{-2}\varepsilon a^{-1}b^{-1}cbab^{-k-1}ab^{k+1} = b^{-k-1}ab^{k+1}\xi_k.
$$

ou, en se servant de $(b^{-k-1}ab^{k+1}c)^2 = \eta_{k+1}$,

$$
\alpha^{-2}\varepsilon a^{-1}b^{-1}cba = \alpha^{-1}c^{-1}\eta_{k+1}\xi_k.
$$

ou

$$
\alpha^{-2}\varepsilon b^{-1}cbaca = \eta_{k+1}\xi_k.
$$

ou, en se servant de $(ac)^3 = \zeta$,

$$
\alpha^{-2}\varepsilon\varkappa^{-2}\zeta.b^{-1}cbc^2a^{-1}c^2 = \eta_{k+1}\xi_k.
$$

ou, d'après (38),

$$
\xi_k = \alpha^{-2}\varepsilon\theta\eta_{k+1}^{-1}.
$$

Or l'équation (39), élevée au carré, donne $\eta_k = \eta_{k+1}\xi_k^2$. Donc

$$
\eta_k = \eta_{k+1}\alpha^{-4}\varepsilon^2\theta^2\eta_{k+1}^{-2} = \eta_{k+1}^{-1}\theta^2.
$$

De même
$$\eta_{k+1} = \eta_{k+2}^{-1}\theta^2.$$
Donc
$$\eta_k = \eta_{k+2} \qquad \text{ou} \qquad \eta_1 = \eta_3 = \ldots = \eta_{n-4}; \qquad \eta_2 = \eta_4 = \ldots = \eta_{n-5}.$$
Donc, d'après la définition de $\theta$,
$$\theta = (\eta_1\eta_2^{-1})^{\frac{n-5}{2}}\eta_1.$$

Si $n-5 \equiv 0 \bmod 3$, on a donc $\theta = \eta_1$ et, puisque $\eta_2 = \eta_3^{-1}\theta^2 = \eta_1^{-1}\theta^2$, $\eta_2 = \eta_1$.

Si $n-5 \equiv 1 \bmod 3$, on a $\theta^2 = \eta_1\eta_2^{-1}\eta_1^2$ ou, puisque $\eta_1^3 = \theta^3$, $\theta = \eta_2$ et, comme $\eta_1 = \eta_2^{-1}\theta^2$, $\eta_1 = \eta_2$.

Si $n-5 \equiv 2 \bmod 3$ (ou $n \equiv 1 \bmod 6$), on a $\theta = \eta_1^2\eta_2^{-1}$ qui, jointe à $\theta^2 = \eta_1\eta_2$, ne donne rien de nouveau. Mais l'analyse suivante, qui s'applique d'ailleurs quel que soit $n$ impair $\neq 7$, va nous conduire au même résultat (sauf peut-être si $n = 7$).

$b^{-k}acb^k$, qui correspond à $(2, 3+k, 4+k)$ $(k \leqq n-4)$ de $A_n$, est permutable mod $\mathcal{A}_0$, pour $k \geqq 3$, à $cb^{-1}ab$, qui correspond à $13.45$. On a donc une égalité de la forme
$$b^{-k}acb^k.cb^{-1}ab.(b^{-k}acb^k)^{-1} = cb^{-1}ab\omega \qquad (3 \leqq k \leqq n-4;\ \omega \text{ dans } \mathcal{A}_0)$$
dont le carré est $\omega^2 = 1$. Écrivons-la
$$b^{-k}acb^kcb^{-1}ab = cb^{-1}ab^{-k+1}acb^k\omega.$$
ou, en transformant $ab^{-k+1}a$,
$$b^{-k}acb^kcb^{-1}ab = cb^{-k}ab^{k-1}ab^{-k+1}cb^k\omega\alpha^2\varepsilon.$$
On en tire, en transformant $cb^{-k}a$ et en divisant à gauche par $b^{-k}a$,
$$cb^kcb^{-1}ab = b^kc^2b^{-1}ab^{-k+1}cb^k\omega\eta_k\alpha^{-3}\chi^{-1}\varepsilon.$$
ou, en transformant $cb^{-1}a$ et $c^2b^{-1}a$,
$$cb^{k-1}abc^2 = b^{k-1}abcb^{-k}cb^k\omega\eta_k\eta_1\alpha^{-4}\chi^{-1}\varepsilon.$$
ou, en faisant passer tous les $a$, $b$, $c$ dans le premier membre
$$cb^{k-1}abc^2b^{-k}c^2b^kc^2b^{-1}ab^{-k+1} = \omega\eta_k\eta_1\alpha^{-3}\chi\varepsilon.$$

ou, en transformant $c^2 b^{-1} a$, puis en transformant par $cb^{k-1}$,

$$abc^2 b^{-k} c^2 b^{k-1} abcb^{-k} cb^{k-1} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^{-1} \chi^2 \varepsilon. \tag{40}$$

ou, en transformant $b^{-1} c^2 b$ et $b^{-1} cb$ (dans $b^{-k} c^2 b^{k-1}$ et $b^{-k} cb^{k-1}$) d'après (38),

$$abc^2 b^{-k+1} c^2 ac^2 b^{k-2} abcb^{-k+1} cacb^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \chi^3 \varepsilon,$$

ou, en transformant $c^2 ac^2$ et $cac$ d'après $(ca)^3 = \zeta$,

$$abc^2 b^{-k+1} acab^{k-2} abcb^{-k+1} ac^2 ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \chi^2 \varepsilon,$$

ou, en transformant $c^2 b^{-k+1} a$ et $cb^{-k+1} a$, et en employant $\eta_{k-1}^3 = \alpha^3 k^2$,

$$ab^{-k+2} ab^{k-1} cb^{-k+1} cab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-1} c^2 b^{-k+1} c^2 ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \chi^2 \varepsilon.$$

ou, en transformant par $ab^{-k+2} ab^{k-2}$,

$$bcb^{-k+1} cab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-1} c^2 b^{-k+1} c^2 ab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \chi^2 \varepsilon. \tag{41}$$

ou, *en supposant d'abord* $k - 2 \geqq 2$ (donc $n > 7$, puisque $k$ est $\leqq n - 4$), et en transformant les deux $ab^{k-2} a$,

$$bcb^{-k+1} cb^{k-2} abc^2 b^{-k+1} c^2 b^{k-2} a = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^3 \chi^2 \varepsilon^{-1}.$$

En transformant par $bcb^{-k+1} cb^{k-2}$, et en employant $\varepsilon^2 = \alpha^4$, on obtient une équation qui ne diffère de (40) qu'en ce que, *au premier membre*, $k$ est remplacé par $k - 1$. On pourra répéter l'opération tant que, dans l'équation (41), $k - 2$ sera $> 1$. Quand $k - 2$ sera égal à 1 ($n \geqq 7$), l'équation (41) s'écrit (le second membre n'ayant pas changé)

$$bcb^{-2} cabab^{-1} ab^2 c^2 b^{-2} c^2 abab^{-1} ab = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \chi^2 \varepsilon. \tag{42}$$

On en tire, en transformant les deux $aba$, et en employant $\delta^2 = \alpha^6$,

$$bcb^{-2} cbab^{-1} ababc^2 b^{-2} c^2 bab^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \chi^2 \varepsilon.$$

ou, en transformant $b^{-1} cb$ et $b^{-1} c^2 b$ (dans $b^{-2} cb$ et $b^{-2} c^2 b$) d'après (38),

$$bcb^{-1} cacab^{-1} ababc^2 b^{-1} c^2 ac^2 ab^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^2 \chi^3 \varepsilon.$$

ou, en transformant $caca$ et $c^2 ac^2 a$ d'après $(ca)^3 = \zeta$,

$$bcb^{-1} ac^2 b^{-1} ababc^2 b^{-1} acb^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \chi^3 \varepsilon,$$

ou, en transformant $c^2 b^{-1} a$ et $cb^{-1} a$,

$$bcb^{-1} ab^{-1} abcabc^2 b^{-1} ab^{-1} abc^2 a = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \varkappa^2 \varepsilon,$$

ou, en transformant encore $cb^{-1} a$ et $c^2 b^{-1} a$, puis en transformant par $a$ et en simplifiant,

$$bc^2 b^{-2} abcbcb^{-2} abc^2 = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^{-1} \varkappa^2 \varepsilon.$$

ou, en transformant $c^2 b^{-2} a$,

$$b^{-1} ab^2 cb^{-1} cbcb^{-2} abc^2 = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \eta_2^{-1} \alpha \varkappa^3 \varepsilon,$$

ou, en transformant $b^{-1} cb$ d'après (38), en transformant par $c^{-2}$ et en employant $(ca)^3 = \zeta$, $\zeta^2 = \alpha \varepsilon \varkappa^2$, $\varepsilon^2 = \alpha^4$,

$$c^2 b^{-1} ab^2 acab^{-2} ab = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \eta_2^{-2} \theta^{-1} \alpha^5 \varkappa^3,$$

ou, en transformant $c^2 b^{-1} a$, en employant $\eta_1^3 = \alpha^3 \varkappa^2$, et en transformant par $b^{-1} a^{-1} b^2$,

$$b^{-1} cbaca = \omega \eta_k \eta_2^{-2} \theta^{-1} \alpha^3 \varkappa^2,$$

ou, en transformant $b^{-1} cb$ d'après (38), et en employant $(ca)^3 = \zeta$, $\theta^2 = \eta_1 \eta_2$, $\eta_2^3 = \alpha^3 \varkappa^2$,

$$\omega = \eta_k^{-1} \eta_1.$$

Or $\omega^2 = 1$. Donc $\eta_k^2 = \eta_1^2$. Or $\eta_k^3 = \eta_1^3$. Donc

$$\eta_k = \eta_1 \quad \text{pour} \quad k \geqq 3 \quad (^1).$$

*Donc* $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \ldots = \eta_{t-2}$ $(t - 2 = n - 4)$, *sauf peut-être si* $n = 7$. *On verra d'ailleurs bientôt que le cas* $n = 7$ *ne constitue pas une exception.*

D'ailleurs on va voir que si $n$ est de la forme $6h > 6$, les équations (32) entraînent $\eta_k = \eta_1$, et, d'autre part, que l'ordre $\mu$ du multiplicateur $\mathfrak{M}$ de $A_n$ est 2 ou 6 selon que (32) entraîne $\eta_k = \eta_1$ ou non. On peut en conclure *a priori* que, si $n = 6h + 1 > 7$, (32) entraîne $\eta_k = \eta_1$. Car, sans cela, $\mu$ serait égal à 6. Or, 6 étant premier à l'indice $6h + 1$ de $A_{6h}$ dans $A_{6h+1}$, il résulte d'un théorème de M. Schur

(1) On aurait pu, dans le calcul précédent, négliger $\alpha$, $\zeta$, $\varkappa$, $\varepsilon$; car une relation de la forme $\eta_k \equiv \eta_1 \bmod \{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \varkappa, \varepsilon\}$ entraîne nécessairement $\eta_k = \eta_1$, puisqu'elle doit résulter de (4) et de (33).

($Cr.$, t. 127, p. 49) que $\mathfrak{M}$ serait isomorphe à un diviseur du multiplicateur de $A_{6h}$. Or ce multiplicateur est d'ordre 2.

**32.** *Soit maintenant $n$ pair $= 2n'$.* On a d'abord

(43) $$a = ca.c.ac\alpha\zeta^{-1}.$$

Or, de $(b^{-k}ab^k c)^2 = \eta_k$ on déduit

$$c = \alpha^{-2}\eta_k\varkappa^{-1}b^{-k}ab^kc^2b^{-k}ab^k. \qquad c^2 = \eta_k^{-1}\varkappa b^{-k}ab^kcb^{-k}ab^k,$$

donc

$$c = \alpha^{-2}\eta_k\eta_{k+1}^{-1}b^{-k}ab^k.b^{-k-1}ab^{k+1}cb^{-k-1}ab^{k+1}b^{-k}ab^k.$$

Remplaçant par cette valeur le second $c$ de (43) en faisant $k = 1$, puis répétant une substitution analogue avec $k = 3, 5, \dots, n-5$, on obtient

$$a = c.a.b^{-1}ab.b^{-2}ab^2\dots b^{-n+5}ab^{n-5}.b^{-n+4}ab^{n-4}.c.b^{-n+4}ab^{n-4}\dots b^{-1}ab.a.c$$
$$\times\,\alpha\zeta^{-1}\alpha^{4-n}\eta_1\eta_2^{-1}\eta_3\eta_4^{-1}\dots\eta_{n-5}\eta_{n-4}^{-1}.$$

ou, en posant $\theta = \eta_1\eta_2^{-1}\eta_3\eta_4^{-1}\dots\eta_{n-5}\eta_{n-4}^{-1}$ (d'où $\theta^3 = 1$),

$$a = c(ab^{-1})^{n-3}b^{n-3}cb^{3-n}(ba)^{n-3}c\alpha^{3-n}\zeta^{-1}\theta = \alpha^2\zeta^{-1}\theta cb^{-1}cbc$$

ou

(44) $$cb^{-1}cbca^{-1} = \alpha^{-2}\zeta\theta^{-1} = \alpha^{-2}\zeta\theta^2.$$

Or à la relation

$$(45\dots n)^{-1}.(13)(k+3, k+4).(45\dots n) = (13)(k+4, k+5)$$

de $A_n$ répond dans $\mathcal{G}_0$

(45) $$(ba)^{-1}.cb^{-k}ab^k.ba = cb^{-k-1}ab^{k+1}\xi_k, \qquad \xi_k \text{ étant dans } \mathfrak{A}_0.$$

ou, en transformant $ab^{k+1}a$,

$$\varepsilon\alpha^{-2}a^{-1}b^{-1}cba = c\xi_k,$$

ou

$$b^{-1}cbac^2a\alpha^{-3}\varepsilon\varkappa^{-1} = \xi_k,$$

ou, en remplaçant $ac^2a$ par $cac\zeta^{-1}\varkappa\alpha^2$, et en employant (44),

$$\alpha^{-2}\varepsilon\theta^2 = \xi_k.$$

Mais le carré de (45) est $\eta_k = \eta_{k+1}\zeta_k^2$. Donc

$$\eta_k = \eta_{k+1}\theta, \qquad \text{donc} \qquad \eta_k = \eta_{k+2}\theta^2 = \eta_{k+3}.$$

Le produit des relations $\eta_1\eta_2^{-1} = \theta,\ \eta_3\eta_4^{-1} = \theta,\ \ldots,\ \eta_{n-3}\eta_{n-4}^{-1} = \theta$ donne donc

$$\theta = \theta^{\frac{n-4}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \theta^{\frac{n}{2}-3} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \theta^{n'} = 1.$$

*Donc, si n est* $\not\equiv 0$ *mod* 3, $\theta = 1$, *et* $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{n-4}$.

*Si* $n \equiv 0 \bmod 3$ (*donc* $\equiv 0 \bmod 6$) est $> 6$, le produit des relations $\eta_1 = \eta_2\theta,\ \eta_2 = \eta_3\theta,\ \ldots,\ \eta_{n-3} = \eta_{n-4}\theta$ donne $\eta_1 = \eta_{n-4}\theta^{n-3} = \eta_{n-4}$. D'ailleurs $\eta_1 = \eta_4 = \ldots = \eta_{3k+1}$, et $\eta_2 = \eta_5 = \ldots = \eta_{3k+2}$. Comme ici $n-4 \equiv 2 \bmod 3$, on a donc $\eta_1 = \eta_2$. Donc tous les $\eta_k$ où $k$ est $\not\equiv 0 \bmod 3$ sont égaux à $\eta_1$ et tous les $\eta_k$ où $k \equiv 0 \bmod 3$ sont égaux à $\eta_3$. Donc

$$\begin{aligned}(46)\qquad \theta = {} & (\eta_3\eta_4^{-1}\eta_5\eta_6^{-1})(\eta_9\eta_{10}^{-1}\eta_{11}\eta_{12}^{-1})\ldots \\ & \times(\eta_{6h+3}\eta_{6h+4}^{-1}\eta_{6h+5}\eta_{6h+6}^{-1})\ldots(\eta_{n-9}\eta_{n-8}^{-1}\eta_{n-7}\eta_{n-6}^{-1}) = 1.\end{aligned}$$

*Donc on a encore*

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{n-4}.$$

*Si* $n = 6$, $n - 4 = 2$, et l'on n'a que $\eta_1 = \eta_2\theta$ qui est une identité, la définition de $\theta$ étant ici $\theta = \eta_1\eta_2^{-1}$. On ne peut donc rien conclure. *On verra bientôt* (**34**) *que, pour* $n = 6$, *les équations* (32) *n'entraînent pas* $\eta_1 = \eta_2$.

**33.** *Ainsi, en exceptant les cas* $n = 6, 7$, *et en posant* $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\eta_1 = \eta$, *on a obtenu les conséquences suivantes de* (32) *entre* $\alpha, \ldots, \eta_{n-4}$

$$(47)\quad \left|\begin{array}{l} \beta^{1-l}\gamma^l\varepsilon^l\alpha^m = 1, \quad l = \dfrac{\tau(\tau-1)}{2}, \quad m = -\dfrac{t(t-1)}{2} - 2l; \quad \varepsilon_i = \varepsilon; \quad \varepsilon^2 = \alpha^4; \\ \qquad \delta = \alpha^3, \text{ si } n \text{ est impair}; \qquad \delta = \alpha\varepsilon, \text{ si } n \text{ est pair}; \\ \qquad \eta_i = \eta; \qquad \eta^3 = \alpha^3 x^2; \qquad \zeta^2 = \eta^3\varepsilon\alpha^{-2}. \end{array}\right.$$

*Les conséquences de* (32) *entre* $\alpha, \ldots, \eta_{n-4}$ *résultent toutes de celles-là*. Car elles résultent toutes de (4) et de (33), et une conséquence de (4) et de (33) qui ne résulte pas de (47) se ramène évidemment (*E.*, 17) à la forme $\zeta^2 = \eta^3$. Or on a vu (**30**) que cette équation ne résulte pas de (32).

*On peut donc supposer que, dans les équations* (32), $\delta$ *est remplacé par* $\alpha^3$, *si n est impair, par* $\alpha\varepsilon$, *si n est pair, et que* $\varepsilon_i$ *est remplacé par* $\varepsilon$ *et* $\eta_i$ *par* $\eta$. *On pourra alors omettre dans* (47) *les relations* $\varepsilon_i = \varepsilon$, $\eta_i = \eta$, $\delta = \alpha^3$ ou $\alpha\varepsilon$. C'est ce que je ferai désormais.

Posons maintenant

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} \beta\gamma^{-1} = \beta', \qquad \beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^t\alpha^m = \gamma' \qquad (\text{d'où } \beta'^t\gamma' = \beta\varepsilon^t\alpha^m,\ \beta'^{t-1}\gamma' = \gamma\varepsilon^t\alpha^m), \\ \qquad\qquad \alpha^{-2}\varepsilon = \varepsilon', \\ \zeta^2\eta^{-3} = \varepsilon'\zeta', \qquad \zeta\eta^{-1} = \eta' \qquad [\text{d'où } \zeta = (\varepsilon'\zeta')^{-1}\eta'^3,\ \eta = (\varepsilon'\zeta')^{-1}\eta'^2], \\ \qquad\qquad \alpha^3\varkappa^2\eta^{-3} = \varkappa', \qquad \alpha\varkappa = \alpha' \\ (\text{d'où } \alpha\eta^{-3} = \alpha'^{-2}\varkappa',\ \varkappa\eta^3 = \alpha'^3\varkappa'^{-1};\ \text{donc } \alpha = \alpha'^{-2}(\varepsilon'\zeta')^{-3}\eta'^6\varkappa'). \end{array}\right.$$

Les relations (47) s'écrivent, avec les générateurs $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\varepsilon'$, $\zeta'$, $\eta'$, $\varkappa'$,

$$(49)\qquad \varepsilon'^2 = 1, \qquad \gamma' = \zeta' = \varkappa' = 1, \qquad \alpha', \beta', \eta' \text{ restant indéterminés.}$$

Donc $\mathcal{A}_0$ est le produit direct de $\mathcal{A}_2 = \{\varepsilon'\}$ d'ordre $\mu = 2$ et d'un groupe $\mathcal{A}_1$ dont les diverses déterminations sont données par

$$\mathcal{A}_1 = \{\alpha'\varepsilon'^x,\ (\alpha'\varepsilon'^x)^{-1},\ \beta'\varepsilon'^y,\ (\beta'\varepsilon'^y)^{-1},\ \eta'\varepsilon'^z,\ (\eta'\varepsilon'^z)^{-1}\} \qquad (x, y, z = 0 \text{ ou } 1).$$

Les divers figuratifs de $\Gamma$ [on sait *a priori* qu'il n'y en a qu'un (**28**) : mais nous allons le retrouver], qui s'obtiennent en faisant $\mathcal{A}_2 = 1$, sont fournis par (32) et (48) où l'on fait

$$\alpha' = \varepsilon'^{-x}, \qquad \beta' = \varepsilon'^{-y}, \qquad \eta' = \varepsilon'^{-z}, \qquad \gamma' = \zeta' = \varkappa' = 1, \qquad \varepsilon'^2 = 1,$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de $\varepsilon'$ mod 2, et en remarquant que $\varepsilon' = \varepsilon$ (car $\varepsilon' = \alpha^{-2}\varepsilon$, et les équations précédentes jointes à (48) entraînent $\alpha^2 = 1$), et que $m \equiv \frac{t(t-1)}{2}$ mod 2,

$$(50)\quad \alpha = \varepsilon, \quad \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2}+t+ty}, \quad \gamma = \beta\varepsilon^y, \quad \delta = \varepsilon^t, \quad \zeta = \varepsilon^{1+z}, \quad \eta = \varepsilon, \quad \varkappa = \varepsilon^{1+x}.$$

En prenant au besoin $b\,\varepsilon^y$ pour $b$, $c\,\varepsilon^{x+1}$ pour $c$ et $a\,\varepsilon^{x+z}$ pour $a$, *on peut annuler* $x$, $y$ *et* $z$.

**34.** *Si* $n = 6$, et si les équations (32) n'entraînent pas la conséquence $\eta_2 = \eta_1$ (on verra tout à l'heure que c'est le cas), il faut, en continuant à poser $\eta_1 = \eta$, remplacer dans (47) l'équation $\eta_2 = \eta$

par $\eta_2^3 = \alpha^3 \varkappa^2$. J'écrirai $\lambda$ pour $\eta_2$, et je poserai

$$(51) \qquad \lambda \varepsilon' \eta'^{-2} = \lambda'.$$

Il faudra alors ajouter à (49) l'équation

$$(52) \qquad \lambda'^3 = 1$$

[qui équivaut à $\lambda^3 = \alpha^3 \varkappa^2$ en vertu de (48) et (49)]. $\mathcal{A}_0$ est ici le produit direct de $\mathcal{A}_0 = \{ \varepsilon', \lambda' \}$ et de

$$\mathcal{A}_1 = \{ \alpha' \varepsilon'^x \lambda'^{x'}.\ (\alpha' \varepsilon'^x \lambda'^{x'})^{-1}.\ \beta' \varepsilon'^y \lambda'^{y'}.\ (\beta' \varepsilon'^y \lambda'^{y'})^{-1}.\ \eta' \varepsilon'^z \lambda'^{z'}.\ (\eta' \varepsilon'^z \lambda'^{z'})^{-1} \}$$
$$(x.\ y.\ z = 0 \text{ ou } 1 ;\ x'.\ y'.\ z' = 0, 1, 2).$$

Les divers figuratifs de $\Gamma$, qui s'obtiennent en faisant $\mathcal{A}_2 = 1$, sont fournis par (32), (48) et (51) où l'on fait

$$(53) \qquad \begin{cases} \alpha' = \varepsilon'^{-x} \lambda'^{-x'}. \quad \beta' = \varepsilon'^{-y} \lambda'^{-y'}. \quad \eta' = \varepsilon'^{-z} \lambda'^{-z'}. \\ \gamma' = \zeta' = \varkappa' = 1. \quad \varepsilon'^2 = 1. \quad \lambda'^3 = 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de $\varepsilon'$ mod 2 et ceux de $\lambda'$ mod 3 (ici $t = 4$, $l = 1$, $m = -8$),

$$(54) \begin{cases} \alpha = \varepsilon' \lambda'^{-x'}. \quad \beta = \varepsilon' \lambda'^{-y'}. \quad \gamma = \varepsilon'^{1+y}. \quad \delta = 1. \quad \varepsilon = \varepsilon' \lambda'^{x'}. \\ \zeta = \varepsilon'^{1+z}. \quad \eta = \varepsilon' \lambda'^{z'}. \quad \varkappa = \varepsilon'^{1+x}. \quad \lambda = \varepsilon' \lambda'^{1+z'}, \quad \varepsilon'^2 = 1, \quad \lambda'^3 = 1. \end{cases}$$

En prenant au besoin $a \varepsilon'^z \lambda'^{-x'}$ pour $a$, $b \varepsilon'^y \lambda'^{y'}$ pour $b$, $c \varepsilon'^x \lambda'^{1-z'}$ pour $c$, *on peut annuler* $x, y, z, x', y', z'$.

Il reste à s'assurer que, pour $n = 6$, le multiplicateur est bien d'ordre 6. Or le groupe X défini par (32), (53) et $\varepsilon' = 1$ est d'ordre 3.360, et son central est $\Lambda = \{ \lambda \}$. $X \mid \Lambda$ est isomorphe au $g^6$ alterné et contient un $g_{60}^5$ auquel répond dans X un $g_{3.60}$. Or un tel groupe est nécessairement le produit direct d'un $g_{60}A$ par $\Lambda$ (¹), et X est représentable relativement à A en $g^{18}$ transitif. Dans cette représentation (avec laquelle j'identifierai désormais X), $\Lambda$ est invariant et intransitif. Donc X est imprimitif et a 6 systèmes de degré 3. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 ; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 ; \ldots ; \alpha_6, \beta_6, \gamma_6$ ces systèmes et $\lambda = \Pi_1^6 \sigma_i$, $\sigma_i$ désignant la substitution $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$. L'action de $X \mid \Lambda$ sur les 6 systèmes est

(¹) *Voir* HÖLDER, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 354-355; *S.*, 93.

celle du $g^6$ alterné. Posons

$$a_\alpha = \alpha_1\alpha_2 . \alpha_3\alpha_4, \qquad \beta_\alpha = \alpha_1\alpha_2 . \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6, \qquad c_\alpha = \alpha_1\alpha_3\alpha_2,$$

et soient $a_\beta$, $b_\beta$, $c_\beta$; $a_\gamma$, $b_\gamma$, $c_\gamma$ les substitutions déduites de $a_\alpha$, $b_\alpha$, $c_\alpha$ en y remplaçant $\alpha_i$ par $\beta_i$ ou $\gamma_i$. Posons encore

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma;$$

$$x = \Pi_1^6 \sigma_i^{x_i}, \qquad y = \Pi_1^6 \sigma_i^{y_i}, \qquad z = \Pi_1^6 \sigma_i^{z_i}; \qquad a = a_0 x, \qquad b = b_0 y. \qquad c = c_0 z.$$

Si X existe, il doit y avoir des valeurs de $x_i$, $y_i$, $z_i$ mod 3 telles que $a$, $b$, $c$ vérifient les équations

$$b^4 = 1, \quad a^2 = 1, \quad (ba)^3 = 1, \quad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \quad (ab^{-2}ab^2)^2 = 1, \quad (ab^{-3}ab^3)^2 = 1,$$
$$c^3 = 1, \qquad (ca)^3 = 1, \qquad (cb^{-1}ab)^2 = 1, \qquad (cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda.$$

On peut toujours supposer les $y_i$ nuls. Car si $b$ a la séquence $\alpha_i\,\beta_k$, elle doit avoir, pour être permutable à $\lambda$, les séquences $\beta_i\,\gamma_k$ et $\gamma_i\,\alpha_k$. Mais alors, dans $\sigma_k^{-1}\,b\,\sigma_k$, ces séquences sont remplacées respectivement par $\alpha_i\,\alpha_k$, $\beta_i\,\beta_k$, $\gamma_i\,\gamma_k$ [ceci suppose $k \neq i$; or c'est bien le cas, sans quoi $b$ aurait le cycle $(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)$ et ne serait pas d'ordre 4] (¹).

Remarquons maintenant que, si $s_\alpha$ est une substitution quelconque des $\alpha_i$, et $s$ le produit de $s_\alpha$, $s_\beta = \lambda^{-1}s_\alpha\lambda$, $s_\gamma = \lambda^{-2}s_\alpha\lambda^2$, $s^{-1}xs$ se déduit de $x$, soit en laissant les $x_i$ à leurs places et en opérant sur les $\sigma_i$ la substitution $s_\sigma$ qui se déduit de $s$ en y écrivant $\sigma_i$ pour $\alpha_i$, soit en laissant les $\sigma_i$ à leurs places et en opérant sur les $x_i$, la substitution $s_x^{-1}$,

---

(¹) Au point de vue abstrait, cette observation se présente comme il suit. Il s'agit de trouver une substitution $u = \Pi_1^6 \sigma_i^{u_i}$ telle que $ub_0 yu^{-1} = b_0$. Or soit $b_u$ ce que devient $b_\alpha$ quand on y remplace $\alpha_i$ par $u_i$, et supposons que $b_u^{-1}$ remplace $u_i$ par $u_{h_i}$. Cette équation devient (d'après la remarque qui suit dans le texte) $u_{h_i} + y_i - u_i \equiv 0 \pmod 3$. Or, soit $(u_1, \ldots, u_m)$ un cycle de $b_u^{-1}$. Les équations correspondantes sont

$$u_1 - u_2 \equiv -y_1, \qquad u_2 - u_3 \equiv -y_2, \qquad \ldots, \qquad u_m - u_1 \equiv -y_m \pmod 3.$$

Elles sont résolubles toujours et seulement si $\Sigma_1^m y_i \equiv 0$. Or $m$ divise l'ordre $t = mq$ de $b_0 y$, et la condition $(b_0 y)^t = 1$ ou

$$b_0^t . b_0^{-t+1} y\, b_0^{t-1} . b_0^{-t+2} y\, b_0^{t-2} \ldots b_0^{-1} y\, b_0 . y = 1$$

donne $q\Sigma_1^m y_i \equiv 0$, d'où $\Sigma_1^m y_i \equiv 0$, puisque ici $t = 4$ est premier.

$s_x$ se déduisant de $s_\alpha$ par le changement de $\alpha_i$ en $x_i$ : car si $s$ remplace $\alpha_i$ par $\alpha_k$, elle transforme $\sigma_i$ en $\sigma_k$, donc $\sigma_i^{x_i}$ en $\sigma_k^{x_i}$ et remplace par suite $x_k$ par $x_i$ dans $\Pi_1^6 \sigma_i^{x_i}$.

L'équation $a^2 = 1$ ou $a_0 x a_0 x = 1$ donne donc (en sous-entendant le module 3)

$$x_1 + x_2 \equiv 0, \qquad x_3 + x_4 \equiv 0, \qquad x_5 \equiv 0, \qquad x_6 \equiv 0.$$

Les 6 équations fournies par $(ba)^3 = 1$ ou $ba_0 x ba_0 x ba_0 x = 1$ se réduisent à

$$x_4 = 0.$$

Celles fournies par $(b^{-2}ab^2a)^2 = 1$ ou $b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x = 1$ et par $(bab^{-1}a)^3 = 1$ ou $b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x = 1$ ne donnent rien de nouveau.

Celles fournies par $c^3 = 1$ ou $c_0 z c_0 z c_0 z = 1$ se réduisent à

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0.$$

Celles fournies par $(ca)^3 = 1$ ou $c_0 z a_0 x c_0 z a_0 x c_0 z a_0 x = 1$ se réduisent à

$$z_1 - z_4 \equiv x_1.$$

Celles fournies par $(cb^{-1}ab)^2 = 1$ ou $b_0 c_0 z b_0^{-1} a_0 x b_0 c_0 z b_0^{-1} a_0 x = 1$ se réduisent à

$$z_1 \equiv x_2, \qquad z_6 \equiv 0.$$

Enfin celles fournies par $(cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda$ ou $b_0^2 c_0 z b_0^{-2} a_0 x b_0^2 c_0 z b_0^{-2} a_0 x = \lambda$ se réduisent à

$$x_1 \equiv 1 + z_1, \qquad z_4 \equiv -1, \qquad z_5 \equiv 1.$$

Donc

$$x_1 \equiv -x_2 \equiv -1, \quad x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv 0, \quad z_1 \equiv -z_3 \equiv -z_4 \equiv z_5 \equiv 1, \quad z_6 \equiv 0,$$

et l'on peut faire $z_2 \equiv 0$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} b &= (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6)(\beta_1\beta_2)(\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6)(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6), \\ a &= (\alpha_1\beta_2)(\beta_1\gamma_2)(\gamma_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)(\beta_3\beta_4)(\gamma_3\gamma_4), \\ c &= (\alpha_1\gamma_3\gamma_2)(\beta_1\alpha_3\alpha_2)(\gamma_1\beta_3\beta_2)(\alpha_4\gamma_4\beta_4)(\alpha_5\beta_5\gamma_5). \end{aligned}$$

Donc X existe.

**35.** Au lieu de partir de la représentation de X relative au $g_{60}$ $\Lambda$, on pourrait partir de celle relative au $g_{24}$ $S = \{a, b\}$ défini par $a^2 = 1$, $b^4 = 1$, $(ab)^3 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$, isomorphe au $g^4$ symétrique. X contient S, sans quoi les équations de X établiraient entre $a$ et $b$ des relations autres que les conséquences des équations de S, relations qui résulteraient évidemment aussi des équations de X où l'on fait $\lambda = 1$; or cela n'a pas lieu, puisque le groupe ainsi obtenu est isomorphe au $g^6$ alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui contient le $g^4$ symétrique $\{12.3456, 12.34\}$. S ne peut contenir $\Lambda$, puisque le $g^4$ symétrique n'a pas d'$e_3$ normal. Donc X est représentable, relativement à S, en $g^{45}$ imprimitif admettant 15 systèmes de degré 3. L'action de $X|\Lambda$ sur ces systèmes est semblable à l'action du $g^6$ alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6 sur les 15 combinaisons de symboles 2 à 2

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56,

que je désignerai respectivement par

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}.$

L'action de la substitution 12.34, correspondant à $a$, sur ces combinaisons est

$$a_\alpha = \alpha_1 . \alpha_{10} . \alpha_{15} . \alpha_2\alpha_7 . \alpha_3\alpha_6 . \alpha_4\alpha_8 . \alpha_5\alpha_9 . \alpha_{11}\alpha_{13} . \alpha_{12}\alpha_{14}.$$

Celle de 12.3456, répondant à $b$, est

$$b_\alpha = \alpha_1 . \alpha_2\alpha_7\alpha_4\alpha_9 . \alpha_3\alpha_8\alpha_5\alpha_6 . \alpha_{10}\alpha_{13}\alpha_{15}\alpha_{12} . \alpha_{11}\alpha_{14}.$$

Celle de 132, répondant à $c$, est

$$c_\alpha = \alpha_{13} . \alpha_{14} . \alpha_{15} . \alpha_1\alpha_2\alpha_6 . \alpha_3\alpha_{10}\alpha_7 . \alpha_4\alpha_{11}\alpha_8 . \alpha_5\alpha_{12}\alpha_9.$$

Soient encore $a_\beta$, $b_\beta$, $c_\beta$; $a_\gamma$, $b_\gamma$, $c_\gamma$ les substitutions déduites de $a_\alpha$, $b_\alpha$, $c_\alpha$ en y remplaçant $\alpha_i$ par $\beta_i$ ou $\gamma_i$, et

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma. \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma. \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma.$$

$$\sigma_i = (\alpha_i\beta_i\gamma_i); \qquad \lambda = \Pi_1^{15}\sigma_i. \qquad x = \Pi_1^{15}\sigma_i^{x_i}, \qquad y = \Pi_1^{15}\sigma_i^{y_i}. \qquad z = \Pi_1^{15}\sigma_i^{z_i}.$$

$$a = a_0 x. \qquad b = b_0. \qquad c = c_0 z.$$

Les équations analogues à celles obtenues dans la représentation précédente permettent d'annuler $x_4$, $x_{11}$, $z_1$, $z_8$. Elles donnent alors

$$x_1 \equiv x_4 \equiv x_8 \equiv x_{10} \equiv x_{11} \equiv x_{12} \equiv x_{13} \equiv x_{14} \equiv x_{15} \equiv 0,$$
$$x_2 \equiv x_3 \equiv x_9 \equiv 1, \qquad x_5 \equiv x_6 \equiv x_7 \equiv -1;$$
$$z_1 \equiv z_4 \equiv z_5 \equiv z_8 \equiv z_9 \equiv z_{11} \equiv z_{12} \equiv z_{13} \equiv 0,$$
$$z_2 \equiv z_3 \equiv z_7 \equiv z_{10} \equiv z_{14} \equiv 1, \qquad z_6 \equiv z_{15} \equiv -1.$$

Donc

$$b = b_0,$$
$$\begin{aligned} a = {} & (\alpha_1)(\beta_1)(\gamma_1)(\alpha_{10})(\beta_{10})(\gamma_{10})(\alpha_{15})(\beta_{15})(\gamma_{15}) \\ & \times (\alpha_2\gamma_7)(\beta_2\alpha_7)(\gamma_2\beta_7)(\alpha_3\gamma_6)(\beta_3\alpha_6)(\gamma_3\beta_6)(\alpha_5\beta_9)(\beta_5\alpha_9)(\gamma_5\beta_9) \\ & \times (\alpha_4\alpha_8)(\beta_4\beta_8)(\gamma_4\gamma_8)(\alpha_{11}\alpha_{13})(\beta_{11}\beta_{13})(\gamma_{11}\gamma_{13})(\alpha_{12}\alpha_{14})(\beta_{12}\beta_{14})(\gamma_{12}\gamma_{14}). \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} c = {} & (\alpha_{13})(\beta_{13})(\gamma_{13})(\alpha_1\beta_2\alpha_6)(\beta_1\gamma_2\beta_6)(\gamma_1\alpha_2\gamma_6)(\alpha_3\beta_{10}\gamma_7)(\beta_3\gamma_{10}\alpha_7)(\gamma_3\alpha_{10}\beta_7) \\ & \times (\alpha_4\alpha_{11}\alpha_8)(\beta_4\beta_{11}\beta_8)(\gamma_4\gamma_{11}\gamma_8) \\ & \times (\alpha_5\alpha_{12}\alpha_9)(\beta_5\beta_{12}\beta_9)(\gamma_5\gamma_{12}\gamma_9)(\alpha_{14}\beta_{14}\gamma_{14})(\alpha_{15}\gamma_{15}\beta_{15}). \end{aligned}$$

**36.** *Soit* $n = 7$. Si (32) n'entraîne pas $\eta_2 = \eta_1$, je poserai encore $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = \lambda$. Il faut remplacer, dans (47), $\eta_2 = \eta$ par $\lambda^3 = \alpha^3\varkappa^2$. On voit, comme au début du n° **34**, que les divers figuratifs de $\Gamma$ sont fournis par (32), (48), (51) et (53), c'est-à-dire, en réduisant les exposants de $\varepsilon'$ mod 2 et ceux de $\lambda'$ mod 3 (ici $t = 5$, $l = 1$, $m = -12$)

$$(55) \left\{ \begin{array}{lllll} \alpha = \varepsilon'\lambda'^{-x'}, & \beta = \varepsilon'^{1+y}\lambda'^{y'-x'}, & \gamma = \varepsilon'^{-x'-y'}, & \delta = \varepsilon', & \varepsilon = \varepsilon'\lambda'^{x'}, \\ \zeta = \varepsilon'^{1+z}, & \eta = \varepsilon'\lambda'^{z'}, & \varkappa = \varepsilon'^{1+x}, & \lambda = \varepsilon'\lambda'^{1+z'}, & \varepsilon'^2 = 1, \quad \lambda'^3 = 1. \end{array} \right.$$

En prenant au besoin $a\varepsilon'^{x+z}\lambda'^{-x'}$ pour $a$, $b\varepsilon'^{y}\lambda'^{y'-x'}$ pour $b$, $c\varepsilon'^{x}\lambda'^{x'+z'}$ pour $c$, *on peut annuler* $x, y, z, x', y', z'$.

Il reste à chercher si, pour $n = 7$, le multiplicateur est bien d'ordre 6. Faisons $\varepsilon = 1$, et cherchons à construire un groupe X d'ordre $\frac{3}{2}(7!)$ ayant pour central $\Lambda = \{\lambda\}$. X contient $S = \{a, b\}$ défini par $a^2 = b^5 = (ba)^4 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$, donc isomorphe au $g^5_{120}$ symétrique et premier à $\Lambda$. Considérons la représentation de X relative à S. Elle a 21 systèmes d'imprimitivité de degré 3, et, en identifiant X avec cette représentation, l'action de $X|\Lambda$ sur les 21 systèmes est semblable à celle du $g^7$ alterné sur les 21 combinaisons 2 à 2

12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27,
34, 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67,

que je désignerai respectivement par

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \alpha_4,\quad \alpha_5,\quad \alpha_6,\quad \alpha_7,\quad \alpha_8,\quad \alpha_9,\quad \alpha_{10},\quad \alpha_{11},$$
$$\alpha_{12},\quad \alpha_{13},\quad \alpha_{14},\quad \alpha_{15},\quad \alpha_{16},\quad \alpha_{17},\quad \alpha_{18},\quad \alpha_{19},\quad \alpha_{20},\quad \alpha_{21}.$$

L'action de 12.34, qui répond à $a$, sur ces combinaisons, est

$$a_\alpha = \alpha_1 . \alpha_{12} . \alpha_{19} . \alpha_2\alpha_8 . \alpha_3\alpha_7 . \alpha_4\alpha_9 . \alpha_5\alpha_{10} . \alpha_6\alpha_{11} . \alpha_{13}\alpha_{16} . \alpha_{14}\alpha_{17} . \alpha_{15}\alpha_{18} . \alpha_{20}\alpha_{21};$$

celle de 34567, qui répond à $b$, est

$$b_\alpha = \alpha_1 . \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 . \alpha_7\alpha_8\alpha_9\alpha_{10}\alpha_{11} . \alpha_{12}\alpha_{16}\alpha_{19}\alpha_{21}\alpha_{15} . \alpha_{13}\alpha_{17}\alpha_{20}\alpha_{14}\alpha_{18};$$

celle de 132, qui répond à $c$, est

$$c_\alpha = \alpha_{16} . \alpha_{17} . \alpha_{18} . \alpha_{19} . \alpha_{20} . \alpha_{21} . \alpha_1\alpha_2\alpha_7 . \alpha_3\alpha_{12}\alpha_8 . \alpha_4\alpha_{13}\alpha_9 . \alpha_5\alpha_{14}\alpha_{10} . \alpha_6\alpha_{15}\alpha_{11}.$$

Posons comme précédemment

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma;$$
$$\sigma_i = (\alpha_i\beta_i\gamma_i), \qquad \lambda = \Pi_1^{21}\sigma_i, \qquad x = \Pi_1^{21}\sigma_i^{x_i}, \qquad y = \Pi_1^{21}\sigma_i^{y_i}, \qquad z = \Pi_1^{21}\sigma_i^{z_i};$$
$$a = a_0 x, \qquad b = b_0, \qquad c = c_0 z.$$

Les conditions $a^2 = 1$, $b^5 = 1$, $(ba)^4 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$ donnent

$$(56)\quad \begin{cases} x_1 \equiv x_{12} \equiv x_{13} \equiv x_{14} \equiv x_{15} \equiv x_{16} \equiv x_{17} \equiv x_{18} \equiv x_{19} \equiv x_{20} \equiv x_{21} \equiv 0, \\ x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv -x_7 \equiv -x_8 \equiv -x_9 \equiv -x_{10} \equiv -x_{11}. \end{cases}$$

Mais les conditions $(cb^{-1}ab)^2 = 1$, $(cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda$ donnent respectivement (entre autres) les deux congruences

$$(57)\qquad x_1 + z_1 + x_{11} + z_2 \equiv 0, \qquad x_1 + z_1 + x_{10} + z_2 \equiv 1$$

qui contredisent (56).

Donc X n'existe pas. *Donc les équations* (32) *entraînent la conséquence* $\eta_2 = \eta$.

**37.** On aurait pu, comme dans le cas $n = 6$, considérer la représentation de X en $g^{45}$ relative à un des $g_{168}$ simples qu'il contient; mais la représentation correspondante A du $g^7$ alterné en $g^{15}$ est moins facile à former, et la contradiction apparaît moins vite.

Je vais ici former A, non pour montrer comment cette contradiction se présente, mais pour montrer *comment* $\eta_2 = \eta$ résulte de (32), et pour obtenir incidemment de nouvelles équations de $A_7$. Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les symboles de $A_7$ et $\alpha_1$ son $g_{168}$ simple engendré par

$$(58) \qquad x = 124.365, \qquad y = 7123456, \qquad z = 24.56$$

et défini par

$$y^7 = z^2 = (y^2 z)^3 = (yz)^4 = 1 \qquad (x = zy^6 zy^3 zy^6) \quad (^1).$$

$A_7$ contient les 30 conjugués de $\alpha_1$ dans le symétrique $S_7$ de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [$\alpha_1$ est maximum dans $S_7$ (²)] : mais ils forment dans $A_7$ deux systèmes conjugués de 15 $g_{168}$. Les 15 conjugués de $\alpha_1$ sont, en posant $\sigma = 71234$,

$$\alpha_1, \qquad \alpha_2 = \sigma^{-1}\alpha_1\sigma,$$
$$\alpha_3 = x^{-1}\alpha_2 x, \qquad \alpha_4 = x^{-2}\alpha_2 x^2, \qquad \alpha_5 = x^{-3}\alpha_2 x^3,$$
$$\alpha_6 = x^{-4}\alpha_2 x^4, \qquad \alpha_7 = x^{-5}\alpha_2 x^5, \qquad \alpha_8 = x^{-6}\alpha_2 x^6,$$
$$\alpha_9 = \sigma\alpha_1\sigma^{-1},$$
$$\alpha_{10} = x^{-1}\alpha_9 x, \qquad \alpha_{11} = x^{-2}\alpha_9 x^2, \qquad \alpha_{12} = x^{-3}\alpha_9 x^3,$$
$$\alpha_{13} = x^{-4}\alpha_9 x^4, \qquad \alpha_{14} = x^{-5}\alpha_9 x^5, \qquad \alpha_{15} = x^{-6}\alpha_9 x^6$$

(on vérifie directement que ces 15 $\alpha_i$ sont distincts, en formant leurs $g_7$ conjugués de ceux de $\alpha_1$). En écrivant maintenant

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g, \quad h, \quad i, \quad k, \quad l, \quad m, \quad n, \quad o, \quad p$$

pour

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5, \quad \alpha_6, \quad \alpha_7, \quad \alpha_8, \quad \alpha_9, \quad \alpha_{10}, \quad \alpha_{11}, \quad \alpha_{12}, \quad \alpha_{13}, \quad \alpha_{14}, \quad \alpha_{15}$$

et en identifiant chaque substitution $\xi$ de $A_7$, avec la substitution $(\alpha_i, \xi^{-1}\alpha_i\xi)$ que subissent les $\alpha_i$ quand on les transforme par $\xi$, c'est-à-dire avec la substitution correspondante de A, on obtient

$$a_0 = 12.34 = am.bo.ch.ep.fn.gk.d.i.l.$$
$$b_0 = 34567 = aehfm.bpdng.cloki.$$
$$c_0 = 132 = aen.bfh.cpk.dli.gmo$$

---

(¹) Voir *J. M.*, 1902, p. 275-276, où le symbole 7 est seulement remplacé par o.

(²) *Loc. cit.*, p. 284.

($a_0$, $b_0$, $c_0$ correspondent respectivement à $a$, $b$, $c$ de $\mathcal{G}_0$). $\alpha_6$, qui fixe $f$ est engendré par

$$e_0 = (c_0 b_0)^{-1} = 1237654 = ageniph.bodclkm.f.$$
$$f_0 = c_0 b_0^{-3} a_0 b_0^3 = 13.67 = ap.bh.ce.il.kn.mo.d.f.g;$$

car $e_0$ et $f_0$ satisfont aux équations $e_0^7 = f_0^2 = (e_0^2 f_0)^3 = (e_0 f_0)^4 = 1$ qui définissent $\alpha_6$.

Les substitutions

$$e'_0 = e_0^{-1} \quad \text{et} \quad f'_0 = a_0 c_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 a_0 = 24.56 = bk.cm.dl.eg.fo.np.a.i.h$$

engendrent aussi un $g_{168}$ défini par $e_0'^7 = f_0'^2 = (e_0'^2 f'_0)^3 = (e'_0 f'_0)^4 = 1$ ; mais, comme il déplace tous les symboles, il appartient à l'autre système conjugué.

On voit que $\alpha_6$ est transitif dans son champ. Le $g^{13}$ F qui y fixe $o$ est engendré par

$$u_0 = f_0 e_0^2 = 165.274 = bgn.cim.dlh.ekp.a.f.o.$$
$$v_0 = e_0 f_0 e_0^{-1} = 24.37 = bk.cn.dg.el.hi.mp.a.f.o.$$
$$w_0 = u_0^{-1} v_0 u_0 = 27.34 = bi.ce.dm.gp.hk.ln.a.f.o.$$

On voit que F est un $g_{12}^{12}$ tétraédral régulier, défini par $u_0^3 = v_0^2 = w_0^2 = 1$, $v_0 w_0 = w_0 v_0$, $u_0^{-1} v_0 u_0 = w_0$, et que A *est un* $g^{15}$ 2 *fois transitif de classe* 12.

Adjoignons à $\alpha_6$ la substitution $s_0 = f'_0$ *qui a le cycle* $fo$. Elle vérifie les équations

$$s_0^2 = 1. \quad s_0 v_0 s_0 = v_0, \quad s_0 w_0 s_0 = v_0 w_0. \quad s_0 u_0 s_0 = u_0^2. \quad s_0 e_0 s_0 = e_0^3 s_0 v_0 u_0^2 v_0 e_0^3.$$

et, comme $e_0$F contient un système de restes de $\alpha_6$ (modd F, 1) (F étant transitif dans son champ, $e$F contient des substitutions remplaçant $o$ par un symbole quelconque autre que $o$ du champ de $\alpha_6$), *ces équations, jointes à celles de* $\alpha_6$, *définissent* $A_7$ (¹).

Négligeons maintenant $|\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \varkappa| = \mathcal{B}$ ou, ce qui revient au même, réduisons-le à 1 ($\mathcal{B}_0$ est alors d'ordre 3), et posons

$$e = (cb)^{-1}, \qquad f = cb^{-3} a b^3,$$
$$u = fe^2 = cb^{-3} ab^2 c^2 b^{-1} c^2. \quad v = efe^{-1} = bab^3 cb. \quad w = u^{-1} vu. \quad s = acb^{-2} ab^2 a,$$

---

(¹) *J. M.*, 1902, p. 259.

d'où

$$(59) \qquad v^2 = w^2 = f^2 = \eta_1, \qquad s^2 = \eta_2^2.$$

Les éléments de $\mathcal{G}_0 | \mathcal{A}_0$ qui répondent à $u$, $v$ sont $\mathcal{A}_0 c b^{-3} a b^2 c^2 b^{-1} c^2$, $\mathcal{A}_0 b a b^3 c b$. Donc à la relation $v_0 w_0 = w_0 v_0$ répond, dans $\mathcal{G}_0$, une relation de la forme

$$vw = wv\omega, \qquad \omega \text{ étant dans } \mathcal{A}_0,$$

ou

$$v u^{-1} v u . v^{-1} u^{-1} v^{-1} u = \omega,$$

ou

$$(60) \quad b a b^3 c b . c b c b^{-2} a b^3 c^2 . b a b^3 c b . c b^{-3} a b^2 c^2 b^{-1} c^2 .$$
$$\times\, b^{-1} c^2 b^2 a b^{-1} . c b c b^{-2} a b^3 c^2 . b^{-1} c^2 b^2 a b^{-1} . c b^{-3} a b^2 c^2 b^{-1} c^2 = \omega.$$

Calculons $\omega$. Les transformations que je vais employer étant les mêmes que précédemment [en y joignant $(ba)^4 = 1$], je me bornerai à indiquer les parties des formules que je transforme en les soulignant, et à séparer par un trait vertical les produits situés à droite ou à gauche du premier membre (ce premier membre sera toujours dans $\mathcal{A}_0$) que je ferai passer à gauche ou à droite. On obtient ainsi successivement, en faisant d'abord passer à gauche la fin $c^2 b^{-1} c^2$ du premier membre,

$$c^2 b^{-1} c^2 b a b^3 c b c b c b^{-2} a b^3 c^2 b a b^3 c b c b^{-3} a b^2 c^2 b^{-1} c^2 b^{-1} c^2 b^2 a b^{-1} c b c b^{-2} a b^3 c^2 b^{-1} c^2 b^2 a b^{-1} c b^2 a b^2 = \omega.$$

$$c^2 a c b^3 c b c b c b^{-2} a b^3 c^2 b a b^3 c b^{-2} a b^3 c^2 b^{-2} c^2 b^{-1} c^2 b^{-1} c^2 b^2 c^2 a c b^{-2} a b^3 c a c^2 b c^2 a b a b^2 = \omega \eta_1^{-1}.$$

$$c^2 a c b^{-1} c (b b^{-1}) a (b b^{-1}) c^2 b c b^{-2} a b^3 c^2 b a b^3 c b^{-2} a b^3 c a c^2 b^{-2} c a (b b^{-1}) c^2 b c^2 a c b^{-2} a b^3 c a c^2 b c^2 b^{-1} a b^{-1} a b = \omega \vartheta \eta_1^{-1}.$$

$$a c^2 b^{-1} a b c^2 a b^{-2} a b^3 c^2 b a b a b^2 c^2 b c a c^2 b^{-2} a c^2 a (b b^{-1}) c^2 b c a b^{-2} a b^3 c a c^2 b c^2 b^{-1} a b^{-1} a b = \omega \vartheta^{-1} \eta_1^{-1} \eta_2^{-1}.$$

$$a b^{-1} a b a b^{-2} a b^{-1} a (b b^{-1}) c b a b^{-2} c b^{-2} a c^2 a b c^2 b^{-2} a b^3 c a c^2 b c^2 \,|\, b^{-1} a b^{-1} a b = \omega \vartheta^{-1} \eta_2^{-1}.$$

$$b^{-1} (a b^{-1} a b)^2 a b^{-2} a b^{-1} a b a c^2 b^{-1} c (b b^{-1}) a c b^2 a c^2 a b^{-1} a b^2 c b c a c^2 b c^2 = \omega.$$

$$b^{-2} a b^{-1} c b a c^2 a b^{-1} a b^{-2} c^2 a b c^2 = \omega \eta_1^{-1},$$

$$b^{-2} c (b b^{-1}) a b^{-1} a b^{-2} c^2 a b c^2 = \omega \vartheta^{-1} \eta_1^{-1}.$$

$$b^{-1} c (b b^{-1}) a c b^{-1} a b^{-1} a b^{-2} c^2 a b \,|\, c^2 = \omega \vartheta \eta_1^{-1}.$$

$$a c b^{-1} a (b b^{-1}) c (b b^{-1}) a b a b^{-1} c^2 a b = \omega \eta_1^{-1}.$$

$$a b^{-1} a b a c b^{-1} a b a b^{-1} c^2 (b b^{-1}) a b = \omega \vartheta^{-1} \eta_1.$$

$$1 = \omega.$$

Donc $vw = wv$. Donc $(vw)^2 = v^2 w^2 = \eta_1^2$.

A la relation $s_0^{-1} w_0 s_0 = v_0 w_0$ répond, dans $\mathcal{G}_0$, une relation de la forme

$$s^{-1}ws = vw\varphi, \qquad \varphi \text{ étant dans } \mathcal{A}_0. \tag{61}$$

dont le carré donne $\varphi^2 = \eta_1^2$. Or l'équation (61), qui s'écrit

$$s^{-1}u^{-1}vusu^{-1}v^{-1}uv^{-1} = \varphi,$$

donne successivement (avec les mêmes notations)

$$ab^{-2}ab^2c^2a.cbcb^{-2}ab^3c^2.bab^3cb.cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2.$$
$$\times\, acb^{-2}ab^2a.cbcb^{-2}ab^3c^2.b^{-1}c^2b^2ab^{-1}.cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2.b^{-1}c^2b^2ab^{-1} = \varphi,$$
$$b^{-2}ab^2cac^2bcb^{-2}ab^{-1}acb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^2c^2bcac^2bc^2abab^2c^2b^{-1}cac^2bab^{-1} = \varphi\theta\eta_2^{-1},$$
$$b^{-2}ab^2cac^2bcb^{-1}ababcb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^{-2}cbc^2abab^2c^2b^{-1}cac^2bab^{-1} = \varphi\theta^{-1}\eta_2^{-1},$$
$$b^{-2}ab^2c^2acbc^2abcb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^{-1}cbab^2c^2b^{-1}ca\,|\,c^2bab^{-1} = \varphi\theta\eta_1^{-1}\eta_2^{-1}.$$
$$c^2bab^{-1}cb^{-2}ab^2a(bb^{-1})cbc^2abcb^{-1}c(bb^{-1})ac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}c^2b^2c^2b^{-1}ca = \varphi\eta_1^{-1}.$$
$$c^2bc^2ab^2ab^2abcbc^2acb^{-1}ac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2c^2bc^2b^{-1}ca = \varphi\theta\eta_1^{-1}.$$
$$c^2bc^2ab^2ab^2ab^2c^2b^{-1}a(bb^{-1})c^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2ab^{-2}ab^2cbc^2b^{-1}ca = \varphi\eta_1^{-1}\eta_2^{-1}.$$
$$c^2bc^2ab^2ab^2ababac^2bab^2c^2b^{-1}c^2ab^{-2}ab^{-2}cab^{-1}c(bb^{-1})a = \varphi\eta_2^{-1}.$$
$$c^2bc^2ab^2abab^{-1}c^2bab^2c^2b^{-1}c^2b^{-2}ab^2abab^{-1}a = \varphi\theta^{-1}\eta_2^{-1}.$$
$$c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^2cabab^{-1}a = \varphi.$$
$$c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^2cbab^{-1}abab^{-1} = \varphi.$$
$$c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^{-2}ac^2b^{-1}abab^{-1} = \varphi\theta^{-1},$$
$$c^2bc^2ab^2abcb^{-1}ab^3cab^{-1}ab\,|\,cab^{-1} = \varphi\theta^{-1}\eta_1\eta_2.$$
$$acb^3c^2b^2cb^{-1}abab^{-1}ab\,|\,a = \varphi\eta_2.$$
$$cb^{-1}a(bb^{-1})cbc^2ab^{-1}ab = \varphi\theta\eta_1^{-1}\eta_2.$$
$$\eta_1 = \varphi\eta_1^{-1}\eta_2.$$

Comme $\varphi^2 = \eta_1^2$, le carré de cette équation donne $\eta_2^2 = \eta_1^2$ et, puisque $\eta_2^3 = \eta_1^3$, $\eta_2 = \eta_1$.

**38**. Maschke a donné (¹) une représentation homogène du $g^7$

(¹) *M. A.*, t. LI, 1899, p. 290.

alterné A de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, où

$$132, \quad 12.34, \quad 12.45, \quad 12.56, \quad 12.67$$

sont représentées respectivement par

$$c_0 = \left| \begin{matrix} \omega^2 x_1 \\ \omega^2 x_2 \\ \omega\, x_3 \\ \omega\, x_4 \end{matrix} \right|, \quad a_0 = \left| \begin{matrix} x_1 + \sqrt{2}\, x_4 \\ x_2 + \sqrt{2}\, x_3 \\ \sqrt{2}\, x_2 - x_3 \\ \sqrt{2}\, x_1 - x_4 \end{matrix} \right|, \quad f = \left| \begin{matrix} \sigma\, x_4 \\ \sigma' x_3 \\ \sigma\, x_2 \\ \sigma' x_1 \end{matrix} \right|, \quad g = \left| \begin{matrix} \sqrt{3}\, x_3 + i\sqrt{2}\, x_4 \\ -i\sqrt{2}\, x_3 - \sqrt{3}\, x_4 \\ \sqrt{3}\, x_1 + i\sqrt{2}\, x_2 \\ i\sqrt{2}\, x_1 - \sqrt{3}\, x_2 \end{matrix} \right|, \quad h = \left| \begin{matrix} \rho\, x_3 \\ -\rho' x_4 \\ \rho\, x_1 \\ -\rho' x_2 \end{matrix} \right|,$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\rho = \sqrt{\frac{5}{12}} + i\sqrt{\frac{7}{12}}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{3}{8}} + i\sqrt{\frac{5}{8}},$$

$$\rho' = \sqrt{\frac{5}{12}} - i\sqrt{\frac{7}{12}}, \qquad \sigma' = \sqrt{\frac{3}{8}} - i\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Soit G le figuratif $\{a, b, c, \varepsilon\}$ de A, et $\{\varepsilon\} = E$. $c_0$ répond à $Ec$, $a_0$ à $Ea$, $f$ à $Eab^{-1}ab$, $g$ à $Eab^{-2}ab^2$, $h$ à $Eab^{-3}ab^3$, et comme

$$(12)(67).(12)(56).(12)(45).(12)(34) = (34567),$$

la substitution

$$b_0 = hgfa_0 = \left| \begin{matrix} \rho'\sigma'\sqrt{6}\, x_1 - 2i\rho\sigma' x_2 - i\rho\sigma\sqrt{2}\, x_3 + \rho'\sigma\sqrt{3}\, x_4 \\ -2i\rho'\sigma x_1 + \rho\sigma\sqrt{6}\, x_2 + \rho\sigma'\sqrt{3}\, x_3 - i\rho'\sigma'\sqrt{2}\, x_4 \\ i\rho'\sigma\sqrt{2}\, x_1 - \rho\sigma\sqrt{3}\, x_2 + \rho\sigma'\sqrt{6}\, x_3 - 2i\rho'\sigma' x_4 \\ -\rho'\sigma'\sqrt{3}\, x_1 + i\rho\sigma'\sqrt{2}\, x_2 - 2i\rho\sigma x_3 + \rho'\sigma\sqrt{6}\, x_4 \end{matrix} \right|$$

répond à $Eb$.

Considérons désormais les variables comme non homogènes, et posons

$$u = \left| \frac{x_1}{\sqrt{3}}, \frac{x_2}{\sqrt{3}}, \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \frac{x_4}{\sqrt{3}} \right|, \quad v = \left| \frac{x_1}{\sqrt{5}}, \frac{x_2}{\sqrt{5}}, \frac{x_3}{\sqrt{5}}, \frac{x_4}{\sqrt{5}} \right|, \quad w = | ix_1, ix_2, ix_3, ix_4 |.$$

Les déterminants de $c_0$, $ua_0$, $f$, $vg$, $h$, $uvb_0$ sont égaux à 1. On vérifie d'ailleurs directement les équations

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{c} (a_0 u)^2 = 1, \qquad c_0^3 = 1, \qquad (c_0 a_0 u)^3 = w^3, \qquad (a_0 b_0^{-1} a_0 b_0 u)^3 = 1, \\ (a_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 u^2)^2 = w^2, \\ (c_0 b_0^{-1} a_0 b_0 u)^2 = (c_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 u)^2 = (c_0 b_0^{-3} a_0 b_0^3 u)^3 = 1. \end{array} \right.$$

Comme l'équation caractéristique de $b_0$ est $\frac{s^5+1}{s+1}=0$, on a $b_0^5 = w^2$. Le déterminant de $b_0 a_0$ étant égal à 1, $(b_0 a_0)^4 = \gamma_0$, qui est une similitude à quatre variables, est dans $\{w\}$. Or, à la conséquence $\beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^l\alpha^m = 1$ des équations (32) répond, pour les équations (62) jointes à $b_0^5 = w^2$, la conséquence $\gamma_0^5 w^2 = 1$ ou, puisque $\gamma_0$ est dans $\{w\}$, $\gamma_0 = w^2$. Donc, en posant

$$a_1 = a_0 u w, \qquad c_1 = c_0 w^2, \qquad b_1 = b_0,$$

on aura

$$a_1^2 = c_1^3 = b_1^5 = (b_1 a_1)^4 = (a_1 b_1^{-1} a_1 b_1)^3 = (a_1 b_1^{2} a_1 b_1^2)^2 = w^2,$$
$$(c_1 a_1)^3 = (c_1 b_1^{-1} a_1 b_1)^2 = (c_1 b_1^{-2} a_1 b_1^2)^2 = (c_1 b_1^{-3} a_1 b_1^3)^2 = w^2$$

et $a_1$, $b_1$, $c_1$ fournissant une représentation du figuratif (correspondant à $x = y = z = x' = y' = z' = 0$) où $a_1$ répond à $a$, $b_1$ à $b$, $c_1$ à $c$, $w^2$ à $\varepsilon$.