JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BOUNITZKY

Sur la fonction de Green des équations différentielles linéaires ordinaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 5 (1909), p. 65-125.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1909_6_5__65_0>

Sur la fonction de Green des équations différentielles linéaires ordinaires;

Par M. E. BOUNITZKY.

1. Nous nous proposons d'étudier les propriétés des fonctions de Green des équations différentielles linéaires ordinaires, en nous appuyant sur les travaux de MM. Burkhardt, Hilbert, Bôcher, Mason et Westfall, concernant ce sujet ([1]). Nous construisons d'abord les fonctions de Green pour un système d'équations linéaires du premier ordre et puis nous appliquons les résultats trouvés à la théorie de la fonction de Green d'une équation linéaire ordinaire de l'ordre n. Dans cette dernière théorie nous discutons en détail deux questions : nous expliquons le rôle que jouent les autofonctions ([2]) adjointes de M. Schmidt dans le cas général, où la fonction de Green n'est pas symétrique, et nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour la symétrie de la fonction de Green. En considérant toujours les conditions relatives aux limites linéaires homogènes, nous nous bornons en général au cas où le déterminant de ces conditions est différent de zéro, et nous ne discutons le cas contraire que pour l'équation

([1]) H. Burkhardt, *Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une dimension* (*Bull. Soc. math.*, t. XXII, 1894). — D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Zweite Mitteilung*) (*Göttinger Nachrichten*, 1904). — M. Bôcher, *Green's fonctions in space of one dimension* (*Bull. of the American Soc.*, 1901). — Ch.-M. Mason, *Inaugural-dissertation, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Göttingen, 1903. — W. Westfall, *Inauguraldissertation, Zur Theorie der Integralgleichungen*, Göttingen, 1905.

([2]) Nous écrirons toujours *autofonction, autovaleur* dans le sens des mots allemands *Eigenfunktion, Eigenwert.*

différentielle linéaire du second ordre adjointe à soi-même, en supposant de plus que les coefficients des conditions relatives aux limites satisfont à une certaine relation.

2. Considérons un système d'équations différentielles linéaires

$$
(1)\quad \begin{cases} L_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \dfrac{du_i}{dx} + a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots + a_{in}u_n = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}
$$

où les fonctions a_{ik} de x sont continues dans un intervalle donné $(x \geq a, x \leq b)$ (¹), avec le système adjoint

$$
(2)\quad \begin{cases} M_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) = -\dfrac{dv_i}{dx} + a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \ldots + a_{ni}v_n = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}
$$

Le système (1) admet n solutions indépendantes

$$
u_{\nu 1}, \quad u_{\nu 2}, \quad \ldots, \quad u_{\nu n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),
$$

continues, ainsi que a_{ik}, dans l'intervalle (a, b). Désignons le déterminant de ces solutions par

$$
\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix},
$$

et le complément algébrique de l'élément u_{ki} par $[u_{ki}]$. Le déterminant $\Delta(x)$ reste continu et différent de zéro dans l'intervalle (a, b) en vertu de la relation

$$
\Delta(x) = ce^{-\int \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}\, dx},
$$

c désignant une constante différente de zéro, et les expressions

$$
v_{\nu 1} = \frac{[u_{\nu 1}]}{\Delta}, \qquad v_{\nu 2} = \frac{[u_{\nu 2}]}{\Delta}, \qquad \ldots, \qquad v_{\nu n} = \frac{[u_{\nu n}]}{\Delta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),
$$

(¹) Nous désignerons un intervalle de cette espècé, pour abréger, par (a, b), y compris les limites $x = a$, $x = b$. De même, nous dirons qu'une fonction $f(x)$ a une qualité donnée dans l'intervalle (a, b), si cette qualité a lieu aussi pour $x = a$, $x = b$.

qui donnent n solutions indépendantes du système (2), sont aussi continues dans le même intervalle.

Nous dirons que la suite de fonctions

$$\gamma_{\nu 1}(x, \xi), \quad \gamma_{\nu 2}(x, \xi), \quad \ldots, \quad \gamma_{\nu\nu}(x, \xi), \quad \ldots, \quad \gamma_{\nu n}(x, \xi)$$

forme une *solution principale* (¹) du système (1), si ce système est satisfait, en posant

$$u_i = \gamma_{\nu i}(x, \xi);$$

si les fonctions $\gamma_{\nu k}(x, \xi)$ ont, par rapport à x, dans l'intervalle (a, b), des dérivées continues pour les valeurs $1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n$ de l'indice k et si de plus la fonction $\gamma_{\nu\nu}(x, \xi)$, en gardant la même propriété dans les intervalles (a, ξ), (ξ, b), satisfait à la condition (²)

$$\lim_{\varepsilon=0}[\gamma_{\nu\nu}(\xi+\varepsilon, \xi) - \gamma_{\nu\nu}(\xi-\varepsilon, \xi)] = -1.$$

Une solution principale coïncide donc pour $x \leqq \xi$ avec les intégrales

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k1}(x), \quad \sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k2}(x), \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k\nu}(x)$$

du système (1) et pour $x \geqq \xi$ avec les intégrales

$$\sum_{k=1}^{k=m} m_{k\nu}\, u_{k1}(x), \quad \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k2}(x), \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{kn}(x),$$

où $\mu_{k\nu}$ et $m_{k\nu}$ sont des constantes. En désignant les différences $\mu_{k\nu} - m_{k\nu}$ respectivement par $l_{k\nu}$, on a, conformément à la définition d'une solu-

---

(¹) Nous écrirons *solution principale* dans le sens du mot allemand *Grundlösung*. *Cf.* D. Hilbert, *loc. cit.*

(²) On voit donc que la fonction $\gamma_{\nu\nu}(x, \xi)$ a deux déterminations pour $x = \xi$ et la même circonstance peut avoir lieu par rapport à la dérivée d'une quelconque des fonctions $\gamma_{\nu i}(x, \xi)$; néanmoins, la solution principale ne cesse pas de satisfaire au système (1), si l'on convient de prendre la détermination de $\gamma_{\nu\nu}(x, \xi)$ pour $x = \xi$ dans l'intervalle (ξ, b) et les valeurs de toutes les dérivées droites ou la détermination de $\gamma_{\nu\nu}(x, \xi)$ pour $x = \xi$ dans l'intervalle (a, ξ) et les valeurs de toutes les dérivées gauches.

tion principale,

$$
(3)\quad\left\{\begin{array}{l}
\sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k\lambda}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k\lambda}(\xi) = \sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}\, u_{k\lambda}(\xi) = 0 \\
\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n), \\
\sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k\nu}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k\nu}(\xi) = \sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}\, u_{k\nu}(\xi) = 1.
\end{array}\right.
$$

En résolvant ces équations par rapport à $l_{k\nu}$, on a

$$
l_{k\nu} = \int^{x=\xi} \frac{[u_{k\nu}]}{\Delta} = v_{k\nu}(\xi),
$$

d'où vient, en tenant compte de la relation $\mu_{k\nu} - m_{k\nu} = l_{k\nu}$,

$$
(4)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\gamma_{\nu\lambda}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{k=n} [v_{k\nu}(\xi) + m_{k\lambda}]\, u_{k\nu}(x) & (x \leqq \xi) \\
\gamma_{\nu\lambda}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k\lambda}(x) & (x \geqq \xi)
\end{array}\right\}\quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),
$$

où $m_{k\nu}$ sont des constantes arbitraires (ou des fonctions arbitraires de ξ). En donnant à l'indice r dans les formules (4) les valeurs $\nu = 1, 2. \ldots, n$, on trouve n systèmes différents de solutions principales.

3. Nous aurons besoin de considérer des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ dont les valeurs aux limites de l'intervalle (a, b) satisfassent à n équations linéaires homogènes

$$
\mathrm{T}_k(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki}\, f_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\, f_i(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),
$$

où α_{ki}, β_{ki} sont des coefficients constants donnés. Nous désignerons l'ensemble de ces n conditions par les mots *les conditions aux limites* T et nous convenons d'écrire pour chaque suite de fonctions $\mathrm{F}_1(x)$, $\mathrm{F}_2(x), \ldots, \mathrm{F}_n(x)$, au lieu de

$$
\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki}\, \mathrm{F}_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\, \mathrm{F}_i(b), \quad \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki}\, \mathrm{F}_i(a), \quad \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\, \mathrm{F}_i(b),
$$

respectivement

$$T_k(F_1, F_2, \ldots, F_n), \quad T_{ak}(F_1, F_2, \ldots, F_n), \quad T_{bk}(F_1, F_2, \ldots, F_n).$$

De plus, pour chacune des solutions indépendantes $u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}$ du système (1) nous posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} T_k(u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}) &= T_k(\nu), \\ T_{ak}(u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}) &= T_{ak}(\nu), \\ T_{bk}(u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}) &= T_{bk}(\nu). \end{aligned}$$

Nous supposerons toujours que les conditions T sont indépendantes; on pourra donc trouver dans la matrice

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{matrix} \right\|$$

un déterminant de l'ordre n qui soit différent de zéro.

Nous convenons de dire qu'une solution principale du système (1)

$$\begin{aligned} \gamma_{\nu 1}(x, \xi) &= G^T_{\nu 1}(x, \xi), \\ \gamma_{\nu 2}(x, \xi) &= G^T_{\nu 2}(x, \xi), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_{\nu n}(x, \xi) &= G^T_{\nu n}(x, \xi). \end{aligned}$$

qui satisfait, en substituant $G^T_{\nu i}(x, \xi)$ au lieu de $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, aux conditions T, forme *une solution de Green du système* (1) *par rapport aux conditions* T.

En tenant compte des formules (4), on trouve que les coefficients $m_{i\nu}$ de la solution de Green satisfont à un système d'équations

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_{i\nu} T_k(i) = -\sum_{i=1}^{i=n} T_{ak}(i)\, v_{i\nu}(\xi) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si le déterminant de ce système

$$D = \begin{vmatrix} T_1(1) & T_1(2) & \ldots & T_1(n) \\ T_2(1) & T_2(2) & \ldots & T_2(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_n(1) & T_n(2) & \ldots & T_n(n) \end{vmatrix},$$

que nous désignerons dorénavant comme *le déterminant du système* (1) *par rapport aux conditions* T, est différent de zéro, on a, en posant

$$D_k(ai) = \begin{vmatrix} T_1(1) & T_1(2) & \dots & T_1(k-1) & T_{a1}(i) & T_1(k+1) & \dots & T_1(n) \\ T_2(1) & T_2(2) & \dots & T_2(k-1) & T_{a2}(i) & T_2(k+1) & \dots & T_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(1) & T_n(2) & \dots & T_n(k-1) & T_{an}(i) & T_n(k+1) & \dots & T_n(n) \end{vmatrix},$$

$$m_{k\nu} = -\frac{\sum_{i=1}^{i=n} D_k(ai)\, v_{i\nu}(\xi)}{D},$$

d'où, en posant

$$D_k(bi) = \begin{vmatrix} T_1(1) & \dots & T_1(k-1) & T_{b1}(i) & T_1(k+1) & \dots & T_1(n) \\ T_2(1) & \dots & T_2(k-1) & T_{b2}(i) & T_2(k+1) & \dots & T_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(1) & \dots & T_n(k-1) & T_{bn}(i) & T_n(k+1) & \dots & T_n(n) \end{vmatrix}$$

et en remarquant que la somme $D_k(ai) + D_k(bi)$ est égale à zéro pour $k \neq i$ et à D pour $k = i$, on trouve

$$m_{k\nu} + v_{k\nu}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} D_k(bi)\, v_{i\nu}(\xi)}{D}.$$

En substituant ces valeurs de $m_{k\nu}$ et de $m_{k\nu} + v_{k\nu}(\xi)$ dans les formules (4), on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} G^T_{\nu\lambda}(x,\xi) &= \frac{\sum_{k=1}^{k=n} u_{k\lambda}(x) \sum_{i=1}^{i=n} D_k(b_i)\, v_{i\nu}(\xi)}{D} \qquad (x \leq \xi) \\ G^T_{\nu\lambda}(x,\xi) &= -\frac{\sum_{k=1}^{k=n} u_{k\lambda}(x) \sum_{i=1}^{i=n} D_k(a_i)\, v_{i\nu}(\xi)}{D} \qquad (x \geq \xi) \end{aligned} \right\} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

En faisant parcourir à l'indice ν les valeurs 1, 2, ..., n, les formules (7) donnent n solutions de Green différentes. Nous désignerons chacune de ces n^2 fonctions $G^T_{\nu\lambda}(x, \xi)$ par les mots *fonction de Green* *du système* (1) *par rapport aux conditions* T. En disposant les n^2 fonctions de Green dans la forme d'un carré

$$(8)\qquad \left\{\begin{matrix} G^T_{11}(x,\xi), & G^T_{12}(x,\xi), & \ldots, & G^T_{1n}(x,\xi), \\ G^T_{21}(x,\xi), & G^T_{22}(x,\xi), & \ldots, & G^T_{2n}(x,\xi), \\ G^T_{n1}(x,\xi), & G^T_{n2}(x,\xi), & \ldots, & G^T_{nn}(x,\xi), \end{matrix}\right.$$

on voit que les fonctions de Green d'une même ligne de ce carré forment une solution de Green et que les fonctions $G^T_{\nu\nu}(x,\xi)$, placées sur la diagonale du carré, vérifient la relation

$$\lim_{\varepsilon=0}[G^T_{\nu\nu}(\xi+\varepsilon,\xi) - G^T_{\nu\nu}(\xi-\varepsilon,\xi)] = -1,$$

toutes les autres fonctions de Green étant continues dans l'intervalle (a, b).

4. Nous dirons qu'une suite de fonctions

$$u_1 = \psi_1(x), \qquad u_2 = \psi_2(x), \qquad \ldots \qquad u_n = \psi_n(x)$$

qui ne se réduisent pas toutes identiquement à zéro forme une *solution distinguée du système* (1) *par rapport aux conditions* T, si ces fonctions, admettant des dérivées continues dans l'intervalle (a, b), satisfont au système (1) et aux conditions T.

Une solution distinguée doit donc s'exprimer par les n solutions indépendantes $u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ du système (1) au moyen des formules

$$(9)\qquad \psi_\nu = \sum_{i=1}^{i=n} s_i u_{i\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où les quantités s_i sont des constantes. Le déterminant $\Delta(x)$ des équations (8) par rapport aux quantités s_i étant différent de zéro, les fonctions ψ_ν ne peuvent se réduire toutes identiquement à zéro que si toutes les quantités s_i s'annulent.

Une solution distinguée satisfait, par définition, aux conditions T. On aura donc

$$(10)\qquad T_k(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \sum_{i=1}^{i=n} s_i T_k(i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où suit que les quantités s_i ne peuvent s'annuler simultanément que si le déterminant D du système (1) par rapport aux conditions T est nul. Au contraire, si $D = 0$, le système d'équations (10) est satisfait par certaines valeurs de s_i qui ne sont pas toutes nulles simultanément, et, par suite, en substituant ces valeurs dans les formules (9), on obtient une solution distinguée. Donc, *pour que le système* (1) *admette une solution distinguée par rapport aux conditions* T, *il faut et il suffit que le déterminant* D *du système* (1) *par rapport à ces conditions s'annule.*

5. Soit $f(x)$ une fonction définie par la formule

$$f(x) = \int_a^b G^T_{\nu\lambda}(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

où $\varphi(\xi)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b). La dérivée de cette fonction $f(x)$ s'exprime par les formules

$$(11)\qquad \begin{cases} f'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{dG^T_{\nu\lambda}(x, \xi)}{dx}\,\varphi(\xi)\,d\xi & (\nu \neq \lambda), \\ f'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{dG^T_{\nu\nu}(x, \xi)}{dx}\,\varphi(\xi)\,d\xi - \varphi(x). \end{cases}$$

On a, en effet, conformément aux formules (3), (4), (7),

$$G^T_{\nu\lambda}(x, \xi) = \gamma^0_{\nu\lambda}(x, \xi) + w_{\nu\lambda}(x, \xi),$$

où

$$\gamma^0_{\nu\lambda}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu} u_{\nu\lambda}(x) \qquad (x \leqq \xi),$$

$$\gamma^0_{\nu\lambda}(x, \xi) = 0 \qquad (x \geqq \xi),$$

$$l_{k\nu} = v_{k\nu}(\xi), \qquad w_{\nu\lambda}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu} u_{k\lambda}(x).$$

La fonction $\gamma^0_{\nu\lambda}(x, \xi)$ est donc continue en x et ξ et la fonction $w_{\nu\lambda}(x, \xi)$ l'est aussi, les coefficients $m_{k\nu}$ étant définis par les formules (6). On a donc, en désignant par $\gamma^0_{\nu\lambda}(x, x+o)$ l'expression

$$\lim_{\varepsilon=0} \gamma^0_{\nu\lambda}(x, x+\varepsilon) \qquad (\varepsilon > o),$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\int_x^b \gamma^0_{\nu\lambda}(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_a^b \frac{dw_{\nu\lambda}(x, \xi)}{dx}\varphi(\xi)\,d\xi \\ &= \int_x^b \frac{d}{dx}\gamma^0_{\nu\lambda}(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_a^b \frac{dw_{\nu\lambda}(x, \xi)}{dx}\varphi(\xi)\,d\xi - \gamma^0_{\nu\lambda}(x, x+o)\,\varphi(x) \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx}G^{\mathrm{T}}_{\nu\lambda}(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi - \varphi(x)\sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}(x)\,u_{k\lambda}(x). \end{aligned}$$

En faisant dans les équations (3) $\xi = x$, on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}(x)\,u_{k\lambda}(x) = o \qquad \text{pour} \qquad \lambda \neq \nu,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}(x)\,u_{k\nu}(x) = 1 \qquad \text{pour} \qquad \lambda = \nu,$$

d'où suivent les formules (11).

6. Nous dirons que les conditions aux limites T', définies par les formules

$$\mathrm{T}'_k(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha'_{ki} f_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki} f_i(b) = o \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

sont *adjointes* par rapport aux conditions T, si pour tous les systèmes de fonctions $\mathrm{U}_i(x)$ et $\mathrm{V}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui satisfont respectivement aux conditions T et T' l'expression

$$\Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{U}_i(x)\,\mathrm{V}_i(x)$$

s'annule identiquement. Nous nous proposons le problème de déterminer la forme des conditions T' qui sont les adjointes des conditions données T. L'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{U}_i(x)\,\mathrm{V}_i(x)$$

est une fonction symétrique des indices 1, 2, ..., n. On peut donc, sans diminuer la généralité des raisonnements, permuter ces indices de telle sorte que la matrice (5) contienne un déterminant d'ordre n, différent de zéro, de la forme (¹)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,\mu} & \beta_{1,\mu+1} & \beta_{1,\mu+2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,\mu} & \beta_{2,\mu+1} & \beta_{2,\mu+2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n,\mu} & \beta_{n,\mu+1} & \beta_{n,\mu+2} & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dans cette hypothèse, considérons une suite de fonctions $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$ qui satisfassent aux conditions T et résolvons les équations qui expriment ces conditions par rapport aux valeurs limites $U_1(a)$, $U_2(a)$, ..., $U_\mu(a)$, $U_{\mu+1}(b)$, $U_{\mu+2}(b)$, ..., $U_n(b)$. On aura

$$(12)\quad \begin{cases} U_k(a) + \displaystyle\sum_{i=\mu+1}^{i=n} A_{ki} U_i(a) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} B_{k\lambda} U_\lambda(b) = 0 & (k = 1, 2, \ldots, \mu), \\ U_s(b) + \displaystyle\sum_{i=\mu+1}^{i=n} A_{si} U_i(a) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} B_{s\lambda} U_\lambda(b) = 0 & (s = \mu+1, \mu+2, \ldots, n), \end{cases}$$

où A_{ki}, A_{si}, $B_{k\lambda}$, $B_{s\lambda}$ sont des constantes données. En choisissant un indice déterminé k' parmi les nombres 1, 2, ..., μ et en posant dans les formules (12),

$$(13)\quad \begin{cases} U_{k'}(b) = 1, \quad U_\lambda(b) = 0 & \text{pour} \quad \lambda \neq k' \quad (1 \leqq \lambda \leqq \mu), \\ U_i(a) = 0 & \text{pour} \quad \mu+1 \leqq i \leqq n, \end{cases}$$

on a

$$(14)\quad \begin{cases} U_k(a) + B_{kk'} = 0 & (k = 1, 2, \ldots, \mu), \\ U_s(b) + B_{sk'} = 0 & (s = \mu+1, \mu+2, \ldots, n). \end{cases}$$

On doit donc avoir, pour les fonctions $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$ qui, en satisfaisant aux conditions T, vérifient aussi les équations (13), (14) et pour les fonctions quelconques $V_1(x)$, $V_2(x)$, ..., $V_n(x)$,

---

(¹) Dans deux cas limites ce déterminant peut être formé par tous les coefficients α_{ki} ($\mu = n$) ou par tous les coefficients β_{ki} ($\mu = 0$), ce qui n'aurait autre effet que de simplifier les calculs.

satisfaisant aux conditions T′ adjointes (s'il y en a en général),

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b}\sum_{i=1}^{i=n} U_i(x)\,V_i(x) &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} U_\lambda(b)\,V_\lambda(b) + \sum_{s=\mu+1}^{s=n} U_s(b)\,V_s(b) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{k=\mu} U_k(a)\,V_k(a) - \sum_{i=\mu+1}^{i=n} U_i(a)\,V_i(a) \\ &= V_{k'}(b) - \sum_{s=\mu+1}^{s=n}{}' B_{sk'}V_s(b) + \sum_{k=1}^{k=\mu} B_{kk'}V_k(a) = 0. \end{aligned}\right.$$

De même, en choisissant parmi les nombres $\mu+1, \mu+2, \ldots, n$ un indice i' déterminé et en posant dans les formules (12)

$$U_{i'}(a) = 1, \qquad U_i(a) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq i' \qquad (\mu + 1 \leqq i \leqq n),$$
$$U_\lambda(b) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \mu),$$

il vient

$$U_k(a) + A_{ki'} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu),$$
$$U_s(b) + A_{si'} = 0 \qquad (s = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, n),$$

d'où suit

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b}\sum_{i=1}^{i=n} U_i(x)\,V_i(x) &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} U_\lambda(b)\,V_\lambda(b) + \sum_{s=\mu+1}^{s=n} U_s(b)\,V_s(b) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{k=\mu} U_k(a)\,V_k(b) - \sum_{i=\mu+1}^{i=n} U_i(a)\,V_i(a) \\ &= - \sum_{s=\mu+1}^{s=n} A_{si'}V_s(b) + \sum_{k=1}^{k=\mu} A_{ki'}V_k(a) - V_{i'}(a). \end{aligned}\right.$$

En posant dans les formules (15) successivement

$$k' = 1, 2, \ldots, \mu$$

et en écrivant au lieu de k', s, k respectivement k, i, λ, et, de même, en posant dans (16) successivement

$$i' = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, n$$

et puis écrivant au lieu de i', s, k respectivement s, i, λ, on voit qu'on peut écrire les conditions adjointes T', s'il y en a en général, sous la forme

$$(17)\quad \begin{cases} V_k(b) - \displaystyle\sum_{i=\mu+1}^{i=n} B_{ik} V_i(b) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} B_{\lambda k} V_\lambda(a) = 0 & (k = 1, 2, \ldots, \mu), \\ V_s(a) + \displaystyle\sum_{i=\mu+1}^{i=n} A_{is} V_i(b) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} A_{\lambda s} V_\lambda(a) = 0 & (s = \mu+1, \mu+2, \ldots, n). \end{cases}$$

Réciproquement, en ajoutant les formules (12) et (17) respectivement avec les facteurs $-V_k(a)$, $V_s(b)$, $V_k(b)$, $-V_s(a)$, on trouve, pour deux suites quelconques de fonctions $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$ et $V_1(x)$, $V_2(x)$, ..., $V_n(x)$ qui satisfont respectivement aux conditions (12) et (17),

$$\int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} U_i(x) V_i(x) = 0.$$

On voit donc *qu'à chaque ensemble de conditions aux limites* T, *donné par les formules* (12), *correspond un ensemble* S' *de conditions adjointes parfaitement déterminé, défini par les formules* (17), en tant qu'on convient de considérer deux ensembles de conditions qui suivent mutuellement l'un de l'autre comme équivalents.

Il est clair que les conditions adjointes des conditions adjointes sont équivalentes aux conditions primitives. Si l'on veut écrire les conditions T et leurs adjointes sous une forme tout à fait générale, sans faire aucune hypothèse sur l'ordre des indices i des fonctions $U_i(x)$, $V_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), on n'a qu'à remplacer les indices k, i, λ, s respectivement par ν_k, ν_i, ν_λ, ν_s, en supposant que les indices k et s parcourent respectivement les valeurs $k = 1, 2, \ldots, \mu$, $s = \mu+1, \mu+2, \ldots, n$ et que l'ensemble d'indices ν_1, ν_2, ..., ν_μ, $\nu_{\mu+1}$, $\nu_{\mu+2}$, ..., ν_n forme une permutation quelconque des nombres 1, 2, ..., n.

Dans deux cas limites, où l'on a $\mu = n$ ou $\mu = 0$, les formules (12) et (17) se réduisent respectivement à leurs premières ou à leurs secondes lignes.

7. En ajoutant les expressions

$$\left.\begin{aligned} L_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \frac{du_i}{dx} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{i\lambda} u_\lambda \\ M_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) &= -\frac{dv_i}{dx} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\lambda i} v_\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

où les $a_{i\lambda}$ sont des fonctions continues de x dans l'intervalle (a, b) et où les u_i, v_i sont des fonctions qui ont des dérivées continues dans le même intervalle, multipliées respectivement par les facteurs u_i, v_i, en sommant par rapport à i et en intégrant de $x = a$ à $x = b$, on trouve la formule de Green

$$(18) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^b [v_i L_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) - u_i L_i(v_1, v_2, \ldots, v_n)]\, dx = \Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i.$$

En s'appuyant sur cette formule, on peut démontrer les propositions suivantes [1] :

a. Si le système (1) *a toutes les n^2 fonctions* $S_{\nu\lambda}^{T}(x, \xi)$ *de Green, le système adjoint* (2) *n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions adjointes* T′.

b. Si le système (2) *a toutes les n^2 fonctions* $H_{\nu\lambda}^{T'}(x, \xi)$ *de Green* [*en désignant par* $H_{\nu 1}^{T'}(x, \xi)$, $H_{\nu 2}^{T'}(x, \xi)$, …, $H_{\nu n}^{T'}(x, \xi)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *les solutions de Green du système* (2) *par rapport aux conditions adjointes* T′], *le système* (1) *n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions* T.

c. Le déterminant D *du système* (1) *par rapport aux conditions* T *et le déterminant* D′ *du système adjoint* (2) *par rapport aux conditions adjointes* T′ *s'annulent simultanément ou sont simultanément différents de zéro.*

d. Pour que le système (1) *ait toutes les n^2 fonctions* $G_{\nu\lambda}^{T}(x, \xi)$ *de Green, il faut et il suffit que le déterminant* D *du système* (1) *par rapport aux conditions* T *ne s'annule pas.*

e. Si le système (1) *a toutes les n^2 fonctions de Green* $G_{\nu\lambda}^{T}(x, \xi)$

[1] Ces propositions offrent l'analogie et la généralisation de celles démontrées par M. W. Westfall, *loc. cit.*, § 7.

par rapport aux conditions T, *le système adjoint* (2) *a aussi toutes les* n^2 *fonctions de Green* $H^{T'}_{\nu\mu}(x, \xi)$ *par rapport aux conditions adjointes* T′. *Les fonctions* $H^{T'}_{\nu\mu}(x, \xi)$ *sont liées aux fonctions* $G^{T}(x, \xi)$ *par des relations*

$$H_{\mu\nu}(x, \xi) = - G_{\nu\mu}(x, \xi).$$

En effet, soient $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_n(x)$ les fonctions qui, ayant des dérivées continues dans l'intervalle (a, b), satisfont au système (2) et aux conditions adjointes T′. Écrivons la formule (18) deux fois, en posant

$$u_i = G^{T}_{\nu i}(x, \xi)$$

et en prenant pour limites a, $\xi - \varepsilon$ et $\xi + \varepsilon$, b, où ξ est un nombre quelconque pris dans l'intervalle (a, b); ajoutons les résultats et faisons tendre ε vers zéro. On aura

$$\begin{aligned} o &= \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{x=a}^{x=\xi-\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\chi_i(x) + \int_{x=\xi+\varepsilon}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\chi_i(x)\right] \\ &= \int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\,\chi_i(x) - \lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\,\chi_i(x). \end{aligned}$$

Les fonctions $G^{T}_{\nu i}(x, \xi)$ et $\chi_i(x)$ satisfaisant respectivement aux conditions T et aux conditions adjointes T′, il vient

$$\int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\,\chi_i(x) = o.$$

Dans la somme $\sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)$ ce n'est que la fonction $G_{\nu\nu}(x, \xi)$ qui est discontinue pour $x = \xi$, conformément à la formule

$$\lim_{\varepsilon=0}[G_{\nu\nu}(\xi + \varepsilon, \xi) - G_{\nu\nu}(\xi - \varepsilon, \xi)] = -1.$$

On aura donc

$$-\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} G_{\nu i}(x, \xi)\,\chi_i(x) = \chi_\nu(\xi) = o,$$

où ν peut prendre toutes les valeurs $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Le théorème *a* est donc démontré.

Pour démontrer le théorème b, on n'a qu'à poser dans la formule (18)

$$u_i = \psi_i(x), \qquad v_i = \mathrm{H}_{\nu i}^{\mathrm{T}'}(x, \xi),$$

les $\psi_i(x)$ étant des fonctions qui aient des dérivées continues dans l'intervalle (a, b) et qui satisfassent de plus au système (1) et aux conditions T.

Dans l'hypothèse de $\mathrm{D} \neq 0$, les formules (7) nous assurent l'existence de toutes les n^2 fonctions $\mathrm{G}_{\nu\lambda}^{\mathrm{T}}(x, \xi)$ de Green, d'où suit, conformément au théorème a, que le système (2) n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions adjointes T'. On a donc, comme nous l'avons vu au n° 4, $\mathrm{D}' \neq 0$. De même l'hypothèse $\mathrm{D}' \neq 0$ entraîne $\mathrm{D} \neq 0$, d'où suit le théorème c.

Si le système (1) a toutes les n^2 fonctions $\mathrm{G}_{\nu\lambda}^{\mathrm{T}}(x, \xi)$ de Green, le système (2) n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions T', d'où suit que le déterminant D' est différent de zéro. On a donc aussi $\mathrm{D} \neq 0$. Réciproquement, si $\mathrm{D} \neq 0$, le système (1) a, comme nous l'avons vu plus haut, toutes les n^2 fonctions $\mathrm{G}_{\nu\lambda}^{\mathrm{T}}(x, \xi)$ de Green. Le théorème d est donc démontré.

Si le système (1) a toutes les n^2 fonctions $\mathrm{G}_{\nu\lambda}^{\mathrm{T}}(x, \xi)$ de Green, on a $\mathrm{D} \neq 0$ et, par suite, $\mathrm{D}' \neq 0$, d'où suit que le système (2) a toutes les n^2 fonctions $\mathrm{H}_{\nu\lambda}^{\mathrm{T}'}(x, \xi)$ de Green. En posant

$$u_i = \mathrm{G}_{\nu i}^{\mathrm{T}}(x, \xi), \qquad v_i = \mathrm{H}_{\mu i}^{\mathrm{T}'}(x, \eta),$$

où ξ et η sont deux nombres quelconques pris dans l'intervalle (a, b), écrivons la formule (18) trois fois pour les limites a, $\eta - \varepsilon$; $\eta + \varepsilon$, $\xi - \varepsilon$; $\xi + \varepsilon$, b (1), ajoutons les résultats et faisons tendre ε vers zéro. On aura

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon = 0} \int_{x=a}^{x=\eta-\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i + \lim_{\varepsilon = 0} \int_{x=\eta+\varepsilon}^{x=\xi-\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i + \lim_{\varepsilon = 0} \int_{x=\xi+\varepsilon}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i \\
&= \int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{G}_{\nu i}^{\mathrm{T}}(x, \xi)\, \mathrm{H}_{\mu i}^{\mathrm{T}'}(x, \eta) - \lim_{\varepsilon = 0} \int_{x=\eta-\varepsilon}^{x=\eta+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{G}_{\nu i}^{\mathrm{T}}(x, \xi)\, \mathrm{H}_{\mu i}^{\mathrm{T}'}(x, \xi) \\
&\qquad - \lim_{\varepsilon = 0} \int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{G}_{\nu i}^{\mathrm{T}}(x, \xi)\, \mathrm{H}_{\mu i}^{\mathrm{T}'}(x, \eta).
\end{aligned}$$

(1) On a supposé, pour fixer les idées, $\eta < \xi$; le cas contraire donne lieu à un calcul analogue et au même résultat final.

Dans la somme $\sum_{i=1}^{i=n} G^T_{\nu i}(x,\xi) H^{T'}_{\mu i}(x,\eta)$ deux facteurs $H^{T'}_{\mu\mu}(x,\eta)$ et $G^T_{\nu\nu}(x,\xi)$ qui multiplient respectivement les fonctions $G^T_{\nu\mu}(x,\xi)$ et $H^{T'}_{\mu\nu}(x,\eta)$ ont des discontinuités, définies par les formules

$$\lim_{\varepsilon=0}[H^{T'}_{\mu\mu}(\eta+\varepsilon,\eta) - H^{T'}_{\mu\mu}(\eta-\varepsilon,\eta)] = -1,$$
$$\lim_{\varepsilon=0}[G^T_{\nu\nu}(\xi+\varepsilon,\xi) - G^T_{\nu\nu}(\xi-\varepsilon,\xi)] = -1.$$

On a donc

$$-\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\eta-\varepsilon}^{x=\eta+\varepsilon}\sum_{i=1}^{i=n} G^T_{\nu i}(x,\xi) H^{T'}_{\mu i}(x,\eta) = G^T_{\nu\mu}(\eta,\xi),$$
$$-\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon}\sum_{i=1}^{i=n} G^T_{\nu i}(x,\xi) H^{T'}_{\mu i}(x,\eta) = H^{T'}_{\mu\nu}(\xi,\eta).$$

De plus, les fonctions $G^T_{\nu i}(x,\xi)$ et $H^{T'}_{\mu i}(x,\eta)$ satisfaisant aux conditions T et T′ adjointes, il vient

$$\int_{x=a}^{x=b}\sum_{i=1}^{i=n} G^T_{\nu i}(x,\xi) H^{T'}_{\mu i}(x,\eta) = 0.$$

Ainsi, en faisant tendre ε vers zéro, on aura

$$H^{T'}_{\mu\nu}(\xi,\eta) + G^T_{\nu\mu}(\eta,\xi) = 0,$$

d'où suit, en remarquant que ξ et η ont des valeurs arbitraires dans l'intervalle (a, b),

$$H^{T'}_{\mu\nu}(x,\xi) = -G^T_{\nu\mu}(\xi,x).$$

On forme donc le carré des fonctions de Green $H^{T'}_{\mu\nu}(x,\xi)$ en changeant dans le carré (8) les signes des fonctions $G^T_{\nu\mu}(x,\xi)$ et en permutant les lignes et les colonnes, ainsi que, d'autre part, la variable x et le paramètre ξ.

8. Les fonctions $G^T_{\nu\nu}(x,\xi)$ de Green qui sont placées sur la diagonale du carré (8) ne sont jamais symétriques. En effet, la fonction $-G^T_{\nu\nu}(\xi,x)$ coïncidant avec la fonction de Green $H^{T'}_{\nu\nu}(x,\xi)$, il vient

$$-\lim_{\varepsilon=0}[G^T_{\nu\nu}(\xi,\xi+\varepsilon) - G^T_{\nu\nu}(\xi,\xi-\varepsilon)] = -1$$

ou

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} G^{\mathrm{T}}_{\nu\nu}(\xi, x) = 1,$$

tandis que pour la fonction $G^{\mathrm{T}}_{\nu\nu}(x, \xi)$ on a

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} G^{\mathrm{T}}_{\nu\nu}(x, \xi) = -1.$$

L'identité

$$G^{\mathrm{T}}_{\nu\nu}(x, \xi) = G^{\mathrm{T}}_{\nu\nu}(\xi, x)$$

est donc impossible. Nous rencontrerons aussi plus loin (au n° **18**) un exemple simple d'une fonction de Green non symétrique avec deux indices différents.

En supposant toujours $D \neq 0$, mais sans faire aucune hypothèse sur la symétrie des fonctions de Green, nous démontrerons les propositions suivantes, qui concernent l'intégration d'un système d'équations linéaires non homogènes avec les conditions aux limites T et qui donnent, d'autre part, le moyen de résoudre certains systèmes d'équations intégrales de la première espèce.

a. Un système d'équations différentielles non homogènes

$$(19)\qquad L_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions continues données, n'admet qu'une seule solution, formée par des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ qui satisfassent aux conditions T *et qui aient, de plus, dans l'intervalle (a, b) des dérivées continues. Cette solution unique est donnée par les formules*

$$(20)\qquad f_\nu(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G^{\mathrm{T}}_{i\nu}(x, \xi)\,\varphi_i(\xi)\,d\xi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

b. Un système d'équations intégrales (20) *ne peut être satisfait par les fonctions continues $\varphi_i(\xi)$ que si les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ vérifient les conditions* T *et, de plus, ont des dérivées continues dans l'intervalle (a, b). L'ensemble de ces conditions étant rempli, le système* (20) *n'a qu'une seule solution continue par rapport aux fonctions $\varphi_i(\xi)$, qui est donnée par les formules*

$$\varphi_i(x) = -L_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions $f_\nu(x)$, définies par les formules (20), satisfont aux équations (19), ce qu'on vérifie par une substitution directe, en faisant usage des formules (11). De plus, chaque groupe $G^T_{i1}(x,\xi)$, $G^T_{i2}(x,\xi)$, ..., $G^T_{in}(x,\xi)$ des fonctions de Green satisfaisant aux conditions T, les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ y satisfont aussi. En considérant une suite quelconque de fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ qui satisfassent au système (19) et aux conditions T et qui aient dans l'intervalle (a, b) des dérivées continues, on voit que les différences $F_1(x)-f_1(x)$, $F_2(x)-f_2(x)$, ..., $F_n(x)-f_n(x)$ satisfont au système (1) et aux conditions T et ont aussi des dérivées continues dans l'intervalle (a, b). Le déterminant D étant, par hypothèse, différent de zéro, le système (1) n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions T. Chacune des différences $F_\nu(x)-f_\nu(x)$ s'annule donc identiquement, d'où suit que la seule solution possible jouissant de toutes les propriétés indiquées dans le texte du théorème *a* est donnée pour le système (19) par les formules (20), ce qui achève la démonstration.

Si le système d'équations intégrales (19) peut être résolu par une suite de fonctions continues $\varphi_i(\xi)$, les fonctions $f_\nu(x)$ doivent satisfaire, comme nous l'avons vu plus haut, aux conditions T et avoir des dérivées continues, ce qu'on vérifie au moyen des formules (11). Ces conditions étant remplies par les fonctions $f_\nu(x)$, considérons un système d'équations

$$L_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = -[-L_i(f_1, f_2, \ldots, f_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans l'hypothèse que les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ satisfont aux conditions T et ont des dérivées continues dans l'intervalle (a, b), ce système n'a qu'une seule solution, donnée par les formules

$$F_\nu(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G^T_{i\nu}(x,\xi)\{-L_i[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)]\}\,d\xi$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

D'ailleurs, on trouve certainement cette solution, en posant $F_\nu(x) = f_\nu(x)$. On a donc

$$f_\nu(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G^T_{i\nu}(x,\xi)\{-L_i[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)]\}\,d\xi$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où suit que les équations intégrales (20) sont satisfaites, si l'on pose

$$\varphi_i(\xi) = -L_i[f_i(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette solution du système (20) est unique. En effet, ce système entraîne, comme nous l'avons vu plus haut, les égalités

$$\varphi_i(x) = -L_i(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Le théorème b est donc démontré.

En appliquant les théorèmes a et b au système d'équations

$$M_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -\varphi_i(x)$$

qu'on peut écrire, pour simplifier les raisonnements, sous la forme

$$-M_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -[-\varphi_i(x)],$$

et en tenant compte des identités

$$H^{T'}_{i\nu}(x, \xi) = -G^{T}_{\nu i}(\xi, x),$$

on démontre les propositions suivantes (toujours dans l'hypothèse de $D \neq 0$).

c. Un système d'équations différentielles

$$M_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -\varphi_i(x),$$

où les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions continues données, n'admet qu'une seule solution, formée par des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ qui satisfassent aux conditions adjointes T' et qui aient des dérivées continues dans l'intervalle (a, b). Cette solution unique est donnée par les formules

$$(21) \qquad f_\nu(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(\xi, x)\,\varphi_i(\xi)\,d\xi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

d. Un système d'équations intégrales (21) ne peut être satisfait par les fonctions continues $\varphi_i(\xi)$ que si les fonctions $f_\nu(x)$ vérifient les conditions adjointes T' et ont dans l'intervalle (a, b) des dérivées continues. Ces conditions étant remplies, le système (21) n'a qu'une seule solution continue par rapport aux fonctions $\varphi_i(\xi)$, qui *est donnée par les formules*

$$\varphi_i(\xi) = -M_i[f_i(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

9. En considérant la fonction $G_{\nu\mu}^{T}(x, \xi)$ comme le noyau de l'équation intégrale de la seconde espèce, désignons respectivement par $u_{\mu}^{(\nu, m)}(x)$, $v_{\nu}^{(\mu, m)}(x)$ et λ_m les autofonctions en x et en ξ (¹) et l'autovaleur correspondante. Désignons aussi respectivement par $\Phi_{\mu}^{(\nu, m)}(x)$, $\Psi_{\nu}^{(\mu, m)}(x)$ et Λ_m les autofonctions adjointes en x et en ξ(¹) et l'autovaleur correspondante du même noyau. Toujours en gardant ces notations, nous démontrerons, dans l'hypothèse de $D \neq 0$, les propositions suivantes qui nous permettent d'interpréter les autofonctions du noyau $G_{\nu\mu}^{T}(x, \xi)$ comme des solutions distinguées de certaines équations différentielles linéaires homogènes, où l'autovaleur λ_m (ou Λ_m) rentre comme un paramètre linéaire.

a. Considérons deux systèmes d'équations différentielles linéaires

$$(22)\qquad \begin{cases} L_i(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, u_{\mu}^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n), \\ L_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, u_{\mu}^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = -\lambda_m u_{\mu}^{(\nu, m)} \end{cases}$$

et

$$(23)\qquad \begin{cases} M_i(v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}, v_{\nu}^{(\mu, m)}, v_{\nu+1}, \ldots, v_n) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, n), \\ M_\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}, v_{\nu}^{(\mu, m)}, v_{\nu+1}, \ldots, v_n) = -\lambda_m v_{\nu}^{(\mu, m)}, \end{cases}$$

(¹) Nous dirons que les fonctions $\varphi_m(x)$, $\chi_m(x)$ sont respectivement *autofonctions en x et en ξ* par rapport à un noyau $K(x, \xi)$, si elles satisfont aux équations

$$\varphi_m(x) = \lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi_m(\xi)\, d\xi, \qquad \chi_m(\xi) = \lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\, \chi_m(x)\, dx,$$

λ_m étant une autovaleur correspondante. De même, nous dirons que les fonctions $\Phi_m(x)$, $\Psi_m(x)$ sont respectivement des *autofonctions adjointes en x et en ξ* par rapport à un noyau $K(x, \xi)$, si elles satisfont aux équations

$$\Phi_m(x) = \Lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\, \Psi_m(\xi)\, d\xi, \qquad \Psi_m(\xi) = \Lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\, \Phi_m(x)\, dx,$$

Λ_m étant une autovaleur correspondante.

où λ_m est un paramètre variable. L'ensemble des valeurs de ce paramètre pour lesquelles le système (22) *admet une solution distinguée*

$$(24) \qquad u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{\mu-1},\ u_\mu^{(\nu, m)},\ u_{\mu+1},\ \ldots,\ u_n$$

par rapport aux conditions T, *ainsi que l'ensemble des valeurs du même paramètre pour lesquelles le système* (23) *admet une solution distinguée*

$$(25) \qquad v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{\nu-1},\ v_\nu^{(\mu, m)},\ v_{\nu+1},\ \ldots,\ v_n$$

par rapport aux conditions adjointes T′, *coïncide avec l'ensemble d'autovaleurs λ_m du noyau $G^T_{\nu\mu}(x, \xi)$. De plus, l'ensemble des fonctions $u_\mu^{(\nu, m)}(x)$ et $v_\nu^{(\mu, m)}(x)$, défini par les solutions distinguées* (24) *et* (25), *coïncide avec l'ensemble des autofonctions en x et en ξ du même noyau.*

b. Considérons un système de 2*n équations différentielles linéaires*

$$(26) \quad \begin{cases} L_i\ (u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, \Phi_\mu^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n), \\ L_\nu\ (u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, \Phi_\mu^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = -\Lambda_m \Psi_\nu^{(\mu, m)}, \\ M_i\,(v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}, \Psi_\nu^{(\mu, m)}, v_{\nu+1}, \ldots, v_n) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, n), \\ M_\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}, \Psi_\nu^{(\mu, m)}, v_{\nu+1}, \ldots, v_n) = -\Lambda_m \Phi_\mu^{(\nu, m)}, \end{cases}$$

où Λ_m est un paramètre variable. L'ensemble des valeurs de ce paramètre pour lesquelles le système (26) *admet une solution distinguée, formée par deux séries de fonctions*

$$(27) \quad \begin{cases} u_1, & u_2, & \ldots, & u_{\mu-1}, & \Phi_\mu^{(\nu, m)}, & u_{\mu+1}, & \ldots, & u_n, \\ v_1, & v_2, & \ldots, & v_{\nu-1}, & \Psi_\nu^{(\mu, m)}, & v_{\nu+1}, & \ldots, & v_n, \end{cases}$$

satisfaisant respectivement aux conditions T *et aux conditions adjointes* T′, *coïncide avec l'ensemble des autovaleurs Λ_m du noyau $G_{\nu,\mu}(x, \xi)$. L'ensemble des fonctions $\Phi_\mu^{(\nu, m)}(x)$ et $\Psi_\nu^{(\mu, m)}(x)$, défini par les solutions distinguées* (27), *coïncide avec l'ensemble des autofonctions adjointes en x et en ξ du même noyau.*

La solution distinguée (24) donne aussi une solution d'un système non homogène

$$L_i(u_1, \ldots, u_{\mu-1}, u_\mu^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = -\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n, \qquad \varphi_\nu(x) = \lambda_m u_\mu^{(\nu, m)}(x).$$

Cette solution est donnée par les fonctions (24) qui satisfont aux conditions T et qui ont, par définition, des dérivées continues dans l'intervalle (a, b). On aura donc, d'après le théorème a du n° **8**,

$$(28)\quad \begin{cases} u_s(x) = \displaystyle\int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G_{is}^T(x, \xi)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi = \lambda_m \int_a^b G_{\nu s}^T(x, \xi)\, u_\mu^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, n), \\ u_\mu^{(\nu, m)}(x) = \lambda_m \displaystyle\int_a^b G_{\nu\mu}^T(x, \xi)\, u_\mu^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi. \end{cases}$$

On voit donc que la valeur du paramètre λ_m pour laquelle le système (22) admet une solution distinguée (24) est une autovaleur et que la fonction $u_\mu^{(\nu, m)}(x)$, définie par cette solution distinguée, est une autofonction correspondante en x du noyau $G_{\nu\mu}^T(x, \xi)$. Réciproquement, considérons une autofonction $u_\mu^{(\nu, m)}(x)$ en x du noyau $G_{\nu\mu}^T(x, \xi)$ et une autovaleur correspondante λ_m qui satisfont, par suite, à la dernière des équations (28). Si l'on définit les fonctions $u_s(x)$ pour les valeurs $1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, n$ de l'indice s par les formules

$$u_s(x) = \lambda_m \int_a^b G_{\nu s}^T(x, \xi)\, u_\mu^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, n),$$

on voit que le système d'équations intégrales

$$u_s(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G_{is}(x, \xi)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

où $u_\mu(x) = u_\mu^{(\nu, m)}(x)$, est satisfait en posant

$$\varphi_i(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq \nu, \qquad \varphi_\nu(\xi) = \lambda_m u_\mu^{(\nu, m)}(\xi),$$

d'où suit, d'après le théorème b du n° **8**, que les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ ont des dérivées continues dans l'intervalle (a, b) et satisfont aux conditions T et qu'on peut trouver les mêmes solutions $\varphi_i(x)$ au moyen des formules

$$\varphi_i(x) = 0 = L_i(u_1, u_2, \ldots, u_\mu^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n),$$
$$\varphi_\nu(x) = -\lambda_m u_\mu^{(\nu, m)}(x) = L_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, u_\mu^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n).$$

On voit donc que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, u_\mu^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n$, $u_\mu^{\nu, m}(x)$ étant une autofonction en x et λ_m étant une autovaleur correspondante du noyau $G_{\nu\mu}^{T}(x, \xi)$ forment une solution distinguée du système (22) par rapport aux conditions T. En raisonnant d'une manière analogue sur le système (23) et sur la solution (25) distinguée correspondante, on achève la démonstration du théorème a. De même, en appliquant de nouveau les théorèmes du n° **8** aux n premières puis aux n dernières équations du système (26) et à la solution distinguée (27), on démontre le théorème b.

10. Dans l'hypothèse $D \neq 0$, on démontre, en s'appuyant sur un théorème de M. Schmidt, les propositions suivantes :

a. Les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ *qui ont des dérivées continues dans l'intervalle* (a, b) *et qui satisfont au système de* $n - 1$ *équations*

$$L_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, n)$$

et aux conditions T *sont développables en séries absolument et uniformément convergentes de la forme*

$$u_s(x) = \sum_m \Phi_s^{(\nu, m)}(x) \int_a^b u_s(\xi)\, \Phi_s^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

procédant respectivement suivant les autofonctions en x adjointes des noyaux $G_{\nu s}^{T}(x, \xi)$.

b. Les fonctions $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ *qui ont des dérivées continues dans l'intervalle* (a, b) *et qui satisfont au système de* $n - 1$

équations

$$M_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n)$$

et aux conditions adjointes T′ *sont développables en séries absolument et uniformément convergentes de la forme*

$$v_s(x) = \sum_m \Psi_s^{(\nu, m)}(x) \int_a^b v_s(\xi)\, \Psi_s^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

procédant respectivement suivant les autofonctions en ξ *adjointes des noyaux* $G_{s\nu}^{T}(x, \xi)$.

En effet, en désignant l'expression $L_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par $\chi_\nu(x)$, on voit que les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ satisfont au système non homogène

$$L_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n),$$
$$L_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \chi_\nu(x)$$

et aux conditions aux limites T, et ont, de plus, des dérivées continues dans l'intervalle (a, b), d'où suit, conformément à la formule (20) du n° **8**,

$$u_s(x) = \int_a^b G_{\nu s}^{T}(x, \xi)\, \chi_\nu(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

La fonction $u_s(x)$ se développe donc, d'après un théorème de M. Schmidt (¹), dans une série absolument et uniformément convergente, procédant suivant les autofonctions adjointes $\Phi_s^{(\nu, m)}(x)$ du noyau $G_{\nu s}^{T}(x, \xi)$. On démontre de même, en s'appuyant sur la formule (20), le théorème *b*. Si la fonction $G_{\nu s}^{T}(x, \xi)$ de Green est symétrique, les développements des théorèmes *a* et *b* se transforment en des séries procédant suivant les autofonctions $u_s^{(\nu, m)}(x)$.

11. Nous nous proposons maintenant d'entreprendre l'étude des propriétés de la fonction de Green d'une expression différentielle linéaire homogène $Z(u)$ de l'ordre n. Considérons à cet effet un sys-

(¹) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integral gleichungen,* § 16 (*Math. Ann.,* Bd. LXIII, 1907).

tème d'équations différentielles

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx}-u_2=0, \quad \dfrac{du_2}{dx}-u_3=0, \quad \ldots, \\ \dfrac{du_k}{dx}-u_{k+1}=0, \quad \ldots, \quad \dfrac{du_{n-1}}{dx}-u_n=0, \\ \dfrac{du_n}{dx}+\dfrac{p_n}{p}u+\dfrac{p_{n-1}}{p}u_2+\ldots+\dfrac{p_2}{p}u_{n-1}+\dfrac{p_1}{p}u_n=0, \end{cases}$$

où p est une fonction qui a n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b) et où $p_k(k=2, 3, \ldots, n-1)$ est une fonction qui a $n-k$ dérivées successives continues dans le même intervalle. De plus, nous supposons que la fonction $p_n(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et que la fonction $p(x)$ est différente de zéro dans cet intervalle. En convenant de regarder l'inconnue u dans le système (29) comme équivalente avec u_1 dans le système (1) et en appliquant la formule (7) du n° **3**, construisons pour le système (29) une fonction de Green $G_{n1}^{T}(x, \xi)$ par rapport aux conditions T, dans l'hypothèse que le déterminant D du système (29) par rapport à ces conditions n'est pas nul. Les $n-1$ premières équations du système (29) nous donnent

$$(30)\qquad u_2=u', \quad \ldots, \quad u_i=u^{(i-1)}, \quad \ldots, \quad u_n=u^{(n-1)},$$

et, par suite, la dernière équation de ce système peut s'écrire sous la forme

$$(31)\qquad u^{(n)}+\frac{p_1}{p}u^{(n-1)}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{p}u'+\frac{p_n}{p}u=0.$$

On obtient donc dans le cas considéré les n solutions indépendantes du système (29) au moyen d'un système fondamental $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ des solutions de l'équation (30), en posant, conformément aux notations du n° **3**,

$$(32)\qquad u_{k1}=u_k, \qquad u_{ki}=u_k^{(i-1)} \qquad (i=2, 3, \ldots, n).$$

La fonction cherchée $G_{n1}^{T}(x, \xi)$ s'exprime par les formules

$$G_{n1}^{T}(x,\xi)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n}u_k(x)\sum\limits_{i=1}^{i=n}D_k(b_i)v_{in}(\xi)}{D} \qquad (x \leqq \xi),$$

$$G_{n1}^{T}(x,\xi)=-\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n}u_k(x)\sum\limits_{i=1}^{i=n}D_k(a_i)v_{in}(\xi)}{D} \qquad (x \geqq \xi),$$

où

$$v_{in}(x) = \frac{[u_i^{(n-1)}]}{\Delta},$$

en désignant, en général, par $[u_i^{(\nu-1)}]$ le complément algébrique de l'élément $u_i^{(\nu-1)}$ du déterminant

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u'_1 & \ldots & u_1^{(n-1)} \\ u_2 & u'_2 & \ldots & u_2^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & u'_n & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Pour calculer les déterminants D, $D_k(ai)$, $D_k(bi)$ dans le cas considéré on n'a qu'à appliquer les formules du n° **3**, en tenant compte des relations (32). On voit donc, en introduisant les désignations

$$C_k(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} f^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} f^{(i-1)}(b),$$

$$f^{(0)}(a) = f(a), \qquad f^{(0)}(b) = f(b),$$

$$C_{ak}(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} f^{(i-1)}(a), \qquad C_{bk}(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} f^{(i-1)}(b),$$

$$C_k(u_\nu) = C_k(\nu), \qquad C_{ak}(u_\nu) = C_{ak}(\nu), \qquad C_{bk}(u_\nu) = C_{bk}(\nu),$$

qu'on aura les expressions cherchées de D, $D_k(ai)$, $D_k(bi)$, en remplaçant dans les formules correspondantes du n° **3** la lettre T par le symbole C. Les fonctions $G^T_{n2}(x, \xi)$, $G^T_{n3}(x, \xi)$, ..., $G^T_{nn}(x, \xi)$, qui forment avec la fonction $G^T_{n1}(x, \xi)$ une solution de Green

$$u = G^T_{n1}(x, \xi), \qquad u_2 = G^T_{n2}(x, \xi), \qquad \ldots, \qquad u_n = G^T_{nn}(x, \xi)$$

du système (23) par rapport aux conditions T, se déduisent immédiatement de la fonction $G^T_{n1}(x, \xi)$. En effet, la solution de Green satisfaisant au système (23), on a

$$G^T_{ni}(x, \xi) = \frac{d^{i-1} G^T(x, \xi)}{dx^{i-1}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

et l'on voit, de plus, que la fonction $G^T_{n1}(x, \xi)$ satisfait à l'équation (31) ou à l'équation équivalente

$$(33) \qquad pu^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u = 0.$$

La solution de Green

$$G^{T}_{ni}(x, \xi) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfait aux conditions T. On a donc, conformément aux notations adoptées,

$$\begin{aligned} &T_k[G^{T}_{n1}(x, \xi), G^{T}_{n2}(x, \xi), \ldots, G^{T}_{nn}(x, \xi)] \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} \frac{d^{i-1}G(x, \xi)}{dx^{i-1}} + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} \frac{d^{i-1}G(x, \xi)}{dx^{i-1}} = C_k[G^{T}_{n1}(x, \xi)] = 0 \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

d'où suit que la fonction $G^{T}_{n1}(x, \xi)$ satisfait à n conditions de la forme

$$C_k(f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

dont nous désignerons l'ensemble par C.

Par définition de la solution de Green, les fonctions $G^{T}_{ni}(x, \xi)$ sont continues dans l'intervalle (a, b) pour les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$ de l'indice i; mais la fonction $G^{T}_{nn}(x, \xi)$, en étant continue dans les intervalles (a, ξ), (ξ, b), satisfait à la condition

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon=0} [G^{T}_{nn}(\xi + \varepsilon, \xi) - G^{T}_{nn}(\xi - \varepsilon, \xi)] \\ &= \lim_{\varepsilon=0} \left[\Big/^{x=\xi+\varepsilon} \frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}} - \Big/^{x=\xi-\varepsilon} \frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}} \right] = -1. \end{aligned}$$

La fonction $G^{T}_{n1}(x, \xi)$ a donc les propriétés suivantes : elle satisfait à l'équation (33) et aux conditions linéaires homogènes C qui lient les valeurs aux limites de cette fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$; la fonction $G^{T}_{n1}(x, \xi)$ et ses dérivées $\frac{d^i G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^i}$ jusqu'à l'ordre $n-2$ sont continues dans l'intervalle (a, b), mais la dérivée $\frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}}$, étant continue dans les intervalles (a, ξ), (ξ, b), satisfait à la condition

$$\lim_{\varepsilon=0} \left[\Big/^{x=\xi+\varepsilon} \frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}} - \Big/^{x=\xi-\varepsilon} \frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}} \right] = -1.$$

On obtient donc, en divisant la fonction $G^{T}_{n1}(x, \xi)$ par $p(\xi)$, *la* *fonction de l'expression*

$$L(u) = pu^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u$$

par rapport aux conditions C (1). En désignant cette fonction de Green par $G^C(x, \xi)$, on aura

$$(34)\quad \begin{cases} G^C(x,\xi) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k(x) \sum\limits_{i=1}^{i=n} D_k(bi)\, v_i(\xi)}{D} & (x \leqq \xi), \\[2ex] G^C(x,\xi) = -\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k(x) \sum\limits_{i=1}^{i=n} D_k(ai)\, v_i(\xi)}{D} & (x \geqq \xi), \end{cases}$$

où

$$v_i(\xi) = \frac{v_{in}(\xi)}{p(\xi)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le dénominateur D des formules (34) se déduit de l'expression de D au n° **3** en remplaçant, comme il est indiqué plus haut, la lettre T par le symbole C; on désignera donc le déterminant D dans ce cas par *un déterminant de l'équation* (33) *par rapport aux conditions* C (2).

12. Soient

$$L(u) = pu^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u$$

une expression différentielle linéaire et

$$M(v) = (-1)^n \frac{d^n(pv)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(pv)}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1) \frac{d(p_{n-1} v)}{dx} + p_n v$$

une expression différentielle adjointe par rapport à $L(u)$. Si les fonc-

---

(1) *Cf.* M. Bôcher, *loc. cit.* Nous désignerons la fonction

$$G^T_m(x, \xi) = G^C(x, \xi)\, p(\xi)$$

par une fonction de Green de l'équation

$$L(u) = 0$$

par rapport aux conditions C.

(2) *Cf.* W. Westfall, *loc. cit.*, § 7, *Bedingungsdeterminante*.

tions u, v et p ont n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b) et si les fonctions $p_k (k = 2, 3, \ldots, n-1)$ ont respectivement $n-k$ dérivées successives continues, on aura, comme il est bien connu, la formule de Green

$$\int_a^b [v\,L(u) - u\,M(v)]\,dx = \Big/_{x=a}^{x=b} P(u, v),$$

où

$$P(u, v) = \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^h u^{(k-h-1)} \frac{d^h}{dx^h}(p_k v).$$

En posant

$$u = u_1, \qquad u^{(i-1)} = u_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

$$p v = v_n,$$

$$-\frac{d(pv)}{dx} + p_1 v = v_{n-1},$$

$$\frac{d^2(pv)}{dx^2} - \frac{d(p_1 v)}{dx} + p_2 v = v_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(pv)}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}(p_1 v)}{dx^{n-2}} + \ldots + (-1)\frac{d(p_{n-2} v)}{dx} + p_{n-1} v = v_1,$$

on peut écrire la formule de Green sous la forme

$$(35) \qquad \int_a^b [v\,L(u) - u\,M(v)]\,dx = \Big/_{x=a}^{x=b} P(u, v) = \Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i.$$

13. Soit $U(x)$ une fonction qui satisfasse aux conditions

$$C_k(U) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} U^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} U^{(i-1)}(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

En écrivant U_1 au lieu de U et U_i au lieu de $U^{(i-1)} (i = 2, \ldots, n)$, on obtient l'ensemble correspondant T de conditions

$$T_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} U_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} U_i(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

satisfaites par les fonctions $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Considérons maintenant les fonctions $V_1, V_2, \ldots, V_n$ qui satisfont aux conditions T′, adjointes de T. On aura, en désignant, comme au n° **6**, les coefficients des conditions T′ par $\alpha'_{ki}, \beta'_{ki}$,

$$(36)\qquad \left\{ \begin{array}{l} T'_k(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha'_{ki} V_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki} V_i(b) = 0 \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

En posant dans les formules (36)

$$(37)\qquad \left\{ \begin{array}{l} V_n \quad = pV, \\ V_{n-1} = -\dfrac{d(pV)}{dx} + p_1 V, \\ V_{n-2} = \dfrac{d^2(pV)}{dx^2} - \dfrac{d(p_1 V)}{dx} + p_2 V, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_1 \quad = (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}(pV)}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-2}\dfrac{d^{n-2}(p_1 V)}{dx^{n-2}} + \ldots \\ \qquad\qquad + (-1)\dfrac{d(p_{n-2}V)}{dx} + p_{n-1}V, \end{array} \right.$$

où V et p sont des fonctions qui ont des dérivées parfaitement définies jusqu'à l'ordre $n-1$ pour $x = a$ et $x = b$ et où les fonctions $p_k(k = 1, 2, \ldots, n = 2)$ ont pour les mêmes valeurs de x des dérivées parfaitement définies respectivement jusqu'à l'ordre $n - k - 1$, il vient

$$T'_k(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{i=n} P_{ki} V^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} Q_{ki} V^{(i-1)}(b) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

où P_{ki} et Q_{ki} sont des coefficients parfaitement déterminés qui dépendent des quantités $\alpha'_{ki}, \beta'_{ki}$ et des valeurs des fonctions $p, p_1, \ldots, p_{n-1}$ et de leurs dérivées de divers ordres pour $x = a$ et pour $x = b$. En introduisant la désignation

$$C'_k(f) = \sum_{i=1}^{i=n} P_{ki} f^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} Q_{ki} f^{(i-1)}(b) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

nous convenons de dire que les conditions de la forme

$$C'_k(f) = \sum_{i=1}^{i=n} P_{ki} f^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} Q_{ki} f^{(i-1)}(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

dont nous désignerons l'ensemble par C', sont *adjointes* par rapport aux conditions C. Pour chaque couple de fonctions U et V qui satisfont respectivement aux conditions C et C' le second membre $\int_{x=a}^{x=b} P(U, V)$ de la formule (35) s'annule identiquement. En effet, conformément à la formule (35), on a

$$\int_{x=a}^{x=b} P(U, V) = \int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} U_i V_i,$$

où $U_1 = U$, $U_i = U^{(i-1)}(i = 2, 3, \ldots, n)$ et où les fonctions V_i sont définies par les formules (37). Les fonctions U et V satisfaisant respectivement aux conditions C et C', on a identiquement

$$\left. \begin{array}{l} C_k(U) = T_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) = 0 \\ C'_k(V) = T'_k(V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où suit que les fonctions U_i et $V_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfont respectivement à deux ensembles de conditions T et T' mutuellement adjointes. On a donc

$$\int_{x=a}^{x=b} P(U, V) = \int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} U_i V_i = 0.$$

14. Une fonction $u = \psi(x)$ qui satisfait à l'équation (33) se nomme *une solution distinguée de l'équation* (33) *par rapport aux conditions* C, si cette fonction ne se réduit pas identiquement à zéro et si elle admet dans l'intervalle (a, b) des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. Pour que l'équation (33) admette par rapport aux conditions C une solution distinguée, il faut et il suffit que le déterminant de cette équation par rapport aux conditions C s'annule [1].

---

[1] W. WESTFALL, *loc. cit.*, § 7.

Soient

$$L(u) = pu^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u$$

une expression différentielle, où les fonctions p et $p_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ satisfont aux restrictions du n° **11** ([1]), et

$$M(v) = (-1)^n \frac{d^n(pv)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(pv)}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1) \frac{d(p_{n-1} v)}{dx} + p_n v$$

l'expression adjointe correspondante. En désignant le déterminant de l'équation $L(u) = 0$ par rapport aux conditions C et le déterminant de l'équation $M(v) = 0$ par rapport aux conditions C' respectivement par D_C et $D'_{C'}$, nous nous proposons de démontrer les propositions suivantes :

a. Si l'expression différentielle $L(u)$ *a une fonction* $G^C(x, \xi)$ *de Green par rapport aux conditions* C, *l'équation* $M(v) = 0$ *n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions adjointes* C'.

b. Si l'expression adjointe $M(v)$ *a une fonction* $H^{C'}(x, \xi)$ *de Green par rapport aux conditions adjointes* C', *l'équation* $L(u) = 0$ *n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions* C.

c. Le déterminant D_C *de l'équation* $L(u) = 0$ *par rapport aux conditions* C *et le déterminant* $D'_{C'}$ *de l'équation* $M(v) = 0$ *par rapport aux conditions* C' *sont simultanément égaux à zéro ou différents de zéro.*

d. Pour que l'expression $L(u)$ *ait une fonction* $G^C(x, \xi)$ *de Green par rapport aux conditions* C, *il faut et il suffit que le déterminant* D_C *de l'équation* $L(u) = 0$ *par rapport aux conditions* C *soit différent de zéro.*

e. Si l'expression $L(u)$ *a une fonction de Green* $G^C(x, \xi)$ *par rapport aux conditions* C, *l'expression adjointe* $M(v)$ *a une fonction de Green* $H^{C'}(x, \xi)$ *par rapport aux conditions* C' *qui est liée avec la fonction* $G^C(x, \xi)$ *au moyen de la relation*

$$H^{C'}(x, \xi) = G^C(\xi, x).$$

Soient $\chi(x)$ une fonction qui, en satisfaisant à l'équation $M(v) = 0$ et

---

([1]) Nous ne considérerons dans la suite que des expressions différentielles linéaires qui satisfassent à ces restrictions.

aux conditions C′, admette, dans l'intervalle (a, b), n dérivées continues successives, et ξ un nombre quelconque, pris dans le même intervalle. En posant dans la formule (35)

$$u = G^{C}(x, \xi), \qquad v = \chi(x),$$

écrivons-la deux fois respectivement pour les intervalles $(a, \xi - \varepsilon)$, $(\xi + \varepsilon, b)$, ajoutons les résultats et faisons tendre ε vers zéro. Les fonctions u et v satisfont dans le cas considéré respectivement aux conditions C et C′, d'où suit l'identité

$$\int_{x=a}^{x=b} P(u, v) = 0.$$

On aura donc, en tenant compte de la discontinuité du terme $u^{(n-1)}pv$ pour $x = \xi$ dans le second membre,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \{\chi(x)\, L[G(x, \xi)] - G(x, \xi)\, M[\chi(x)]\}\, dx \\ &= -\lim_{\varepsilon = 0} \int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \frac{d^{n-1} G^{C}(x, \xi)}{dx^{n-1}} p(x) \chi(x) = \chi(\xi), \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème a. On démontre le théorème b d'une manière analogue, en posant dans la formule (35)

$$u = \psi(x), \qquad v = H^{C'}(x, \xi),$$

où $\psi(x)$ est une fonction qui, en satisfaisant à l'équation $L(u) = 0$ et aux conditions C, admet, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues.

Si le déterminant D_C est différent de zéro, l'expression $L(u)$ a, conformément à la formule (34), une fonction de Green $G^{C}(x, \xi)$. L'équation $M(v) = 0$ n'a donc pas, d'après le théorème a, de solution distinguée par rapport aux conditions adjointes C′, d'où suit que le déterminant $D'_{C'}$ n'est pas nul.

De même, l'hypothèse $D'_{C'} \neq 0$ entraîne $D_C \neq 0$, ce qui démontre le théorème c.

Si l'expression $L(u)$ a une fonction $G^{C}(x, \xi)$ de Green, l'équation $M(v) = 0$ n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions C′. Le déterminant $D'_{C'}$ est donc différent de zéro et, en vertu du théorème c, le déterminant D_C est aussi différent de zéro. Réciproquement, si le déterminant D_C est différent de zéro, l'expression $L(u)$ a la fonction $G^C(x, \xi)$ de Green, comme le montre la formule (34), d'où suit le théorème *d*.

Si l'expression $L(u)$ a une fonction $G^C(x, \xi)$ de Green, le déterminant D_C est différent de zéro et, par suite, le déterminant D'_C l'est aussi, d'où suit l'existence de la fonction de Green $H^{C'}(x, \xi)$ de l'expression $M(v)$ par rapport aux conditions C'. Posons dans la formule (35)

$$u = G^C(x, \xi), \qquad v = H^{C'}(x, \eta),$$

ξ et η étant deux nombres quelconques, pris dans l'intervalle (a, b). Les fonctions u et v satisfont dans le cas considéré respectivement aux conditions C et C', d'où suit l'identité

$$\int_{x=a}^{x=b} P(u, v) = 0.$$

On aura donc, en remarquant que la fonction $H^{C'}(x, \eta)$ est égale à la fonction de Green de l'équation $M(v) = 0$ par rapport aux conditions C', divisée par $(-1)^n p(x)$,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b \{ H^{C'}(x, \eta) L[G^C(x, \xi)] - G^C(x, \xi) M[H^{C'}(x, \eta)] \} dx \\
&= -\lim_{\varepsilon=0} \int_{x=\eta-\varepsilon}^{x=\eta+\varepsilon} (-1)^{n-1} G^C(x, \xi)\, p(x) \frac{d^{n-1} H^{C'}(x, \eta)}{dx^{n-1}} \\
&\quad -\lim_{\varepsilon=0} \int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} H^{C'}(x, \eta)\, p(x) \frac{d^{n-1} G^C(x, \xi)}{dx^{n-1}} \\
&= (-1)^{2n-1} G^C(\eta, \xi) + H^{C'}(\xi, \eta),
\end{aligned}$$

d'où suit

$$H^{C'}(\xi, \eta) = G^C(\eta, \xi)$$

ou

$$H^{C'}(x, \xi) = G^C(\xi, x) \quad (^1).$$

13. Soit $\varphi(\xi)$ une fonction continue. Les n dérivées successives de la fonction

$$f(x) = \int_a^b G^C(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

(1) M. Bôcher, *loc. cit.*

où $G^C(x, \xi)$ est une fonction de Green de l'expression $L(u)$ par rapport aux conditions C, s'expriment par les formules

$$(38)\quad \begin{cases} f^{(i)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{d^i G^C(x,\xi)}{dx^i}\varphi(\xi)\,d\xi & (i=1, 2, \ldots, n-1), \\ f^{(n)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{d^n G^C(x,\xi)}{dx^n}\varphi(\xi)\,d\xi - \frac{\varphi(x)}{p(x)}. \end{cases}$$

De même, n dérivées successives de la fonction

$$F(x) = \int_a^b H^{C'}(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int_a^b G^C(\xi, x)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

où $H^{C'}(x, \xi)$ est une fonction de Green de l'expression adjointe $M(v)$ par rapport aux conditions adjointes C', sont données par les formules

$$(39)\quad \begin{cases} F^{(i)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{d^i H^{C'}(x,\xi)}{dx^i}\varphi(\xi)\,d\xi & (i=1, 2, \ldots, n-1), \\ F^{(n)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{d^n H^{C'}(x,\xi)}{dx^n}\varphi(\xi)\,d\xi - (-1)^n\frac{\varphi(x)}{p(x)}. \end{cases}$$

On démontre les formules (38) en partant immédiatement de la définition de la fonction $G^C(x, \xi)$ de Green (¹); on peut aussi les obtenir en s'appuyant sur les formules (11) du n° **5** et sur les relations du n° **11** :

$$\frac{d^i G^C(x,\xi)}{dx^i} = \frac{d^i G^T_{n1}(x,\xi)}{dx^i}\frac{1}{p(\xi)} = \frac{G^T_{n,i+1}(x,\xi)}{p(\xi)} \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\frac{d^n G^C(x,\xi)}{dx^n} = \frac{d\,G^T_{nn}(x,\xi)}{dx}\frac{1}{p(\xi)}.$$

On démontre d'une manière analogue les formules (39), en ayant en vue que le coefficient de $v^{(n)}$ dans l'expression $M(v)$ est égal à $(-1)^n p(x)$.

16. Toujours en supposant le déterminant D_C différent de zéro, nous nous proposons de démontrer les propositions suivantes.

(¹) W. Westfall, *loc. cit.*, § 6.

a. L'équation linéaire non homogène

$$L(f) = -\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ *est une fonction continue, n'a qu'une seule solution par rapport à* f *qui, en satisfaisant aux conditions* C, *admette, dans l'intervalle* (a, b), n *dérivées successives continues. Cette solution est donnée par la formule* (¹)

$$f(x) = \int_a^b G^C(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{40}$$

Réciproquement, une équation intégrale (40) *n'a de solution continue par rapport à* $\varphi(\xi)$ *que si la fonction* $f(x)$, *en satisfaisant aux conditions* C, *a, dans l'intervalle* (a, b), n *dérivées successives continues. L'ensemble de ces conditions étant rempli, l'équation* (40) *n'a qu'une seule solution continue par rapport à* $\varphi(\xi)$, *qui est donnée par la formule*

$$\varphi(\xi) = -L[f(\xi)].$$

b. De même, l'équation linéaire non homogène

$$M(F) = -\varphi(x)$$

n'a qu'une seule solution par rapport à F *qui, en satisfaisant aux conditions adjointes* C', *admette, dans l'intervalle* (a, b), n *dérivées successives continues. Cette solution est donnée par la formule*

$$F(x) = \int_a^b G^C(\xi, x)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Réciproquement, cette dernière formule, regardée comme une équation intégrale, n'a de solution continue par rapport à $\varphi(\xi)$ *que si la fonction* $F(x)$, *en satisfaisant aux conditions* C', *admet, dans l'intervalle* (a, b), n *dérivées successives continues. L'ensemble de ces conditions étant rempli, on n'a qu'une seule solution continue par rapport à* $\varphi(\xi)$, *qui est donnée par la formule*

$$\varphi(\xi) = -M[F(\xi)].$$

(¹) M. Bôcher, *loc. cit.*

c. L'ensemble des valeurs du paramètre λ_m, pour lesquelles l'équation

$$L(\varphi_m) + \lambda_m \varphi_m = 0$$

a une solution distinguée φ_m par rapport aux conditions C, *tout de même que l'ensemble des valeurs du paramètre λ_m, pour lesquelles l'équation*

$$M(\psi_m) + \lambda_m \psi_m = 0$$

a une solution distinguée ψ_m par rapport aux conditions adjointes C′, *coïncide avec l'ensemble des autovaleurs du noyau $G^c(x, \xi)$. Les ensembles de solutions distinguées φ_m et ψ_m coïncident respectivement avec les ensembles des autofonctions en x et en ξ du même noyau $G^c(x, \xi)$.*

d. L'ensemble des valeurs du paramètre Λ_m, pour lesquelles le système

$$L(\Phi_m) + \Lambda_m \Psi_m = 0, \qquad M(\Psi_m) + \Lambda_m \Phi_m = 0$$

admet une solution distinguée, formée des fonctions Φ_m et Ψ_m qui satisfont respectivement aux conditions C *et aux conditions adjointes* C′, *coïncide avec l'ensemble des autovaleurs du noyau $G^c(x, \xi)$ correspondant aux autofonctions adjointes. Les ensembles de solutions distinguées Φ_m et Ψ_m coïncident respectivement avec les ensembles d'autofonctions adjointes en x et en ξ du même noyau $G^c(x, \xi)$.*

e. Chaque fonction $f(x)$ qui, en ayant n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b), satisfait de plus aux conditions C *est développable en une série absolument et uniformément convergente de la forme*

$$f(x) = \sum_m \Phi_m(x) \int_a^b f(\xi)\, \Phi_m(\xi)\, d\xi,$$

procédant suivant les autofonctions adjointes en x du noyau $G^c(x, \xi)$.

De même, chaque fonction F(x) *qui, en ayant n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b), satisfait de plus aux conditions adjointes* C′ *est développable en une série absolument et uni-*

formément convergente de la forme

$$F(x) = \sum_m \Psi_m(x) \int_a^b f(\xi) \Psi_m(\xi)\, d\xi,$$

procédant suivant les autofonctions adjointes en ξ *du noyau* $G^C(x, \xi)$.

On pourrait envisager ces théorèmes comme les corollaires des théorèmes correspondants des n^{os} **8, 9, 10,** en remplaçant l'équation

$$L(f) = -\varphi(x)$$

par le système

$$\frac{df}{dx} - f_2 = 0, \qquad \frac{df_2}{dx} - f_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df_{n-1}}{dx} - f_n = 0,$$

$$L(f) = p\frac{df_n}{dx} + p_1 f_n + \ldots + p_{n-1} f_2 + p_n f = -\varphi(x).$$

Mais une démonstration directe n'est pas moins simple. On obtient la première partie du théorème *a*, si l'on vérifie au moyen des formules (38) l'identité

$$L\left[\int_a^b G^C(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\right] = -\varphi(x),$$

en ayant en vue que la fonction $G^C(x, \xi)$ même satisfait aux conditions C et que la solution cherchée par rapport à $f(x)$, en vertu de l'hypothèse $D_C \neq 0$, est nécessairement unique. L'équation

$$L(u) = [-L(f)],$$

où $f(x)$ est une fonction qui a, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues et qui satisfait aux conditions C, admet une solution évidente $u = f(x)$, ayant la même propriété d'admettre n dérivées successives continues et de satisfaire aux conditions C. En exprimant une telle solution, qui est d'ailleurs unique, au moyen de la formule (40), on a

$$f(x) = \int_a^b G^C(x, \xi) \{-L[f(\xi)]\}\, d\xi,$$

d'où suit que la formule (40), considérée comme équation intégrale, est résolue en posant

$$\varphi(\xi) = -L[f(\xi)].$$

Cette solution est la seule possible. En effet, on déduit de (40), au moyen des formules (38),

$$L[f(x)] = -\varphi(x).$$

En tenant compte de l'identité

$$H^{C'}(x, \xi) = G^{C}(\xi, x),$$

on voit que le théorème *b* n'est qu'un cas spécial du théorème *a*. On démontre le théorème *c* en cherchant, au moyen de la formule (40), des solutions u, v des équations non homogènes

$$L(u) = -\lambda_m \varphi_m, \qquad M(v) = -\lambda_m \psi_m$$

qui admettent, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues et qui satisfassent respectivement aux conditions C et C', et en remarquant que ces solutions coïncident respectivement avec les solutions distinguées φ_m et ψ_m; pour achever la démonstration, il faut appliquer les réciproques des théorèmes *a*, *b* aux équations intégrales homogènes qui lient les autofonctions φ_m et ψ_m, l'autovaleur λ_m et le noyau $G^{C}(x, \xi)$. On démontre de même le théorème *d* en partant des équations non homogènes

$$L(u) = -\Lambda_m \Psi_m, \qquad M(v) = -\Lambda_m \Phi_m.$$

Le théorème *e* se déduit d'un théorème de M. Schmidt (¹), en remarquant qu'on peut toujours résoudre les équations intégrales

$$f(x) = \int_a^b G^{C}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad F(x) = \int_a^b G^{C}(\xi, x)\, \chi(\xi)\, d\xi$$

par rapport aux fonctions $\varphi(\xi)$, $\chi(\xi)$, si l'ensemble de conditions indiqué dans le texte du théorème *e* est respectivement rempli par les fonctions $f(x)$ et $F(x)$. Si la fonction de Green $G^{C}(x, \xi)$ est symétrique, les séries du théorème *e* se transforment en développements procédant suivant les autofonctions $\varphi_m(x)$ du noyau $G^{C}(x, \xi)$.

17. En supposant toujours que D_C soit différent de zéro, nous allons

(¹) E. Schmidt, *loc. cit.*

maintenant chercher les conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction de Green $G^C(x, \xi)$ de l'expression donnée $L(u)$, dont les coefficients p, p_k satisfont aux restrictions du n° **11**, soit symétrique. A cet effet, nous démontrerons une proposition auxiliaire suivante :

Si la fonction $G^C(x, \xi)$ *de Green de l'expression* $L(u)$ *par rapport aux conditions* C *est symétrique, les conditions* C *et les conditions* C′ *sont équivalentes, c'est-à-dire chaque fonction qui satisfait aux conditions* C *doit satisfaire aussi aux conditions* C′, *et réciproquement.*

En effet, soit $f(x)$ une fonction qui ait n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b) et qui satisfasse aux conditions C. D'après le théorème a du n° **16**, on peut présenter la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \int_a^b G^C(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

où $\varphi(\xi)$ est une fonction continue. On a donc aussi, en supposant que la fonction $G^C(x, \xi)$ soit symétrique,

$$f(x) = \int_a^b G^C(\xi, x)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

où la fonction $G^C(\xi, x)$, d'après le théorème e du n° **14**, satisfait aux conditions adjointes C′, d'où suit que la fonction $f(x)$ elle-même satisfait aux conditions C′. On démontre d'une manière analogue qu'une fonction $f(x)$ qui a n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b) et qui satisfait aux conditions C′ doit satisfaire aussi, dans l'hypothèse de la symétrie de la fonction $G^C(x, \xi)$, aux conditions C. Soit maintenant $f(x)$ une fonction quelconque qui satisfasse aux conditions C. En nous appuyant sur la formule interpolatrice de Cauchy, construisons un polynome $F(x)$ qui satisfasse aux équations

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F(a) = f(a), & F^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \\ F(b) = f(b), & F^{(i)}(b) = f^{(i)}(b) \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si la fonction $G^C(x, \xi)$ de Green est symétrique, la fonction $F(x$

ayant n dérivées successives continues et satisfaisant, en vertu des relations (41), aux conditions C, doit satisfaire aux conditions C′, d'où l'on déduit, en faisant de nouveau usage des formules (41), que la fonction $f(x)$ satisfait aussi aux conditions C′. On démontre de même que chaque fonction $f(x)$, satisfaisant aux conditions C′, satisfait aussi aux conditions C.

18. Théorème. — *Pour que la fonction* $G^C(x, \xi)$ *de Green de l'expression* $L(u)$ *par rapport aux conditions* C *soit symétrique, il faut et il suffit que l'expression* $L(u)$ *soit auto-adjointe* [1] *et que les conditions* C *soient* greeniennes [2], *c'est-à-dire telles que pour chaque couple de fonctions* $u = f$, $v = F$, *satisfaisant aux conditions* C, *le second membre* $\int_{x=a}^{x=b} P(f, F)$ *de la formule* (35) *s'annule identiquement.*

Considérons une suite de fonctions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ définies par les formules

$$f_i(x) = (x-a)^n (x-b)^n x^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Ces $n+1$ fonctions, étant des polynomes de diverses puissances, sont certainement linéairement indépendantes. Chacune des fonctions $f_i(x)$ satisfaisant aux équations

$$\begin{gathered} f_i(a) = 0, \quad f_i'(a) = 0, \quad f_i''(a), \quad \ldots, \quad f_i^{(n-1)}(a) = 0, \\ f_i(b) = 0, \quad f_i'(b) = 0, \quad f_i''(b), \quad \ldots, \quad f_i^{(n-1)}(b) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n+1) \end{gathered}$$

satisfait aussi aux conditions C. On peut donc, d'après le théorème a du n° **16**, présenter chaque fonction $f_i(x)$ sous la forme

$$(42) \qquad f_i(x) = \int_a^b G^C(x, \xi)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

---

(1) Nous dirons qu'une expression $L(u)$ est *auto-adjointe* ou *inversement auto-adjointe*, si elle satisfait respectivement à l'identité

$$L(u) = M(u) \qquad \text{ou} \qquad L(u) = -M(u),$$

$M(u)$ étant l'adjointe de $L(u)$.

(2) W. Westfall, *loc. cit.*, § 7.

où l'on a

$$L[f_i(x)] = -\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Si la fonction de Green $G^C(x, \xi)$ est symétrique, on déduit de la formule (42)

$$f_i(x) = \int_a^b G^C(\xi, x)\,\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

d'où suit, en vertu du théorème b du n° **16**,

$$M[f_i(x)] = -\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

On a donc les identités

$$L[f_i(x)] - M[f_i(x)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

d'où résulte que l'équation linéaire

$$L(u) - M(u) = 0,$$

de l'ordre n au plus, a $n+1$ solutions linéairement indépendantes. L'expression $L(u) - M(u)$ s'annule donc identiquement, d'où suit que l'expression $L(u)$ est auto-adjointe. Si la fonction $G^C(x, \xi)$ est symétrique, chaque fonction $F(x)$, satisfaisant aux conditions C, doit satisfaire aussi, d'après le théorème du n° **17**, aux conditions adjointes C'. On voit donc que chaque couple de fonctions $f(x)$ et $F(x)$ qui satisfont aux conditions C satisfont aussi respectivement aux conditions C et aux conditions adjointes C'. Le second membre de la formule (35) $\int_{x=a}^{x=b} P(f, F)$ s'annule donc identiquement pour ces deux fonctions, d'où suit que les conditions C sont *greeniennes*. Réciproquement, si l'expression $L(u)$ est auto-adjointe et si les conditions C sont *greeniennes*, la fonction de Green $G^C(x, \xi)$ est symétrique, comme l'a démontré M. Westfall, en faisant usage de la formule de Green (¹).

Au moyen de raisonnements analogues on démontre la proposition suivante :

Pour que la fonction de Green $G^C(x, \xi)$ soit gauche symétrique,

(¹) W. Westfall, *loc. cit.*, § 9.

il faut et il suffit que l'expression $L(u)$ *soit inversement auto-adjointe et que les conditions* C *soient* greeniennes (¹).

L'ordre d'une expression $L(u)$ auto-adjointe est toujours pair, d'où suit qu'une fonction $[G^C(x, \xi)]_{2m+1}$ de Green d'une expression différentielle linéaire $L_{2m+1}(u)$ d'un ordre impair $2m+1$ par rapport aux conditions C quelconques (avec une seule restriction de $D_C \neq 0$) n'est pas symétrique. De même, en posant dans les formules du n° **11** $n = 2m+1$, $p = 1$, on trouve une fonction

$$G^T_{2m+1,1}(x, \xi) = [G^C(x, \xi)]_{2m+1}$$

de Green avec deux indices différents qui n'est pas symétrique.

19. On sait que la forme générale d'une expression différentielle linéaire auto-adjointe est

$$L(u) = \frac{d^m}{dx^m}(pu^{(m)}) + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(p_1 u^{(m-1)}) + \ldots + \frac{d}{dx}(p_{m-1}u') + p_m u,$$

l'ordre n de l'expression étant toujours égal à un nombre pair $2m$. On peut démontrer qu'il y a en général

$$\frac{n(n-1)}{2} = m(2m-1)$$

relations nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients α_{ki}, β_{ki} des conditions C pour que ces conditions soient *greeniennes* par rapport à l'expression auto-adjointe $L(u)$ donnée. En effet, le second membre de la formule de Green est formé dans le cas considéré par l'ensemble de termes sous le signe de substitution qu'on trouve en intégrant par parties l'expression

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{k=m} v \frac{d^k(p_{m-k}u^{(k)})}{dx^k}\,dx \qquad (p_0 = p)$$

jusqu'à obtenir sous le signe d'intégration l'expression

$$\sum_{k=0}^{k=m} u \frac{d^k(p_{m-k}v^{(k)})}{dx^k}.$$

(¹) W. Westfall, *loc. cit.*, § 8. — Il reste à démontrer que ces conditions sont nécessaires pour que la fonction de Green soit gauche symétrique.

En intégrant par parties le terme général de la somme

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{k=m} v \frac{d^k(p_{m-k}u^{(k)})}{dx^k}dx,$$

on aura, en écrivant, pour abréger, q au lieu de p_{m-k},

$$\begin{aligned}\int_a^b v\frac{d^k}{dx^k}(qu^{(k)})\,dx \\ = \Big/_{x=a}^{x=b}\Bigg[&\sum_{i=0}^{i=k-1}(-1)^i v^{(i)}\frac{d^{k-i-1}}{dx^{k-i-1}}(qu^{(k)}) \\ &+\sum_{i=0}^{i=k-1}(-1)^{k+i}u^{(k-i-1)}\frac{d^i}{dx^i}(qv^{(k)})\Bigg]+\int_a^b u\frac{d^k}{dx^k}(qu^{(k)})\,dx,\end{aligned}$$

d'où suit, en écrivant la somme

$$\sum_{i=0}^{i=k-1}(-1)^{k+i}u^{(k-i-1)}\frac{d^i}{dx^i}(qv^{(k)})$$

dans l'ordre inverse,

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left[v\frac{d^k}{dx^k}(qu^{(k)})-u\frac{d^k}{dx^k}(qv^{(k)})\right]dx \\ &= \Big/_{x=a}^{x=b}\sum_{i=0}^{i=k-1}(-1)^i\left[v^{(i)}\frac{d^{(k-i-1)}}{dx^{k-i-1}}(qu^{(k)})-u^{(i)}\frac{d^{(k-i-1)}}{dx^{k-i-1}}(qv^{(k)})\right] \\ &= \Big/_{x=a}^{x=b}\sum_{\alpha,\beta}Q_{\alpha,\beta}(v^{(\alpha)}u^{(\beta)}-u^{(\alpha)}v^{(\beta)}),\end{aligned}$$

où les indices α, β parcourent certaines valeurs entières parfaitement définies, comprises entre 0 et $2k-1$, les coefficients $Q_{\alpha,\beta}$ étant des fonctions parfaitement déterminées, linéaires en $q(x)$ et en ses dérivées jusqu'à l'ordre $2k-1$. On voit donc que le second membre de la formule de Green a dans le cas considéré la forme

$$\Big/_{x=a}^{x=b}\sum_{r,s}Q_{r,s}(v^{(r)}u^{(s)}-v^{(s)}u^{(r)}), \tag{43}$$

où les $Q_{r,s}$ sont des fonctions connues, linéaires en $p, p_1, \ldots, p_{m-1}$ et en ses dérivées (de l'ordre $2m-1$ au plus), et où les indices r, s parcourent certaines combinaisons déterminées de deux à deux, formées des nombres $0, 1, \ldots, 2m-1$. Nous avons vu à la fin du n° **6** que les conditions aux limites C peuvent se mettre toujours sous la forme

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha^{(\nu_k-1)}(a)+\sum\limits_{i=\mu+1}^{i=n}\alpha_{\nu_k\nu_i}u^{(\nu_i-1)}(a)+\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\mu}\beta_{\nu_k\nu_\lambda}u^{(\nu_\lambda-1)}(b)=0 \\ \qquad (k=1,2,\ldots,\mu), \\ \alpha^{(\nu_s-1)}(a)+\sum\limits_{i=\mu+1}^{i=n}\alpha_{\nu_s\nu_i}u^{(\nu_i-1)}(a)+\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\mu}\beta_{\nu_s\nu_\lambda}u^{(\nu_\lambda-1)}(b)=0 \\ \qquad (s=\mu+1,\mu+2,\ldots,n), \end{array}\right.$$

l'ensemble d'indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu, \nu_{\mu+1}, \nu_{\mu+2}, \ldots, \nu_n$ formant une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$. Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions quelconques, satisfaisant aux conditions C, que nous écrirons sous la forme (44). En introduisant les désignations

$$\begin{array}{llll} u^{(\nu_k-1)}(a)=y_k & (k=1,2,\ldots,\mu), & u^{(\nu_s-1)}_{\nu_s}(b)=y_s & (s=\mu+1,\ldots,n), \\ u^{(\nu_\lambda-1)}(b)=y_{n+\lambda} & (\lambda=1,2,\ldots,\mu), & u^{(\nu_i-1)}(a)=y_{n+i} & (i=\mu+1,\ldots,n), \\ v^{(\nu_k-1)}(a)=z_k & (k=1,2,\ldots,\mu), & v^{(\nu_s-1)}(b)=z_s & (s=\mu+1,\ldots,n), \\ v^{(\nu_\lambda-1)}(b)=z_{n+\lambda} & (\lambda=1,2,\ldots,\mu), & v^{(\nu_i-1)}(a)=z_{n+i} & (i=\mu+1,\ldots,n), \end{array}$$

on aura, d'après les formules (44),

$$(45)\qquad y_k=\sum_{i=1}^{i=n}c_{ki}\,y_{n+i},\qquad z_k=\sum_{i=1}^{i=n}c_{ki}\,z_{n+i}\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

où les c_{ki} sont des coefficients donnés [il est clair que ces coefficients ne sont, au signe près, que les nombres α, β des formules (44) avec les indices ν convenablement choisis]. Conformément aux désignations adoptées, on peut écrire l'expression (43) sous la forme

$$(46)\qquad \sum_{\rho,\sigma}K_{\rho,\sigma}(z_\rho y_\sigma-z_\sigma y_\rho),$$

où les $K_{\rho,\sigma}$ sont certains coefficients parfaitement déterminés qui sont linéaires par rapport aux valeurs aux limites des fonctions p, p_k et de leurs dérivées, et où les indices ρ, σ prennent des valeurs entières, comprises entre 1 et $2n$, dans des combinaisons parfaitement déterminées. S'il y a dans la somme (46) des termes dont tous les deux indices ρ et σ surpassent n, nous les laissons sans aucune transformation. Si l'un des deux indices ρ, σ, par exemple ρ, surpasse n, on aura, d'après les formules (45),

$$\begin{aligned} K_{\rho,\sigma}(z_\rho y_\sigma - z_\sigma y_\rho) &= K_{\rho,\sigma}\left(z_\rho \sum_{i=1}^{i=n} c_{\sigma i} y_{n+1} - y_\rho \sum_{i=1}^{i=n} c_{\sigma i} z_{n+i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} K_{\rho,\sigma} c_{\sigma i}(z_\rho y_{n+1} - y_\rho z_{n+i}). \end{aligned}$$

Si l'on a $\rho < n$ et $\sigma < n$, les mêmes formules (45) nous donnent

$$\begin{aligned} K_{\rho,\sigma}(z_\rho y_\sigma - z_\sigma y_\rho) &= K_{\rho,\sigma}\left(\sum_{i=1}^{i=n} c_{\rho i} z_{n+i} \sum_{i=1}^{i=n} c_{\sigma i} y_{n+i} - \sum_{i=1}^{i=n} c_{\sigma i} z_{n+i} \sum_{i=1}^{i=n} c_{\rho i} y_{n+i} \right) \\ &= \sum_{\lambda,\mu} K_{\rho,\sigma}(c_{\rho\lambda} c_{\sigma\mu} - c_{\sigma\lambda} c_{\rho\mu})(z_{n+\lambda} y_{n+\mu} - z_{n+\mu} y_{n+\lambda}), \end{aligned}$$

où les indices λ, μ forment toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons possibles des nombres $1, 2, \ldots, n$ deux à deux. En transformant de cette manière l'expression (46), elle prend la forme

$$\sum_{\lambda,\mu} T_{\lambda,\mu}(z_{n+\lambda} y_{n+\mu} - z_{n+\mu} y_{n+\lambda}), \tag{47}$$

où les indices λ, μ forment aussi toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons possibles des nombres $1, 2, \ldots, n$ deux à deux, et où les facteurs $T_{\lambda,\mu}$ sont des fonctions linéaires des expressions $c_{\rho i}$, $c_{\sigma i}$ ou $c_{\rho\lambda} c_{\sigma\mu} - c_{\sigma\mu} c_{\rho\mu}$, les coefficients de ces expressions étant linéaires par rapport aux valeurs aux limites des fonctions p, p_k et de leurs dérivées. Pour que les conditions C soient *greeniennes*, il faut et il suffit dans le cas considéré que l'expression (47) s'annule identiquement, quelles que soient les valeurs des $z_{n+\lambda}$, $y_{n+\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$.

Les relations cherchées sont donc

$$T_{\lambda,\mu} = 0 \qquad (\lambda \neq \mu;\ \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

leur nombre étant égal, en général, à $\frac{n(n-1)}{2} = m(2m-1)$. On peut trouver la forme définitive de ces relations pour chaque type des conditions (44), ces types n'étant d'ailleurs qu'en nombre fini pour une valeur de $n = 2m$ donnée.

Exemple I. — Examinons par rapport à l'expression auto-adjointe

$$L_4(u) = \frac{d^2(pu'')}{dx^2} + \frac{d(qu')}{dx} + ru$$

du quatrième ordre les conditions aux limites de la forme

$$C_k(f) = f^{(k-1)}(a) + \beta_{k1} f(b) + \beta_{k2} f'(b) + \beta_{k3} f''(b) + \beta_{k4} f'''(b) = 0$$
$$(k = 1, 2, 3, 4);$$
$$f^{(0)}(a) = f(a).$$

On a dans ce cas

$$P(u, v) = p(vu''' - uv''' - v'u'' + u'v'') + p'(vu'' - uv'') + q(vu' - uv').$$

En faisant les calculs indiqués plus haut, on trouve les relations

$$T_{1,2} = q(b) + p(a)\left[\begin{pmatrix}21\\32\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\42\end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix}11\\32\end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix}11\\22\end{pmatrix} = 0,$$
$$T_{1,3} = p'(b) + p(a)\left[\begin{pmatrix}21\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\43\end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix}11\\33\end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix}11\\23\end{pmatrix} = 0,$$
$$T_{1,4} = p(b) + p(a)\left[\begin{pmatrix}21\\34\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\44\end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix}11\\34\end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix}11\\24\end{pmatrix} = 0,$$
$$T_{2,3} = p(b) - p(a)\left[\begin{pmatrix}22\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\43\end{pmatrix}\right] + p'(a)\begin{pmatrix}12\\33\end{pmatrix} + q(a)\begin{pmatrix}12\\23\end{pmatrix} = 0,$$
$$T_{2,4} = \qquad p(a)\left[\begin{pmatrix}22\\34\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\44\end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix}12\\24\end{pmatrix} = 0,$$
$$T_{3,4} = \qquad p(a)\left[\begin{pmatrix}23\\34\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}13\\44\end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix}13\\34\end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix}13\\24\end{pmatrix} = 0,$$

où les symboles $\begin{pmatrix}i & k\\ \nu & \mu\end{pmatrix}$ désignent les déterminants du second ordre, formés par l'intersection des $i^{\text{ième}}$ et $\nu^{\text{ième}}$ ligne avec les $k^{\text{ième}}$ et $\mu^{\text{ième}}$ colonnes du Tableau

$$\begin{matrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34}\\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44}\end{matrix}$$

Nous avons ainsi trouvé six relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients des conditions C de la forme considérée, pour que ces conditions soient *greeniennes* par rapport à l'expression auto-adjointe donnée $L_4(u)$ du quatrième ordre ou, ce qui est la même chose, pour que la fonction de Green $G^C(x, \xi)$ correspondante (dans l'hypothèse de $D_C \neq 0$) soit symétrique (¹).

Exemple II. — Considérons maintenant par rapport à l'expression auto-adjointe

$$L_2(u) = \frac{d}{dx}(pu') + qu$$

du second ordre les conditions C linéaires homogènes d'une forme générale

$$C_1(f) = t_1 f(a) + t_2 f'(a) + t_3 f(b) + t_4 f'(b) = 0,$$
$$C_2(f) = \tau_1 f(a) + \tau_2 f'(a) + \tau_3 f(b) + \tau_4 f'(b) = 0,$$

où $t_i, \tau_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sont des constantes données (nous remplaçons les coefficients α_{ki}, β_{ki}, pour simplifier les notations, par t_i, τ_i; de plus,

---

(¹) On peut trouver sans peine des cas où ces relations sont effectivement satisfaites. Par exemple, en posant

$$\beta_{ki} = 0$$

si l'on a

$$K \neq i,$$

ces relations se réduisent aux quatre suivantes :

$$q(b) - q(a)\beta_{11}\beta_{22} = 0, \qquad p'(b) - p'(a)\beta_{11}\beta_{33} = 0,$$
$$p(b) - p(a)\beta_{11}\beta_{44} = 0, \qquad p(b) - p(a)\beta_{22}\beta_{33} = 0.$$

On y satisfera toujours par des valeurs réelles des β_{ii}, si les produits $p(a)p'(b)q(b)$ et $p(b)p'(a)q(a)$ sont simultanément positifs ou négatifs. Si l'on a

$$p(a) = p(b), \qquad p'(a) = p'(b), \qquad q(a) = q(b),$$

on satisfait aux quatre relations, indiquées plus haut, en posant

$$\beta_{ii} = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ce cas a été considéré par A. Myller dans son travail (*Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen,* inaugural Dissertation, Göttingen, 1906).

nous supposons, comme toujours, que les conditions C_1 et C_2 sont indépendantes). Dans le cas considéré on a

$$P(u, v) = p(vu' - uv').$$

En posant, pour abréger,

$$t_i\tau_k - t_k\tau_i = \overline{ik} \qquad (i \neq k;\ i = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, 3, 4),$$

considérons deux fonctions u et v qui satisfassent aux conditions C_1, C_2. On aura

$$(48)\quad \begin{cases} t_1 u(a) + t_2 u'(a) = -t_3 u(b) - t_4 u'(b), & t_1 v(a) + t_2 v'(a) = -t_3 v(b) - t_4 v'(b), \\ \tau_1 u(a) + \tau_2 u'(a) = -\tau_3 u(b) - \tau_4 u'(b), & \tau_1 v(a) + \tau_2 v'(a) = -\tau_3 v(b) - \tau_4 v'(b). \end{cases}$$

Si le déterminant $\overline{12} = t_1\tau_2 - t_2\tau_1$ est différent de zéro, on a, en résolvant les équations (48) par rapport à $u(a)$, $u'(a)$, $v(a)$, $v'(a)$ et en substituant les valeurs trouvées dans l'expression $\int_{x=a}^{x=b} p(vu' - uv')$,

$$\int_{x=a}^{x=b} P(u, v) = \int_{x=a}^{x=b} p(vu' - uv') = \frac{\begin{vmatrix} v(b) & u(b) \\ v'(b) & u'(b) \end{vmatrix}}{\overline{12}} [\overline{12}\,p(b) - \overline{34}\,p(a)].$$

Dans le cas de $\overline{12} \neq 0$, les quantités $u(b)$, $u'(b)$, $v(b)$, $v'(b)$ peuvent prendre dans les formules (48) des valeurs tout à fait arbitraires [par exemple, $v(b) = u'(b) = 1$, $u(b) = v'(b) = 0$], d'où suit que dans ce cas, pour que les conditions C_1, C_2 soient *greeniennes* par rapport à l'expression $L_2(u)$, il faut et il suffit que les coefficients t_i, τ_i de ces conditions satisfassent à la relation

$$(49)\quad \overline{12}\,p(b) - \overline{34}\,p(a) = (t_1\tau_2 - t_2\tau_1)p(b) - (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)p(a) = 0.$$

On trouve le même résultat dans le cas de $\overline{34} \neq 0$. Si l'on a $\overline{12} = \overline{34} = 0$, la relation est remplie et les conditions C_1, C_2 sont aussi *greeniennes*. En effet, en tenant compte de l'équation $\overline{12} = 0$, le système (48) nous donne

$$(50)\quad \begin{cases} \overline{32}\,u(b) + \overline{42}\,u'(b) = 0, & \overline{13}\,u(b) + \overline{14}\,u'(b) = 0, \\ \overline{32}\,v(b) + \overline{42}\,v'(b) = 0, & \overline{13}\,v(b) + \overline{14}\,v'(b) = 0. \end{cases}$$

Le déterminant $v(b)u'(b) - u(b)v'(b)$ des systèmes (50) doit s'annuler. En effet, si l'on a

$$v(b)\,u'(b) - u(b)\,v'(b) \neq 0,$$

les équations (50) nous donnent

$$\overline{32} = \overline{42} = \overline{13} = \overline{14} = 0,$$

et, de plus,

$$\overline{12} = \overline{34} = 0.$$

Donc tous les déterminants de la matrice

$$\begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 \end{matrix}$$

du second ordre s'annulent et les conditions C_1, C_2 ne sont pas indépendantes. On démontre de même, en s'appuyant sur l'équation $\overline{34} = 0$, l'égalité

$$v(a)\,u'(a) - u(a)\,v'(a) = 0,$$

d'où suit

$$\int_{x=a}^{x=b} p(vu' - uv') = 0.$$

Nous avons donc démontré les propositions suivantes :

a. Pour que les conditions aux limites C_1, C_2 *soient* greeniennes *par rapport à l'expression auto-adjointe du second ordre donnée* $L_2(u)$, *il faut et il suffit que les coefficients de ces conditions remplissent la relation* (49).

b. Pour que l'expression $L_2(u)$ *du second ordre ait une fonction* $G^C(x, \xi)$ *de Green par rapport aux conditions* C_1, C_2 *symétriques, il faut et il suffit (dans l'hypothèse de* $D_C \neq 0$) *que l'expression* $L_2(u)$ *soit auto-adjointe et que les coefficients des conditions* C_1, C_2 *satisfassent à la relation* (49).

20. Il n'est pas sans intérêt de voir qu'on peut retrouver la relation (49) immédiatement en partant de l'expression de la fonction de Green, construite pour l'expression auto-adjointe $L_2(u)$ du second ordre par rapport aux conditions C_1, C_2 au moyen de la formule (34) du n° **11**. En écrivant dans ce cas, pour abréger, D au lieu de D_C et en conservant, du reste, les notations des n^{os} **3** et **11**, on aura

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u'_1 \\ u_2 & u'_2 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} C_1(u_1) & C_1(u_2) \\ C_2(u_1) & C_2(u_2) \end{vmatrix},$$

$$w_{12}(x) = -\frac{u_2(x)}{\Delta(x)}, \qquad w_{22}(x) = \frac{u_1(x)}{\Delta(x)},$$

$$v_1(x) = -\frac{u_2(x)}{p(x)\Delta(x)} = -\frac{u_2(x)}{\delta}, \qquad v_2(x) = \frac{u_1(x)}{\delta},$$

où δ, suivant la propriété connue de l'équation auto-adjointe $L_2(u) = 0$, est une constante.

On a donc

$$G^C(x,\xi) = \frac{[D_1(b2)\,u_1(\xi) - D_1(b1)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) + [D_2(b2)\,u_1(\xi) - D_2(b1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x)}{D\delta}$$
$$(x \leqq \xi),$$

$$G^C(x,\xi) = \frac{[-D_1(a2)\,u_1(\xi) + D_1(a1)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) + [-D_2(a2)\,u_1(\xi) + D_2(a1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x)}{D\delta}$$
$$(x \geqq \xi),$$

d'où

$$G^C(\xi,x) = \frac{[-D_1(a2)\,u_1(\xi) - D_2(a2)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) + [D_1(a1)\,u_1(\xi) + D_2(a1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x)}{D\delta}$$
$$(x \leqq \xi),$$

$$G^C(\xi,x) = \frac{[D_1(b2)\,u_1(\xi) + D_2(b2)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) + [-D_1(b1)\,u_1(\xi) - D_2(b1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x)}{D\delta}$$
$$(x \geqq \xi).$$

Pour que la condition de symétrie

$$G^C(x,\xi) = G^C(\xi,x)$$

soit remplie, il faut et il suffit qu'on ait pour des valeurs arbitraires de x et ξ (ces valeurs ne sont restreintes que par les inégalités respectives $x \leqq \xi$, $x \geqq \xi$), prises dans l'intervalle (a, b), les identités

$$\begin{aligned}
&[D_1(b2)\,u_1(\xi) - D_1(b1)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) \\
&\quad + [\;\;D_2(b2)\,u_1(\xi) - D_2(b1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x) \\
&\quad = \;\; [-D_1(a2)\,u_1(\xi) - D_2(a2)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) \\
&\quad + [\;\;D_1(a1)\,u_1(\xi) + D_2(a1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[-D_1(a2)\,u_1(\xi) + D_1(a1)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) \\
&\quad + [-D_2(a2)\,u_1(\xi) + D_2(a1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x) \\
&\quad = \;\; [\;\;D_1(b2)\,u_1(\xi) + D_2(b2)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) \\
&\quad + [-D_1(b1)\,u_1(\xi) - D_2(b1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x).
\end{aligned}$$

En vertu de l'indépendance linéaire des intégrales $u_1(x)$ et $u_2(x)$ de l'équation $L_2(u) = 0$, ces identités ne sont possibles que si l'on a

$$\begin{aligned} D_1(b2) &= -D_1(a2), & -D_2(b1) &= D_2(a1), \\ D_1(b1) &= D_2(a2), & D_2(b2) &= D_1(a1). \end{aligned}$$

De ces quatre relations les deux premières sont satisfaites identiquement, et les deux dernières sont équivalentes; en effet, on obtient l'une d'elles en retranchant l'autre de l'identité $D = D$. Il ne reste donc qu'une relation nécessaire et suffisante

$$D_2(a2) = D_1(b1).$$

En faisant les calculs dans les deux membres, on trouve successivement

$$\begin{vmatrix} C_{a1}(u_1) + C_{b1}(u_1) & C_{a1}(u_2) \\ C_{a2}(u_1) + C_{b2}(u_1) & C_{a2}(u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{b1}(u_1) & C_{a1}(u_2) + C_{b1}(u_2) \\ C_{b2}(u_1) & C_{a2}(u_2) + C_{b2}(u_2) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} C_{b1}(u_1) & C_{b1}(u_2) \\ C_{b2}(u_1) & C_{b2}(u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{a1}(u_1) & C_{a1}(u_2) \\ C_{a2}(u_1) & C_{a2}(u_2) \end{vmatrix},$$

$$(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\,\Delta(a) = (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)\,\Delta(b)$$

ou, en vertu de l'identité $p(a)\,\Delta(a) = p(b)\,\Delta(b) = \delta$,

$$(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\,p(b) - (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)\,p(a) = 0,$$

ce qui coïncide avec la relation (49).

21. Jusqu'ici nous avons étudié les propriétés de la fonction de Green $G^C(x, \xi)$, en supposant que le déterminant D_C (resp. D) est différent de zéro. Nous nous proposons de démontrer qu'on peut toujours construire, dans le cas où le déterminant D de l'expression autoadjointe $L_2(u)$ du second ordre par rapport aux conditions C_1, C_2 s'annule, une fonction de Green correspondante *généralisée* (1), si ces conditions sont *greeniennes* ou, ce qui est la même chose, si l'équation (49) est remplie.

(1) D. Hilbert, *loc. cit., Greensche Function in erweitertem sinne,* p. 219-238.

En effet, si le déterminant D s'annule, l'équation

$$L_2(u) = 0$$

a, par rapport aux conditions C_1, C_2, une solution distinguée $\psi_0(x)$. Supposons d'abord que les intégrales de l'équation

$$L_2(u) = 0$$

ne satisfassent pas toutes aux conditions C_1, C_2. Prenons dans ce cas pour le système fondamental l'intégrale $\psi_0(x)$ et une autre intégrale quelconque linéairement indépendante $u_0(x)$ de l'équation

$$L_2(u) = 0,$$

et construisons une solution particulière $w(x)$ de l'équation

$$L_2(u) = p(\xi)\,\psi_0(\xi)\,\psi_0(x). \tag{51}$$

En posant

$$w(x) = \mu(x)\,\psi(x) + \nu(x)\,u_0(x),$$

en appliquant la méthode de variation des constantes et en tenant compte des relations

$$p(x)\,\Delta(x) = p(\xi)\,\Delta(\xi) = \delta,$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{d\mu(x)}{dx} &= -\frac{p(\xi)\,\psi_0(\xi)\,\psi_0(x)\,u_0(x)}{p(x)\,\Delta(x)} \\ &= -\frac{p(\xi)\,\psi_0(\xi)\,\psi_0(x)\,u_0(x)}{p(\xi)\,\Delta(\xi)} = -\frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_0(x)\,u_0(x), \\ \frac{d\nu}{dx} &= \frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}[\psi_0(x)]^2, \end{aligned}$$

d'où vient, en prenant $x = a$ pour la limite inférieure d'intégration,

$$w(x) = -\frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}\left\{\psi_0(x)\int_a^x \psi_0(x)\,u_0(x)\,dx - u_0(x)\int_a^x [\psi_0(x)]^2\,dx\right\}.$$

En introduisant la désignation

$$\int_a^b \psi_0(x)\,u_0(x)\,dx = I,$$

et en supposant, pour simplifier les calculs, que la fonction $\psi_0(x)$ satisfasse à la relation

$$\int_a^b [\psi_0(x)]^2\, dx = 1,$$

ce qu'on peut toujours atteindre, en multipliant $\psi_0(x)$ par un facteur convenable, on aura

$$w(a) = 0, \qquad w(b) = -\frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}[\psi_0(b)\mathrm{I} - u_0(b)],$$

$$w'(a) = 0, \qquad w'(b) = -\frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}[\psi'_0(b)\mathrm{I} - u'_0(b)].$$

Construisons maintenant pour l'équation (51) une solution *principale* $\gamma(x, \xi)$, c'est-à-dire une solution qui admette dans les intervalles (a, ξ) et (ξ, b) deux dérivées successives continues et qui satisfasse de plus à la condition

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\int^{x=\xi+\varepsilon}\frac{d\gamma(x,\xi)}{dx} - \int^{x=\xi-\varepsilon}\frac{d\gamma(x,\xi)}{dx}\right] = -1.$$

L'intégrale générale de l'équation (51) est

$$w(x) + u(x),$$

où $u(x)$ est l'intégrale générale de l'équation homogène

$$\mathrm{L}_2(u) = 0.$$

On trouve donc, en construisant d'abord une solution principale de l'équation

$$\mathrm{L}_2(u) = 0$$

au moyen de formules analogues à celles du n° **2**, que la solution principale $\gamma(x, \xi)$ s'exprime par les formules

$$\gamma(x,\xi) = (m_1 + l_1)\psi_0(x) + (m_2 + l_2)u_0(x) + w(x) \qquad (x \leqq \xi),$$

$$\gamma(x,\xi) = \qquad m_1\psi_0(x) + \qquad m_2 u_0(x) + w(x) \qquad (x \geqq \xi),$$

où

$$l_1 = -\frac{u_0(\xi)}{\Delta(\xi)}, \qquad l_2 = \frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)},$$

et où m_1 et m_2 sont des quantités arbitraires, indépendantes de x. Cherchons maintenant à déterminer les coefficients m_1, m_2 de manière que la solution principale $\gamma(x, \xi)$ satisfasse aux conditions C_1, C_2. En remarquant que la fonction $\psi_0(x)$ satisfait, par hypothèse, aux relations

$$C_1(\psi_0) = 0, \qquad C_2(\psi_0) = 0,$$

on aura

$$\begin{aligned} C_1[\gamma(x)] &= m_1 C_1(\psi_0) + m_2 C_1(u_0) + l_1 C_{a1}(\psi_0) + C_1(w) \\ &= m_2 C_1(u_0) + l_1 C_{a1}(\psi_0) + l_2 C_{a1}(u_0) - l_2 C_{b1}(\psi_0) + l_2 C_{b1}(u_0) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(m_2 + l_2) C_1(u_0) + (l_1 + l_2 \mathrm{I}) C_{a1}(\psi_0) = 0 \tag{52}$$

et, d'une manière analogue,

$$(m_2 + l_2) C_2(u_0) + (l_1 + l_2 \mathrm{I}) C_{a2}(\psi_0) = 0. \tag{53}$$

Les équations (52) et (53) ne peuvent être compatibles que si la condition

$$(l_1 + l_2 \mathrm{I}) \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_1(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_2(u_0) \end{vmatrix} = 0$$

est remplie. En remarquant que, les conditions C_1, C_2 étant *greeniennes*, la formule (49) a lieu, on aura, en tenant compte des relations

$$C_1(\psi_0) = C_{a1}(\psi_0) + C_{b1}(\psi_0) = 0,$$

$$C_2(\psi_0) = C_{a2}(\psi_0) + C_{b2}(\psi_0) = 0, \qquad p(a)\Delta(a) = p(b)\Delta(b) = \delta,$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_1(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_2(u_0) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_{a1}(u_0) + C_{b1}(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_{a2}(u_0) + C_{b2}(u_0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_{a1}(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_{a2}(u_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_{b1}(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_{b2}(u_0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_{a1}(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_{a2}(u_0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} C_{b1}(\psi_0) & C_{b1}(u_0) \\ C_{b2}(\psi_0) & C_{b2}(u_0) \end{vmatrix} \\ &= (t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\Delta(a) - (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)\Delta(b) \\ &= \frac{\delta}{p(a)p(b)}[(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)p(b) - (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)p(a)] = 0. \end{aligned}$$

On voit donc que dans le cas de conditions C_1, C_2 *greeniennes* la condition de compatibilité des équations (52) et (53) est toujours satisfaite. D'autre part, suivant notre hypothèse que les intégrales de l'équation $L_2(u) = 0$ ne satisfont pas toutes aux conditions C_1, C_2, l'une des quantités $C_1(u_0)$, $C_2(u_0)$ doit être différente de zéro. En effet, dans le cas contraire, l'intégrale générale $k_1\psi_0 + k_2 u_0$ de l'équation $L_2(u) = 0$ (k_1 et k_2 étant des constantes arbitraires) satisferait aux mêmes conditions C_1, C_2. On voit donc que les équations (52) et (53) ont dans le cas considéré une solution parfaitement déterminée par rapport à m_2 (¹). On peut donc construire une solution principale de l'équation (51) qui satisfasse aux conditions C_1, C_2 et qui renferme de plus un paramètre arbitraire m_1 que nous déterminerons de manière à satisfaire à l'équation

$$\int_a^b \gamma(x, \xi)\psi_0(x)\,dx = 0,$$

ce qui est toujours possible. Désignant une telle solution principale de l'équation (51) qui satisfasse à l'ensemble de toutes les conditions indiquées plus haut par $\gamma_1(x, \xi)$ et en la divisant par $p(\xi)$, on obtient une fonction

$$G_1^C(x, \xi) = \frac{\gamma_1(x, \xi)}{p(\xi)}$$

qui est dite *fonction généralisée* de Green de l'expression $L_2(u)$ par rapport aux conditions C_1, C_2.

Supposons maintenant que toutes les intégrales de l'équation $L_2(u) = 0$ satisfassent aux conditions C_1, C_2. Dans ce cas la relation (49) est toujours remplie et les conditions C_1, C_2 sont, par suite, *greeniennes* par rapport à l'expression $L_2(u)$. En effet, en désignant par u_1, u_2 deux intégrales indépendantes de l'équation $L_2(u) = 0$, on a, en vertu des formules $C_1(u_2) = 0$, $C_2(u_2) = 0$,

$$\begin{vmatrix} C_{a1}(u_1) & C_1(u_2) \\ C_{a2}(u_1) & C_2(u_2) \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit, comme nous l'avons vu plus haut, au moyen des

(¹) L'expression

$$l_1 + l_2 I = \frac{-u_0(\xi) + I\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}$$

ne pouvant s'annuler identiquement, car les fonctions $u_0(\xi)$ et $\psi_0(\xi)$ sont linéairement indépendantes, on voit que la relation (49) est même nécessaire pour l'existence de la fonction de Green généralisée dans le cas considéré.

relations

$$C_1(u_1) = 0, \qquad C_2(u_1) = 0,$$

l'équation (49). Prenons pour le système fondamental deux solutions $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ de l'équation $L_2(u) = 0$ qui satisfassent aux conditions d'orthogonalité, c'est-à-dire aux relations

$$\int_a^b [\psi_1(x)]^2\,dx = 1, \qquad \int_a^b [\psi_2(x)]^2\,dx = 1, \qquad \int_a^b \psi_1(x)\,\psi_2(x)\,dx = 0.$$

On construit aisément ces solutions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, en partant d'un système fondamental quelconque [1]. Nous nous proposons maintenant de trouver une solution particulière $w(x)$ de l'équation

$$(54) \qquad L(u) = p(\xi)\,[\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)].$$

En posant

$$w(x) = \mu(x)\,\psi_1(x) + \nu(x)\,\psi_2(x),$$

en appliquant la méthode de variation des constantes et en tenant compte de la relation

$$p(x)\,\Delta(x) = p(\xi)\,\Delta(\xi),$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{d\mu(x)}{dx} &= -\frac{p(\xi)\,[\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_2(x)}{p(x)\,\Delta(x)} \\ &= -\frac{[\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_2(x)}{\Delta(\xi)}, \\ \frac{d\nu(x)}{dx} &= \frac{[\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_1(x)}{\Delta(\xi)}, \end{aligned}$$

d'où vient, en prenant $x = a$ pour la limite inférieure d'intégration,

$$\begin{aligned} w(x) = \frac{1}{\Delta(\xi)} \Big\{ & \psi_2(x) \int_a^x [\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_1(x)\,dx \\ & - \psi_1(x) \int_a^x [\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_2(x)\,dx \Big\}. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations d'orthogonalité auxquelles satisfont

---

(1) E. SCHMIDT, *loc. cit.*, § 3.

les fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, on trouve

$$\begin{aligned}
w(a) &= 0,\\
w'(a) &= 0,\\
w(b) &= -\frac{\psi_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_1(b) + \frac{\psi_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_2(b),\\
w'(b) &= -\frac{\psi_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_1'(b) + \frac{\psi_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_2'(b).
\end{aligned}$$

En désignant par $\gamma(x,\xi)$ une solution principale de l'équation (54), on aura

$$\begin{aligned}
\gamma(x,\xi) &= (m_1+l_1)\psi_1(x) + (m_2+l_2)\psi_2(x) + w(x) \qquad (x \leqq \xi),\\
\gamma(x,\xi) &= \quad m_1\psi_1(x) + \quad m_2\psi_2(x) + w(x) \qquad (x \geqq \xi),
\end{aligned}$$

où

$$l_1 = -\frac{\psi_2(\xi)}{\Delta(\xi)}, \qquad l_2 = \frac{\psi_1(\xi)}{\Delta(\xi)}$$

et où m_1, m_2 sont des quantités arbitraires. On démontre aisément que la solution principale $\gamma(x,\xi)$ satisfait aux conditions C_1, C_2, quelles que soient les valeurs des constantes m_1, m_2. En effet, en ayant en vue les relations

$$C_1(\psi_1) = C_2(\psi_1) = C_1(\psi_2) = C_2(\psi_2) = 0,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
C_1[\gamma(x,\xi)] &= m_1 C_1(\psi_1) + m_2 C_1(\psi_2) + l_1 C_{a1}(\psi_1)\\
&\qquad + l_2 C_{a1}(\psi_2) + \quad C_1(w)\\
&= l_1 C_{a1}(\psi_1) + l_2 C_{a1}(\psi_2) + l_1 C_{b1}(\psi_1)\\
&\qquad + l_2 C_{b1}(\psi_2) = l_1 C_1(\psi_1) + l_2 C_1(\psi_2) = 0
\end{aligned}$$

et, d'une manière analogue,

$$C_2[\gamma(x,\xi)] = 0.$$

Déterminant les quantités m_1, m_2 de manière à satisfaire aux équations

$$\int_a^b \gamma(x,\xi)\psi_1(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b \gamma(x,\xi)\psi_2(x)\,dx = 0,$$

ce qui est toujours possible, désignons maintenant la solution principale qui correspond à ces valeurs de m_1 et m_2 par $\gamma_2(x,\xi)$ et divisons-la par $p(\xi)$. On obtient ainsi une fonction

$$G_2^{\mathfrak{C}}(x, \xi) = \frac{\gamma_2(x, \xi)}{p(\xi)},$$

qu'on désigne de même comme *fonction de Green généralisée* de l'expression $L_2(u)$ auto-adjointe par rapport aux conditions C_1, C_2.

Exemple. — L'expression différentielle auto-adjointe

$$L_2(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \pi^2 u$$

n'a pas de fonction de Green dans le sens ordinaire du mot par rapport aux conditions

$$C_1(f) = f(1) - f(-1) = 0, \qquad C_2(f) = f'(1) - f'(-1) = 0,$$

parce que les deux solutions indépendantes $\sin \pi x$ et $\cos \pi x$ de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \pi^2 u = 0$$

satisfont à ces conditions. En faisant les calculs indiqués plus haut, on aura

$$G_2^{\mathfrak{C}}(x, \xi) = \frac{\sin \pi(x - \xi)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(x - \xi) \sin \pi(x - \xi) + \frac{1}{4\pi^2} \cos \pi(x - \xi)$$
$$(x \geqq \xi),$$

$$G_2^{\mathfrak{C}}(x, \xi) = \frac{\sin \pi(\xi - x)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(x - \xi) \sin \pi(x - \xi) + \frac{1}{4\pi^2} \cos \pi(x - \xi)$$
$$(x \leqq \xi).$$

Les fonctions de Green $G_1^{\mathfrak{C}}(x, \xi)$ et $G_2^{\mathfrak{C}}(x, \xi)$ généralisées que nous venons de construire sont symétriques, comme on le démontre aisément au moyen de la formule de Green [1]. Ces fonctions généralisées de Green jouent un rôle analogue à celui de la fonction de Green $G^{\mathfrak{C}}(x, \xi)$ dans le cas de D différent de zéro. En faisant usage des théo-

---

[1] D. HILBERT, *loc. cit.*, p. 220. — W. WESTFALL, *loc. cit.*, § 9.

rèmes correspondants de MM. Hilbert et Westfall (¹), on peut résumer cette analogie dans les propositions suivantes :

a. Soit $L_2(u)$ *une expression auto-adjointe du second ordre. L'ensemble des valeurs du paramètre* λ_m, *pour lesquelles l'équation*

$$L_2(\varphi_m) + \lambda_m \varphi_m = 0$$

admet par rapport à φ_m *une solution distinguée, satisfaisant aux conditions* greeniennes C_1, C_2 *données, coïncide, dans le cas où le déterminant* D *de l'expression* $L_2(u)$ *par rapport à ces conditions s'annule, avec l'ensemble des autovaleurs du noyau* $G_1^c(x, \xi)$ [*ou éventuellement* $G_2^c(x, \xi)$], *abstraction faite de la valeur* $\lambda_m = 0$. *L'ensemble des solutions distinguées correspondantes* φ_m (*en excluant de nouveau le cas de* $\lambda_m = 0$) *coïncide avec l'ensemble des autofonctions du noyau* $G_1^c(x, \xi)$ [*ou* $G_2^c(x, \xi)$].

b. Si l'équation $L_2(u) = 0$ *n'a qu'une seule intégrale (définie jusqu'à un facteur constant près) satisfaisant aux conditions* greeniennes C_1, C_2 *données, chaque fonction* $f(x)$ *qui, en satisfaisant aux mêmes conditions, a dans l'intervalle* (a, b) *deux dérivées successives continues est développable en une série absolument et uniformément convergente de la forme*

$$f(x) = \sum_\nu \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi,$$

où $\varphi_1(x)$ *est une solution distinguée (orthogonalement réglée) de l'équation* $L_2(u) = 0$ *par rapport aux conditions* C_1, C_2, *et où* $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... *forment l'ensemble des autofonctions de la fonction généralisée* $G_1^c(x, \xi)$ *de Green, prise comme le noyau d'une équation intégrale de la deuxième espèce.*

c. Si toutes les solutions de l'équation $L_2(u) = 0$ *satisfont aux conditions* C_1, C_2 greeniennes *données, chaque fonction* $f(x)$ *qui, en satisfaisant aux mêmes conditions, a dans l'intervalle* (a, b) *deux dérivées successives continues est développable en une série*

(¹) D. Hilbert, *loc. cit.*, p. 230. — W. Westfall, *loc. cit.*, § 9.

absolument et uniformément convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu} \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi,$$

où $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *forment un système orthogonal de solutions distinguées de l'équation* $L_2(u) = 0$ *par rapport aux conditions* C_1, C_2, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, ... *étant l'ensemble des autofonctions du noyau* $G_2^C(x, \xi)$.