JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. HOSTINSKY

Sur quelques figures déterminées par les éléments infiniment voisins d'une courbe gauche

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 5 (1909), p. 263-292.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1909_6_5__263_0>

Sur quelques figures déterminées par les éléments infiniment voisins d'une courbe gauche;

Par M. B. HOSTINSKY.

Le présent travail est divisé en quatre Chapitres.

Le premier Chapitre contient quelques propositions relatives à la généralisation connue des déterminations métriques.

Dans le second Chapitre, j'étudie les sphères non euclidiennes circonscrites et inscrites dans des tétraèdres formés ou par quatre points infiniment voisins d'une courbe gauche ou par quatre plans osculateurs infiniment voisins; puis je considère quatre cercles et quatre cônes de révolution déterminés par des éléments infiniment voisins.

Dans le troisième Chapitre, je reviens aux déterminations métriques de la Géométrie ordinaire pour déduire les formules relatives à douze figures limites analogues à celles du Chapitre précédent. J'ai publié ces formules en 1907 dans les *Mémoires de l'Académie Tchèque des Sciences de Prague.*

Le quatrième Chapitre a été ajouté pour montrer comment le principe de dualité permet d'établir une relation simple entre deux théorèmes bien connus de la Géométrie infinitésimale.

CHAPITRE I.

1. Nous commençons par rappeler quelques formules relatives à la généralisation connue des déterminations métriques de la Géométrie.

Soit (Q) la quadrique absolue, représentée en coordonnées tétraédriques par l'équation

$$(1) \qquad x^2 y^2 + z^2 + \delta t^2 = 0,$$

δ désignant une constante réelle.

Deux points $A(x, y, z, t)$, $B(x', y', z', t')$ étant donnés, si la droite AB coupe la quadrique (Q) en M et N, nous appellerons *distance de deux points* A, B le logarithme du rapport anharmonique

$$(2) \qquad r = (\mathrm{MNAB}) = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{NA}} : \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{NB}}.$$

On trouve

$$(3) \quad r = \frac{xx' + yy' + zz' + \delta tt' - \sqrt{(xx' + yy' + zz' + \delta tt')^2 - (x^2 + y^2 + z^2 + \delta t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + \delta t'^2)}}{xx' + yy' + zz' + \delta tt' + \sqrt{(xx' + yy' + zz' + \delta tt')^2 - (x^2 + y^2 + z^2 + \delta t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + \delta t'^2)}}.$$

Cette formule donne pour r deux valeurs différentes dont l'une est l'inverse de l'autre; il faut qu'il en soit ainsi parce que, dans la formule (2), l'ordre des deux points d'intersection de AB avec (Q) est indéterminé.

Si les deux points A et B se confondent, nous avons

$$r = 1.$$

La dernière équation est encore satisfaite si M se confond avec N, c'est-à-dire si la droite AB est tangente à (Q).

Les coordonnées (u, v, w, p) d'un plan étant liées avec les coordonnées (x, y, z, t) d'un point du plan par l'équation

$$ux + vy + wz + pt = 0,$$

l'équation de la quadrique absolue (1) en coordonnées tangentielles s'écrit

$$(4) \qquad u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{\delta} p^2 = 0.$$

Nous appellerons *angle de deux plans* $A(u, v, w, p)$, $B(u', v', w', p')$ le logarithme du rapport anharmonique ρ défini par l'équation

$$(5) \qquad \rho = (\mathrm{MNAB}),$$

où M et N sont les deux plans tangents de (Q) qui passent par la droite d'intersection de A et B.

En se servant de l'équation (4), on trouve la formule

$$(6)\quad \rho=\frac{uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'-\sqrt{\left(uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'\right)^2-\left(u^2+v^2+w^2+\frac{1}{\delta}p^2\right)\left(u'^2+v'^2+w'^2+\frac{1}{\delta}p'^2\right)}}{uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'+\sqrt{\left(uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'\right)^2-\left(u^2+v^2+w^2+\frac{1}{\delta}p^2\right)\left(u'^2+v'^2+w'^2+\frac{1}{\delta}p'^2\right)}}$$

qui donne deux valeurs pour ρ dont l'une est l'inverse de l'autre.

Les plans A, B seront dits *normaux* lorsqu'ils sont conjugués par rapport à (Q), c'est-à-dire lorsque

$$uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'=0,\qquad \rho=-1.$$

Nous appellerons une droite (d) *normale au plan* (P) si elle passe par le pôle (π) du plan (P) par rapport à la quadrique (Q). Il est clair que chaque plan (P′) qui passe par la droite (d) est normal au plan (P), car il contient son pôle.

Pour définir *la distance d'un point* A *à un plan* (P), nous joignons A avec le pôle π de (P). La droite Aπ rencontre (P) en B et (Q) en M et N. Le logarithme du rapport anharmonique

$$(7)\qquad d=(\text{MNAB})$$

sera appelé *distance du point* A *au plan* (P).

Soient (x, y, z, t) les coordonnées du point A, (u, v, w, p) celles du plan (P). On aura

$$(8)\quad d=\frac{\sqrt{(ux+vy+wz+pt)^2-(x^2+y^2+z^2+\delta t^2)\left(u^2+v^2+w^2+\frac{1}{\delta}p^2\right)}-(ux+vy+wz+pt)}{\sqrt{(ux+vy+wz+pt)^2-(x^2+y^2+z^2+\delta t^2)\left(u^2+v^2+w^2+\frac{1}{\delta}p^2\right)}+ux+vy+wz+pt}$$

Si le plan (P) passe par le point A, d se réduit à l'unité.

Enfin, nous appellerons *angle de deux droites concourantes* le logarithme du rapport anharmonique

$$\sigma=(ll'mn),$$

où l, l' sont les deux droites données, et m, n les deux droites du faisceau (l, l') tangentes à la quadrique (Q).

On peut exprimer σ, d'après M. Lindemann [1], en se servant de l'équation

$$(9)\qquad p_{12}^2+p_{23}^2+p_{31}^2+\delta(p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2)=0$$

qui exprime la condition que la droite dont les six coordonnées homogènes sont données par les formules

$$(10)\qquad \begin{cases} p_{12}=\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}, & p_{23}=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, & p_{31}=\begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}, \\ p_{14}=\begin{vmatrix} x & t \\ x' & t' \end{vmatrix}, & p_{24}=\begin{vmatrix} y & t \\ y' & t' \end{vmatrix}, & p_{34}=\begin{vmatrix} z & t \\ z' & t' \end{vmatrix} \end{cases}$$

soit tangente à la quadrique $Q(x, y, z, t)$; (x', y', z', t') étant les coordonnées de deux points quelconques sur la droite.

Nous nous bornons à indiquer l'équation à laquelle satisfont les coordonnées de deux droites $l(p_{ik})$, $l'(p'_{ik})$ concourantes normales, c'est-à-dire conjuguées par rapport à (Q) :

$$(11)\qquad p_{12}p'_{12}+p_{23}p'_{23}+p_{31}p'_{31}+\delta(p_{14}p'_{14}+p_{24}p'_{24}+p_{34}p'_{34})=0.$$

2. Si nous regardons, dans la formule (3), le point (x', y', z', t') comme fixe, le point (x, y, z, t) comme variable, et r comme une constante donnée, le point (x, y, z, t) décrira une quadrique que nous appellerons *sphère* dont le *centre* est le point (x', y', z', t'). L'équation (3), mise sous la forme rationnelle

$$(12)\qquad \begin{aligned} &(1+r)^2(x'^2+y'^2+z'^2+\delta t'^2)(x^2+y^2+z^2+\delta t^2) \\ &\quad =4r(xx'+yy'+zz'+\delta tt')^2, \end{aligned}$$

nous montre que la sphère est inscrite dans la quadrique absolue (Q) suivant l'intersection avec le plan polaire du centre (x', y', z', t'). Si l'on introduit les coordonnées de ce *plan d'inscription*

$$(13)\qquad u'=x',\qquad v'=y',\qquad w'=z',\qquad p'=\delta t',$$

---

[1] F. LINDEMANN, *Ueber unendlich kleine Bewegungen, etc.* (*Mathematische Annalen,* t. VIII, § 1, 1874).

l'équation tangentielle de la sphère (12) devient identique avec l'équation (6) pour $\rho = -r$. Donc, chaque plan tangent de la sphère fait un angle constant avec le plan d'inscription.

Nous pouvons même identifier la formule (8) soit avec l'équation ponctuelle de la sphère en posant dans (8)

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w', \quad p = p', \quad d = -r,$$

soit avec l'équation tangentielle de la même sphère en posant dans (8)

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \quad d = r;$$

les lettres accentuées désignent toujours les coordonnées du centre et du plan d'inscription liées par les équations (13).

Par conséquent, chaque point de la sphère a une distance constante au plan d'inscription, et chaque plan tangent d'une sphère a une distance constante au centre.

3. Nous allons étudier les sphères tangentes à quatre plans donnés

$$(14) \qquad A_k(u_k, v_k, w_k, p_k) \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Il est possible de multiplier les coordonnées du centre de chaque sphère cherchée par un facteur tel qu'elles satisfassent aux quatre équations

$$(15) \quad u_k x' + v_k y' + w_k z' + p_k t' = \pm\sqrt{u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 + \frac{1}{\delta} p_k^2} \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

car ces équations expriment, d'après (8), la condition pour que le centre (x', y', z', t') d'une sphère soit équidistant aux quatre plans A_k.

Posons

$$(16) \qquad \Sigma_k = \pm \frac{u_k x' + v_k y' + w_k z' + p_k t'}{\sqrt{u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 + \frac{1}{\delta} p_k^2}} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

et retranchons les équations (15) membre à membre.

Nous obtenons ainsi les six équations suivantes :

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \Sigma_1 - \Sigma_2 = 0, & \Sigma_2 - \Sigma_3 = 0, & \Sigma_3 - \Sigma_4 = 0, \\ \Sigma_4 - \Sigma_1 = 0, & \Sigma_4 - \Sigma_2 = 0, & \Sigma_1 - \Sigma_3 = 0, \end{array} \right.$$

satisfaites par les coordonnées du centre cherché. Trois premières de ces équations entraînent les trois autres.

Pour former le système (17), il faut déterminer les signes des expressions Σ_k. En prenant successivement toutes les combinaisons de signes possibles, on voit, d'après la forme des équations (17), qu'on n'obtiendra que huit systèmes (17) distincts et par conséquent huit sphères tangentes à quatre plans donnés.

Il est facile de se rendre compte de la distribution des huit centres dans l'espace. En effet, l'interprétation géométrique des huit systèmes d'équations (17) nous montre qu'on peut mener, par chaque arête du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, deux plans que nous appellerons *plans bissecteurs*. Ces plans séparent harmoniquement les deux plans du tétraèdre passant par l'arête considérée et chaque centre cherché est intersection commune de six plans bissecteurs. Il est clair qu'il faut associer les douze plans bissecteurs de la manière suivante pour obtenir tous les centres cherchés :

Les six plans bissecteurs intérieurs se coupent en un centre situé à l'intérieur du tétraèdre (nous appelons un plan *bissecteur intérieur* s'il divise le tétraèdre en deux parties).

Trois plans bissecteurs extérieurs qui passent par trois arêtes du tétraèdre formant un triangle et les trois plans intérieurs passant par les autres arêtes se coupent en un point; nous obtenons ainsi quatre centres.

Deux plans bissecteurs intérieurs passant par deux arêtes opposées du tétraèdre et les quatre plans extérieurs passant par les autres arêtes se coupent en un point; nous obtenons ainsi trois centres. Considérons par exemple les arêtes B_1B_2 et B_3B_4, en désignant avec B_k le sommet du tétraèdre opposé à la face A_k. Les plans bissecteurs intérieurs se coupent suivant une droite dont les parties extérieures au tétraèdre sont situées dans deux combles.

L'un de ces combles, limités par faces prolongées du tétraèdre, touche au tétraèdre suivant le segment A_1A_2, l'autre suivant le segment A_3A_4; l'un ou l'autre contient le centre de la sphère que nous appellerons, d'après M. Kœnigs [1], *sphère du comble* (12, 34). On

[1] G. Kœnigs, *Leçons de l'Agrégation classique de Mathématique*, p. 70-79. Paris, 1892.

définira de la même façon la sphère du comble (23, 14) et la sphère du comble (13, 24).

4. Passons maintenant au problème réciproque : *Déterminer les sphères passant par quatre points donnés*

$$M_k(x_k, y_k, z_k, t_k) \qquad (k=1, 2, 3, 4).$$

Nous avons à faire un raisonnement tout à fait analogue à celui du numéro précédent. Les coordonnées du plan d'inscription u', v', w', p' de la sphère cherchée satisfont toujours aux quatre équations

$$(18) \quad x_k u' + y_k v' + z_k w' + t_k p' = \pm\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta t_k^2} \qquad (k=1, 2, 3, 4),$$

ou bien, en posant

$$(19) \qquad S_k = \pm \frac{x_k u' + y_k v' + z_k w' + t_k p'}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta t_k^2}},$$

aux six équations suivantes :

$$(20) \qquad \begin{cases} S_1 - S_2 = 0, & S_2 - S_3 = 0, & S_3 - S_4 = 0, \\ S_4 - S_1 = 0, & S_4 - S_2 = 0, & S_1 - S_3 = 0. \end{cases}$$

Il y a sur chaque arête deux points qui divisent harmoniquement le segment formé par les deux sommets du tétraèdre situés sur l'arête considérée ; les huit plans d'inscription des sphères cherchées coupent chaque arête dans l'un ou l'autre point. Nous pouvons distinguer les huit plans d'inscription de la manière suivante :

Un plan extérieur au tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$;

Quatre plans dont chacun sépare un sommet du tétraèdre de trois autres;

Trois plans dont chacun sépare deux sommets du tétraèdre de deux autres.

5. Nous appellerons *cercle* l'intersection d'une sphère avec un plan quelconque (P). Il est évident que chaque cercle est tangent en deux points A, A' à la conique (C), intersection de la quadrique absolue (Q) avec le plan (P) du cercle [conique absolue dans le plan (P)].

Le pôle de la droite AA' par rapport à (C) sera dit le *centre* du cercle ; la distance d'un point du cercle au centre est constante.

Un triangle étant donné, on peut lui circonscrire quatre cercles et inscrire quatre cercles.

Remarquons encore que, sur une sphère donnée, il n'y a qu'un cercle passant par trois points donnés.

6. Il est naturel d'appeler *cône de révolution* tout cône circonscrit à une sphère. Chaque cône de révolution ayant pour sommet un point P est inscrit dans le cône absolu (K) du point P, c'est-à-dire au cône tangentiel de la quadrique (Q) ayant le sommet en P. L'intersection des deux plans tangents communs à ces deux cônes a, dans le cône (K), un plan polaire (S) que nous appelons *plan central du cône de révolution*. Ce plan central jouit de la propriété suivante :

Chaque plan tangent d'un cône de révolution fait un angle constant avec le plan central.

Du reste, chaque propriété du cercle a son image dans une propriété du cône de révolution, parce que la transformation par polaires réciproques, (Q) étant directrice, change les cercles en cônes de révolution.

Par exemple, le centre du cercle commun à un plan (P) et à une sphère (Σ) est sur la droite qui joint le centre de (Σ) avec le pôle de (P).

Le plan central d'un cône ayant son sommet en un point M et circonscrit à une sphère (Σ) passe par l'intersection du plan polaire de M avec le plan d'inscription de (Σ).

CHAPITRE II.

7. Nous étudierons dans ce Chapitre une courbe gauche (C) dans le voisinage d'un point O. Soient Ox la tangente et (P) le plan osculateur en O. Nous supposons dans la suite que O soit un point ordinaire,

c'est-à-dire que (C) ait un contact du premier ordre avec Ox et un contact du second ordre avec (P).

Le tétraèdre de référence, conjugué à la quadrique absolue (Q), sera défini par les conditions d'avoir O comme le sommet (o, o, o, 1), (P) comme le plan $z=0$, et Ox comme l'intersection des plans $y=0$ et $z=0$. On peut appeler la droite $x=0$, $z=0$ *normale non euclidienne*, et la droite $x=0$, $y=0$ *binormale non euclidienne* au point O.

La définition précédente du tétraèdre de référence serait en défaut, si O était situé sur la quadrique (Q) ou si (P) était un plan tangent de (Q); nous excluons ces cas.

Cela posé, divisons les coordonnées homogènes d'un point M situé sur la courbe (C) dans le voisinage de O par la quatrième, et désignons les quotients ainsi obtenus par

$$x, \quad y, \quad z, \quad 1.$$

Si l'on regarde x comme un infiniment petit du premier ordre, y sera un infiniment petit d'ordre 2, et z un infiniment petit d'ordre 3. Par conséquent, la courbe (C) sera définie, dans le voisinage du point O, par les équations suivantes :

$$(21) \qquad \begin{cases} y = ax^2 + a'x^3 + \ldots & (a \neq 0), \\ z = bx^3 + b'x^4 + \ldots & (b \neq 0). \end{cases}$$

L'équation du plan osculateur au point $M(x, y, z, 1)$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & \dfrac{dy}{dx} & \dfrac{dz}{dx} \\ 0 & \dfrac{d^2y}{dx^2} & \dfrac{d^2z}{dx^2} \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant les coefficients en séries et réduisant chaque série à deux premiers termes,

$$(3abx^2 + 8ab'x^3)X - (3bx + bb'x^2)Y + (a + 3a'x)Z - (abx^3 + 3ab'x^4) = 0.$$

On peut diviser la dernière équation par le coefficient de Z, car il reste différent de zéro dans le voisinage du point O. Dans l'équation ainsi obtenue

$$(22) \qquad uX + vY + Z + p = 0,$$

les coefficients u, v, p sont donnés en fonction de x par les séries suivantes :

$$(23) \qquad \begin{cases} u = \quad 3bx^2 + \left(8b' \quad - 9\dfrac{a'b}{a}\right)x^3 + \ldots, \\ v = -3\dfrac{b}{a}x + \left(9\dfrac{a'b}{a^2} - 6\dfrac{b'}{a}\right)x^2 + \ldots, \\ p = - \quad bx^3 + \left(3\dfrac{a'b}{a} - 3b'\right)x^4 + \ldots. \end{cases}$$

Nous ferons souvent usage des *coordonnées non homogènes* (u, v, p) *du plan* liées avec les coordonnées du point par l'équation (22).

8. Regardons maintenant la courbe (C) comme arête de rebroussement sur la surface développable formée par ses plans osculateurs.

L'inversion de la seconde série (23) donne

$$(24) \qquad x = -\frac{a}{3b}v + \left(\frac{aa'}{3b^2} - \frac{2a^2b'}{9b^3}\right)v^2 + \ldots.$$

En substituant ce développement dans la première et dans la troisième série (23), on trouve les équations

$$(25) \qquad \begin{cases} u = \alpha v^2 + \alpha' v^3 + \ldots \qquad (\alpha \neq 0), \\ p = \beta v^3 + \beta' v^4 + \ldots \qquad (\beta \neq 0), \end{cases}$$

qui sont tout à fait analogues aux équations (21). Il nous sera avantageux d'employer soit les formules (21), soit les formules (25), suivant le sujet traité.

Avant de donner les formules qui expriment les relations entre les équations (21) et (25), remarquons que, pour avoir les expressions des coordonnées x, y, z du point M en fonction de la coordonnée v non homogène de son plan osculateur, il suffit de remplacer dans les formules (23)

$$u, \quad v, \quad p, \quad x, \quad \ldots \qquad \text{par} \qquad y, \quad x, \quad z, \quad v,$$

et

$$a, \quad a' \quad \ldots, \quad b, \quad b', \quad \ldots \qquad \text{par} \qquad \alpha, \quad \alpha', \quad \ldots, \quad \beta, \quad \beta'.$$

On obtient ainsi

$$(26)\qquad \begin{cases} x = -3\dfrac{\beta}{\alpha}v + \left(9\dfrac{\alpha'\beta}{\alpha^2} - 6\dfrac{\beta'}{\alpha}\right)v^2, \\ y = 3\beta v^2 + \left(8\beta' - 9\dfrac{\alpha'\beta}{\alpha}\right)v^3, \\ z = -\beta v^3 + \left(3\dfrac{\alpha'\beta}{\alpha} - 3\beta'\right)v^4. \end{cases}$$

Pour avoir les coefficients α, α', ... en fonction de a, a', ..., portons le développement (24) dans les équations (23) et comparons les résultats avec (25). Il vient

$$(27)\qquad \alpha = \frac{a^2}{3b}, \qquad \beta = \frac{a^3}{27b^3}, \qquad \alpha' = \frac{4a^3b'}{27b^3} - \frac{a^2a'}{3b^2}, \qquad \beta' = \frac{a^4b'}{27b^4} - \frac{2a^3a'}{27b^3}.$$

Il est évident que le même calcul fournira les expressions de α, α', ... en fonction de a, a' ...; il suffit de remplacer les coefficients α, α', ... par a, a', ... et inversement.

Les coefficients dans (21) *sont liés avec les coefficients dans* (25) *par un ensemble d'équations qui ne change pas, si l'on y remplace chaque coefficient* a, a', ..., b, b', ... *figurant dans* (21) *par le coefficient correspondant dans* (25) *et inversement.*

Ce théorème montre en particulier que le système (27) est équivalent au système suivant :

$$(28)\qquad a = \frac{\alpha^2}{3\beta}, \qquad b = \frac{\alpha^3}{27\beta^3}, \qquad a' = \frac{4\alpha^3\beta'}{27\beta^3} - \frac{\alpha^2\alpha'}{3\beta^2}, \qquad b' = \frac{\alpha^4\beta'}{27\beta^4} - \frac{2\alpha^3\alpha'}{27\beta^3}.$$

9. Nous allons donner les formules qui expriment les coordonnées des faces du tétraèdre formé par quatre points $M_k(x_k, y_k, z_k)$ de la courbe et formules analogues qui expriment les coordonnées des sommets du tétraèdre formé par quatre plans osculateurs $A_k(u_k, v_k, p_k)$, en désignant par u_k, v_k, p_k les coordonnées non homogènes d'un plan définies dans le numéro précédent.

Pour cela, introduisons les fonctions symétriques suivantes :

$$(29)\qquad \begin{cases} \lambda_k = x_l + x_m + x_n, & \mu_k = x_l x_m + x_m x_n + x_n x_l, & \nu_k = x_l x_m x_n, \\ \rho_k = v_l + v_m + v_n, & \sigma_k = v_l v_m + v_m v_n + v_n v_l, & \tau_k = v_l v_m v_n, \end{cases}$$

où k, l, m, n est une permutation quelconque des indices 1, 2, 3, 4.

Le plan $M_l M_m M_n$ est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_l & y_l & z_l & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où il faut remplacer y_l et z_l par les séries entières en x_l d'après les formules (21).

Le premier membre de cette équation change de signe, si l'on fait subir aux indices l, m, n une transposition quelconque, et il s'évanouirait, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_l & x_l^2 \\ 1 & x_m & x_m^2 \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{vmatrix} = (x_l - x_m)(x_m - x_n)(x_n - x_l)$$

était égal à zéro. Il est donc divisible par ce déterminant et le quotient sera évidemment une fonction *symétrique* des trois variables x_l, x_m, x_n et, par conséquent, exprimable au moyen des trois fonctions fondamentales λ_k, μ_k, ν_k.

En effectuant la transformation qui vient d'être indiquée, on trouve

$$[ab\mu_k + ab'(\lambda_k\mu_k - \nu_k)]X - [b\lambda_k + b'(\lambda_k^2 - \mu_k)]Y + (a + a'\lambda_k)Z - (ab\nu_k + ab'\lambda_k\nu_k) = 0.$$

On n'a conservé, dans chaque coefficient, que les termes du degré le moins élevé (par rapport aux variables x_l, x_m, x_n) et les termes du degré suivant.

Si nous divisons l'équation précédente par le coefficient de Z, le seul qui n'est pas infiniment petit, nous obtenons l'équation du plan $M_l M_m M_n$ sous la forme

$$U_k X + V_k Y + Z + P_k = 0. \tag{30}$$

Les coordonnées non homogènes de ce plan sont données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} U_k &= \quad b\mu_k + \frac{ab' - a'b}{a}\lambda_k\mu_k - b'\nu_k + \ldots, \\ V_k &= -\frac{b}{a}\lambda_k - \frac{ab' - a'b}{a^2}\lambda_k^2 + \frac{b'}{a}\mu_k + \ldots, \\ P_k &= -b\nu_k - \frac{ab' - a'b}{a}\lambda_k\nu_k + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Les coordonnées X_k, Y_k, Z_k du point commun à trois plans osculateurs A_l, A_m, A_n s'obtiendront de la même façon ; il faut partir des développements (25), c'est-à-dire changer les coefficients a, a', ... en α, α', ... et introduire les fonctions ρ_k, σ_k, τ_k au lieu de λ_k, μ_k, ν_k. Nous aurons donc

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} X_k &= -\frac{\beta}{\alpha}\rho_k - \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha^2}\rho_k^2 + \frac{\beta'}{\alpha}\sigma_k + \ldots, \\ Y_k &= \beta\sigma_k + \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha}\rho_k\sigma_k - \beta\tau_k + \ldots, \\ Z_k &= -\beta\tau_k - \frac{\alpha\beta' - \alpha\beta}{\alpha}\rho_k\tau_k + \ldots. \end{aligned}\right.$$

10. Nous passons maintenant à l'étude des sphères inscrites et circonscrites aux tétraèdres formés ou par quatre points infiniment voisins

$$M_k(x_k, y_k, z_k) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

de la courbe (C), ou par quatre plans osculateurs

$$A_k(u_k, v_k, p_k) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

aux points infiniment voisins ; x_k, ... et u_k, ... désignent toujours les coordonnées non homogènes introduites dans le n° 7.

Les deux tétraèdres seront supposés être assez voisins du point O pour que leurs sommets ne soient pas sur la quadrique absolue (Q) et pour que leurs faces ne soient pas tangentes à (Q).

Cette hypothèse étant admise, nous voyons que l'expression

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta$$

conserve toujours le même signe et ne peut jamais s'annuler ; nous représenterons, dans tous les calculs suivants, par $\sqrt{\delta}$ une racine de δ *déterminée* (d'ailleurs quelconque) et par

$$\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta}$$

la racine qui se réduit à $\sqrt{\delta}$ pour $x_k = y_k = z_k = 0$.

Les coordonnées homogènes du plan d'inscription d'une *sphère passant par quatre points* M_k vérifient les quatre équations suivantes (*voir* n° 4):

$$(33)\qquad x_k u' + y_k v' + z_k w' + p' = \pm\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta} \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

où il faut remplacer y_k et z_k en fonction de x_k d'après (21), et les seconds membres par

$$(33')\qquad \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta} = \sqrt{\delta} + \frac{x_k^2}{2\sqrt{\delta}} + \ldots.$$

Prenons d'abord, dans chacune des équations (33), le même signe, par exemple, le signe $+$. En résolvant le système (33), on trouve

$$u' : v' : w' : p' = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4.$$

Les déterminants $\Delta_1, \ldots$ s'expriment en fonction de x_1, x_2, x_3 et x_4 au moyen des équations suivantes :

$$\Delta_1 = \left| \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \delta} \quad y_1 \quad z_1 \quad 1 \right| = D\varepsilon_1,$$

$$\Delta_2 = \left| x_1 \quad \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \delta} \quad z_1 \quad 1 \right| = D\left(\frac{b}{2\sqrt{\delta}} + \varepsilon_2\right),$$

$$\Delta_3 = \left| x_1 \quad y_1 \quad \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \delta} \quad 1 \right| = D\left(-\frac{a'}{2\sqrt{\delta}} + \varepsilon_3\right),$$

$$\Delta_4 = \left| x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \delta} \right| = D(ab\sqrt{\delta} + \varepsilon_4),$$

$$D = \left| x_1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad 1 \right| = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_1 - x_3),$$

où l'on n'a figuré que la première ligne dans chaque déterminant; les autres lignes se déduisent de la première en remplaçant x_1 successivement par x_2, x_3, x_4. Les quantités ε_1, ε_2, ε_3 et ε_4, restes des séries infinies de quatre variables x_1, x_2, x_3 et x_4, sont infiniment petites en même temps que celles-ci.

Chaque déterminant est divisible par D, car il s'annulerait si $x_i = x_k$.

Si les quatre points s'approchent indéfiniment du point O, la sphère considérée admet une figure-limite déterminée dont le plan d'inscription sera défini par les équations

$$(34)\qquad \lim u' : \lim v' : \lim w' : \lim p' = 0 : \frac{b}{2\sqrt{\delta}} : -\frac{a'}{2\sqrt{\delta}} : ab\sqrt{\delta}.$$

Le centre de cette figure-limite, c'est-à-dire le pôle du plan précédent par rapport à la quadrique (Q), aura pour coordonnées non homogènes

$$(35) \qquad \xi = 0, \qquad \eta = \frac{1}{2a}, \qquad \zeta = -\frac{a'}{2ab}.$$

Les équations (34) montrent que la figure-limite appartient précisément à la sphère introduite en premier lieu dans l'énumération donnée à la fin du n° 4. Aucune autre sphère passant par les quatre points M_k ne peut admettre aucune figure-limite, lorsque les points M_k s'approchent indéfiniment du point O.

Car le plan d'inscription finirait par contenir le point O (puisqu'il sépare, d'après le n° 4, au moins deux sommets du tétraèdre), ce qui est impossible, chaque point commun à la sphère et à son plan d'inscription étant situé sur (Q); nous écartons, bien entendu, les sphères dégénérées. Nous avons donc le théorème suivant :

Il y a une seule sphère passant par quatre points M_k *de la courbe et admettant une figure-limite déterminée, non dégénérée,* (S_1), *lorsque les points* M_k *s'approchent indéfiniment du point* O. *Les coordonnées du centre de* (S_1) *sont exprimées par les formules* (35).

La figure-limite du cercle passant par trois points de la courbe infiniment voisins du point O se réduit à l'intersection de la sphère (S_1) qui vient d'être définie avec le plan osculateur au point O.

Le centre de ce cercle est sur la droite qui joint le centre de la sphère osculatrice (S_1) avec le pôle du plan osculateur du point O, c'est-à-dire avec le point (0, 0, 1, 0).

On obtient ainsi les coordonnées non homogènes du *centre du cercle osculateur* (C_1)

$$(36) \qquad \xi = 0, \qquad \eta = \frac{1}{2a}, \qquad \zeta = 0.$$

11. *Les sphères tangentes à quatre plans osculateurs* A_k se déterminent de la même façon que les sphères passant par quatre points de la courbe.

En effet, soient u_k, v_k, p_k les coordonnées non homogènes du plan osculateur A_k vérifiant les équations (25). Les coordonnées homogènes x', y', z', t' du centre d'une sphère tangente à quatre plans A_k s'obtiendront, d'après le n° 3, en résolvant le système des quatre équations suivantes :

$$(37) \qquad u_k x' + v_k y' + z' + p_k t' = \pm\sqrt{u_k^2 + v_k^2 + 1 + \frac{1}{\delta} p_k^2};$$

nous ajoutons aux développements (25) le suivant :

$$(37') \qquad \sqrt{1 + u_k^2 + v_k^2 + \frac{1}{\delta} p_k^2} = 1 + \frac{v_k^2}{2} + \ldots.$$

Comparons le système d'équations (21), (33) et (33') qui nous a fourni les formules (34) avec le système d'équations (25), (37) et (37'). Si nous négligeons, dans les formules (21), (33'), (25) et (37'), les termes qui n'y sont pas figurés, le premier système ne diffère pas en réalité du second. En effet, si nous remplaçons, dans le premier système, les quantités

$$a, \quad a', \quad b, \quad b', \quad x_k, \quad y_k, \quad z_k, \quad u', \quad v', \quad w', \quad p', \quad \delta$$

par les quantités suivantes :

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \beta, \quad \beta', \quad v_k, \quad v_u, \quad p_k, \quad y', \quad x', \quad t', \quad z', \quad 1,$$

il devient identique avec le second système.

Or, si les quatre plans osculateurs A_k s'approchent indéfiniment du plan osculateur au point O, les formules (34) montrent qu'on aura

$$\lim x' : \lim y' : \lim z' : \lim t' = \frac{1}{2\alpha} : 0 : 1 : -\frac{\alpha'}{2\alpha\beta}.$$

Les coordonnées non homogènes du centre de la figure-limite (S_2) sont données par les formules suivantes :

$$(38) \qquad \xi = -\frac{\beta}{\alpha'}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = -\frac{2\alpha\beta}{\alpha'}.$$

Cette figure-limite correspond au cas où l'on a pris, dans chacune des équations (37), le second membre avec le signe +. D'autres combinaisons des signes conduisent aux sept sphères inscrites qui n'admettent pas des figures-limites non dégénérées (¹).

(¹) *Voir* la remarque à la fin du n° 16.

Il faut encore, pour préciser ce résultat, répondre à la question suivante : *Comment trouvera-t-on, parmi les huit sphères inscrites, celle qui admet la figure-limite* (S_2)?

Imaginons que les points $M_k(x_k, y_k, z_k)$ dont A_k sont les plans osculateurs s'approchent indéfiniment du point O d'une façon quelconque. Nous convenons de choisir, à chaque instant, les indices 1, 2, 3, 4 de telle manière qu'on ait toujours

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4. \tag{39}$$

Si les points M_k sont assez voisins du point O, les inégalités précédentes entraînent, en vertu de la seconde équation (23), les inégalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} v_1 < v_2 < v_3 < v_4, & \text{si} & \dfrac{\beta}{\alpha} < 0, \\ \text{ou} & & \\ v_4 < v_3 < v_2 < v_1, & \text{si} & \dfrac{\beta}{\alpha} > 0. \end{array}\right. \tag{40}$$

Les inégalités (39) ou (40) expriment, en réalité, que (si les points M_k sont assez voisins du point O), en parcourant la courbe dans un sens convenable, on rencontre les points M_k dans l'ordre d'indices croissants.

Cela posé, introduisons les expressions

$$\Sigma_k = + \frac{u_k X + v_k Y + Z + p_k}{\sqrt{1 + u_k^2 + v_k^2 + \frac{1}{\delta} p_k^2}} \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{41}$$

Les quatre équations $\Sigma_k = 1$ coïncident avec les équations (37) si l'on pose X, Y, Z, 1 au lieu de x', y', z', t'. Les coordonnées non homogènes X, Y, Z du centre de la sphère qui admet la figure-limite définie par les formules (38) vérifient, par conséquent, les six équations suivantes :

$$\Sigma_i - \Sigma_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Je dis que les équations

$$\Sigma_1 - \Sigma_3 = 0, \qquad \Sigma_2 - \Sigma_4 = 0 \tag{42}$$

représentent deux plans bissecteurs *intérieurs*, l'un passant par l'intersection des faces A_1 et A_3, l'autre par l'arête opposée du tétraèdre; en d'autres mots, (XYZ) est le centre de la sphère du comble (13, 24) (*voir* n° 3).

Prenons, par exemple, la première équation (42). Elle ne peut représenter le plan bissecteur intérieur que si Σ_1 et Σ_3 ont *le même signe*, lorsqu'on y remplace X, Y et Z par les coordonnées d'un point quelconque B situé à l'intérieur du tétraèdre. Mais le signe de Σ_k ne change pas, lorsque B se confond avec le sommet opposé à la face A_k; car Σ_k ne s'annule que si B était situé dans la face A_k.

Par conséquent, tout revient à démontrer les inégalités suivantes :

$$(\Sigma_1)(\Sigma_3) > 0, \qquad (\Sigma_2)(\Sigma_4) > 0, \tag{43}$$

en désignant par (Σ_k) ce qui devient Σ_k, si l'on y remplace X, Y, Z par X_k, Y_k, Z_k [formules (32)].

On obtient

$$(\Sigma_k) = \beta(-v_k^2 \rho_k + v_k \sigma_k - \tau_k + v_k^3) + \ldots = \beta(v_k - v_l)(v_k - v_m)(v_k - v_n)(1 + \varepsilon_k),$$

ε_k étant infiniment petit. De là résultent, en effet, les inégalités (43), les quantités v_k vérifiant les inégalités (40).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Parmi les huit sphères tangentes à quatre plans osculateurs A_1, A_2, A_3, A_4 *infiniment voisins du plan* $z = 0$, *la seule qui appartient au comble* (13, 24) *admet une figure-limite déterminée* (S_2). *Les coordonnées du centre de* (S_2) *sont définies par les formules* (38).

La figure-limite d'un cône de révolution tangent à trois plans osculateurs infiniment voisins de $z = 0$ se réduit au cône tangentiel de la sphère (S_2) ayant son sommet en O. Le plan central de ce *cône osculateur* (K_1) passe par la droite d'intersection du plan $t = 0$ avec le plan d'inscription de la sphère (S_2) et a pour coordonnées non homogènes

$$u = \frac{1}{2\alpha}, \qquad v = 0, \qquad p = 0. \tag{44}$$

12. Pour déterminer le centre d'une *sphère inscrite au tétraèdre* M_1, M_2, M_3, M_4, il faut résoudre le système des quatre équations suivantes :

$$(45) \qquad U_k x' + V_k y' + z' + P_k t' = \pm\sqrt{U_k^2 + V_k^2 + 1 + \tfrac{1}{\delta} P_k^2},$$

où les quantités U_k, V_k, P_k sont données par les formules (31).

La résolution s'effectue comme dans le n° 10.

En supposant qu'on prenne, dans les équations (45), toujours la valeur du radical qui se réduit à $+1$ pour $U_k = V_k = P_k = 0$, on trouve

$$x' : y' : z' : t' = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta'_3 : \Delta_4.$$

Les déterminants Δ_i, qui sont divisibles tous par le déterminant suivant :

$$(46) \quad \begin{aligned} D &= | x_1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad 1 | = | \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \nu_1 \quad 1 | = | \lambda_1 \quad \lambda_1^2 \quad \nu_1 \quad 1 | \\ &= | \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \lambda_1^3 \quad 1 | = | \lambda_1 \quad \lambda_1^2 \quad \lambda_1\mu_1 \quad 1 | = | \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \lambda_1\mu_1 \quad 1 | \end{aligned}$$

sont donnés par les formules suivantes :

$$\Delta_1 = D\left(\frac{b^4}{2a^3} + \eta_1\right), \qquad \Delta_2 = D\eta_2, \qquad \Delta_3 = D\left(\frac{b^3}{a} + \eta_3\right), \qquad \Delta_4 = D\left(\frac{b^4 a'}{2a^4} + \eta_4\right),$$

où $\eta_1, \ldots$ sont infiniment petits.

Si les points M_k s'approchent indéfiniment du point O, la sphère admettra une figure-limite (S_3) dont le centre aura les coordonnées non homogènes

$$(47) \qquad \xi = \frac{a}{a'}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \frac{2a^3}{ba'}.$$

On démontre, comme dans le numéro précédent, que la figure-limite ainsi obtenue convient précisément à la sphère du comble (13, 24), les inégalités (39) étant satisfaites ([1]).

Le cône tangentiel (K_2) de la sphère (S_3) pour sommet représente la figure-limite du cône de révolution tangent aux trois plans OM_1M_2, OM_2M_3 et OM_3M_1. Les coordonnées non homogènes du plan central de (K_2) sont

$$(48) \qquad u = \frac{a}{a'}, \qquad v = 0, \qquad p = 0.$$

([1]) *Voir* la remarque dans le n° 16.

13. Les coordonnées (u', v', w', p') du plan d'inscription d'une sphère *circonscrite au tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$ vérifient le système

$$X_k u' + Y_k v' + Z_k w' + p' = \pm\sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2 + \delta}, \tag{49}$$

où les X_k, Y_k, Z_k sont donnés par les formules (32).

Si l'on prend chaque radical avec le même signe, on trouve ici encore une figure-limite (S_4) qui a pour centre le point

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{\beta}{2\alpha^2}, \qquad \zeta = \frac{\alpha'\beta}{2\alpha^3}. \tag{50}$$

L'intersection de cette sphère avec le plan osculateur $z = 0$ représente la figure-limite du cercle (C_2) circonscrit au triangle formé, dans le plan $z = 0$, par les traces de trois plans osculateurs infiniment voisins. Les coordonnées du centre de (C_2) sont

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{\beta}{2\alpha^2}, \qquad \zeta = 0. \tag{51}$$

Les sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ se confondent en O lorsque les plans osculateurs A_i se confondent avec le plan $z = 0$.

Nous en concluons, comme dans le n° 10, qu'il n'y peut avoir aucune sphère-limite circonscrite en dehors de (S_4); par conséquence, la figure-limite (C_2) du cercle est elle-même déterminée sans ambiguïté.

14. Rappelons enfin les quatre figures-limites suivantes, en désignant par M_k trois points de la courbe infiniment voisins du point O, et par A_k trois plans osculateurs infiniment voisins du plan $z = 0$:

Cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$. La figure-limite (C_3) a pour centre le point

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{2}{a}, \qquad \zeta = 0. \tag{52}$$

Cône de révolution circonscrit au trièdre $A_1A_2A_3$. La figure-limite (K_3) a pour plan central le plan (coordonnées non homogènes)

$$u = \frac{2}{\alpha}, \qquad v = 0, \qquad p = 0. \tag{53}$$

Cercle inscrit dans le triangle ayant pour côtés les traces de A_1, A_2 et A_3 dans le plan $z = 0$. Centre de la figure-limite (C_1) :

$$(54) \qquad \xi = 0, \quad \eta = \frac{2}{3a}, \quad \zeta = 0.$$

Cône de révolution dont OM_1, OM_2 et OM_3 sont trois génératrices. Plan central de la figure-limite (K_1) :

$$(55) \qquad u = \frac{2}{3\alpha}, \quad v = 0, \quad p = 0.$$

On sait qu'il y a quatre cercles inscrits dans un triangle (ou circonscrits à un triangle) et qu'il y a quatre cônes de révolution circonscrits à un trièdre (ou inscrits dans un trièdre); cependant, dans chacun des cas que nous avons considérés, il n'y a qu'une seule figure-limite.

CHAPITRE III.

15. Supposons maintenant que la quadrique (Q) soit une sphère ordinaire et que le trièdre $Oxyz$ trirectangle soit formé par la tangente, la normale principale et la binormale de la courbe (C) au point O. Si le rayon $\sqrt{-\delta}$ de la sphère (Q) devient infini, les sphères, cercles et cônes de révolution non euclidiens se changent en sphères, etc. ordinaires.

On s'assure facilement que, dans ce cas limite, les développements analytiques du Chapitre précédent subsistent sans aucune modification; en particulier, les formules relatives aux différentes figures-limites restent inaltérées, pourvu que les coordonnées cartésiennes x, y, z du point soient liées avec les coordonnées non homogènes (u, v, p) du plan par l'équation

$$(22) \qquad ux + vy + z + p = 0.$$

Nous donnerons, dans les numéros suivants, la liste de douze figures déterminées par des éléments consécutifs de la courbe; pour cela, il faut introduire la signification géométrique des coefficients dans les équations de la courbe

$$(21) \qquad \begin{cases} y = ax^2 + a'x^3 + \ldots & (a \neq 0), \\ z = bx^3 + b'x^4 + \ldots & (b \neq 0). \end{cases}$$

Représentons par R, T, $\frac{dR}{ds}$, $\frac{dT}{ds}$ le rayon de la courbure, le rayon de la torsion au point O et leurs dérivées par rapport à l'arc s au même point. Si le sens positif de l'arc coïncide en O avec la direction Ox, on aura

$$(56) \qquad \begin{cases} 2a = \frac{1}{R}, \qquad 6a' = -\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}, \qquad 6b = -\frac{1}{RT}, \\ 24b' = \frac{1}{R^2T^2}\left(2T\frac{dR}{ds} + R\frac{dT}{ds}\right). \end{cases}$$

En prenant, au lieu de x, la coordonnée v du plan osculateur pour paramètre, la courbe (C) ou plutôt la développable engendrée par le plan osculateur de (C) sera représentée par les équations suivantes :

$$(25) \qquad \begin{cases} u = \alpha v^2 + \alpha' v^3 + \ldots & (\alpha \neq 0), \\ p = \beta v^3 + \beta' v^4 + \ldots & (\beta \neq 0), \end{cases}$$

où les coefficients α, α', ... s'expriment en fonction de a, a', ... au moyen des équations (27). Pour obtenir des expressions parfaitement analogues aux expressions (56), introduisons les notations suivantes :

$$R_1 = -\frac{R}{T}, \qquad T_1 = \frac{1}{T}, \qquad d\tau = \frac{ds}{T} = T_1\, ds,$$

τ étant l'angle de deux plans osculateurs.

Il vient

$$(57) \qquad \begin{cases} 2\alpha = \frac{1}{R_1}, \qquad 6\alpha' = -\frac{1}{R_1^2}\frac{dR_1}{d\tau}, \qquad 6\beta = -\frac{1}{R_1T_1}, \\ 24\beta' = \frac{1}{R_1^2T_1^2}\left(2T_1\frac{dR_1}{d\tau} + R_1\frac{dT_1}{d\tau}\right). \end{cases}$$

On voit donc qu'il suffit de remplacer, dans les formules (56),

$$R, \ T, \ s \quad \text{par} \quad -\frac{R}{T}, \ \frac{1}{T}, \ \tau$$

pour obtenir les formules (57).

16. Soient $M_k(x_k, y_k, z_k)$ quatre points de la courbe, $A_k(u_k, v_k, p_k)$ quatre plans osculateurs, et supposons qu'on ait toujours

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, \tag{39}$$

ce qui entraîne (*voir* n° 11) les inégalités

$$\left\{\begin{array}{lll} v_1 < v_2 < v_3 < v_4, & \text{si} & T > 0, \\ \text{ou} & & \\ v_4 < v_3 < v_2 < v_1, & \text{si} & T < 0. \end{array}\right. \tag{40}$$

En faisant

$$\lim x_k = 0, \quad \lim v_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

nous obtenons les *sphères* suivantes [formules (35), (38), (47) et (51)] dont la première et la quatrième passent par O, tandis que la seconde et la troisième touchent le plan osculateur (P) du point O :

Sphère (S_1) passant par quatre points M_k, ou sphère osculatrice. Coordonnées du centre :

$$\xi = 0, \quad \eta = R, \quad \zeta = -T\frac{dR}{ds}.$$

Sphère (S_2) tangente à quatre plans osculateurs A_k :

$$\xi = \frac{T}{R}\frac{ds}{d\left(\frac{T}{R}\right)}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -\frac{T^2}{R^2}\frac{ds}{d\left(\frac{T}{R}\right)}.$$

Sphère (S_3) inscrite dans le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$:

$$\xi = -3R\frac{ds}{dR}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 9T\frac{ds}{dR}.$$

Sphère (S_4) circonscrite au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$:

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{R}{3}, \quad \zeta = \frac{1}{9}\left(R\frac{dT}{ds} - T\frac{dR}{ds}\right).$$

Remarque. — Nous avons vu, dans les n^{os} 11 et 12, que les figures-limites (S_2) et (S_3) proviennent toujours de la sphère du comble (13, 24). On peut directement se rendre compte de ce fait que, lorsque le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ se déforme de la manière indiquée, aucune autre sphère inscrite ne peut admettre une figure limite non dégénérée.

En effet, imaginons que les points M_k soient très voisins du point O et rappelons-nous les propriétés suivantes de la courbe : 1° elle traverse le plan osculateur $z=0$; 2° sa projection dans le plan $z=0$ a la forme d'une parabole tangente à Ox en O; 3° les arêtes M_iM_k du tétraèdre font un angle infiniment petit avec Ox. Un examen attentif de la figure montre que six plans bissecteurs des faces du tétraèdre se confondent sensiblement avec le plan rectifiant Ozx, à savoir : les plans bissecteurs intérieurs relatifs aux arêtes M_1M_3 et M_2M_4, et les plans bissecteurs extérieurs relatifs aux autres arêtes. Le point de concours N de ces six plans n'est autre chose que le centre de la sphère inscrite appartenant au comble (13, 24); par suite, N peut admettre comme point-limite un point situé dans le plan rectifiant, et il n'est pas nécessaire que la sphère-limite soit dégénérée en un point. Au contraire, les six autres plans bissecteurs se confondent sensiblement avec le plan osculateur Oxy. Le centre N' de chaque sphère inscrite, autre que celle qui vient d'être considérée, est situé au moins dans un de ces plans; par conséquent, N' ne peut admettre comme point-limite qu'un point situé dans le plan Oxy; en d'autres mots, la sphère-limite correspondante sera nécessairement dégénérée puisqu'elle touche le plan Oxy.

Le raisonnement précédent, ainsi qu'un raisonnement analogue relatif aux sphères inscrites dans le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, s'appliquerait aussi aux sphères non euclidiennes.

17. Continuons la liste de différentes figures-limites.

Les formules (36), (51), (52) et (54) montrent l'existence de quatre *cercles* qui touchent la tangente Ox en O et dont les centres sont sur la normale principale Oy. Les coordonnées η des centres sont toutes positives; chaque cercle sera parfaitement déterminé par son rayon ρ.

Cercle passant par trois points M_1, M_2, M_3, ou cercle osculateur, intersection de la sphère (S_1) avec le plan Oxy :

$$\rho = R.$$

Cercle circonscrit au triangle Δ formé, dans le plan Oxy, par les traces des plans A_1, A_2 et A_3 [intersection de la sphère (S_4) avec le plan Oxy] :

$$\rho = \frac{R}{3}.$$

Cercle inscrit dans le triangle $M_1 M_2 M_3$:

$$\rho = 4R.$$

Cercle inscrit dans le triangle Δ :

$$\rho = \frac{4}{3}R.$$

Enfin, les formules (44), (48), (53) et (55) définissent quatre *cônes de révolution* qui ont les sommets en O et qui touchent le plan Oxy suivant O_k. Chaque cône sera parfaitement déterminé par la cotangente de l'angle φ que fait son axe avec Ox. L'équation du plan central (plan perpendiculaire à l'axe du cône) qui passe par la normale principale Oy s'écrit

$$ux + z = 0, \qquad u = \cot\varphi.$$

Cône tangent à trois plans osculateurs A_1, A_2, A_3, ou *cône osculateur* (¹), circonscrit à la sphère (S_2) :

$$\cot\varphi = -\frac{R}{T}.$$

Cône tangent aux trois plans OM_1M_2, OM_2M_3 et OM_3M_4, ou cône circonscrit à la sphère (S_3) :

$$\cot\varphi = -\frac{1}{3}\frac{R}{T}.$$

Cône circonscrit au trièdre formé par trois plans osculateurs A_1, A_2 et A_3 :

$$\cot\varphi = -4\frac{R}{T}.$$

Cône dont trois génératrices sont OM_1, OM_2, OM_3 (²) :

$$\cot\varphi = -\frac{4}{3}\frac{R}{T}.$$

(¹) Ce cône a été considéré par Saint-Venant (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXX, 1845, p. 42).

(²) M. Scheffers a considéré ce cône à un autre point de vue. Voir *Einführung in die Theorie der Curven*, p. 260. Leipzig, 1901.

18. Les quatre cônes correspondent aux quatre cercles d'après le principe de dualité qui exige qu'on envisage la courbe de deux manières : soit comme lieu du point, soit comme enveloppe du plan osculateur. Il suffit de remplacer, dans la formule qui donne le rayon ρ du cercle, la quantité R par $-\frac{R}{T}$ pour obtenir la valeur de $\cot\varphi$ relative au cône correspondant.

L'analogie entre ces deux quantités paraît mériter notre attention. Le principe de dualité nous impose cette analogie. Car, si nous regardons la courbe des deux manières mentionnées, l'angle $d\tau$ de deux plans osculateurs infiniment voisins correspond à la distance ds de deux points infiniment voisins de la courbe, l'angle $d\sigma$ de deux tangentes infiniment voisines (que nous regardons comme droites concourantes) correspond à lui-même, et l'on a

$$R = \frac{ds}{d\sigma}, \qquad \frac{R}{T} = \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Le cône osculateur (dont l'axe est la droite rectifiante) offre une analogie complète avec le cercle osculateur; et c'est précisément le plan perpendiculaire à son axe au sommet O (que nous avons nommé *plan central*) qui est, d'après le principe de dualité, tout à fait analogue au centre de courbure.

Les expressions des quantités R et $\frac{R}{T}$, en fonctions de différentielles des coordonnées, renferment une même racine carrée qui disparaît dans leur quotient T.

19. Je vais donner encore un petit théorème sur le quotient du volume V du tétraèdre formé par quatre points M_k de la courbe infiniment voisins et du volume V′ du tétraèdre formé par quatre plans osculateurs A_k aux points M_k.

Les formules (32) expriment les coordonnées X_k, Y_k, Z_k des sommets du dernier tétraèdre au moyen des fonctions symétriques ρ_k, σ_k, τ_k des v_k [*voir* (29)].

En éliminant v_k, d'après la seconde équation (23), on obtient des expressions qui ne renferment que les fonctions symétriques

$$\lambda_k = x_l + x_m + x_n, \qquad \mu_k = x_l x_m + x_m x_n + x_n x_l, \qquad \nu_k = x_l x_m x_n,$$

à savoir

$$X_k = \frac{\lambda_k}{3} + \ldots, \qquad Y_k = \frac{a}{3}\mu_k + \ldots, \qquad Z = b\nu_k + \ldots.$$

Les volumes V, V′ sont donnés par les formules

$$6V = |\, x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad 1 \,| = |\, x_1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad 1 \,|\,(ab + \varepsilon),$$

$$6V' = |\, X_1 \quad Y_1 \quad Z_1 \quad 1 \,| = |\, \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \nu_1 \quad 1 \,|\left(\frac{ab}{9} + \varepsilon'\right),$$

ε, ε' étant infiniment petits en même temps que les x_k.

Si l'on fait $\lim x_k = 0\,(k = 1, 2, 3, 4)$, l'identité suivante, rencontrée déjà dans le n° 12,

$$|\, x_1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad 1 \,| \equiv |\, \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \nu_1 \quad 1 \,|$$

montre que

$$\lim \frac{V}{V'} = 9.$$

CHAPITRE IV.

20. Dans les considérations précédentes, le principe de dualité a joué un rôle assez important; nous allons donner, dans ce dernier Chapitre, une autre application de ce principe. Pour cela, nous considérons, dans la Géométrie non euclidienne, une relation entre deux propriétés métriques des surfaces réglées; nous trouverons ainsi l'origine commune de deux théorèmes bien connus de la Géométrie ordinaire.

Nous commençons par le théorème suivant :

Deux trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée (R) *coupent chaque génératrice* g *en deux points* M *et* M′ *dont la distance demeure invariable.*

Pour démontrer ce théorème, prenons l'équation de la quadrique (Q) sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Nous désignons par x, y, z les coordonnées du point M qui décrit la première trajectoire (C) et par x', y', z' celles du point M′ qui décrit la seconde trajectoire (C′). On exprime que MM′ est invariable en égalant à zéro la différentielle du rapport anharmonique r défini par l'équation (3), où il faut poser $t = t' = 1$ et $\delta = 1$. Cela donne

$$A(x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1) + A'(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + z^2 + 1)(x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz) \\ &\quad - (xx' + yy' + zz' + 1)(x\,dx + y\,dy + z\,dz), \\ A' &= (x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1)(x\,dx' + y\,dy' + z\,dz') \\ &\quad - (xx' + yy' + zz' + 1)(x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz'). \end{aligned}$$

Le théorème sera démontré, si nous prouvons que les expressions A et A′, égalées à zéro, représentent les conditions pour que la génératrice MM′ soit conjuguée respectivement à la tangente t de (C) au point M et à la tangente t' de (C′) au point (M′). La formule (11) (avec $\delta = 1$) montre qu'il en est ainsi, car les coordonnées homogènes p_{ik} des droites MM′, t, t' sont respectivement

$$\begin{array}{llllll} x' - x, & y' - y, & z' - z, & yz' - y'z, & zx' - z'x, & xy' - x'y; \\ dx, & dy, & dz, & y\,dz - z\,dy, & z\,dx - x\,dz, & x\,dy - y\,dx, \\ dx', & dy', & dz', & y'\,dz' - z'\,dy', & z'\,dx' - x'\,dz', & x'\,dy' - y'\,dx'. \end{array}$$

21. Considérons maintenant la figure polaire réciproque de la précédente, la quadrique (Q) étant directrice. (R) devient une nouvelle surface réglée (R_1); par chaque génératrice g_1 de (R_1) passent deux plans (M_1) et (M'_1) qui font un angle constant; les caractéristiques t_1 et t'_1 des deux surfaces développables engendrées par (M_1) et par (M'_1) sont conjuguées à g_1. Donc :

Soit (R_1) *une surface réglée donnée, et construisons une surface développable* (D) *satisfaisant aux conditions suivantes : chaque plan* (M_1) *de* (D) *passe par une génératrice* g_1 *de* (R_1) *et la caractéristique de* (M_1) *coupe* g_1 *à angle droit. En faisant tourner* *chaque plan* (M_1) *autour de la génératrice* g_1 *située dans* (M_1) *d'un angle constant quelconque, on aura une nouvelle développable satisfaisant aux mêmes conditions.*

Il est facile à vérifier que ce théorème reste vrai dans la Géométrie ordinaire.

Cherchons à déterminer ce qui se passe, lorsque la surface (R), considérée dans le numéro précédent, est développable; la figure réciproque (R_1) sera par conséquent une courbe gauche. La tangente t d'une trajectoire orthogonale qui coupe la génératrice g est située dans le plan tangent de (R) qui passe par g; par suite, la droite t_1 correspondante qui coupe la tangente g_1 de la courbe (R_1) à l'angle droit passe précisément par le point de contact de g_1 avec la courbe (R_1). En d'autres termes, la droite t_1 est une normale de la courbe (R_1) et nous retrouvons ainsi le théorème sur les surfaces développables formées par les normales d'une courbe gauche, bien connu dans la Géométrie ordinaire.

22. Enfin, considérons le théorème de Joachimsthal sur l'intersection de deux surfaces suivant une ligne de courbure commune.

La définition des lignes de courbure dans la Géométrie non euclidienne ne diffère pas de la définition ordinaire : la normale de la surface suivant une ligne de courbure engendre une surface développable (1).

On sait que le théorème de Joachimsthal n'est qu'une simple conséquence du théorème sur les développables formées par les normales d'une courbe gauche; par conséquent, il reste vrai dans la Géométrie non euclidienne.

Transformons maintenant la figure, formée par deux surfaces qui se coupent suivant une ligne de courbure commune, par polaires réciproques, la quadrique Q étant directrice. Nous obtenons ainsi le théorème suivant, analogue au théorème de Joachimsthal :

Soient (S) *et* (S') *deux surfaces telles que le segment compris*

---

(1) *Voir* la Note V dans l'Ouvrage de M. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*

sur chaque génératrice g de la surface développable (D) *circonscrite à* (S) *et* (S′), *entre les points de contact de* (D) *avec* (S) *et* (S′), *ait une longueur constante. Pour que la courbe de contact de* (D) *avec* (S) *soit une ligne de courbure sur* (S), *il faut et il suffit que la courbe de contact de* (D) *avec* (S′) *soit une ligne de courbure sur* (S′).

Ce théorème reste vrai dans la Géométrie ordinaire. Car, si la première courbe de contact est une ligne de courbure sur (S), elle l'est sur (D) en vertu du théorème de Joachimsthal; elle sera donc une trajectoire orthogonale des génératrices. Par conséquent, la seconde courbe de contact sera aussi une trajectoire orthogonale des génératrices g, c'est-à-dire une ligne de courbure commune à (D) et à (S′). Si la surface (S) se réduit à une sphère, la première courbe de contact sera toujours une ligne de courbure sur (S); nous obtenons ainsi un théorème analogue au théorème sur les lignes de courbure sphériques.