

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL DIENES

Essai sur les singularités des fonctions analytiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 5 (1909), p. 327-413.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1909_6_5_327_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Essai sur les singularités des fonctions analytiques ;

PAR M. PAUL DIENES.



INTRODUCTION.

Une fonction analytique quelconque $f(x)$ est déterminée par la suite des coefficients

$$(1) \quad a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

d'une série de Taylor, sous la seule restriction que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ne soit pas infinie. Toutes les propriétés de la fonction $f(x)$ sont donc déterminées par cette suite ; en particulier, l'addition d'un polynôme n'ayant aucune influence sur les singularités, l'allure de la fonction au voisinage d'un point singulier est déterminée par les propriétés limites de la suite (1). Donc le problème général de la recherche des singularités est de trouver les relations entre les singularités et les propriétés limites de la suite (1) ou celles des expressions formées à l'aide de cette suite.

Le but principal de ce Mémoire est de donner quelques relations de cette sorte ne supposant aucune restriction à la suite des coefficients. Par ces recherches, nous tâchons de prendre une position intermédiaire convenable entre les deux points de vue opposés qui sont indiqués par M. Hadamard dans son Livre sur la série de Taylor (1). Ce sera l'objet du deuxième et du troisième Chapitre de ce Mémoire.

Mais, avant d'aborder cette étude générale des singularités, nous

(1) HADAMARD, *Série de Taylor* (*Scientia*).

nous occuperons, dans le premier Chapitre, des questions plus particulières se rattachant à la notion de l'ordre de la fonction sur son cercle de convergence, notion qui jouera un rôle important dans la suite.

Dans le paragraphe I, nous introduirons la notion donnée par M. Hadamard de l'ordre de la fonction en un point de son cercle de convergence et sur ce cercle entier. Cet ordre, qui était jusqu'ici peu employé, jouera un assez grand rôle dans nos recherches, de sorte que nous n'avons pas cru inutile d'insister sur cette notion. En particulier, nous donnerons un exemple pour démontrer définitivement que, même dans le cas des coefficients à croissance régulière, l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence peut fort bien surpasser le degré d'infinitude de la fonction sur ce cercle.

Il est donc indispensable d'envisager aussi l'influence des arguments des coefficients. Dans le paragraphe II, nous proposerons deux théorèmes pour donner une idée des bornes de cette influence. Le résultat nous montrera que si les coefficients, au moins à partir d'un certain rang, se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe, la fonction se comporte au point 1 de la même manière que la fonction formée par les modules des coefficients.

Supposons maintenant que cette condition ne soit pas remplie. Dans le paragraphe III nous donnerons des théorèmes qui décèlent certains cas où la distribution des arguments change vraiment l'allure de la fonction au voisinage de 1.

Dans le paragraphe IV nous nous mettrons encore dans la condition des arguments quelconques et nous chercherons des critères pour l'étude de la croissance de la fonction au point 1 dans ce cas très général.

Le deuxième Chapitre sera consacré entièrement à l'étude des points singuliers d'ordre négatif. Dans le paragraphe V nous résumerons rapidement les recherches dues pour la plus grande partie à M. Hadamard et à M. Borel sur la représentation des fonctions analytiques aux points réguliers situés sur le cercle de convergence et à l'intérieur du polygone de sommabilité.

A l'aide de ces résultats, dans le paragraphe VI, nous donnerons trois théorèmes pour représenter les valeurs (limites) de la fonction aux points singuliers d'ordre négatif du cercle de convergence.

Le paragraphe VIII poussera plus loin ces recherches en généralisant la notion du point singulier d'ordre négatif à l'étoile. La méthode de sommation exponentielle de M. Borel et le développement de M. Mittag-Leffler sous la forme donnée par M. Lindelöf permettront de résoudre complètement la représentation de ces valeurs (limites) de la fonction.

L'objet du troisième Chapitre est l'étude des pôles et des points critiques algébriques. En particulier, dans le paragraphe VIII, nous nous servirons des moyennes arithmétiques d'ordre fractionnaire pour compléter un théorème de M. Hadamard comme M. Fatou a complété un résultat analogue de M. Hadamard relatif aux points réguliers du cercle de convergence.

Le paragraphe IX nous donnera la solution complète du problème relatif aux pôles situés sur le cercle de convergence et sur le polygone de sommabilité, et cela à l'aide de la sommation exponentielle de M. Borel.

Dans le paragraphe X, nous généraliserons ce résultat par la méthode de sommation exponentielle généralisée de M. Borel et par celle de M. Hanni.

Enfin, dans le paragraphe XI, à l'aide du développement, dû à M. Mittag-Leffler, des fonctions analytiques par une suite de fonctions entières, nous établirons la relation générale qui existe entre les coefficients de la série de Taylor et les pôles situés à l'origine des demi-droites exclues de l'étoile.

Les deux derniers paragraphes s'occupent des points critiques algébriques situés sur le cercle de convergence, sur le polygone de sommabilité et sur la frontière des sommations exponentielles généralisées de M. Borel. En particulier, dans le paragraphe XII, nous donnerons quelques théorèmes sur la croissance des fonctions entières qui nous serviront dans le paragraphe suivant.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans des Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (20 février 1905, 21 décembre 1908 et 15 mars 1909).

CHAPITRE I.

DE L'ORDRE DE LA FONCTION SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE
ET DE L'INFLUENCE DES ARGUMENTS DES COEFFICIENTS
SUR LES SINGULARITÉS.§ I. — De l'ordre et du degré d'infinitude de la fonction
sur le cercle de convergence.

1. Bornons-nous, pour le moment, à l'étude de l'allure de la fonction sur le cercle de convergence en supposant, pour plus de simplicité, que le centre de ce cercle soit à l'origine et que son rayon soit égal à l'unité.

Le problème qui se pose en premier lieu est de représenter le plus simplement possible la valeur de la fonction dans les points réguliers du cercle de convergence. Par exemple, le théorème d'Abel donne une réponse partielle à cette question en disant que, lorsque la série elle-même converge en un point du cercle, la somme de la série représente bien la valeur de la fonction en ce point. Mais, malheureusement, un seul pôle d'ordre 1 situé sur le cercle de convergence rend absolument impossible la convergence de la série dans tous les points du cercle. D'autre part, une partie du cercle (ou le cercle entier même) peut être une ligne singulière sans troubler la convergence de la série dans les autres points du cercle.

Il est donc indispensable, pour les recherches méthodiques des singularités, de caractériser, de mesurer pour ainsi dire la singularité de la fonction considérée dans les points du cercle de convergence, et de caractériser de même la singularité de la fonction sur le cercle entier. C'est ce qui est fait par M. Hadamard dans la troisième Partie de sa Thèse⁽¹⁾ d'une manière fort heureuse en développant l'idée de M. Dar-

(¹) HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions*, etc. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1892).

boux (1), qui consiste à envisager l'allure des dérivées successives de la fonction sur le cercle de convergence. Comme cet ordre de la singularité en un point du cercle et sur le cercle entier sera d'une grande importance dans la suite, nous allons en donner rapidement la définition.

2. A cet effet, introduisons une notion préliminaire, voisine de la notion de fonction à variation bornée.

Nous dirons, avec M. Hadamard (2), qu'une fonction continue $f(x)$ de la variable réelle x est à écart fini dans l'intervalle (a, b) , lorsque les intégrales

$$n \int \cos nx f(x) dx \quad \text{et} \quad n \int \sin nx f(x) dx$$

prises entre des limites quelconques intérieures à l'intervalle (a, b) restent finies et moindres en valeur absolue qu'une quantité finie I lorsque n augmente indéfiniment. I est l'écart de la fonction dans cet intervalle. Par exemple, si la fonction $f(x)$ a une dérivée finie dans tous les points de l'intervalle, la fonction y est à écart fini.

Considérons maintenant, avec la fonction donnée

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

les fonctions

$$(3) \quad H^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha a_n x^n,$$

où α est un nombre réel quelconque. L'opération H^α est une légère modification de la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann.

M. Hadamard démontre que, lorsque la fonction $H^\alpha f(x)$ est finie, continue et à écart fini sur un arc (a, b) du cercle de convergence, il en est de même de la fonction $H^{\alpha'} f(x)$, α' étant inférieur à α . Donc, un arc déterminé (a, b) du cercle de convergence étant donné, il existe un nombre ω , pouvant varier d'ailleurs de $-\infty$ à $+\infty$, tel que, sur cet arc, la fonction $H^{-\omega-\varepsilon} f(x)$, pour $\varepsilon > 0$, est finie, continue et à écart

(1) DARBOUX, *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres* (*Journal de Mathématiques*, 1878).

(2) HADAMARD, *Thèse*, p. 65.

fini, mais qu'une de ces propriétés fait défaut à la fonction $\Pi^{-\omega+\varepsilon}f(x)$. Le nombre ω est l'ordre de la fonction $f(x)$ sur l'arc (a, b) .

On voit tout de suite que, l'arc (a', b') étant intérieur à l'arc (a, b) , l'ordre de la fonction sur cet arc ne peut surpasser l'ordre sur l'arc (a, b) . On peut donc définir l'ordre de la fonction en un point x du cercle de convergence comme la limite des ordres sur des arcs qui, tous, contiennent le point x et dont la longueur tend vers zéro. Ainsi, par exemple, l'ordre en un point régulier est nécessairement $-\infty$, car l'opération H^α n'introduit pas des points singuliers nouveaux (HADAMARD, *Thèse*, p. 71).

L'ordre sur le cercle entier Ω est, par définition, le plus grand ordre sur le cercle (dans le sens algébrique du mot), et, d'après un théorème fondamental de M. Hadamard (*Thèse*, p. 71),

$$(4) \quad \Omega = 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n|}{\log n}.$$

3. On voit aisément que, au point 1, l'ordre de la fonction

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha},$$

où α est un nombre réel quelconque, excepté 0 et les entiers négatifs, est égal à α . On est donc amené à croire qu'il y a une relation étroite entre l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence et le degré d'infinitude le plus élevé de la fonction sur le même cercle. La question a quelque importance, car l'ordre et le degré d'infinitude de la fonction sur le cercle sont deux notions fondamentales relatives à l'allure de la fonction au voisinage de ce cercle.

A cet égard, M. Borel (1) a donné un exemple pour montrer que, dans le cas où les modules des coefficients sont à croissance irrégulière, l'ordre peut fort bien surpasser le degré d'infinitude. Pour montrer la cause de cette divergence entre les deux nombres envisagés, faisons la remarque suivante.

Étant donnée la série convergente à termes positifs

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

(1) BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 77.

on peut toujours remplacer une infinité de c_n par $\frac{1}{\log n}$ de telle façon que la convergence ne soit pas troublée. Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c'_n$$

la nouvelle série ainsi obtenue.

Regardons maintenant la fonction

$$(5) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n x^n.$$

Son rayon de convergence est l'unité et, d'après (4), son ordre sur le cercle entier est aussi égal à 1, car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\log n}}{\log n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log n}{\log n} = 0.$$

D'autre part, le degré d'infinitude de $\varphi(x)$ est 0. En effet, la série (5) converge absolument dans tous les points du cercle de convergence; donc la fonction $\varphi(x)$, en valeur absolue, a une limite supérieure finie sur le cercle.

Ajoutons encore que, lorsque l'ordre est plus grand que l'unité, la fonction devient nécessairement infinie au voisinage d'un point du cercle de convergence.

4. Mais, ce qui est plus important, nous allons donner un exemple pour montrer que l'ordre peut être plus grand que le degré d'infinitude, même si les modules des coefficients sont à croissance régulière.

Considérons pour cela la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{E(\sqrt{n})} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

où $E(\sqrt{n})$ est la partie entière de \sqrt{n} . Les modules des coefficients sont évidemment à croissance régulière, et l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence de rayon 1 est l'unité.

Envisageons d'autre part le degré d'infinitude. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$s_n(x_0) = \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \dots + \alpha_n x_0^n.$$

On voit facilement que (1)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_n(1)}{\sqrt{n}} \right| = 1.$$

Nous allons démontrer qu'il en est de même pour un point quelconque $x_0 \neq 1$ du cercle de convergence, c'est-à-dire que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}} \right| < A,$$

où A est un nombre fini. Remarquons à cet effet que, si l'on pose

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sigma_n,$$

on a identiquement

$$\sum_{k=1}^n p_k q_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_n (q_k - q_{k+1}) + \sigma_n q_n.$$

Dans le cas actuel

$$q_k = \alpha_k, \quad p_k = x_0^k,$$

c'est-à-dire

$$s_n(x_0) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_0^k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_0 + x_0^2 + \dots + x_0^k) (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + (x_0 + x_0^2 + \dots + x_0^n) \alpha_n,$$

et ainsi

$$s_n(x_0) = \frac{x_0}{1-x_0} \left[\sum_{k=1}^{n-1} (1-x_0^k) (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + (1-x_0^n) \alpha_n \right].$$

(1) Voir, par exemple, VIVANTI, *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, 1906, p. 419.

Considérons maintenant le rapport

$$\frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}}.$$

On voit d'une part que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_0^n) \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} = 0,$$

et, pour les indices k qui ne sont pas de forme $r^2 - 1$, on a

$$\alpha_k - \alpha_{k+1} = 0.$$

D'autre part, lorsque

$$k = r^2 - 1,$$

nous avons

$$|\alpha_k - \alpha_{k+1}| = 2$$

et l'on a, dans le sigma, des termes de cette sorte en nombre \sqrt{n} , ce qui donne réellement

$$(6) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}} \right| < A.$$

Pour en tirer la conclusion cherchée, écrivons que

$$f(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_0^n x^n$$

et

$$\frac{f(x, x_0)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) x^n;$$

donc, pour toutes valeurs de x positif et inférieur à 1, l'inégalité (6) nous donne

$$\left| \frac{f(x, x_0)}{1-x} \right| < A \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n.$$

Mais on sait que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n = B \text{ (fini),}$$

d'où le résultat

$$\limsup_{x \rightarrow 1} \left| (1-x)^{\frac{1}{2}} f(x, x_0) \right| < AB.$$

Le degré d'infinitude de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{E(\sqrt{n})} x^n$$

ne surpasse donc pas $\frac{1}{2}$, tandis que son ordre est égal à 1. Mais ce qui nous paraît encore plus important, c'est le fait que la série formée par les modules des coefficients est

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

dont le degré d'infinitude sur le cercle de convergence est manifestement égal à l'unité. Donc les modules des coefficients ne déterminent pas complètement l'ordre de grandeur de la fonction sur le cercle de convergence, les arguments des coefficients entrent aussi en jeu. Il en ressort nettement que l'influence des arguments des coefficients sur l'allure de la fonction sur son cercle de convergence est beaucoup plus profonde qu'on n'aurait pu le croire. Un problème nouveau et général se pose donc : *Déterminer les bornes et les caractères de l'influence des arguments sur les propriétés générales de la fonction.*

§ II. — De l'influence des arguments des coefficients sur les singularités.

3. Loin d'avoir l'intention d'épuiser ce problème, nous allons, par quelques résultats qui s'y rattachent, illustrer plutôt la nature et la limite de cette influence. Pour cela, énonçons tout d'abord un lemme général qui déjà donnera lui-même une idée assez nette du mécanisme de l'influence en question.

Soit donnée une suite de nombres complexes

$$(7) \quad \rho_0 e^{i\alpha_0}, \rho_1 e^{i\alpha_1}, \dots, \rho_n e^{i\alpha_n}, \dots$$

avec la restriction que tous les termes se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$

du plan complexe (sommet à l'origine). Nous allons démontrer que

$$(8) \quad \liminf_{n=\infty} \frac{|\rho_0 e^{i\alpha_0} + \rho_1 e^{i\alpha_1} + \dots + \rho_n e^{i\alpha_n}|}{\rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_n} \geq f(\alpha),$$

où $f(\alpha)$ est un nombre positif, non nul, qui ne dépend pas des ρ_n .

Pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$, la démonstration est presque immédiate et l'on a, dans ce cas,

$$(9) \quad |\rho_0 e^{i\alpha_0} + \rho_1 e^{i\alpha_1} + \dots + \rho_n e^{i\alpha_n}| > (\rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_n) \cos \alpha.$$

En effet, α étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, on vérifie facilement qu'on a

$$|\rho_0 e^{i\alpha_0} + \rho_1 e^{i\alpha_1}| > \rho_0 + \rho_1 \cos \alpha > (\rho_0 + \rho_1) \cos \alpha.$$

Supposons donc que (9) soit vrai si l'on remplace n par $n - 1$, et démontrons qu'il est vrai pour n . On a

$$\begin{aligned} & |(\rho_0 e^{i\alpha_0} + \rho_1 e^{i\alpha_1} + \dots + \rho_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}}) + \rho_n e^{i\alpha_n}| \\ & > |\rho_0 e^{i\alpha_0} + \rho_1 e^{i\alpha_1} + \dots + \rho_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}}| + \rho_n \cos \alpha_1, \end{aligned}$$

car la somme

$$\rho_0 e^{i\alpha_0} + \rho_1 e^{i\alpha_1} + \dots + \rho_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}}$$

comme tous ses termes, est un nombre situé dans le même angle; donc elle peut être prise pour $\rho_0 e^{i\alpha_0}$; d'autre part, par hypothèse,

$$|\rho_0 e^{i\alpha_0} + \dots + \rho_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}}| > (\rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_{n-1}) \cos \alpha_2;$$

ainsi, α_1 et α_2 ne surpassant pas α , (9) est démontré pour n quelconque.

Cela posé, prenons le cas plus général où $\alpha < \pi$. Partageons α en deux parties égales : α_1 et α_2 . Soient s_{n_1} la somme des termes d'indice inférieur ou égal à n qui se trouvent dans l'angle α_1 et s_{n_2} la somme du reste des termes d'indice inférieur ou égal à n , de sorte que

$$s_n = \rho_0 e^{i\alpha_0} + \dots + \rho_n e^{i\alpha_n} = s_{n_1} + s_{n_2}.$$

De même, soit

$$s'_n = \rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_n = s'_{n_1} + s'_{n_2}.$$

En vertu de (9),

$$\liminf_{n=\infty} \frac{|s_{n_1}|}{s'_{n_1}} \geq \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \liminf_{n=\infty} \frac{|s_{n_2}|}{s'_{n_2}} \geq \cos \frac{\alpha}{2},$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} & \liminf_{n=\infty} \frac{|\rho_0 e^{i\alpha_0} + \dots + \rho_n e^{i\alpha_n}|}{\rho_0 + \dots + \rho_n} \\ &= \liminf_{n=\infty} \frac{||s_{n_1}| e^{i\alpha_{n_1}} + |s_{n_2}| e^{i\alpha_{n_2}}|}{s_{n_1}' + s_{n_2}'} \geq \liminf_{n=\infty} \frac{||s_{n_1}| + |s_{n_2}| e^{i\alpha}|}{|s_{n_1}| + |s_{n_2}|} \cos \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

si l'on pose

$$s_{n_1} = |s_{n_1}| e^{i\alpha_{n_1}}, \quad s_{n_2} = |s_{n_2}| e^{i\alpha_{n_2}}$$

et si l'on remarque que

$$|\alpha_{n_1} - \alpha_{n_2}| < \alpha.$$

Mais, en général, lorsqu'on a deux suites positives A_n, B_n , on a, pour $\cos \alpha < 0$,

$$\begin{aligned} & \liminf_{n=\infty} \frac{|A_n + B_n e^{i\alpha}|^2}{(A_n + B_n)^2} \\ & \geq \liminf_{n=\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{(A_n + B_n)^2} + \cos \alpha \limsup_{n=\infty} \frac{2A_n B_n}{(A_n + B_n)^2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha > 0, \end{aligned}$$

d'où résulte immédiatement notre lemme (8).

Remarquons encore que, lorsque la série $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n$ est convergente, on peut appliquer le lemme aux sommes relatives à ces deux séries,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n}.$$

6. Nous allons maintenant établir quelques propositions à l'aide de ce lemme. *On sait que, lorsque les coefficients sont positifs (désignons-les par ρ_n) et le rayon de convergence égal à l'unité, le point 1 est toujours un point singulier de la fonction*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n.$$

Nous démontrerons qu'il en est de même pour la fonction

$$(10) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n.$$

si, du moins à partir d'un certain indice, tous les coefficients se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine).

En effet, ajoutons à $f(x)$ un polynôme pour que la condition indiquée soit remplie à partir de l'indice 0, ce qui est toujours possible sans changer en aucune façon la singularité de $f(x)$; supposons que cela soit fait et développons cette fonction en un point $x_0 < 1$ de l'axe positif, on obtient

$$(11) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Tâchons maintenant de déterminer le rayon de convergence de cette série. Pour k quelconque, tous les termes de la série

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \rho_k e^{i\alpha_k} + (k+1)\rho_{k+1} e^{i\alpha_{k+1}} + \dots,$$

par suite sa somme, se trouvent dans le même angle $\alpha < \pi$. Le lemme (8) donne dans ce cas

$$\left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right| > A \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!},$$

où A ne dépend que de α ; donc, le même A s'applique pour k quelconque.

D'où il résulte que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \sqrt[k]{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}} \right| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{A \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}}.$$

Mais nous savons que le rayon de convergence de la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

est égal à $1 - x_0$; donc

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \sqrt[k]{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}} \right| \geq \frac{1}{1 - x_0},$$

car

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{A} = 1.$$

Par suite, le rayon de convergence de la série (11) est au plus $1 - x_0$,

ce qui revient à dire qu'il est égal à $1 - x_0$; par conséquent, le point 1 est vraiment un point singulier de la fonction (10), comme nous voulions l'établir

7. Supposons maintenant que $\varphi(x)$ devienne infini au point 1. Je dis que *le degré d'infinitude de $f(x)$ est égal à celui de $\varphi(x)$* ; ou, plus précisément, il y a, sur l'axe réel positif, un intervalle fini $(x_0, 1)$ où l'on a

$$(12) \quad |f(x)| > A \varphi(x),$$

A étant une constante positive convenable.

En effet, on peut toujours supposer que *tous* les coefficients de $f(x)$ se trouvent dans le même angle $\alpha < \pi$, car un polynôme divisé par $\varphi(x)$ devient 0 pour $x = 1$. Mais dans ce cas les termes des deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n,$$

pour x positif quelconque, se trouvent dans l'angle α ; donc, d'après le lemme (8),

$$\frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n} > B > 0.$$

Mais B est indépendant de x ; donc

$$\liminf_{x \rightarrow 1} \frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n} > 0,$$

ce qui démontre la proposition.

8. L'inégalité (12) nous permet de généraliser en quelques lignes un théorème très important de Cesàro. D'après ce théorème, a_n et b_n

étant positifs,

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

lorsque la limite du second membre existe et lorsque la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

devient infinie au point 1.

Supposons que les b_n , à partir d'un certain rang, se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine) et qu'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = a.$$

Nous allons démontrer que la relation (13) subsiste dans ce cas plus général. En effet,

$$a_n = ab_n + \varepsilon_n b_n$$

avec

$$\lim \varepsilon_n = 0;$$

donc on peut écrire

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = a + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}.$$

Calculons la limite du second membre.

D'après (12), si x est assez proche de 1,

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \right| < \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n b_n| x^n}{A \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| x^n}.$$

Mais, dans le second membre, tous les coefficients sont positifs, et la

limite de leur rapport est 0. On a donc, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n \cdot r^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot r^n} = 0.$$

Il en résulte que le théorème de Cesàro subsiste dans le cas où les coefficients se trouvent, au moins à partir d'un certain rang, dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe. De même, pour les s_n et pour les moyennes arithmétiques d'ordre quelconque.

Remarquons enfin que, lorsqu'il y a une infinité de coefficients dont les arguments diffèrent de π , toutes ces propositions sont généralement en défaut; donc, pour ces propositions, la condition que, du moins à partir d'un certain rang, tous les coefficients se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$, est une limitation naturelle.

§ III. — La distribution uniforme des arguments des coefficients abaisse le degré d'infinitude.

9. Supposons maintenant que cette condition ne soit pas remplie. La question se pose : Dans quel cas peut-on affirmer que les arguments qui diffèrent les uns des autres de π changent réellement la nature de la singularité au point 1? en particulier, dans quel cas abaissent-ils le degré d'infinitude au même point? Ou, au contraire, dans quelles conditions le degré d'infinitude de la fonction

$$(14) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

reste-t-il égal à celui de

$$(15) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cdot x^n,$$

quoique les α_n ne satisfassent pas à la condition indiquée plus haut?

Pour répondre, au moins partiellement, à la première question, nous allons établir une proposition qui permet, dans certain cas, de distinguer l'influence des arguments de celle des modules des coefficients.

Soient, en effet, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ les points limites de la suite infinie

$$(16) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Entourons les points α_i des cercles de rayon assez petit pour que tous ces cercles soient extérieurs les uns aux autres; les termes de la suite (16) qui sont extérieurs à tous les cercles seront en nombre fini b . Soit enfin $m_i(n)$ le nombre des termes d'indice inférieur ou égal à n qui se trouvent dans le cercle c_i , et formons les rapports $\frac{m_i(n)}{n}$.

Si la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_i(n)}{n} = f_i$$

existe, nous dirons que la *fréquence* du point limite α_i est f_i .

Démontrons maintenant que dans ce cas

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + \dots + f_k \alpha_k.$$

En effet, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha_1 \sum_{n_1} x^{n_1} + \alpha_2 \sum_{n_2} x^{n_2} + \dots + \alpha_k \sum_{n_k} x^{n_k} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n.$$

Mais, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n_1=0}^{\infty} x^{n_1}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_i(n)}{n} = f_i$$

(¹) Voir, par exemple, BOREL. *Leçons sur les séries à termes positifs*, 1902, p. 66.

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = 0,$$

d'où résulte (17).

Remarquons encore qu'en raisonnant ainsi sur la fonction

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

on obtient la relation

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + \dots + f_k \sigma_k,$$

où f_i est la fréquence du point limite σ_i par rapport à la suite

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

Cette relation est une généralisation immédiate du théorème d'Abel, d'après lequel, s'il n'y a qu'un seul point limite σ , le premier membre de (18) tend vers σ . Cette relation vérifie encore complètement les vues de Leibniz et de Lagrange dans la question particulière de la sommation de la série divergente (1)

$$(19) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

En effet, les s_n de la fonction

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

sont

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

Nous avons, par suite, deux points limites : 1 et 0, avec la fréquence $\frac{1}{2}$.

(1) Voir à ce sujet BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, 1901 (Introduction).

D'après (18), la valeur de la fonction au point 1 est donc

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2},$$

ce qui montre évidemment que, pour déterminer la somme de la série divergente (19), c'est la fréquence de 1 se rapportant à la série complète qu'il faut considérer.

Remarquons enfin qu'à l'aide de la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=0}^n \nu a_\nu}{n^{p+1}} = \frac{p}{p+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=0}^n a_\nu}{n^p},$$

en supposant que la limite du deuxième membre existe, on généralise facilement la relation (18) pour le cas où les coefficients tendent vers l'infini. Il suffit de considérer les points limites de la suite $\frac{a_n}{n^r}$. Nous pouvons faire de même pour les moyennes arithmétiques des s_n d'ordre quelconque.

10. Mais, au lieu de ces considérations, nous allons nous servir de ces résultats pour établir une proposition qui donnera une idée assez exacte de l'influence des arguments.

Soit donnée

$$(20) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n,$$

et supposons que

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \Lambda$$

pour que l'influence des modules soit éliminée.

Il est évident que

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n$$

devient infini de degré 1 au point 1. Quelle distribution des $e^{i\alpha_n}$ abaisse le degré d'infinitude de la fonction (20)? Nous allons démontrer que, *si la distribution des $e^{i\alpha_n}$ sur le cercle de rayon 1 est*

uniforme, la fonction (20) ne devient pas infinie de degré 1 au point 1.

La distribution des $e^{i\alpha_n}$ est dite *uniforme* lorsque, divisant le cercle en k arcs égaux, la fréquence des $e^{i\alpha_n}$ sur un arc existe et est égale à $\frac{1}{k}$, et cela pour une infinité de valeurs de k .

Pour démontrer cette proposition pour la fonction (20), il suffit de la démontrer pour la fonction

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\alpha_n} x^n,$$

car, d'après la condition (21),

$$f(x) = A f_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{i\alpha_n} x^n$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

et, selon le théorème déjà cité de Cesàro,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{i\alpha_n} x^n = 0.$$

Formons maintenant les fonctions

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(k)} x^n,$$

en prenant, au lieu de α_n , le milieu $\beta_n^{(k)}$ de l'arc qui le contient; (17) nous donne

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \varphi_k(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{k}}}{k} \sum c_k = 0,$$

où $\sum c_k$ est la somme des $k^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité.

Mais

$$f(x) = \varphi_k(x) + \varepsilon_k(x),$$

et, pour ε quelconque, à partir d'un certain indice k , tous les coeffi-

cients de $\varepsilon_k(x)$ sont inférieurs à $\frac{\varepsilon}{2}$; donc

$$|(1-x)f(x)| < |(1-x)\varphi_k(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, si x est assez proche de l'unité,

$$|(1-x)\varphi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

donc

$$|(1-x)f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

§ IV. — Critères formés des s_n pour reconnaître le degré d'infinitude, la distribution des arguments étant arbitraire.

11. Passons maintenant à la seconde question soulevée précédemment. On sait, depuis Abel, que pour les séries à coefficients positifs, l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

entraîne nécessairement

$$(22) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \infty$$

D'après le lemme (8), c'est aussi vrai pour les séries dont les coefficients se trouvent, du moins à partir d'un certain indice, dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine). Supposons maintenant que les coefficients ne soient pas assujettis à cette condition. Dans ce cas, la fonction ne devient pas infinie, en général, au point 1. Il s'agit de déterminer des conditions entraînant nécessairement l'égalité (22). *Il peut arriver, par exemple, que les s_n deviennent infinis en valeur absolue et se trouvent déjà dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine). Cela suffit pour conclure que la fonction devient infinie au point 1.* En effet, envisageons les deux

fonctions

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

et

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n.$$

D'après (12) nous avons pour x assez proche de l'unité

$$\left| \frac{f(x)}{1-x} \right| > A \varphi(x).$$

Mais

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \varphi(x) = \infty,$$

comme on le voit tout de suite, si l'on considère la fonction

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

et

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n,$$

et l'on se sert du théorème de Cesàro d'après lequel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} = 0$$

entraîne l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x) \varphi(x)} = 0.$$

Donc vraiment

$$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = \infty.$$

Remarquons enfin que c'est une généralisation d'un théorème de M. Pringsheim (1).

12. Mais le cas le plus général et, en même temps, le plus compliqué est celui où les modules des s_n ne tendent pas directement vers l'infini,

(1) PRINGSHEIM, *Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreis* (Münchener Sitzungsberichte, t. XXX, 1900, p. 40).

mais où la suite des s_n a aussi des points limites finis et où les arguments des s_n ne sont assujettis à aucune restriction.

Pour plus de simplicité, nous nous bornerons à supposer, pour le moment, que les coefficients a_n sont réels et que

$$\limsup_{n=\infty} |a_n| < a < 1.$$

Dans ces conditions, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Si, pour les s_n positifs, on a

$$(23) \quad \limsup_{n=\infty} \frac{s_n}{n^{\frac{1}{2}}} = \infty,$$

et, pour les s_n négatifs,

$$(24) \quad \limsup_{n=\infty} |s_n| = A,$$

où A est un nombre fini ou nul, *la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ devient infinie au point 1.*

Nous démontrerons, en effet, que, dans les conditions indiquées, on a

$$(25) \quad \lim_{n=\infty} \frac{n}{s_0 + s_1 + \dots + s_n} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{S_n} = 0,$$

et que S_n est positif pour n assez grand. Alors, en appliquant le théorème de Cesàro aux deux fonctions

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

et

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n,$$

nous aurons

$$\lim_{x=1} \frac{\frac{x}{(1-x)^2}}{\frac{f(x)}{(1-x)^2}} = \lim_{x=1} \frac{x}{f(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{S_n} = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Démontrons donc l'égalité (25).

Pour cela, regardons la suite finie

$$s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n,$$

et soit $n^{\frac{1}{2}}\alpha_n$ la plus grande des valeurs de

$$|s_0|, |s_1|, \dots, |s_{n-1}|, |s_n|.$$

D'après l'hypothèse (23),

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty.$$

Le nombre des termes de la suite finie qui sont plus grands que $n^{\frac{1}{2}}$ est au moins

$$n^{\frac{1}{2}}\alpha_n - n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1),$$

à cause de la petitesse des coefficients α_n qui constituent les s_n . Donc, quand nous formons

$$S_n = s_0 + s_1 + \dots + s_n,$$

les termes considérés tout d'abord donnent une somme supérieure ou égale à $n^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$, c'est-à-dire cette partie de S_n devient infinie d'ordre supérieur à 1. Les autres termes positifs ne diminuent point cet ordre, les termes négatifs non plus, car, d'après l'hypothèse (24), leur somme, en valeur absolue, est moindre que nA . Donc, l'équation (25) est vérifiée et, à partir d'un certain indice, S_n sera toujours positif.

15. Plus généralement, ayant

$$(26) \quad \limsup_{n=\infty} \frac{|\alpha_n|}{n^k} = a < 1,$$

nous démontrons le théorème suivant :

Si l'on a pour les s_n positifs

$$\limsup_{n=\infty} \frac{s_n}{n^{k+\frac{1}{2}}} = \infty,$$

et, pour les s_n négatifs,

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|s_n|}{n^k} = A,$$

A étant un nombre fini ou nul, la fonction représentée par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ devient infinie d'ordre supérieur à k au point 1.

En effet, désignons de nouveau le plus grand terme de la suite finie

$$s_0, s_1, \dots, s_n$$

par $n^{k+\frac{1}{2}}\alpha_n$, dont nous savons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty.$$

Dans la suite finie considérée, prenons le terme qui diffère le moins de $n^{k+\frac{1}{2}}$; évaluons le nombre des termes p qui est indispensable pour parvenir de ce terme au terme maximum. D'après (26), p est plus grand que le plus petit nombre p' satisfaisant à la condition

$$n^{k+\frac{1}{2}} + (n-p')^k + (n-p'+1)^k + \dots + (n-1)^k + n^k \geq n^{k+\frac{1}{2}}\alpha_n,$$

car ici nous avons construit le terme maximum à l'aide de termes qui sont les plus grands possibles.

Cette inégalité peut s'écrire encore

$$(n-p')^k + (n-p'+1)^k + \dots + (n-1)^k + n^k \geq n^{k+\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1) = n^k n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1);$$

donc

$$p > n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1),$$

car le second membre est le produit de deux facteurs dont le premier est le plus grand terme du premier membre.

Construisons maintenant S_n .

D'après le raisonnement donné, le nombre des $s_i (i \leq n)$ qui sont plus grands que $n^{k+\frac{1}{2}}$ est au moins $n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$; donc ils donnent une partie de S_n d'ordre plus élevé que $k + 1$. Les autres termes positifs ne peuvent pas diminuer cet ordre, de même que les S_n négatifs, leur somme, en valeur absolue, étant inférieure à An^{k+1} . Nous avons donc démontré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k+1}}{S_n} = 0.$$

Appliquons maintenant le théorème de Cesàro aux deux fonctions

$$\frac{1}{(1-x)^{k+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

et

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum S_n x^n.$$

En remarquant que, d'après un théorème de M. Appell (1),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k+1}}{h_n} = \Gamma(k+1),$$

et que, par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{S_n} = 0,$$

on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{(1-x)^{k+2}}}{\frac{f(x)}{(1-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^k f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{S_n} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

14. Affranchissons-nous maintenant de la restriction que les coefficients soient réels. Dans ce cas plus général, le théorème s'énonce comme il suit :

Supposons que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| < 1.$$

Si l'on peut ranger les s_n en deux groupes de manière que tous les termes s_n du premier groupe se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine) et si pour ces termes

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_{n_1}|}{n_1^{\frac{1}{2}}} = \infty,$$

et si, pour les autres termes,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n| = a,$$

(1) APPELL, *Sur certaines séries*, etc. (*Comptes rendus*, t. LXXXVII).

où a est un nombre fini ou nul, la fonction représentée par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ devient infinie au point 1.

Considérons, en effet, la fonction

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1} + \sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2}.$$

Pour que $|s_{n_1}|$ s'accroisse de la valeur $n^{\frac{1}{2}}$ jusqu'à $n^{\frac{1}{2}}\alpha_n$, il faut ajouter au moins un nombre $n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$ de coefficients, car la valeur absolue des coefficients est inférieure à l'unité. Nous aurons donc des $|s_{n_1}|$ situés entre les valeurs $n^{\frac{1}{2}}$ et $n^{\frac{1}{2}}\alpha_n$ au moins en nombre $n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$; par suite, comme auparavant, on peut conclure que la fonction

$$\sum_{n_1} |s_{n_1}| x^{n_1},$$

de même que son S_n a un ordre d'infinitude supérieur à 1 au point 1. C'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n_1} |s_{n_1}| x^{n_1} = \infty.$$

Mais, d'après (12), pour x positif, inférieur à 1 et assez proche de 1,

$$\left| \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1} \right| > A \sum_{n_1} |s_{n_1}| x^{n_1};$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \left| \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1} \right| = \infty.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse faite sur les s_{n_2} , pour x positif et

inférieur à 1,

$$\left| \sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2} \right| < \frac{B}{1-x},$$

où B est le plus grand des modules de s_{n_2} .

Par conséquent,

$$(1-x) \left| \sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2} \right| < B.$$

En combinant les deux résultats, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| (1-x) \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1} + (1-x) \sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2} \right| = \infty,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Enfin, dans le cas où

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{n^k} = \alpha,$$

le même raisonnement, avec une légère modification, nous donne le théorème suivant :

Si l'on peut former des s_n deux groupes, de manière que tous les termes s_{n_1} du premier groupe se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine) et si pour ces termes

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_{n_1}|}{n_1^{k+\frac{1}{2}}} = \infty,$$

et si, pour les autres termes s_{n_2} ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n_2}}{n^k} = \alpha,$$

a étant un nombre fini ou nul, la fonction représentée par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ devient infinie d'ordre supérieur à k au point 1.

CHAPITRE II.

SUR LES POINTS SINGULIERS D'ORDRE NÉGATIF.

§ V. — Résumé des résultats relatifs aux points réguliers du cercle de convergence.

15. Nous allons aborder maintenant l'étude systématique des singularités. Dans cette étude, on a suivi en général deux méthodes assez distinctes (¹). L'une ne suppose aucune restriction aux coefficients de la série de Taylor donnée, et, par cela même, les résultats obtenus par cette méthode acquièrent une très grande importance. Mais, comme le remarque M. Hadamard (²), « il est à craindre que ces résultats resteront toujours trop peu nombreux ».

L'autre méthode consiste à faire des hypothèses, parfois très particulières, sur les coefficients pour traiter des singularités relativement simples. Par exemple, les beaux résultats de M. Hadamard sur les pôles des fonctions analytiques supposent que les singularités les plus voisines de l'origine sont des pôles exclusivement, ce qui revient à faire des hypothèses toutes particulières sur certains déterminants formés de coefficients de la série.

En général, si l'on veut suivre la première méthode, on ne doit supposer aucune restriction aux singularités, car ce sont celles-ci qui déterminent les propriétés limites de la suite des coefficients.

Dans ces deux derniers Chapitres de ce Mémoire, nous essayerons de trouver une position convenable qui soit intermédiaire entre ces deux points de vue, en envisageant les singularités relativement les plus simples sans supposer rien sur les autres singularités de la même fonction, c'est-à-dire sur les coefficients de la série donnée.

Pour y parvenir, nous avons besoin de résultats relatifs aux points

(¹) Voir HADAMARD, *Série de Taylor* (*Scientia*), p. 13.

(²) *Ibid.*, p. 13.

réguliers; donc, tout d'abord, nous allons résumer ces recherches faites pour la plus grande partie par MM. Hadamard, Borel, Mittag-Leffler et Painlevé.

Pour cela, donnons en quelques mots la définition des moyennes arithmétiques d'ordre fractionnaire.

Soit donnée une fonction analytique

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Soient

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n, \\ S_n^{(1)} &= s_0 + s_1 + \dots + s_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ S_n^{(r)} &= S_0^{(r-1)} + S_1^{(r-1)} + \dots + S_n^{(r-1)}, \end{aligned}$$

et soient

$$\begin{aligned} s_n^{(1)} &= \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n}, \\ &\dots\dots\dots, \\ s_n^{(r)} &= \frac{s_n^{(r-1)} + s_1^{(r-1)} + \dots + s_0^{(r-1)}}{n} \end{aligned}$$

les moyennes arithmétiques ordinaires formées au point 1.

M. Knopp (1) a démontré que l'existence de la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(r)}$$

entraîne celle de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r! S_n^{(r)}}{n^r}$$

et que les deux limites sont égales. Tout récemment M. Schnee (2) a complété ce résultat en démontrant la réciproque.

Donc, pour généraliser cette notion, on peut partir des $S_n^{(r)}$ dont la généralisation pour r fractionnaire est immédiate, étant donné que

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(r)} x^n.$$

(1) KNOPP, *Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze*, 1907, p. 19.

(2) W. SCHNEE, *Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes* (*Mathematische Annalen*, t. LXVII, 1909, p. 110).

Nous posons donc, pour r positif quelconque,

$$s_n^{(r)} = \frac{\Gamma(r+1)S_n^{(r)}}{n^r},$$

où

$$S_n^{(r)} = \sum_{i=0}^n B_{n-i}^{(r+1)} a_i = \frac{1}{\Gamma(r+1)} \sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(r+n-i+1)}{\Gamma(n-i+1)} a_i,$$

car les $B_{n-i}^{(r+1)}$ sont des coefficients binomiaux, et nous dirons que les $s_n^{(r)}$ sont les moyennes arithmétiques (ou moyennes de Cesàro) d'ordre r formées au point 1. Cette dénomination est justifiée par le fait que, pour r entier, la limite des

$$\frac{r! S_n^{(r)}}{n^r}$$

coïncide avec celles des moyennes arithmétiques. Si nous voulons former les moyennes arithmétiques d'ordre quelconque en un point x_0 , il faut mettre $a_n x_0^n$ au lieu de a_n .

16. Cela posé, nous pouvons résumer rapidement les résultats de M. Hadamard, qui a donné, dans sa Thèse (1), deux propositions se rattachant à la représentation de la fonction dans les points réguliers de son cercle de convergence.

La première s'énonce comme il suit :

Si l'ordre de la fonction sur son cercle de convergence est inférieur à l'unité, la série elle-même converge dans tous les points réguliers de ce cercle.

La deuxième est plus générale :

Si l'ordre de la fonction sur son cercle de convergence est inférieur à ω , les moyennes arithmétiques des s_n d'ordre $\omega - 1$ donneront pour limite dans tous les points réguliers du cercle de convergence la valeur de la fonction en ce point.

Remarquons que M. Hadamard n'emploie pas l'expression : moyennes arithmétiques ; mais la formule dont il se sert et qui ne dif-

(1) P. 82, 83.

fière de ces moyennes que par un facteur dont la limite pour $n = \infty$ est égale à l'unité, s'en rapproche tellement que, pour plus de conformité du langage, nous énoncerons ce théorème toujours sous cette forme.

M. Fatou (1) a complété le premier théorème d'une manière intéressante en démontrant que la condition

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

une fois remplie, et si l'on suppose que le rayon de convergence soit égal à l'unité, la série converge dans tous les points réguliers du cercle.

Évidemment, si la série converge en un point du cercle de rayon 1, on peut toujours en conclure que

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Donc c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la série converge aux points réguliers de son cercle de convergence.

Par exemple, pour représenter la valeur de la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$$

aux points réguliers du cercle de convergence de rayon 1, il faudrait se servir, d'après le premier théorème de M. Hadamard, des moyennes arithmétiques, car l'ordre de la fonction sur le cercle entier est 1, tandis que, en réalité, la série elle-même y converge, comme le montre le théorème de M. Fatou.

On peut compléter de la même manière le second théorème de M. Hadamard, comme l'a montré M. M. Riesz (2) en démontrant que

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les moyennes arith-

(1) FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. XXX, p. 389).

(2) RIESZ, *Sur les séries trigonométriques sommables*, 1908 (en hongrois).

métiques des s_n d'ordre r aient une limite bien déterminée dans chaque point régulier du cercle de convergence. Et cette limite représente bien la valeur de la fonction en ce point.

17. Le deuxième pas, en quelque sorte définitif, de la représentation de la fonction sur le cercle de convergence, est fait par M. Borel (¹), qui a démontré que dans tous les points réguliers x_0 du cercle *la limite*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

où

$$s_n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n,$$

existe et représente la valeur de la fonction en ces points, quels que soient les coefficients a_n de la série donnée.

Cette limite s'appelle la *limite généralisée* des s_n et les

$$S(a) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!}$$

sont, pour des valeurs de a tendant vers l'infini, les sommes exponentielles des s_n .

Dans cette voie, c'est le premier théorème qui ne suppose rien sur les coefficients a_n et qui donne cependant une relation très précise entre les coefficients (par lesquels sont déterminées les sommes exponentielles) et l'allure de la fonction aux points x_0 . Et, ce qui nous paraît le plus important, à l'aide de la sommation exponentielle on peut envisager l'allure de la fonction en un point sans s'occuper des singularités de la fonction en d'autres points : ce n'était pas le cas dans la sommation par les moyennes arithmétiques. Nous verrons que cette propriété de la sommation exponentielle, jointe à sa grande simplicité qu'elle doit, pour la plus grande partie, à l'emploi de la fonction exponentielle, nous permettra d'obtenir des résultats analogues au théo-

(¹) BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, p. 128.

rème indiqué de M. Borel, se rapportant aux singularités de la fonction envisagée.

L'autre grand avantage de la méthode exponentielle de M. Borel est qu'elle permet de franchir le cercle de convergence. En effet, comme l'a démontré M. Borel (¹), *la limite généralisée des*

$$s_n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

existe en tous points intérieurs du polygone de sommabilité et représente la valeur de la fonction en ces points, quels que soient les coefficients a_n qui déterminent d'ailleurs le polygone de sommabilité.

Comme la singularité d'une fonction au point x_0 est caractérisée, en général, uniquement par les valeurs régulières de la fonction au voisinage de ce point, il est évident que cette extension du champ de représentation est indispensable pour l'étude systématique des singularités. A ce point de vue, la représentation de la fonction dans les points réguliers doit précéder toujours la recherche générale des singularités. C'est aussi pourquoi le théorème général de M. Mittag-Leffler (²) nous sera si utile dans la suite. Mais nous utiliserons ce dernier sous des formes très différentes, de sorte que nous ne pouvons pas en donner le résumé.

Remarquons seulement que, à notre connaissance, on n'a établi à l'aide de la représentation de M. Mittag-Leffler aucune relation générale qui se rapporte aux singularités situées sur la frontière de l'étoile. Nous en proposerons deux dans la suite de ce Mémoire.

§ VI. — Des points singuliers d'ordre négatif situés sur le cercle de convergence.

18. Nous avons vu que l'ordre des points réguliers situés sur le cercle de convergence est nécessairement $-\infty$. Par conséquent, les singularités qui se rapprochent le plus de ces points sont celles dont l'ordre est négatif. Nous allons voir, en effet, qu'en cheminant vers un

(¹) BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, p. 126.

(²) MITTAG-LEFFLER, cinq Notes dans les *Acta mathematica*, ou encore BOREL, *Séries divergentes*, chap. V.

tel point à l'intérieur ou à la circonférence du cercle de convergence, la fonction tend vers une valeur bien déterminée. Nous dirons que cette valeur est la valeur de la fonction en ce point singulier. Par exemple, A est une telle valeur pour la fonction

$$A + [\log(1-x)]^\beta \cdot (1-x)^\alpha,$$

où α est un nombre positif, mais n'est pas égal à un entier; $\beta \leq 0$ et $\log(1-x)$ représente la branche du logarithme qui s'annule pour $x = 1$.

Soit donc x_0 , un point singulier d'ordre négatif du cercle de convergence de la fonction donnée

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

D'après la définition de l'ordre, on peut trouver toujours un arc (a, b) contenant x_0 , à son intérieur sur lequel l'ordre de la fonction $f(x)$ est négatif. Nous pouvons appliquer le théorème fondamental de M. Hadamard (*Thèse*, p. 72); si nous le citons textuellement, c'est que ce résultat servira de base pour les démonstrations de nos théorèmes se rapportant aux points singuliers d'ordre négatif.

Une fonction d'ordre ω sur un arc déterminé et en ses points extrêmes peut être remplacée par une somme de deux fonctions dont l'une est d'ordre égal à ω ou dépassant ω d'aussi peu qu'on le veut sur le cercle entier, et l'autre est holomorphe en tous les points de l'arc considéré.

On peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où l'ordre, sur le cercle entier, de la fonction représentée par $\sum b_n x^n$, diffère aussi peu que l'on veut de l'ordre de la fonction $f(x)$ sur l'arc (a, b) , c'est-à-dire peut être supposé négatif. Mais, dans ce cas, la fonction $\sum b_n x^n$ est continue partout sur le cercle de convergence, en particulier sur l'arc (a, b) .

D'autre part, la fonction représentée par $\sum c_n x^n$ est holomorphe sur

cet arc ; la fonction $f(x)$ est donc nécessairement continue sur l'arc (a, b) , parce qu'elle est la somme de deux fonctions continues. On en conclut que $f(x)$ est continue par exemple dans l'aire limitée par l'arc (a, b) et par les deux rayons OA et OB, d'où résulte la proposition qui était à démontrer.

19. Il s'agit maintenant de représenter les valeurs de la fonction aux points singuliers d'ordre négatif situés sur le cercle de convergence. Pour résoudre complètement ce problème, nous allons donner trois théorèmes, correspondant aux deux théorèmes, sous leur forme plus complète, de M. Hadamard et à celui de M. Borel.

Soit donnée la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et soit son rayon de convergence égal à 1.

Si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

la série $\sum a_n x^n$ est convergente en chaque point d'ordre négatif du cercle de convergence.

Soit, en effet, x_0 un tel point singulier. D'après le théorème fondamental de M. Hadamard cité tout à l'heure, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

et il est permis de supposer que l'ordre, Ω_1 , de $\sum b_n x^n$ sur le cercle entier est négatif.

D'après (4),

$$\Omega_1 - 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |b_n|}{\log n},$$

c'est-à-dire, pour n assez grand,

$$\frac{\log |b_n|}{\log n} < \Omega_1 - 1 + \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif arbitraire, ce qui nous donne

$$\log |b_n| < (\Omega_1 - 1 + \varepsilon) \log n = \log n^{\Omega_1 - 1 + \varepsilon};$$

par suite

$$|b_n| < n^{\Omega_1 - 1 + \varepsilon}.$$

Mais Ω_1 est un nombre négatif bien déterminé, ε arbitraire ; on peut donc choisir ε de façon que

$$\Omega_1 + \varepsilon = -\eta < 0.$$

Cela posé, on a

$$|b_n| < \frac{1}{n^{1+\eta}},$$

de sorte que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est convergente dans tous les points du cercle de convergence, en particulier au point x_0 .

D'autre part, d'après le théorème de M. Hadamard, complété par M. Fatou,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

est une série convergente. En effet, par le théorème fondamental de M. Hadamard cité plus haut, nous savons que la fonction représentée par $\sum c_n x^n$ est holomorphe en tous les points de l'arc (a, b) , en particulier en x_0 , et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

On a donc finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n;$$

autrement dit, la série envisagée est la somme de deux séries convergentes ; donc elle est convergente aussi.

Réciproquement, si la série est convergente en un point du cercle de rayon 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Donc, pour que la série soit convergente en chaque point singulier d'ordre négatif du cercle de convergence, il faut et il suffit que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Le théorème d'Abel nous assure enfin que c'est la valeur de la fonction au point singulier d'ordre négatif qui est représentée par la somme de la série.

20. Supposons maintenant que

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^r} = 0.$$

Nous démontrerons le théorème suivant :

Pour que la limite des moyennes arithmétiques d'ordre r existe et représente la valeur de la fonction en chaque point d'ordre négatif du cercle de convergence, il faut et il suffit que les coefficients de la série $\sum a_n x^n$ satisfassent à la condition (27).

Soit, en effet, x_0 un point singulier d'ordre négatif de la fonction donnée $f(x)$. On peut toujours écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où l'ordre de la fonction représentée par $\sum b_n x^n$ peut être supposé négatif sur le cercle entier, car son ordre sur ce cercle diffère aussi peu qu'on veut de l'ordre de $f(x)$ sur un arc (a, b) contenant x_0 à son intérieur ; d'autre part, la fonction représentée par $\sum c_n x^n$ est holomorphe en tous les points de l'arc (a, b) .

D'où l'on peut conclure, comme auparavant, que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est convergente en chaque point du cercle de rayon 1 ; *a fortiori*, les moyennes arithmétiques de s_n d'ordre quelconque ont une limite finie bien déterminée pour un point quelconque du cercle.

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{n=\infty} b_n = 0$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^r} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n - b_n}{n^r} = 0.$$

Appliquons maintenant le deuxième théorème complété de M. Hadamard à la fonction représentée par $\sum c_n x^n$ dont le point x_0 est un point régulier. On voit tout de suite que les moyennes arithmétiques d'ordre r formées au point x_0 ont une limite bien déterminée. Par conséquent, il en est de même des moyennes arithmétiques d'ordre r formées pour la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n.$$

Donc la limite

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)}(a_n, x_0)$$

existe. Enfin, d'après le théorème de M. Hölder, généralisé par M. Knopp (¹), en cheminant à l'intérieur du cercle de convergence vers le point x_0 sans que le chemin soit tangent au cercle,

$$\lim_{x=x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n=\infty} s_n^{(r)}(a_n, x_0)$$

si la limite du second membre existe. Donc la limite des moyennes arithmétiques d'ordre r représente bien la valeur de la fonction en ce point singulier x_0 .

Enfin, on voit aisément que la condition (27) est nécessaire pour que les moyennes arithmétiques d'ordre r aient une limite en un point d'ordre négatif du cercle de convergence. Le fait étant établi pour les points réguliers, il suffit d'utiliser le théorème fondamental de M. Hadamard pour séparer la singularité au point considéré des singularités d'ordre plus élevé de la fonction.

(¹) KNOPP, *loc. cit.*, p. 46.

21. Prenons maintenant le cas le plus général où les coefficients ne sont assujettis à aucune restriction. A l'aide de la sommation exponentielle de M. Borel, nous allons démontrer le théorème suivant :

La limite généralisée des s_n existe et représente la valeur de la fonction en chaque point d'ordre négatif du cercle de convergence.

La marche du raisonnement est identique à celle déjà suivie deux fois. On écrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est convergente en chaque point du cercle de convergence. Seulement il faut montrer que les sommes exponentielles ont aussi une limite bien déterminée en tous ces points et que cette limite est égale à la somme de la série en ce point. Pour cela nous allons généraliser le théorème de Cesàro pour les fonctions entières, étant donné que nous nous servirons de cette généralisation plusieurs fois dans la suite.

Démontrons donc que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

étant deux fonctions entières et

$$b_n > 0,$$

on a

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

si la limite du second membre existe.

Par hypothèse,

$$\frac{a_n}{b_n} = A + \varepsilon_n$$

avec

$$\lim \varepsilon_n = 0,$$

d'où

$$a_n = \Lambda b_n + \varepsilon_n b_n$$

et

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \Lambda + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}.$$

Il suffit donc de démontrer le théorème pour $\Lambda = 0$, car dans ce cas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \right| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n b_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n| = 0.$$

Supposons donc que

$$\frac{a_n}{b_n} = \varepsilon_n.$$

ε étant donné d'avance, on peut trouver un indice N tel que pour $n > N$

$$a_n < \frac{\varepsilon}{2} b_n;$$

par suite,

$$\frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} < \frac{\left| \sum_{n=0}^N a_n x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, nous pouvons prendre x assez grand pour que

$$\frac{\left| \sum_{n=0}^N a_n x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

car $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ est un polynome. Donc finalement

$$\frac{\left| \sum_{n=0}^N a_n x^n \right|}{\sum_{n=0}^N b_n x^n} < \varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer,

22. Supposons maintenant que la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n) = A$$

existe, et regardons l'expression

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}}.$$

Nous avons ici deux fonctions entières et nous pouvons appliquer le théorème que nous venons de démontrer.

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{s_n}{n!}}{\frac{1}{n!}} = A;$$

d'où il résulte que la limite généralisée existe et représente la valeur (limite) de la fonction partout où la série est convergente; par suite, la limite généralisée des s_n formée pour la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

au point x_0 existe et représente la valeur de cette fonction en ce point singulier.

Regardons maintenant la fonction représentée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

D'après le théorème de M. Borel cité plus haut, la limite généralisée des s_n existe et représente la valeur de la fonction en chaque point régulier du cercle de convergence, en particulier au point x_0 .

Enfin, on a identiquement

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n,$$

et la sommation exponentielle est une opération distributive; donc la limite généralisée des s_n formée pour la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

existe et représente la valeur (limite) de la fonction $f(x)$. Ce qu'il fallait démontrer.

§ VII. — Des points singuliers d'ordre négatif situés sur le polygone de sommabilité et à l'origine des demi-droites exclues de l'étoile de M. Mittag-Leffler.

25. Ceux des points singuliers d'ordre négatif qui ont la plus grande importance sont les points critiques algébriques et les points critiques à la fois algébriques et logarithmiques. Et ces points singuliers peuvent fort bien se présenter en dehors du cercle de convergence. Le problème se pose donc de représenter les valeurs de la fonction en ces points singuliers.

Pour être cependant plus général, nous allons étendre la notion de l'ordre d'un point singulier aux points singuliers situés en dehors du cercle de convergence, et cela de telle façon que les points critiques algébriques, y compris les pôles, et les points critiques à la fois algébriques et logarithmiques aient un ordre qui soit indépendant de leur position.

Prenons un point singulier x_0 , l'origine d'une demi-droite exclue. Nous dirons que ω est l'ordre de la fonction en ce point s'il y a une fonction $\varphi(x)$ qui soit holomorphe dans le cercle de rayon $|x_0|$ et dont l'ordre sur ce cercle soit $\omega + \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut et, de plus, la différence

$$f(x) - \varphi(x) = f_1(x)$$

étant holomorphe en x_0 .

Par exemple, l'ordre de la fonction

$$(x - x_0)^\alpha [\log(x - x_0)]^\beta + f_1(x)$$

en x_0 est $-\alpha$, quel que soit le rayon de convergence du développement taylorien de la fonction $f_1(x)$ sous la seule condition que $f_1(x)$ soit holomorphe sur la ligne droite qui joint x_0 au centre du développement taylorien de $f_1(x)$.

Prenons le centre de l'étoile pour l'origine des coordonnées. On voit aisément qu'en cheminant vers un point singulier d'ordre négatif, le long du rayon Ox_0 ou, plus généralement, sur une bande assez étroite parallèle à ce rayon et limitée par l'arc de la circonférence de rayon $|x_0|$, ou sur cette circonférence même, la fonction tend vers une valeur bien déterminée que nous nommerons *la valeur de la fonction en ce point singulier*.

24. Il s'agit maintenant de chercher des développements qui représentent ces valeurs de la fonction donnée $f(x)$.

Tout d'abord la sommation exponentielle de M. Borel nous donne la proposition suivante, relative aux points singuliers d'ordre négatif situés sur le polygone de sommabilité :

La limite généralisée des s_n existe et représente la valeur de la fonction en chaque point singulier d'ordre négatif du polygone de sommabilité (sommets exclus).

En effet, le raisonnement dont nous nous sommes servis précédemment pour les points singuliers d'ordre négatif situés sur le cercle de convergence s'applique presque sans modification dans le cas présent.

Soit, en effet, x_0 un tel point singulier de $f(x)$ situé sur le polygone

de sommabilité. D'après la définition du point singulier d'ordre négatif, on peut écrire

$$f(x) = \varphi(x) + f_1(x),$$

où le rayon de convergence de $\varphi(x)$ est $|x_0|$; donc le point x_0 est sur le cercle de convergence de $\varphi(x)$, et l'ordre de $\varphi(x)$ sur ce cercle entier peut être supposé négatif. D'où il résulte que la série qui représente $\varphi(x)$ converge en les tous points de ce cercle, en particulier au point x_0 , et, d'après le théorème de Cesàro généralisé aux fonctions entières, la limite généralisée des s_n formée en x_0 existe et représente la valeur limite de $\varphi(x)$.

D'autre part, si le point x_0 ne coïncide pas avec un des sommets du polygone, le polygone de sommabilité de $f_1(x)$ comprendra x_0 à son intérieur. Par suite, d'après le théorème de M. Borel, la limite généralisée des s_n formée en x_0 par rapport à la fonction $f_1(x)$ existe et représente la valeur $f_1(x_0)$.

Mais la sommation exponentielle est une opération distributive; donc la somme exponentielle de $f(x)$ est la somme des sommes exponentielles de $\varphi(x)$ et de $f_1(x)$. D'où l'on conclut que la limite généralisée de $f(x)$ formée en x_0 existe et représente la valeur de la fonction $f(x)$ en ce point singulier.

23. Passons maintenant aux points singuliers d'ordre négatif situés sur l'étoile principale de M. Mittag-Leffler. Pour représenter les valeurs de la fonction en ces points, nous nous servirons du développement suivant donné par M. Lindelöf (¹).

Soit donnée une fonction analytique quelconque par son développement taylorien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

et formons les fonctions entières

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{n!} \right)^n,$$

(¹) E. LINDELÖF, *Calcul des résidus*, 1905, p. 123.

où $a > 0$. M. Lindelöf démontre qu'en tous les points situés à l'intérieur de l'étoile

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F_a(x) = f(x),$$

et que les fonctions entières $F_a(x)$ convergent uniformément vers la fonction $f(x)$ dans une aire quelconque intérieure à l'étoile. C'est le théorème déjà classique de M. Mittag-Leffler sur la représentation des fonctions analytiques sous une forme très simple.

Soit maintenant x_0 un point singulier d'ordre négatif, situé à l'origine d'une demi-droite exclue. D'après la définition de ces points singuliers,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où $f_1(x)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$ et où l'étoile de $f_2(x)$ contient à son intérieur le point x_0 . Donc

$$(29) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F_a^{(2)}(x_0) = c_0 + \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{x_0}{1} \right)^n = f_2(x_0).$$

Démontrons que de même

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F_a^{(1)}(x_0) = b_0 + \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{x_0}{1} \right)^n = f_1(x_0).$$

en désignant par $f_1(x_0)$ la valeur de la fonction $f_1(x)$ au point singulier x_0 .

Nous savons que $f_1(x)$ est d'ordre négatif sur le cercle de rayon $|x_0|$ que nous pouvons supposer l'unité pour le moment. Par suite

$$|b_n| < \frac{1}{n^{1+\epsilon}},$$

c'est-à-dire la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$$

est convergente, et pour un ϵ donné arbitrairement on peut trouver un indice k tel que

$$|b_k| + |b_{k+1}| + \dots < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mais

$$n^a > 1,$$

de sorte que

$$(30) \quad \left| \frac{b_k}{k^a} \right| + \left| \frac{b_{k+1}}{(k+1)^a} \right| + \dots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Formons maintenant la différence

$$f_1(x_0) - F_a^{(1)}(x_0).$$

La valeur $f_1(x_0)$ est représentée par la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n,$$

et, d'après (30), la série

$$F_a^{(1)}(x_0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{x_0}{k} \right)^n$$

est convergente aussi. Donc

$$f_1(x_0) - F_a^{(1)}(x_0) = b_2 x_0^2 \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) + b_3 x_0^3 \left(1 - \frac{1}{k^3} \right) + \dots + b_k x_0^k \left(1 - \frac{1}{k^k} \right) + \dots$$

Mais, le module de x_0 étant égal à 1, on a, d'après (30),

$$\left| b_k x_0^k \left(1 - \frac{1}{k^k} \right) + \dots \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour a quelconque.

D'autre part, k étant fixé,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k^a} \right) = 0,$$

de sorte qu'à partir d'une valeur de a

$$1 - \frac{1}{k^a} < \frac{\varepsilon}{2k};$$

donc on a finalement pour α assez grand

$$|f_1(x_0) - F_a^{(1)}(x_0)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_a^{(1)}(x_0) = f_1(x_0);$$

enfin on a

$$F_a(x_0) = F_a^{(1)}(x_0) + F_a^{(2)}(x_0);$$

d'où il résulte que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_a(x_0) = f_2(x_0) + f_1(x_0) = f(x_0),$$

en désignant par $f(x_0)$ la valeur que prend la fonction $f(x)$ en cheminant vers x_0 . Donc :

Les valeurs des fonctions entières $F_a(x)$, prises en un point singulier d'ordre négatif de l'étoile, tendent vers la valeur en ce point de la fonction $f(x)$ représentée par ces fonctions entières.

Par ce résultat, le problème de la représentation de la fonction en ces points singuliers est complètement résolu. Mais remarquons encore que cette représentation peut être effectuée par beaucoup d'autres développements. Par exemple, les autres représentations des fonctions analytiques par des fonctions entières appropriées données par M. Lindelöf ⁽¹⁾ la permettent aussi. Ou bien tout un genre de développements des fonctions analytiques donné par M. Mittag-Leffler ⁽²⁾ rend possible encore cette représentation.

⁽¹⁾ LINDELÖF, *Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique* (Comptes rendus, t. CXXXV, 1902).

⁽²⁾ Nous nous en occuperons tout spécialement à la fin du troisième Chapitre.

CHAPITRE III.

SUR LES POLES ET LES POINTS CRITIQUES ALGÈBRIQUES.

§ VIII. — Étude des pôles sur le cercle de convergence à l'aide des moyennes arithmétiques.

26. Après l'étude des points singuliers d'ordre négatif, passons maintenant à l'étude des points singuliers d'ordre positif. Parmi ces points singuliers, les plus simples et en même temps les plus importants sont les pôles et les points critiques algébriques. Pour commencer, nous les étudierons sur le cercle de convergence, et ensuite nous envisagerons les pôles et les points critiques situés en dehors de ce cercle.

M. Darboux et après lui M. Hadamard (1) ont établi des relations très importantes entre ces singularités situées sur le cercle de convergence et la croissance des modules des coefficients. Nous citerons le théorème de M. Hadamard comme le plus général.

Soit donnée la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que le rayon de convergence de la série de Taylor soit l'unité. Et soit x_0 un pôle d'ordre k de $f(x)$, c'est-à-dire soit

$$f(x) = \frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k} + \dots + \frac{B_1}{1 - \frac{x}{x_0}} + f_1(x),$$

où $f_1(x)$ est holomorphe en x_0 .

Le théorème de M. Hadamard dans notre terminologie s'énonce comme il suit :

(1) *Thèse*, p. 83.

Si l'ordre de la fonction $f(x)$ sur le cercle de convergence est ω ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(\omega - k - 1 + \varepsilon)}}{n^k} = \frac{\Gamma(\omega - k + \varepsilon)}{\Gamma(\omega + \varepsilon)} B_k \quad (\varepsilon > 0),$$

c'est-à-dire les moyennes arithmétiques d'ordre $\omega - k - 1 + \varepsilon$ permettent déjà de calculer le coefficient B_k . En retranchant de la fonction $f(x)$ le terme

$$\frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k},$$

on obtient une fonction dont l'ordre sur le cercle de convergence sera au plus ω ; donc le même théorème, c'est-à-dire les moyennes arithmétiques d'ordre $\omega - k - 1 + \varepsilon$, $\omega + \varepsilon - k$, ..., $\omega + \varepsilon - 2$, permettent de calculer successivement tous les coefficients de la partie principale et de caractériser ainsi complètement la singularité en question.

27. On peut compléter ce théorème de la même manière que M. Fatou a complété le théorème de M. Hadamard relatif aux points réguliers du cercle de convergence cité dans le deuxième Chapitre.

Nous allons démontrer en effet que *la condition*

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^r} = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(r-k)}}{n^k} = \frac{\Gamma(r-k+1)}{\Gamma(r+1)} B_k.$$

Et la condition (31) peut être remplie par une fonction dont l'ordre sur le cercle de convergence est $r+1$, par exemple pour la fonction représentée par

$$\sum \frac{n^r}{\log n} x^n.$$

Donc, dans ce cas, d'après le théorème de M. Hadamard, pour calculer B_k , il faut prendre les moyennes arithmétiques d'ordre $r - k + \varepsilon$, tandis qu'en vérité les moyennes arithmétiques d'ordre $r - k$ suffisent déjà pour atteindre le même but. On voit donc qu'il fallait compléter

l'énoncé du théorème pour arriver à une condition à la fois nécessaire et suffisante.

Au point de vue théorique, cela nous montre clairement que les singularités d'ordre plus élevé se font sentir plus tôt, c'est-à-dire dans des moyennes arithmétiques d'ordre inférieur, que les singularités dont l'ordre est moins élevé ou même que les points réguliers où la détermination de l'allure de la fonction exige l'emploi des moyennes arithmétiques d'ordre r . Cela s'explique par le fait que les moyennes arithmétiques sont déterminées par les coefficients et les coefficients par les singularités et que les singularités d'ordre supérieur ont une plus grande influence sur la formation des coefficients.

Démontrons d'abord l'égalité (32) en supposant que les coefficients satisfassent à la condition (31). On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $x_0 = 1$. Alors nous pouvons écrire

$$f(x) = B_k \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} x^n + B_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k-1)} x^n + \dots + B_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

où les $B_n^{(i)}$ sont les coefficients binomiaux.

Occupons-nous tout d'abord de la fonction représentée par $\sum b_n x^n$.

Évidemment

$$b_n = a_n - [B_k B_n^{(k)} + \dots + B_1].$$

Mais on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n^{(i)}}{n^{i-1}} = \frac{1}{\Gamma(i)}$$

et $r > k - 1$, car autrement la fonction ne pourrait pas avoir un pôle d'ordre k sur le cercle de convergence. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^r} = 0,$$

et la fonction est holomorphe au point 1.

Par suite, d'après le deuxième théorème de M. Hadamard, sous sa forme complétée, se rattachant aux points réguliers du cercle de convergence, les moyennes arithmétiques d'ordre r des

$$s_n^r = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

ont une limite bien déterminée qui est égale à $f_1(1)$.

C'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)} = \lim_{n=\infty} \Gamma(r+1) \frac{S_n^{(r)}}{n^r} = f_1(1),$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$(33) \quad \lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(r)}}{n^r} = \alpha.$$

Mais, d'après la définition des $S_n^{(i)}$, d'une part

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{(1-x)^i} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(i-1)} x^n,$$

par suite

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{(1-x)^i} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} [S_0^{(i-1)} + S_1^{(i-1)} + \dots + S_n^{(i-1)}] x^n,$$

d'autre part

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{(1-x)^{i+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(i)} x^n,$$

d'où il résulte que

$$S_n^{(i)} = S_0^{(i-1)} + S_1^{(i-1)} + \dots + S_n^{(i-1)}.$$

Donc (33) peut s'écrire

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_0^{(r-1)} + S_1^{(r-1)} + \dots + S_n^{(r-1)}}{n^r} = \alpha,$$

c'est-à-dire

$$S_0^{(r-1)} + S_1^{(r-1)} + \dots + S_n^{(r-1)} = (\alpha + \varepsilon_n) n^r,$$

où

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

D'où l'on tire

$$S_n^{(r-1)} = \alpha [n^r - (n-1)^r] + n^r \left[\varepsilon_n - \left(\frac{n-1}{n} \right)^r \varepsilon_{n-1} \right],$$

donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(r-1)}}{n^r} = 0,$$

car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r - (n-1)^r}{n^r} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^r = 0.$$

Nous avons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{u(r-1)}}{n} = 0.$$

Répétons k fois le même raisonnement et nous avons

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{u(r-k)}}{n^k} = 0.$$

Passons maintenant à la partie principale.

On voit aisément que

$$S_n^{(r-k)} = B_k B_n^{(r+1)} + B_{k-1} B_n^r + \dots + B_1 B_n^{(r-k+2)};$$

donc, étant données les propriétés des coefficients binomiaux,

$$\frac{S_n^{(r-k)}}{n^r} = \frac{B_k}{\Gamma(r+1)}.$$

Par conséquent,

$$(35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(r-k)}}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(r-k+1) \frac{S_n^{(r-k)}}{n^{r-k}} \frac{1}{n^k} = \frac{\Gamma(r-k+1)}{\Gamma(r+1)} B_k.$$

Mais enfin

$$s_n^{(r-k)} = s_n^{(r-k)} + s_n^{u(r-k)};$$

donc, en ajoutant (34) et (35), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(r-k)}}{n^k} = \frac{\Gamma(r-k+1)}{\Gamma(r+1)} B_k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Réciproquement, si les moyennes arithmétiques d'ordre $r-k$ permettent de calculer de cette manière le coefficient B_k de la partie principale, les coefficients a_n satisfont à la condition (31). Cela se voit immédiatement si r est un entier, car alors le raisonnement qui nous a conduit à l'équation (34) répété r fois donne justement (31). Dans

le cas où r n'est pas entier, on peut se servir d'un théorème de M. Knopp (1) qui permet d'atteindre facilement l'équation (31).

On pourrait proposer de compléter de la même façon le théorème de M. Hadamard relatif aux points critiques algébriques. Il faudrait établir pour cela quelques lemmes concernant les moyennes arithmétiques d'ordre fractionnaire. Mais nous donnerons dans la suite une relation beaucoup plus générale relative à ces points singuliers à l'aide de la sommation exponentielle, de sorte que nous nous contenterons de cette généralisation faite pour les pôles.

§ IX. — Étude des pôles sur le polygone de sommabilité à l'aide de la sommation exponentielle de M. Borel.

28. Le théorème (32) démontré précédemment ne satisfait pas encore à toutes nos exigences concernant la relation entre la singularité en un point et les propriétés limites des coefficients ou celles des expressions construites à l'aide des coefficients. En effet, les coefficients ne peuvent pas être quelconques; ils sont assujettis à la condition (31) et l'on peut voir aisément que les moyennes arithmétiques d'ordre quelconque ne sont pas propres à donner de telles relations sans aucune restriction aux coefficients. En effet, comme nous l'avons remarqué déjà, d'après la loi de leur formation,

$$S_n^{(r)} = S_0^{(r-1)} + S_1^{(r-1)} + \dots + S_n^{(r-1)}.$$

D'où il résulte que si pour un p et un r , d'ailleurs quelconques, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(p)}}{n^r} = 0,$$

ce qui arrive nécessairement si l'on envisage par exemple les pôles, les points critiques algébriques ou les points critiques logarithmiques, c'est-à-dire si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(p)}}{n^{r-p}} = 0.$$

(1) KNOPP, *Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung* (*Rendiconti di Palermo*, t. XXV, 1908).

ou, ce qui revient au même,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(p)}}{n^k} = 0,$$

où k est un entier plus grand que $r + p$, on en peut toujours conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(p-1)}}{n^k} = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^k} = 0.$$

Donc les coefficients a_n sont assujettis à une condition toute semblable à (31).

29. La méthode qui nous a déjà permis, dans le cas des points singuliers d'ordre négatif, d'obtenir des relations entre les coefficients et les singularités sans aucune restriction aux coefficients, c'est-à-dire d'envisager la singularité de la fonction donnée en un point indépendamment des autres singularités de la même fonction, était la méthode de sommation exponentielle de M. Borel. En outre, comme nous l'avons vu, la portée de cette méthode dépasse le cercle de convergence, de sorte qu'elle permet d'envisager les singularités situées sur le polygone de sommabilité.

C'est donc cette méthode dont nous allons nous servir pour caractériser les pôles situés sur le cercle de convergence ou plus généralement sur le polygone de sommabilité dans le cas des coefficients quelconques.

Soit donc donnée la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

par une série de Taylor à rayon de convergence fini, non nul.

Soit x_0 un pôle d'ordre k de cette fonction situé sur le polygone de sommabilité (sommets exclus). On a par conséquent

$$(36) \quad f(x) = \frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k} + \frac{B_{k-1}}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{k-1}} + \dots + \frac{B_1}{1 - \frac{x}{x_0}} + f_1(x),$$

où la fonction

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est déjà holomorphe en x_0 et ce point est à l'intérieur du polygone de sommabilité de $f_1(x)$.

En effet, par hypothèse, x_0 est sur un côté du polygone de sommabilité de $f(x)$ et non sur un sommet; donc il y a deux lignes coupant ce côté et déterminant ainsi un segment qui contient le point x_0 et qui n'est plus rencontré par aucune ligne. Si l'on supprime le pôle, on supprime ce segment, car, pour construire le polygone nouveau, il faut tracer les mêmes lignes, sauf la ligne qui dérive du pôle supprimé et qui contient ce segment. Donc le segment entier, par suite aussi le point x_0 , tombe à l'intérieur du polygone de sommabilité de $f_1(x)$.

Donc, d'après le théorème de M. Borel, on a

$$(37) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} S'(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s'_n \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}} = f_1(x_0),$$

en désignant par s'_n

$$s'_n = b_0 + b_1 x_0 + \dots + b_n x_0^n.$$

30. Formons maintenant les sommes exponentielles $S_i(a)$ en x_0 relatives à la fonction

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^i}.$$

On sait que les s_n de cette fonction au point x_0 sont

$$\frac{(n+i)(n+i-1)\dots(n+1)}{i!},$$

donc

$$S_i(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+i)(n+i-1)\dots(n+1) \frac{a^n}{n!}}{i! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}}.$$

Mais on voit aisément que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+i)(n+i-1)\dots(n+1) \frac{a^n}{n!} = \frac{d^i}{da^i} (a^i e^a),$$

de sorte que

$$S_i(a) = \frac{\frac{d^i}{da^i} (a^i e^a)}{i! e^a}.$$

Dans l'expression

$$\frac{d^i}{da^i} (a^i e^a),$$

il y a un nombre fini de termes qui, tous, contiennent e^a comme facteur, et le multiplicateur de e^a est un polynome de degré i en a , où le terme de degré i est a^i .

D'où il résulte

$$(38) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_i(a)}{a^i} = \frac{1}{i!}.$$

Formons maintenant la somme exponentielle de $f(x)$. D'après (36), si l'on désigne cette somme par $S(a)$,

$$S(a) = B_k S_k(a) + B_{k-1} S_{k-1}(a) + \dots + B_1 S_1(a) + S'(a).$$

D'après (38), pour $i < k$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_i(a)}{a^k} = 0,$$

et, pour $i = k$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_k(a)}{a^k} = \frac{1}{k!}.$$

D'autre part, d'après (37),

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S'(a)}{a^k} = 0.$$

D'où l'on conclut que

$$(39) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a^k} = \frac{B_k}{k!},$$

C'est la relation cherchée. On voit donc que la somme exponen-

tielle permet de calculer, dans le cas où les coefficients sont quelconques, les coefficients de la partie principale.

En effet, après avoir calculé B_k par la formule (39), on retranche de $f(x)$ la quantité

$$\frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k},$$

et l'on applique de nouveau le théorème aux pôles d'ordre $k - 1$, et ainsi de suite.

Remarquons encore que le raisonnement subsiste entièrement si la fonction $f_1(x)$ n'est pas holomorphe en x_0 , mais y est d'ordre négatif.

En effet, nous avons démontré qu'en un tel point situé sur le polygone de sommabilité la limite généralisée existe (p. 65), c'est-à-dire qu'on a toujours

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'(a) = f_1(x_0),$$

par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S'(a)}{n^k} = 0,$$

et c'est cette équation dont nous nous sommes servis pour démontrer la relation (39).

Cette remarque nous sera utile dans l'étude des points critiques algébriques situés sur le polygone de sommabilité.

§ X. — Étude des pôles à l'aide des sommes exponentielles généralisées de M. Hanni et de celles de M. Borel.

31. La relation trouvée entre les pôles et la somme exponentielle est absolument générale en ce qui concerne les coefficients de la série de Taylor donnée d'avance. Mais elle ne s'applique pas aux pôles situés en dehors du polygone de sommabilité, et cela est bien naturel, étant donné que la somme exponentielle formée en un point à l'extérieur du polygone n'a pas de limite, même si le point envisagé est un point régulier de la fonction. En particulier, la somme exponentielle peut devenir infinie sans qu'on en puisse conclure qu'il en est de même pour la fonction $f(x)$.

Il est donc indispensable, pour pousser plus loin nos recherches, de

recourir aux développements de la fonction donnée $f(x)$ qui représentent cette fonction dans un domaine plus étendu que le polygone de sommabilité ou, en d'autres termes, dont le domaine de sommabilité dépasse celui de la sommation exponentielle.

Mais il y a une remarque à faire.

Les développements dont les domaines de sommabilité sont de plus en plus larges deviennent en même temps de plus en plus compliqués.

En effet, si je me donne au hasard un développement quelconque de M. Mittag-Leffler qui représente la fonction $f(x)$ par une suite de polynômes, il est presque impossible de calculer par exemple les valeurs de ces polynômes en un pôle pour déterminer le degré d'infinitude du développement en ce point. Ou bien, ce qui est beaucoup plus important encore au point de vue théorique, je peux supprimer ou intercaler une infinité de polynômes de la suite et modifier ainsi arbitrairement le degré d'infinitude du développement sans changer le caractère de la représentation.

Par suite, il ne nous semble pas inutile d'envisager aussi les développements qui, tout en ayant un domaine de sommabilité moins étendu que l'étoile, sont assez simples pour permettre d'obtenir des résultats précis et simples.

52. Telle est par exemple la généralisation qu'a donné M. Hanni (1) de la méthode de sommation exponentielle exposée plus haut.

Posons

$$B_1(a) = S(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

$$B_2(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_1(n) \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

.....

(1) HANNI, *Ueber die Beziehung zwischen der Darstellung*, etc. (*Acta mathematica*, t. XXIX, 1905).

et

$$B_r(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_{r-1}(n) \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}}.$$

M. Henni a déterminé les domaines de sommabilité de ces développements, et il a trouvé que, dans des cas assez étendus, ces domaines dépassent le polygone de sommabilité sans atteindre, en général, l'étoile.

Soit maintenant x_0 un pôle d'ordre k , et supposons que le domaine de sommabilité de $B^{(r)}(a)$ construit pour la fonction

$$f_1(x) = f(x) - \left[\frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k} + \frac{B_{k-1}}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{k-1}} + \dots + \frac{B_1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right]$$

contienne x_0 à son intérieur, c'est-à-dire qu'on ait

$$(40) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} B^{(r)}(a) = f_1(x_0).$$

Déterminons maintenant l'ordre de grandeur pour $a = \infty$ de $B_k^{(r)}(a)$ construit en x_0 pour

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k}.$$

Tout d'abord, d'après (39), nous savons que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{B_k^{(1)}(a)}{a^k} = \frac{1}{k!}.$$

Calculons $B_k^{(2)}(a)$. Étant donné que

$$s_n = \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}{k!},$$

on a

$$B_k^{(1)}(a) = \frac{e^{-a}}{k!} \frac{d^k}{da^k} (a^k e^a) = \frac{1}{k!} P_k(a),$$

où $P_k(a)$ est un polynôme dont le terme de degré maximum est a^k .

Donc

$$B_k^{(2)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_k(n) \frac{a^n}{n!}}{k! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

et, d'après le théorème de Cesàro généralisé pour les fonctions entières,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum P_k(n) \frac{a^n}{n!}}{\sum (n+k) \dots (n+1) \frac{a^n}{n!}} = 1,$$

car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{(n+k) \dots (n+1)} = 1,$$

d'où il résulte que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{B_k^{(2)}(a)}{a^k} = \frac{1}{k!}.$$

Le même raisonnement s'applique pour r quelconque. D'où l'on conclut que (40) peut s'écrire

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ B^{(r)}(a) - [B_k B_k^{(r)}(a) + \dots + B_1 B_1^{(r)}(a)] \right\} = f_1(x_0),$$

où $B^{(r)}(a)$ signifie la r -ième somme exponentielle formée pour $f(x)$. En divisant par a^k , on obtient

$$(41) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{B^{(r)}(a)}{a^k} = \frac{B_k}{k!}.$$

Par conséquent, les sommes exponentielles généralisées de M. Hanni ont la même relation simple avec les pôles que la somme exponentielle même de M. Borel.

33. Passons maintenant aux sommes exponentielles généralisées par M. Borel (1). Cette généralisation est caractérisée par le fait qu'au

(1) BOREL, *Sur les séries divergentes*, 1901, p. 129.

lieu de e^x on emploie pour fonction sommatrice e^{rx} ; en d'autres termes, on forme les moyennes

$$S^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) \frac{a^{rn}}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!}},$$

et l'on envisage la limite de cette expression pour $a = \infty$, r étant un entier positif.

M. Borel démontre qu'en général le domaine de sommabilité de ces sommes exponentielles généralisées dépasse beaucoup le polygone de sommabilité. Par exemple, si la fonction $f(x)$ n'a qu'un nombre limité de points singuliers dans toute aire finie, la méthode exponentielle généralisée permet de calculer la valeur de la fonction en un point régulier aussi voisin qu'on veut d'un point quelconque du plan complexe. Il est donc bien naturel d'étendre nos résultats à cette méthode de sommation si efficace et en même temps si simple.

Soit x_0 un pôle d'ordre k , et supposons que le domaine de sommabilité de $S^{(r)}(a)$, construit pour la fonction

$$f_1(x) = f(x) - \left[\frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k} + \dots + \frac{B_1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right],$$

contienne x_0 à son intérieur; en d'autres termes, soit

$$(42) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} S^{(r)}(a) = f_1(x_0).$$

D'autre part, on sait que les s_n de

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k}$$

sont

$$s_n = \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}{k!},$$

de sorte que la somme exponentielle d'ordre r de ce terme prin-

cipal est

$$S_k^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (rn+k)(rn+k-1)\dots(rn+1) \frac{a^{rn}}{n!}}{k! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Par conséquent, comme auparavant,

$$S_k^{(r)}(a) = \frac{d^k}{da^k} (a^k e^{ar})}{k! e^{ar}}.$$

Si l'on effectue maintenant la différentiation indiquée, on obtient un nombre fini de termes qui contiennent e^{ar} comme facteur et l'on voit aisément que le dernier est multiplié par un polynôme de degré rk , de sorte que

$$S_k^{(r)}(a) = \frac{P_{rk}(a)}{k!}.$$

On détermine ensuite facilement le coefficient du terme de degré rk ; ce calcul donne

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{P_{rk}(a)}{a^{rk}} = rk.$$

Donc, pour $i < k$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_i^{(r)}(a)}{r^k a^{rk}} = 0,$$

et, pour $i = k$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_k^{(r)}(a)}{r^k a^{rk}} = \frac{1}{k!}.$$

Désignons enfin par $S^{(r)}(a)$ la somme exponentielle d'ordre r formée pour $f(x)$. Avec cette notation, (42) nous donne

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left[S^{(r)}(a) - [B_k S_k^{(r)}(a) + B_{k-1} S_{k-1}^{(r)}(a) + \dots + B_1 S_1^{(r)}(a)] \right] = f_1(x_0).$$

D'où il suit immédiatement que

$$(43) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S^{(r)}(a)}{r^k a^{rk}} = \frac{B_k}{k!}.$$

Par conséquent, les sommes exponentielles généralisées de M. Borel sont en relation simple avec les pôles, et cette relation

ressemble beaucoup à celle donnée par la méthode exponentielle qui a pour fonction sommatrice e^a .

Remarquons qu'ici le degré d'infinitude des sommes envisagées n'est plus égal au degré du pôle. On voit dans quelle mesure l'emploi de la fonction exponentielle elle-même rend possible d'obtenir des résultats à la fois généraux et simples. Si l'on prend pour fonction sommatrice des fonctions plus compliquées que e^a malgré qu'elles s'en approchent dans leur formation, les résultats deviendront aussi de plus en plus compliqués. Cela ressortira mieux encore en nous servant du développement de M. Mittag-Leffler.

§ XI. — Étude des pôles à l'aide de la représentation des fonctions analytiques donnée par M. Mittag-Leffler.

34. Remarquons tout d'abord que, théoriquement, le théorème déjà classique de M. Mittag-Leffler sur la représentation d'une fonction analytique par une suite de polynômes ou, plus généralement, par une suite de fonctions entières, permet d'étudier les points singuliers situés sur la frontière de l'étoile principale, car il nous donne les valeurs de la fonction dans des points réguliers qui tendent vers ces points. Et, de plus, les fonctions $F_a(x)$ qui, pour $a = \infty$, s'approchent indéfiniment de la fonction analytique donnée $f(x)$, sont des polynômes ou des fonctions entières de x ; par conséquent, chacune de ces fonctions a une valeur bien déterminée dans tous les points du plan complexe.

En un point x_0 , situé à l'intérieur de l'étoile, nous avons, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler,

$$\lim_{a=\infty} F_a(x_0) = f(x_0).$$

Soit maintenant x_0 un point singulier situé sur la frontière de l'étoile ou, plus particulièrement, soit x_0 l'origine d'une demi-droite exclue. Un problème général se pose :

Quelles relations existent entre la suite

$$(44) \quad \lim_{a=\infty} F_a(x_0)$$

et la structure de la singularité au point x_0 ?

Nous avons vu dans le deuxième Chapitre que, si le point x_0 est un point singulier d'ordre négatif et si l'on prend par exemple la représentation des fonctions analytiques donnée par M. Lindelöf, la suite (44) a une limite bien déterminée, et cette limite est la valeur vers laquelle tend la fonction en cheminant vers le point singulier x_0 . Ce que nous pouvons écrire

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F_a(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

et cette relation est, en quelque sorte, l'extension à l'étoile d'un théorème d'Abel.

Supposons maintenant que x_0 soit un pôle de la fonction $f(x)$. Est-ce qu'en choisissant une représentation déterminée, la croissance de la suite (44) est en rapport avec la croissance de la fonction au voisinage du point x_0 , et, de plus, est-ce qu'elle permet de déterminer les coefficients de la partie principale, c'est-à-dire de caractériser complètement la singularité?

Nous allons voir que la réponse est affirmative.

§3. Pour cela, exposons brièvement la représentation d'une fonction analytique par une suite de fonctions entières donnée par M. Mittag-Leffler dans sa cinquième Note (1).

Soit

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° $E(x)$ a pour limite 0 quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque autre que l'axe réel positif, tandis qu'elle est positive et tend vers l'infini quand x tend vers l'infini le long de l'axe réel positif.

2° ω étant positif,

$$(45) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{E(\omega x)}{E(\omega)} = 0,$$

(1) MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (5^e Note) (*Acta mathematica*, t. XXIX, 1905, p. 173).

d'une manière uniforme, tant que x appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel compris entre $x = 1$ et $+\infty$.

Soit $f_A(x)$ la branche de $f(x)$ définie par l'équation

$$f_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dans le cercle de convergence de la série et par le prolongement analytique de $\sum a_n x^n$ à l'intérieur de l'étoile.

Soit enfin

$$s_n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

D'après le théorème de M. Mittag-Leffler,

$$(46) \quad f_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n x_n a^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x_n a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} M(a).$$

On peut considérer ce résultat comme la généralisation de la méthode exponentielle de M. Borel où l'on emploie pour fonction sommatrice, au lieu de e^a , la fonction entière $E(a)$.

Pour fonction sommatrice, on peut prendre par exemple la fonction entière

$$(47) \quad E_{\beta}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a}{\log(n + \beta)} \right]^n \quad (\beta > 1).$$

étudiée par M. Lindelöf.

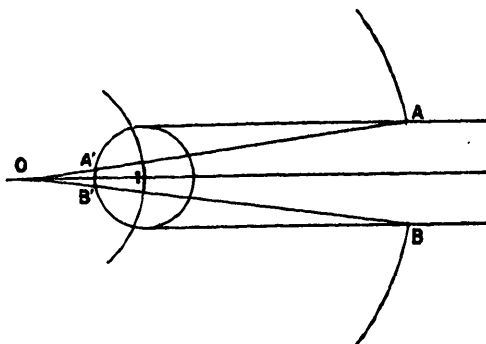
56. Nous allons démontrer en effet qu'une fonction entière $E(a)$ ayant tous ses coefficients positifs et tendant uniformément vers 0 avec $\frac{1}{a}$ dans l'angle

$$(48) \quad \varepsilon < \theta < 2\pi - \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε , satisfait toujours à la deuxième condition (elle satisfait évidemment à la première).

Soit donné en effet un domaine fini A , de x , situé en dehors de la

partie de l'axe réel compris entre $x = 1$ et $+\infty$. On peut toujours tracer un cercle de rayon suffisamment grand, en particulier plus grand que l'unité, pour que le domaine entier soit intérieur à ce cercle.



Entourons d'autre part le segment $1 - +\infty$ d'une bande assez étroite $AA'B'B$, de façon que le domaine donné soit à l'extérieur de cette bande.

Partageons A en deux parties : l'une A_1 , extérieure à l'angle AOB , l'autre A_2 intérieure à $A'OB'$.

Par hypothèse, en choisissant ε plus petit que l'angle AOB , d'après (48),

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} E(\omega x) = 0$$

d'une manière uniforme, quand x varie dans A_1 , car avec x la quantité ωx est aussi extérieure à l'angle AOB . *A fortiori*

$$\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$$

tend uniformément vers 0 pour $\omega = +\infty$ dans toute aire finie extérieure à l'angle AOB , en particulier dans le domaine A_1 .

Envisageons maintenant A_2 , c'est-à-dire la partie de A qui est située dans l'aire limitée par OA' , OB' et par l'arc du cercle $A'B'$.

Le plus grand module de x dans A_2 est le module de A' (ou celui de B'), de sorte que dans ce domaine

$$|x| < \overline{OA'} = b < 1.$$

D'où il résulte que

$$|E(\omega x)| < E(\omega b),$$

car les coefficients de $E(x)$ sont positifs.

Ou encore

$$\frac{|E(\omega x)|}{E(\omega)} < \frac{E(\omega b)}{E(\omega)}$$

pour un x quelconque pris dans A_2 .

Appliquons maintenant le théorème de Cesàro, généralisé pour les fonctions entières, aux deux fonctions

$$E(\omega b) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n b^n \omega^n$$

et

$$E(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \omega^n.$$

On obtient

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega b)}{E(\omega)} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n b^n}{\alpha_n} = 0,$$

car $b < 1$.

D'où l'on conclut que

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega x)}{E(\omega)} = 0,$$

d'une manière uniforme dans l'aire $A'OB'$.

En joignant les résultats qui concernent les aires A_1 et A_2 , on voit que la fonction entière $E(\alpha)$ remplit bien la condition (45); donc elle peut servir comme fonction sommatrice dans le théorème indiqué de M. Mittag-Leffler.

Par exemple, M. Lindelöf a démontré que la fonction entière (47) tend uniformément vers zéro dans tout angle satisfaisant à la condition (48). Par suite, d'après le raisonnement précédent, cette fonction entière peut être employée vraiment comme fonction sommatrice. Cela nous assure que les conditions exigées par le raisonnement ne sont pas contradictoires et qu'il y a bien des fonctions entières remplissant nos conditions.

37. Cela posé, supposons que x_0 soit un pôle d'ordre k , situé à l'ori-

gine d'une demi-droite exclue, de la fonction analytique définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

et représentée à l'intérieur de son étoile principale par

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^a s_n(x) \alpha_n a^n}{\sum_{n=0}^a \alpha_n a^n} = \lim_{a \rightarrow \infty} M(a).$$

Par hypothèse, la différence

$$f_1(x) = f(x) - \left[\frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k} + \dots + \frac{B_1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est une fonction holomorphe en x_0 et son étoile principale contient ce point à son intérieur.

Par suite, si l'on pose

$$s'_n = b_0 + b_1 x_0 + \dots + b_n x_0^n,$$

on a

$$(49) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} M'(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^a s'_n \alpha_n x^n}{\sum_{n=0}^a \alpha_n x^n} = f_1(x_0).$$

Calculons maintenant la somme correspondante $M_k(a)$ formée au point x_0 pour la fonction

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k}.$$

On obtient, comme auparavant,

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) \alpha_n a^n}{k! \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n} = \frac{\frac{d^k}{da^k} [a^k E(a)]}{k! E(a)}.$$

Effectuons la différentiation; nous aurons des termes

$$c_i a^{k-i} E^{(k-i)}(a),$$

où i prend les valeurs 0, 1, ..., k .

Le terme $i = 0$ est plus grand que tous les autres. En effet,

$$E^{(k-i)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-i)(n+k-i-1)\dots(n+1)\alpha_{n+k-i}a^n,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a^{k-i} E^{(k-i)}(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-i)\dots(n+1)\alpha_{n+k-i}a^{n+k-i} \\ &= \sum_{n=i}^{\infty} (n+k)\dots(n+i+1)\alpha_{n+k}a^{n+k}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$a^k E^{(k)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)\dots(n+1)\alpha_{n+k}a^{n+k},$$

de sorte que, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^{k-i} E^{(k-i)}(a)}{a^k E^{(k)}(a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+k)\dots(n+i+1)\alpha_{n+k}}{(n+k)\dots(n+i+1)\dots(n+1)\alpha_{n+k}} = 0.$$

En remarquant encore que $c_0 = 1$, nous pouvons donc écrire

$$\frac{d^k}{da^k} [a^k E(a)] = a^k E^{(k)}(a) [1 + \varepsilon_k(a)],$$

où

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \varepsilon_k(a) = 0.$$

38. Écrivons maintenant l'équation (49) d'une manière explicite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} M'(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} [M(a) - B_k M_k(a) - \dots - B_1 M_1(a)] = f_1(x_0),$$

et remplaçons les sommes $M_i(a)$ par leurs valeurs trouvées précédemment

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ M(a) - \left[\frac{B_k a^k E^{(k)}(a)}{k! E(a)} + \frac{B_{k-1} a^{k-1} E^{(k-1)}(a)}{(k-1)! E(a)} + \dots + \frac{B_1 a E^{(1)}(a)}{1! E(a)} + r(a) \right] \right\} = f_1(x_0)$$

avec

$$\lim_{a=\infty} \eta(a) = 0.$$

Mais le raisonnement précédent nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{B_k a^k E^{(k)}(a)}{k!} + \frac{B_{k-1} a^{k-1} E^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} + \dots + \frac{B_1 a E^{(1)}(a)}{1!} \\ &= \frac{B_k a^k E^{(k)}(a)}{k!} [1 + \eta_1(a)], \end{aligned}$$

où

$$\lim_{a=\infty} \eta_1(a) = 0,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$(50) \quad \lim_{a=\infty} \left\{ M(a) - \frac{B_k a^k E^{(k)}(a)}{k! E(a)} [1 + \varepsilon(a)] \right\} = f_1(x_0),$$

et l'on démontre aisément que

$$(51) \quad \lim_{a=\infty} \frac{a^k E^{(k)}(a)}{E(a)} = +\infty.$$

Posons enfin

$$\frac{E^{(k)}(a)}{E(a)} = f_k(a),$$

où les fonctions $f_k(a)$ sont déterminées par la fonction sommatrice indépendamment de la fonction $f(x)$, et divisons les deux membres de l'égalité (50) par $a^k f_k(a)$.

D'après (51), le second membre tend vers zéro pour $a = \infty$. D'où l'on conclut que

$$(52) \quad \lim_{a=\infty} \frac{M(a)}{a^k f_k(a)} = \frac{B_k}{k!}.$$

Et c'est la relation générale entre les pôles et les sommes générales de *M. Mittag-Leffler*. Ces sommes $M(a)$ sont déterminées par les coefficients a_n de la série de Taylor qui définit la fonction $f(x)$; de sorte que l'équation (52) nous donne la relation générale entre les pôles situés sur l'étoile (à l'origine des demi-droites exclues) et les coefficients du développement taylorien donné d'avance.

Ou bien, $M(a)$, pour $a = \infty$, étant la valeur au point x_0 des fonctions entières $F_a(x)$ qui s'approchent indéfiniment de la fonction $f(x)$

à l'étoile, (52) peut s'écrire

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{F_a(x_0)}{a^k f_k(a)} = \frac{B_k}{k!}.$$

Donc la suite

$$(44) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F_a(x_0),$$

formée en un pôle, est en rapport direct avec la nature de la singularité envisagée. Elle nous décèle le degré du pôle et permet de déterminer successivement les coefficients B_k de la partie principale, donc de caractériser complètement la singularité en question.

Si l'on emploie pour fonction sommatrice la fonction $E_\beta(a)$ de M. Lindelöf, on peut voir aisément que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f_k(a) = \infty,$$

donc le degré d'infinitude de la suite (44), tout en déterminant celui de la fonction, le dépasse, car en x_0 la fonction devient infinie d'ordre k .

Remarquons enfin que, comme nous l'avons vu, c'est l'analogie complète du développement de M. Mittag-Leffler avec la somme exponentielle de M. Borel qui a rendu possible la démonstration du théorème (52).

§ XII. — De la croissance des fonctions entières.

39. Passons maintenant aux points critiques algébriques d'ordre positif, où par suite le degré d'infinitude de la fonction est un nombre positif quelconque. Dans ces recherches, nous avons besoin de quelques résultats relatifs à la croissance des fonctions entières qui représentent la fonction donnée.

Examinons tout d'abord la fonction exponentielle pour montrer l'idée fondamentale de la méthode employée.

Soit donc donné

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

M. Borel (1) a remarqué que l'ordre de grandeur d'une fonction entière

(1) BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 58.

à coefficients positifs ne dépend pas également de tous les termes de la série; au contraire, si l'on n'exige pas une évaluation très précise, un ou quelques-uns de ces termes, qui s'éloignent d'ailleurs à l'infini pour $a = \infty$, donnent déjà l'ordre de grandeur de la fonction.

Nous allons développer cette idée pour évaluer exactement le degré d'infinitude de certaines fonctions entières à coefficients positifs.

Soit k un nombre positif supérieur à 1, et désignons par b la partie entière de $\frac{a}{k}$, de sorte que

$$\frac{a}{k} = b + \eta,$$

où

$$0 \leq \eta < 1.$$

Je dis que la somme des b premiers termes du développement de e^a divisés par e^a tend vers zéro pour $a = \infty$.

En effet, pour un a quelconque, les deux plus grands termes de la série envisagée sont ceux dont les indices sont $a - 1$ et a ; par suite,

$$A(a) = 1 + \frac{a}{1!} + \dots + \frac{a^b}{b!} < b \frac{a^b}{b!}.$$

Appliquons maintenant la formule de Stirling sous sa forme

$$(53) \quad b! = \eta(b) (b+1)^{b+\frac{1}{2}} e^{-(b+1)},$$

où

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \eta(b) = \sqrt{2\pi}.$$

Nous avons

$$\frac{A(a)}{e^a} < b \frac{a^b}{\eta(b) (b+1)^{b+\frac{1}{2}} e^{-(b+1)+a}}.$$

Et

$$(54) \quad \frac{A(a)}{e^a} < \frac{bk^b}{\eta(b) (b+1)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{a}{k}-\eta+1\right)+a}};$$

car

$$a < k(b+1).$$

Regardons maintenant le quotient

$$\frac{k^b}{e^{\frac{a}{k}}} = k^{-\eta} \frac{k^{\frac{a}{k}}}{e^{\frac{a}{k}}}.$$

Pour que ce rapport tende vers zéro, il suffit que

$$\frac{k}{e^{k-1}} < 1,$$

ce qui est évident, étant donné que

$$e^{k-1} = 1 + k - 1 + \frac{(k-1)^2}{2!} + \dots$$

Posons

$$\frac{k^{\frac{1}{k}}}{e^{\frac{k-1}{k}}} = c,$$

dont nous savons que

$$0 < c < 1.$$

L'inégalité (54) peut donc s'écrire

$$\frac{A(a)}{e^a} < B(a) c^a,$$

où

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{B(a)}{a} = 0.$$

D'où l'on conclut que, r étant un nombre quelconque,

$$(55) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^r A(a)}{e^a} = 0.$$

40. Examinons maintenant les termes du développement e^a dont les indices sont supérieurs ou égaux à la partie entière de ak .

Je dis que la somme de ces termes divisée par e^a tend aussi vers zéro.

Désignons par b la partie entière de ak de sorte que

$$ak = b + \eta,$$

où

$$0 \leq \eta < 1.$$

Écrivons la somme envisagée sous la forme

$$B(a) = \frac{a^b}{b!} \left(1 + \frac{a}{b+1} + \frac{a}{b+1} \frac{a}{b+2} + \dots \right),$$

et remarquons que

$$ka < b + 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b+1} < \frac{1}{k},$$

et *a fortiori*

$$\frac{a}{b+i} < \frac{1}{k}.$$

D'où il résulte que

$$B(a) < \frac{\alpha^b}{b!} \frac{k}{k-1}.$$

Appliquons de nouveau la formule de Stirling sous la forme (53)

$$B(a) < \frac{k}{k-1} \frac{\alpha^b}{\eta(b)(b+1)^{b+\frac{1}{2}} e^{-(b+1)}}$$

et

$$\frac{B(a)}{e^a} < \frac{k}{k-1} \frac{1}{\eta(b)(b+1)^{\frac{1}{2}} k^b e^{-(ak-\eta+1)+a}},$$

car

$$a < \frac{b+1}{k}.$$

Démontrons que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{a(k-1)}}{k^{ak}} = 0;$$

pour cela, il suffit que

$$\frac{e^{k-1}}{k^k} < 1.$$

41. On peut vérifier cette inégalité de la façon suivante :

Écrivons-la sous la forme

$$e^{k-1} < k^k,$$

et prenons le logarithme des deux membres

$$(56) \quad k-1 < k \log k.$$

Il suffit, évidemment, de vérifier cette inégalité plus simple.

Au point $k = 1$, les deux fonctions de k ,

$$k-1 \quad \text{et} \quad k \log k,$$

prennent toutes deux la valeur zéro. Dans le point $k = e$, la fonction $k \log k$ est supérieure (de l'unité) à la fonction $k-1$. Donc, si pour $k > 1$, l'iné-

galité (56) cessait d'être vérifiée, la dérivée de la fonction

$$k \log k - (k - 1)$$

devrait avoir une racine supérieure à 1. Mais cette dérivée est justement $\log k$.

Donc on peut poser

$$\frac{e^{k-1}}{k^k} = c$$

avec

$$c < 1.$$

Par suite, nous concluons comme auparavant que, r étant un nombre quelconque,

$$(57) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^r B(a)}{e^a} = 0.$$

Remarquons que l'on peut démontrer de la même manière que le terme maximum, et, par suite, la somme d'un nombre fini de termes divisée par e^a tend aussi vers zéro. L'ordre de grandeur de e^a n'est donc déterminé exactement que par un nombre toujours croissant de termes, et nous avons essayé de réduire le nombre des termes importants au strict minimum.

42. A l'aide de ces considérations, nous allons démontrer le théorème suivant :

Soit donnée la fonction entière

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n) a^n}{n!},$$

où

$$(58) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^p} = \alpha,$$

p étant un nombre réel quelconque. *L'ordre de grandeur de la fonction $f(a)$ est déterminé d'une manière très précise par l'équation*

$$(59) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^p e^a} = \alpha.$$

En effet, d'après la condition (58),

$$\varphi(n) = \alpha n^p + \varepsilon_n n^p$$

avec

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

Par suite,

$$f(a) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^p \frac{a^n}{n!}$$

et, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^p \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Il suffit donc de déterminer l'ordre de grandeur de la fonction

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p a^n}{n!}.$$

Pour cela, nous allons étendre à cette fonction les résultats acquis tout à l'heure, relatifs à la fonction exponentielle.

Regardons, tout d'abord, la somme $A'(a)$ des b premiers termes, b étant la partie entière de $\frac{a}{k}$ et $k > 1$. Une limite supérieure de ces termes est

$$b!^p \frac{a^b}{b!};$$

donc

$$A'(a) < b!^p A(a);$$

par suite encore, d'après (55),

$$(60) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{A'(a)}{e^a} = 0.$$

43. Prenons ensuite la somme $B'(a)$ des termes dont les indices sont égaux ou supérieurs à ka , et soit de nouveau b la partie entière de ka .

On a

$$B'(a) = \frac{a^b}{b!} \left[b^p + (b+1)^p \frac{a}{b+1} + (b+2)^p \frac{a}{b+1} \frac{a}{b+2} + \dots \right].$$

Soit μ un entier plus grand que $|p|$, et laissons de côté les 4μ premiers termes de $B'(a)$. Cela est permis, car nous avons démontré que la somme d'un nombre fini de termes du développement de e^a divisé par e^a tend vers zéro, comme un nombre inférieur à 1 élevé à la puissance a .

Regardons maintenant le $(4\mu + 1)^{\text{ième}}$ terme de la parenthèse en remplaçant p par le nombre plus grand μ . Ce terme est

$$\frac{a^{4\mu} (b + 4\mu)^\mu}{(b+1) \dots (b+2\mu) \dots (b+4\mu)}.$$

Étant donné que, pour $r > 2\mu$,

$$b + 2\mu + r < (b+r)^2,$$

on a

$$\frac{b + 4\mu}{(b + 2\mu + r)(b + 2\mu + r - 1)} < 1,$$

de sorte que

$$\frac{(b + 4\mu)^\mu}{(b + 2\mu + 1) \dots (b + 4\mu)} < 1.$$

On peut donc écrire

$$B'(a) < P_{4\mu}(a) + \frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!} \left(1 + \frac{a}{b+2\mu+1} + \frac{a}{b+2\mu+1} \frac{a}{b+2\mu+2} + \dots \right)$$

et

$$B'(a) < P_{4\mu}(a) + \frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!} \frac{k}{k-1},$$

où

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{P_{4\mu}(a)}{e^a} = 0.$$

Mais

$$\frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!} \leq \frac{a^{2\mu} a^b}{b!},$$

d'où il résulte, comme auparavant, que

$$(61) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{B'(a)}{e^a} = 0.$$

Il suffit donc, pour envisager l'ordre de grandeur de la fonction entière

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n \frac{a^n}{n!},$$

de considérer les termes dont les indices sont supérieurs à $\frac{a}{k}$ et inférieurs à ak , k étant un nombre supérieur à l'unité.

44. On voit ainsi facilement qu'en désignant cette partie du développement par $C'(a)$ et la partie correspondante du développement de e^a par $C(a)$, on a pour $p > 0$

$$\left(\frac{a}{k}\right)^p C(a) < C'(a) < (ak)^p C(a).$$

Donc

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{f_1(a)}{a^p e^a} = \limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{A'(a) + B'(a) + C'(a)}{a^p e^a} \leq k^p$$

et

$$\liminf_{a \rightarrow \infty} \frac{f_1(a)}{a^p e^a} = \liminf_{a \rightarrow \infty} \frac{A'(a) + B'(a) + C'(a)}{e^a} \geq \frac{1}{k^p},$$

car

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{C(a)}{e^a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^a - A(a) - B(a)}{e^a} = 1.$$

Pour $p < 0$, la limite inférieure devient la limite supérieure et inversement.

Examinons enfin les points limites de la suite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f_1(a)}{a^p e^a}.$$

Nous avons trouvé que tous les points limites sont entre $\frac{1}{k^p}$ et k^p . Je dis que le seul point limite est l'unité. En effet, soit x_0 un autre point limite de la suite ; je prends k assez voisin de 1 pour que

$$\left|1 - \frac{1}{k^p}\right| < |1 - x_0|$$

et

$$|k^p - 1| < |1 - x_0|,$$

ce qui est toujours possible, étant donné que k peut être aussi voisin de l'unité qu'on veut.

Mais dans ce cas x_0 n'est pas entre $\frac{1}{k^p}$ et k^p ; donc x_0 ne peut pas être un point limite de la suite envisagée.

On en conclut que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!}}{a^p e^a} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

45. Avant d'appliquer ce résultat aux points critiques algébriques situés sur le cercle de convergence et sur le polygone de sommabilité, nous allons démontrer, à l'aide des considérations précédentes, un théorème plus général sur la croissance des fonctions entières.

Soit donnée la fonction entière

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}.$$

Si les deux limites d'indétermination de $\varphi(n)$ sont ω_0 et ω_1 , c'est-à-dire si l'on a, à partir d'un certain indice,

$$(62) \quad n^{\omega_0 - \varepsilon} < \varphi(n) < n^{\omega_1 + \varepsilon},$$

ε étant aussi petit qu'on veut, on en peut conclure que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_1 + \varepsilon} e^a} = 0$$

et

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_0 - \varepsilon} e^a} = \infty.$$

En effet, la condition (62) entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\omega_1 + \varepsilon}} = 0.$$

Appliquons le théorème de Cesàro aux deux fonctions à coefficients positifs

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}$$

et

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega_1+\varepsilon} \frac{a^n}{n!}.$$

Nous avons

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{f_1(a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\omega_1+\varepsilon}} = 0.$$

D'autre part, d'après le théorème (59),

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f_1(a)}{a^{\omega_1+\varepsilon} e^a} = 1,$$

d'où résulte la première partie du théorème énoncé.

La deuxième partie se démontre d'une manière analogue. D'après (62), qui est satisfaite pour ε quelconque,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\omega_0-\varepsilon}}{\varphi(n)} = 0.$$

Donc, selon le théorème de Cesàro,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega_0-\varepsilon} \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}} = 0$$

et

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega_0-\varepsilon} \frac{a^n}{n!}}{a^{\omega_0-\varepsilon} e^a} = 1,$$

d'où l'on conclut, comme précédemment, que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_0-\varepsilon} e^a} = \infty.$$

L'intervalle d'indétermination du $\varphi(n)$ mesure donc celui de la fonction.

En particulier, si $\omega_0 = \omega_1 = \omega$, ou, en d'autres termes, si $\varphi(n)$ est à croissance régulière, l'intervalle d'indétermination de la fonction est nul :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^{\omega+\varepsilon} e^a} = 0$$

et

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^{\omega-\varepsilon} e^a} = \infty.$$

On peut donc dire que la croissance de $f(a)$ est régulière, et son ordre de grandeur est mesuré par

$\omega +$ la croissance de e^a .

§ XIII. — Des points critiques algébriques situés sur le cercle de convergence et sur le polygone de sommabilité.

46. Passons maintenant à l'étude des points critiques algébriques à l'aide de la méthode de la sommation exponentielle de M. Borel.

Soit donnée la fonction analytique

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et soit x_0 un de ses points singuliers sur le cercle de convergence ou sur le polygone de sommabilité (sommets exclus) dans le voisinage duquel la fonction puisse se mettre sous la forme

$$f(x) = \frac{B_p}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^p} + f_1(x),$$

où p est un nombre positif quelconque et où l'ordre de $f_1(x)$ au point x_0 est $p_1 < p$. Ce cas est réalisé si x_0 est un point critique algébrique de la fonction $f(x)$. Supposons, pour plus de simplicité, que $x_0 = 1$.

D'après la définition de l'ordre

$$f_1(x) = f_2(x) + f_3(x),$$

où $f_2(x)$ est holomorphe dans le cercle de rayon 1, son ordre sur le cercle étant $p' = p + \varepsilon < p$, et où $f_3(x)$ est holomorphe au point 1, le polygone de sommabilité de $f_3(x)$ contenant ce point à son intérieur.

Tout d'abord, la somme exponentielle $S_3(a)$ formée au point 1 pour

la fonction $f_3(x)$ a une limite bien déterminée

$$(63) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} S_3(a) = f_3(1).$$

Formons maintenant la somme exponentielle $S_2(a)$ pour la fonction

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

D'après (4)

$$\rho' - 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |b_n|}{\log n},$$

d'où l'on conclut que

$$|b_n| < n^{\rho' - 1 + \varepsilon'}$$

et que

$$|s'_n| = |b_0 + b_1 + \dots + b_n| < n^{\rho' + \varepsilon'},$$

ε' étant arbitraire. Choisissons ε' de façon que

$$\rho' + \varepsilon' < \rho;$$

nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s'_n|}{n^\rho} = 0.$$

Appliquons maintenant le théorème (59) à la fonction entière

$$e^{-a} S_2(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |s'_n| \frac{a^n}{n!}.$$

En remarquant que

$$\frac{|S_2(a)|}{a^\rho} \leq \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |s'_n| \frac{a^n}{n!}}{a^\rho e^a}$$

nous obtiendrons

$$(64) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2(a)}{a^\rho} = 0.$$

Occupons-nous enfin de la somme exponentielle $S_1(a)$ formée au point 1 pour la fonction

$$\frac{1}{(1-x)^\rho}.$$

On a

$$S_1(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(p+1)} \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

où $B_n^{(p+1)}$ sont des coefficients binomiaux, et l'on sait de ces coefficients que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n^{(p+1)}}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}.$$

En appliquant de nouveau le théorème (59), on obtient

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_1(a)}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}.$$

Ajoutons encore à cette équation les équations (64) et (63), cette dernière divisée par a^p , et remarquons que

$$S(a) = B_p S_1(a) + S_2(a) + S_3(a).$$

On a ainsi le théorème

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a^p} = \frac{B_p}{\Gamma(p+1)}.$$

C'est la généralisation aux points critiques algébriques et aux singularités beaucoup plus compliquées encore du théorème (39) relatif aux pôles.

On voit dans quelle mesure la méthode de sommation exponentielle de M. Borel permet d'étudier les singularités, et nous insistons tout particulièrement sur la simplicité remarquable des résultats obtenus par cette méthode qui montre à la fois la souplesse et l'efficacité de cette sommation. Nous croyons confirmer par cela la remarque de M. Borel (1) relative à l'importance toujours croissante du rôle de la fonction exponentielle dans la théorie des fonctions analytiques.

47. Le résultat trouvé précédemment se généralise enfin facilement par la méthode de la sommation exponentielle généralisée de M. Borel.

(1) Voir, par exemple, BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, 1900, p. 117.

Soit, en effet, x_0 un point singulier de la fonction $f(x)$ au voisinage duquel la fonction peut s'écrire

$$f(x) = \frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^p} + f_2(x) + f_3(x),$$

où l'ordre de

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

au point x_0 est inférieur à p et où x_0 est un point régulier de la fonction $f_3(x)$ situé dans l'intérieur du domaine de sommabilité de la somme exponentielle d'ordre r .

La dernière condition peut s'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_3^{(r)}(a) = f_3(x_0).$$

D'autre part, on a

$$S_2^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{(2)} \frac{a^{rn}}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!}}$$

avec

$$s_i^{(2)} = b_0 + b_1 x_0 + \dots + b_i x_0^i$$

et

$$S_1^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_{rn}^{(p+1)} \frac{a^{rn}}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Remplaçons dans ces formules a^r par b . On obtient

$$S_2^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{(2)} \frac{b^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}}$$

et

$$S_1^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_{rn}^{(p+1)} \frac{b^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}}.$$

On démontre, comme précédemment, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s_m^{(2)}}{m^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{nr}^{(2)}}{n^p} = 0,$$

ce qui donne immédiatement

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2^{(r)}(a)}{a^{rp}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{(2)} \frac{b^n}{n!}}{b^p e^b} = 0.$$

Enfin, étant donné que les $B_n^{(p+1)}$ sont des coefficients binomiaux,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n^{(p+1)}}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{nr}^{(p+1)}}{n^p} = \frac{r^p}{\Gamma(p+1)},$$

on a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_1^{(r)}(a)}{a^{rp}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_{rn}^{(p+1)} \frac{b^n}{n!}}{b^p e^b} = \frac{r^p}{\Gamma(p+1)}.$$

Si l'on remarque encore que

$$S^{(r)}(a) = B_p S_1^{(r)}(a) + S_2^{(r)}(a) + S_3^{(r)}(a),$$

on obtient le théorème suivant :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S^{(r)}(a)}{r^p a^{rp}} = \frac{B_p}{\Gamma(p+1)}.$$

Les sommes exponentielles généralisées de M. Borel sont donc en relation simple avec les singularités. Elles permettent d'étudier la croissance de la fonction dans des points singuliers d'un genre très étendu. La seule restriction est celle qui concerne la position du point

singulier. Mais, pour montrer dans quelle mesure les restrictions de cette nature sont inévitables, il convient de remarquer que même le développement de M. Mittag-Leffler ne permet pas l'étude des points singuliers situés sur la continuation (et non pas à l'origine) d'une ligne de l'étoile.

Note. — Les méthodes dont nous nous sommes servi dans le troisième Chapitre de ce Mémoire ont été appliquées, avec les modifications nécessaires, par M^{me} Valérie Dienes, aux points critiques algébrico-logarithmiques (voir sa Note *Sur les points critiques logarithmiques* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 26 avril 1909). Sans insister sur les théorèmes énoncés par elle dans cette Note, nous allons indiquer un de ses résultats relatif à la croissance des fonctions entières qu'elle utilise dans la démonstration de ses théorèmes généraux.

Soit donnée la fonction entière

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}.$$

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^p [\log n]^q} = \alpha,$$

où p et q sont des nombres réels quelconques, on a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^p [\log a]^q e^a} = \alpha.$$

On peut remplacer $\log n$ par des fonctions beaucoup plus générales sans que le théorème cesse d'être vrai. On voit jusqu'à quel degré de précision l'ordre de grandeur des coefficients peut déterminer celui de la fonction.