JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND MAILLET

Sur certains systèmes d'équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 5 (1909), p. 225-262.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1909_6_5__225_0>

Sur certains systèmes d'équations différentielles (¹);

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

Introduction.

Je m'occupe, dans le travail qui suit, de systèmes d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_1}{X'_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X'_n} = dt,$$

où

$$X'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_i) + Y_i = X_i + Y_i,$$

$\varphi_i = X_i$ étant un polynome homogène de degré $p > 1$, Y_i une fonction de $x_1, \ldots, x_i$ dont les termes sont tous de degré $> p$, par exemple un polynome, une série de Maclaurin dont tous les termes sont de degré $> p$, etc. Je définis des cas étendus où, pour $t \geqq 0$, les solutions réelles, de valeurs initiales assez voisines de l'origine $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (cette restriction est inutile quand les Y_i sont nuls) sont de la forme

$$x_1 = \ldots = x_i = 0, \qquad x_j = (\rho_j + \varepsilon_j)(a + t)^{\frac{1}{1-p}}$$

($j = i + 1, \ldots, n$; a paramètre arbitraire $\geqq 0$, ρ_j constante, $\lim \varepsilon_j = 0$ pour $t = +\infty$). Ainsi, lorsque p est impair, ceci a lieu quand le coef-

(¹) Le présent Mémoire a été résumé dans une Communication à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, 13 juillet 1908). Sa lecture n'exige que des connaissances mathématiques générales.

ficient de x_i^p dans φ_i est <0 quel que soit i; alors, si les Y_i sont holomorphes dans le domaine de l'origine, le calcul des ε_i peut s'effectuer, en général, quand leurs valeurs absolues sont assez petites, grâce à une théorie de M. H. Poincaré (et à ses compléments par divers auteurs). Quand p est pair, on a un résultat analogue pour les solutions $x_i \geqq 0$, sous certaines conditions complémentaires relatives aux X_i'. Les ρ_j sont racines d'un système d'équations qui ne dépend que de p et des coefficients des X_i.

Il y a des extensions à des autres cas, par exemple à celui où X_i' est remplacé par une expression $\frac{\varphi_i + Y_i}{x_i^{p'}}$.

Enfin, ces considérations, et d'autres analogues, comportent des applications dans l'étude du régime des systèmes de n réservoirs, en permettant d'établir, dans des cas très généraux, l'existence d'un régime asymptotique unique si ces réservoirs ne sont pas alimentés du dehors, ou d'un ou plusieurs régimes permanents limites, s'ils sont alimentés par des débits permanents. Inversement, l'étude des systèmes de réservoirs pourra fournir des systèmes d'équations différentielles, cas particuliers de systèmes plus généraux, et dont on soupçonnera parfois assez nettement certaines propriétés pour qu'on puisse tenter de les établir. En fait, la plus grande partie de mon travail est une extension de résultats beaucoup plus restreints que j'ai fait connaître antérieurement [1].

Je suis conduit dans mon Mémoire à envisager certains cas du sujet d'études suivant : on sait que les solutions $x_1, \ldots, x_n$ (satisfaisant à certaines conditions) d'un système d'équations différentielles entre $x_1, \ldots, x_n$ et t tendent vers l'origine $x_1 = \ldots = x_n = 0$ quand $\frac{1}{t}$ tend vers o pour $t \geqq 0$, mais on ne sait pas intégrer le système dans le domaine de l'origine : calculer en fonction de $\frac{1}{t}$ les valeurs principales des infiniment petits $x_1, \ldots, x_n$ quand $\frac{1}{t}$ tend vers zéro.

Il est à peine besoin de faire remarquer que mon Mémoire fournit

---

[1] *Comptes rendus*, 13 mars 1905; *Bull. Soc. math.*, t. XXXIII, 1905, p. 129; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1906.

Pour des résultats ultérieurs, consulter *Comptes rendus*, 23 novembre 1908, 12 et 19 juillet 1909; *Journ. École Pol.*, 1909.

une contribution à l'étude des courbes réelles définies par des équations différentielles, et, par suite, se rattache à une catégorie d'importants travaux de MM. H. Poincaré, Liapounoff, Hadamard, Painlevé, etc.

II.

Solutions simples ou déterminantes d'un certain système d'équations différentielles.

Soit le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{1}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions homogènes de degré $p > 0$, entier ou non, en $x_1, \ldots, x_n$. Je pose, a, m et ρ_i étant des constantes,

$$x_i = \rho_i(a+t)^m, \qquad dx_i = m\rho_i(a+t)^{m-1}\,dt = \frac{m x_i\,dt}{a+t}. \tag{2}$$

Par substitution, (1) donne, si $X_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$X_i = (a+t)^{mp}\varphi_i(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n), \tag{3}$$

où $\varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ est homogène et de degré p en $\rho_1, \ldots, \rho_n$, et

$$m\rho_i(a+t)^{m-1} = (a+t)^{mp}\varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_n).$$

On satisfait à cette relation en posant

$$m - 1 = mp, \qquad m = \frac{1}{1-p}, \qquad p \neq 1, \tag{4}$$

$$m\rho_i = \varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \frac{\rho_i}{1-p} \tag{5}$$

ou

$$m = \rho_1^{p-1}\frac{\rho_1}{\rho_i}\varphi_i\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_n}{\rho_1}\right).$$

Les équations (5) déterminent les systèmes de valeurs des ρ_i acceptables. On obtient ainsi, dans le cas général, une série de solutions de (1) dépendant d'un paramètre arbitraire a. Ces solutions seront dites *solutions simples* ou *déterminantes* de (1).

Je suppose dès lors p *entier* > 1, et je n'envisage que des solutions

$x_1, \ldots, x_n, t$ *réelles;* $x_i = \rho_i(a+t)^m$ est réel ainsi que sa dérivée $\frac{dx_i}{dt} = \frac{mx_i}{a+t}$. Donc, t étant réel, si $t = 0$ est la valeur initiale de t (on peut supposer que t est le temps), a et $a+t$ sont réels; $(a+t)^m$ est de la forme

$$|(a+t)^m|\theta = [\operatorname{mod}(a+t)^m]\theta,$$

où θ est une racine quelconque de $\theta^{2p-2} = 1$, telle qu'on a $\theta^{p-1} = +1$ quand $a \geqq 0$, $\theta^{p-1} = -1$ quand $a < 0$. De plus, pour le système $\rho_1, \ldots, \rho_n$ considéré, $\frac{\rho_i}{\rho_j} = \frac{x_i}{x_j}$, $\rho_i\theta$, ρ_i^{p-1} sont évidemment réels, et θ a même valeur quel que soit i.

Inversement, soit $\rho_1, \ldots, \rho_n$ un système de solutions des équations (5) tel que $\frac{\rho_i}{\rho_j}$ et $\rho_i\theta$ (ou ρ_i^{p-1}) soient réels pour i et j égaux à 1, 2, ..., n : $x_i = \rho_i(a+t)^m$ est une solution réelle de (1) si $(a+t)^m = |(a+t)^m|\theta$.

On a

$$\left(\frac{x_i}{\rho_i}\right)^{p-1} = (a+t)^{-1};$$

si t croît à partir de zéro, les x_i tendent vers zéro quand t croît indéfiniment, ou croissent indéfiniment en valeur absolue quand t tend vers $-a$, suivant que a est positif ou négatif. Les solutions du premier type seront dites *stables*, celles du second *instables*.

Soient $\rho_1, \ldots, \rho_n$ un système de solutions de (5), et θ_1 une racine $(p-1)^{\text{ième}}$ de l'unité; d'après (5), $\rho_1\theta_1, \ldots, \rho_n\theta_1$ est aussi un système de solutions.

Ceci posé (¹) :

1° *Soient p impair, p − 1 pair.* — On a $x_i^{p-1} > 0$; ρ_i^{p-1} est positif si a est positif, négatif si a est négatif. La trajectoire se compose d'une des demi-droites $\frac{x_i}{x_1} = \frac{\rho_i}{\rho_1}$ passant par l'origine; si $x_i = \rho_i(a+t)^m$ (où $i = 1, 2, \ldots, n$) est solution, il en est de même de $x_i = -\rho_i(a+t)^m$; à la solution $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de (5) correspondent ainsi deux solutions de (1) dépendant d'un paramètre arbitraire a à la fois positif ou négatif pour

(¹) J'emploie dans mon Mémoire la terminologie, facile et suggestive, de la Géométrie à n dimensions.

les deux; si une demi-droite est trajectoire, il en est de même de la demi-droite opposée.

Les solutions (2) ne peuvent être toutes stables que quand (5) n'a aucun système de solutions telles que $\frac{\rho_i}{\rho_j}$ soit réel et $\rho_i^{p-1} < 0$. En admettant qu'il n'y ait pas de solutions instables, c'est-à-dire que l'on ait toujours $a > 0$, on peut se borner à envisager les systèmes $\rho_1, \ldots, \rho_n$ réels; en effet, si $a > 0$, $\frac{\rho_i}{\rho_j}$ est réel et $\rho_i^{p-1} > 0$: parmi les $p - 1$ systèmes $\rho_1 \theta_1, \ldots, \rho_n \theta_1$, il y en a un réel; c'est celui-là que je désigne par $\rho_1, \ldots, \rho_n$; alors la solution $\rho_1 \theta'_1, \ldots, \rho_n \theta'_1$, avec $\theta_1'^{p-1} = 1$ et $\rho_1 \theta'_1 (a + t)^m$ réel, est telle que

$$(a + t)^m = \pm |(a + t)^m| \theta_1'^{-1},$$

et donne

$$x_i = \pm \rho_i |(a + t)^m|,$$

c'est-à-dire les mêmes solutions que le système $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

D'autre part, quand $a < 0$, $\rho_i \theta$ étant réel avec $\theta^{p-1} = -1$, on a

$$x_i^{p-1} = \rho_i^{p-1} (a + t)^{-1} = \frac{-\rho_i^{p-1}}{-(a + t)} = \frac{(\rho_i \theta)^{p-1}}{-(a + t)},$$

$$x_i = \rho_i \theta |(-a - t)^m|,$$

où

$$\rho_i \theta = \rho'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est une solution réelle du système

$$-m = \rho_1'^{p-1} \frac{\rho'_1}{\rho'_i} \varphi_i\left(1, \frac{\rho'_2}{\rho'_1}, \ldots, \frac{\rho'_n}{\rho'_1}\right).$$

2° *Soient p pair, $p - 1$ impair.* — ρ_i^{p-1} étant réel, positif ou négatif, il y a toujours, que a soit positif ou négatif, un des systèmes $\rho_1 \theta_1, \ldots, \rho_n \theta_1$ qui est réel : je le désigne par $\rho_1, \ldots, \rho_n$. On a la solution correspondante

$$x_i = \pm \rho_i |(a + t)^m|,$$

où le signe à prendre est celui de a.

Les solutions $\rho_i \theta'_1 (\theta'_1 \neq 1, \theta_1'^{p-1} = 1)$ peuvent être laissées de côté, car elles donnent la même valeur pour x_i. Mais, ici, x_i^{p-1} est du signe de x_i; en faisant varier le signe des valeurs initiales pour les x_i, on obtient, avec la solution $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de (5), deux solutions simples de (1), l'une stable pour laquelle $a \geqq 0$, l'autre instable pour laquelle $a < 0$. Les deux trajectoires correspondantes sont deux demi-droites opposées $\frac{x_i}{x_1} = \frac{\rho_i}{\rho_1}$.

Toutes ces conclusions subsistent, que p soit pair ou impair, si quelques-unes des quantités $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont nulles.

En résumé :

Lemme. — *Les solutions réelles $x_i = \rho_i(a+t)^m$ de (1) correspondent aux solutions de (5) telles que $\frac{\rho_i}{\rho_j}(i \neq j)$ et ρ_i^{p-1} sont réels. Ce sont, par définition, les solutions simples (ou déterminantes) réelles de (1).*

Quand p est impair, une pareille solution simple est stable si les ρ_i^{p-1} correspondants, qui sont tous de même signe, sont positifs, et alors on peut prendre $\rho_1, \ldots, \rho_n$ réels; elle est instable dans le cas contraire. Les trajectoires correspondantes sont formées de demi-droites deux à deux opposées passant par l'origine; mais les solutions correspondant à deux demi-droites opposées sont à la fois stables ou instables.

Quand p est pair, une pareille solution simple peut toujours être choisie de façon que les ρ_i soient réels. Dans cette hypothèse, les paramètres $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont ceux d'une demi-droite issue de l'origine et qui est une trajectoire stable $\left(a > 0, \frac{x_i}{\rho_i} > 0\right)$ et de la demi-droite opposée qui est une trajectoire instable $\left(a < 0, \frac{x_i}{\rho_i} < 0\right)$.

On conclut facilement de là les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces solutions réelles simples soient toutes stables dans un angle solide ayant pour sommet l'origine. En particulier, quand cet angle comprend tout l'espace, ces solutions ne peuvent être toutes stables :

1° Lorsque p est pair, que si les équations (5) en ρ_i n'ont pas de solution réelle autre que $\rho_1 = \ldots = \rho_n = 0$; il n'y a pas de solution simple réelle autre que $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

2° Lorsque p est impair, que si ces équations n'ont aucun système de solutions tel que les ρ_i^{p-1} soient tous négatifs, avec $\frac{\rho_i}{\rho_j}$ réel (condition nécessaire et suffisante).

Ces conditions sont d'autre part nécessaires pour que la solution générale de (1) soit stable dans le domaine de l'origine. *J'appelle ici, et dans la suite, solution stable d'un système d'équations différentielles dans ce domaine une solution qui, pour des valeurs initiales assez petites des* $|x_i|$, *est telle que les* x_i *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{t}$. *Plus généralement, je dirai que la solution* x_i *est stable pour l'origine quand les* x_i *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{t}$.

Les solutions particulières (2) que l'on vient de trouver jouent, comme on va le voir, un rôle important dans l'étude de la stabilité des solutions de certains systèmes d'équations différentielles de la forme (1) ou analogues, au voisinage de l'origine.

III.

Système d'équations différentielles plus général à certains égards.

J'envisage le système

$$dt = \frac{dx_1}{X'_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X'_n}, \tag{6}$$

où X'_i ne dépend que de $x_1, \ldots, x_i$, et

$$X'_i = X_i + Y_i,$$

$X_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_i)$ étant un polynome homogène en $x_1, \ldots, x_i$, de degré entier $p > 1$, Y_i une fonction des mêmes quantités qui sera d'ordre infinitésimal supérieur à p quand $x_1, \ldots, x_i$ sont infiniment petits du premier ordre (par exemple un polynome ou une série de Maclaurin absolument convergente, dont tout terme est de degré $> p$, un terme de la forme $Ax_j^{p+\frac{1}{2}}\log x_j$ (A constante, $x_j > 0$), etc.

Je considère en même temps que le système (6) le système

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{7}$$

Les équations (5) deviennent pour le système (7)

$$(8) \qquad m\rho_i = \frac{\rho_i}{1-p} = \varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_i),$$

ou

$$\frac{1}{1-p} = \rho_1^{p-1}\frac{\rho_1}{\rho_i}\varphi_i\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_i}{\rho_1}\right).$$

Une des solutions s'obtiendra en posant $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_j = 0$, ce qui rend identiques les j premières équations (8), les autres déterminant $\rho_{j+1}, \ldots, \rho_n$. Le système des $n-j$ dernières équations n'est d'ailleurs autre que celui des équations (5) correspondant au système analogue à (7)

$$(9) \qquad dt = \frac{dx_{j+1}}{X_{j+1}} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_j = 0,$$

c'est-à-dire au système différentiel déduit de (7) en y faisant

$$x_1 = \ldots = x_j = 0.$$

Les systèmes (6), (7) et (9) ont cette propriété remarquable que l'on peut y considérer séparément le système obtenu en y négligeant les λ dernières équations. En particulier, on peut déterminer la première fonction x_1 par une quadrature, la seconde x_2 par une équation du premier ordre, la troisième x_3 par une équation du premier ordre, etc.

IV.

Cas où p est impair > 1.

Je vais établir le résultat suivant.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les solutions réelles du système* (6), *dont les positions initiales pour $t = 0$ sont assez voisines de l'origine $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (c'est-à-dire les solutions pour lesquelles $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ a une valeur initiale assez petite), soient toutes stables, c'est en général que les solutions déterminantes de* (7) *soient toutes stables.*

Si les solutions réelles de (6) *sont toutes stables, elles sont toutes d'une des formes*

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1 = \ldots = x_i = 0, & x_j = (\rho_j + \varepsilon_j)(a+t)^{\frac{1}{1-p}}, \\ j = i+1,\ i+2,\ \ldots,\ n; & a \gtrless 0, \quad \rho_{i+1} \neq 0, \end{cases}$$

avec $\lim \varepsilon_j = 0$ *pour* $t = +\infty$;

$$x_1 = \ldots = x_i = 0, \qquad x_j = \rho_j (a+t)^{\frac{1}{1-p}}$$

est alors une solution simple quelconque de (7) ([1]).

Cet énoncé est vrai en général, c'est-à-dire, pour préciser, au cas où le coefficient $-\beta_i$ de x_i^p dans X_i est supposé $\neq 0$ quand $i = 1, 2, \ldots,$ et n, hypothèse que l'on fait dès à présent.

Alors, comme on le verra, *la condition nécessaire et suffisante pour que les solutions déterminantes réelles de* (7) *soient toutes stables, c'est que* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *soient tous* > 0. Dans le cas particulier où les Y_i sont tous nuls, c'est-à-dire où (6) et (7) coïncident, le théorème reste vrai même si la valeur initiale de $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ est absolument quelconque. On pourra le vérifier au cours de la démonstration.

Enfin, dans le cas un peu plus général où les Y_i sont nuls, mais où les X_i sont des polynomes homogènes de degré p en $x_1, \ldots, x_i$, dont les coefficients A sont, dans un domaine sphérique D ayant son centre à l'origine $x_1 = \ldots = x_n = 0$, *non plus constants, mais variables,* et de la forme $A'(1+\varepsilon)$, les A' étant constants et les $1+\varepsilon$ restant compris entre deux limites fixes > 0 assez rapprochées, avec $\varepsilon = 0$ à l'origine $x_k = 0$ ([2]), le théorème est encore vrai, et, en général, le domaine Δ des valeurs initiales admissibles est d'autant plus étendu que D l'est. Si D comprend tout l'espace, il en est de même de Δ.

Soient donc $\beta_1, \beta_2, \ldots$ et $\beta_n \neq 0$.

([1]) L'origine est dans ce cas, pour les trajectoires, un *nœud,* d'après la terminologie de M. Poincaré (*voir* PICARD, *Analyse,* t. III, 1896, p. 200-207, et les Mémoires de M. Poincaré qui y sont cités).

([2]) Les ε sont fonctions de $x_1, \ldots, x_i$, et même, si l'on veut, de t, pourvu qu'ils tendent uniformément vers zéro avec $x_1, \ldots, x_i$, quel que soit t. Ce sont alors les A' qui sont les coefficients des φ_i.

Cas où $n = 1$. — Le système (7) se réduit à

$$(11)\qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_1}{-\beta_1 x_1^p}, \qquad \beta_1 \neq 0;$$

on a

$$x_1 = \rho_1 (a+t)^{\frac{1}{1-p}}, \qquad -\beta_1 \rho_1^p (a+t)^{\frac{p}{1-p}} = \frac{\rho_1}{1-p}(a+t)^{\frac{1}{1-p}-1},$$

$$(12)\qquad \beta_1(p-1)\rho_1^p = \rho_1, \qquad x_1^{1-p} = \beta_1(p-1)(a+t).$$

Quand ρ_1 est $\neq 0$, la condition $a \geqq 0$ exige (pour $t=0$) $\beta_1 > 0$, $\rho_1^{p-1} > 0$, et réciproquement : la solution de (11) autre que $x_1 = 0$ est stable. Au contraire, quand on a encore $\rho_1 \neq 0$, la condition $a < 0$ exige (pour $t=0$) $\beta_1 < 0$, $\rho_1^{p-1} < 0$, et réciproquement : la solution de (11) autre que $x_1 = 0$ est instable.

Quand $\beta_1 > 0$, la solution de (11) autre que $x_1 = 0$ s'obtient, comme on l'a vu, en prenant pour ρ_1 les valeurs réelles

$$(12\ bis)\qquad \rho_1 = \pm \left| [\beta_1(p-1)]^{\frac{1}{1-p}} \right|.$$

Le système (6) se réduit à

$$(13)\qquad dt = \frac{dx_1}{X'_1}, \qquad X'_1 = -\beta_1 x_1^p + Z_1 x_1^{p+\delta},$$

où l'on peut prendre δ fixe > 0 et $|Z_1|$ limité supérieurement lorsque $|x_1|$ reste assez petit.

Ceci posé, j'établis le théorème pour $n = 1$. Je dis que les solutions de (13) ne sont pas toutes stables si celles de (11) ne le sont pas toutes, c'est-à-dire si $\beta_1 < 0$. En effet, dans ce cas, pour une valeur de x_1 de module assez petit, X'_1 et $\frac{dx_1}{dt}$ sont du signe de x_1^p, c'est-à-dire que $|x_1|$ croît : x_1 ne peut donc tendre vers zéro.

Au contraire, je dis que les solutions de (13), avec $|x_1^0|$ (valeur initiale de x_1 pour $t = 0$) assez petit [1], sont toutes stables si celles de (11) le sont, c'est-à-dire si $\beta_1 > 0$. On a ou bien $x_1 = 0$, ou bien

$$(14)\qquad x_1 = (\rho_1 + \varepsilon_1)(a+t)^{\frac{1}{1-p}}, \qquad a > 0, \qquad \rho_1 \neq 0,$$

---

[1] La restriction est inutile si $X'_1 = -\beta_1 x_1^p(1+\zeta'_1)$, où $1+\zeta'_1$ reste compris entre deux limites fixes > 0, dans le domaine D, renfermant l'origine, et où l'on

ε_1 tendant vers zéro quand t croît indéfiniment, et $(a+t)^{\frac{1}{1-p}}$ étant réel et positif.

En effet, je donne à x_1 une valeur initiale $|x_1^0| \leqq \eta$, où η est assez petit : x_1 et $\frac{dx_1}{dt}$ sont de signes contraires d'après (13), puisque $\beta_1 > 0$; $|x_1|$ décroît et reste $\leqq \eta$. Si $x_1^0 = 0$, x_1 reste nul. Soit $x_1^0 \neq 0$; la solution peut toujours se mettre sous la forme (14), ε_1 étant convenablement choisi, et x_1 conserve le même signe. Je substitue dans (13) la valeur (14); on a

$$\frac{1}{x_1}\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\rho_1+\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{1}{1-p}\frac{1}{a+t} = -\frac{\beta_1(\rho_1+\varepsilon_1)^{p-1}}{a+t}(1+\eta_1),$$

où

$$\eta_1 = -\frac{Z_1 x_1^\delta}{\beta_1}, \qquad |\eta_1| < \lambda\eta^\delta \qquad (\lambda \text{ constante}),$$

et

$$\begin{aligned}(a+t)\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= -\beta_1(\rho_1+\varepsilon_1)^p(1+\eta_1) + \frac{\rho_1+\varepsilon_1}{p-1}\\ &= -\beta_1\rho_1^p(1+\eta_1) - p\beta_1\rho_1^{p-1}\varepsilon_1(1+\eta_1) + \frac{\rho_1+\varepsilon_1}{p-1} - \varepsilon_1^2\lambda_1,\end{aligned}$$

où $|\lambda_1|$ reste fini quand ε_1 reste fini. D'après (12),

$$\beta_1\rho_1^p = \frac{\rho_1}{p-1}, \qquad \beta_1\rho_1^{p-1} = \frac{1}{p-1},$$

en sorte que

$$(a+t)\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{\rho_1\eta_1}{p-1} - \frac{p}{p-1}\varepsilon_1\eta_1 - \varepsilon_1^2\lambda_1 - \varepsilon_1.$$

étudie x_1 ($\zeta_1' = 0$ à l'origine $x_1 = 0$). Alors

$$\frac{dx_1^{1-p}}{dt} = (p-1)\beta_1(1+\zeta_1'),$$

et x_1 tend vers 0 avec $\frac{1}{t}$.

On raisonne comme ci-après, mais à partir du temps t_0, où $x = x_1^1$, $|x_1^1| \leqq \eta$, $x_1^1 = \rho_1(a'+t_0)^{\frac{1}{1-p}}$, avec a' positif ou non. Alors, grâce à la *Remarque* qui suit, on obtient encore la forme (14), avec une valeur arbitraire $a_1 \gtrless 0$ de la constante a, forme applicable depuis $t=0$, pourvu que ε_1 soit convenablement choisi quand t varie de 0 à t_0.

Je choisis alors $a \geqq 0$ et le signe de ρ_1 de façon que

$$x_1^0 = \rho_1 \left| a^{\frac{1}{1-p}} \right|;$$

la valeur initiale de ε_1 pour $t = 0$ est 0, en sorte que $|\varepsilon_1|$ va d'abord rester petit quand t croît à partir de 0; η étant assez petit,

$$\eta_2 = \frac{|\rho_1 \eta_1|}{p-1} < \frac{|\rho_1| \lambda \eta^\delta}{p-1},$$

et si $|\varepsilon_1|$, croissant à partir de 0, vient à être supérieur à $2\eta_2$, on aura

$$\left| \frac{p}{p-1} \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_1^2 \lambda_1 \right| < \frac{|\varepsilon_1|}{2};$$

$\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ et ε_1 sont de signes contraires, en sorte que $|\varepsilon_1|$ décroît; $|\varepsilon_1|$ ne peut dépasser $2\eta_2$, et, par suite, reste limité en fonction de η; d'après (14), x_1 tend vers 0 avec $\frac{1}{t}$: *les solutions de* (13) *sont toutes stables. On voit en même temps que* ε_1 *tend vers* 0, puisque, à chaque instant, $|\varepsilon_1|$ ne peut dépasser $2\eta_2$, et que η_1 et η_2 tendent vers 0.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il convient de noter que, lorsque $|x_1^0| < \eta$, $|x_1|$ reste plus petit que η.

D'autre part, pour chaque solution, a semble dépendre de x_1^0; soit $a_0 \geqq 0$ tel que

$$x_1^0 = \rho_1 \left| a_0^{\frac{1}{1-p}} \right|, \qquad a_0 = \left(\frac{x_1^0}{\rho_1} \right)^{1-p};$$

on trouve en réalité

$$x_1 = (\rho_1 + \varepsilon_1)(a_0 + t)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Mais, si a_1 désigne un nombre arbitraire $\geqq 0$, on aura

$$(a_0 + t)^{\frac{1}{1-p}} = (a_1 + t)^{\frac{1}{1-p}} \left(\frac{a_1 + t}{a_0 + t} \right)^{\frac{1}{p-1}} = (a_1 + t)^{\frac{1}{1-p}} (1 + \varepsilon_1'),$$

$$(1 + \varepsilon_1')^{p-1} = \frac{a_1 + t}{a_0 + t} = 1 + \frac{a_1 - a_0}{a_0 + t},$$

et ε'_1 tend vers o avec $\frac{1}{t}$; posant

$$(\rho_1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon'_1)=\rho_1+\varepsilon''_1,$$

on a

$$x_1=(\rho_1+\varepsilon''_1)(a_1+t)^{\frac{1}{1-p}},$$

où ε''_1 tend vers o avec $\frac{1}{t}$; autrement dit, toute solution telle que $0<|x_1^0|<\eta$ est de la forme (14), où a est une quantité positive arbitraire.

Cas où $n>1$. — La méthode va consister à admettre que le théorème est vrai pour $n=1, 2, \ldots, q$, et à démontrer qu'il est encore vrai pour $n=q+1$.

Les équations (8), pour le système (7) correspondant, deviennent

$$(15)\qquad \begin{cases} m\rho_1 = \dfrac{\rho_1}{1-p} = \varphi_1(\rho_1) = -\beta_1\rho_1^p, \\ m\rho_2 = \varphi_2(\rho_1, \rho_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ m\rho_{q+1} = \varphi_{q+1}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{q+1}) \quad (^1). \end{cases}$$

Je remplacerai, pour simplifier, x_{q+1}, ρ_{q+1}, X_{q+1}, φ_{q+1}, ..., par x, ρ, X, φ, ...

Je dis d'abord que les conditions du premier alinéa du théorème I sont nécessaires.

En effet, je suppose stables (dans le domaine de l'origine) les solutions réelles de (6). L'équation

$$dt=\frac{dx_1}{X'_1}, \qquad X'_1=-\beta_1 x_1^p+Z_1 x_1^{p+\sigma},$$

appartenant à (6), donne

$$x_1=0 \qquad \text{ou} \qquad x_1=(\rho_1+\varepsilon_1)(a+t)^m \qquad \text{avec} \qquad \rho_1\neq 0.$$

La solution correspondante de (6) ne peut être stable que si $x_1=0$,

(1) A toute solution réelle $\rho_1, \ldots, \rho_i$ des i premières équations (15) correspond toujours une solution réelle ρ_{i+1} de la $(i+1)^{\text{ième}}$ puisque p est impair.

ou si, x_1 étant $\neq 0$, on a $\beta_1 > 0$. Dans le second cas, ρ_1 étant réel si l'on veut, a est $\geqq 0$, et la solution $x_i = \rho_i(a+t)^m$ du système (7) est stable. Dans le premier cas, $x_2, \ldots, x$ sont solutions du système

$$(16) \qquad dt = \frac{dx_2}{X'_2} = \ldots = \frac{dx}{X'}, \qquad \text{où} \qquad x_1 = 0,$$

et pour lequel le théorème I est supposé vrai. Mais le système analogue à (7) correspondant à ce système (16) est

$$(17) \qquad dt = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx}{X}, \qquad \text{où} \qquad x_1 = 0.$$

Les solutions déterminantes de ce dernier système sont celles de (7), quand on fait dans (7) $x_1 = 0$: ces solutions sont encore stables d'après l'hypothèse, puisque le système (16) n'a plus que q variables $x_2, \ldots, x$ autres que t. Finalement, les conditions du premier alinéa du théorème I sont nécessaires.

En particulier, soit dans (6) $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$; on a

$$(18) \qquad dt = \frac{dx_i}{X'_i} = \frac{dx_i}{-\beta_i x_i^p + Z_i x_i^{p+\delta}},$$

où Z_i ne dépend que de x_i. Puisque, par hypothèse, $\beta_i \neq 0$, il faut $\beta_i > 0$ (¹).

On peut d'ailleurs remarquer que, lorsque $\beta_1, \ldots, \beta_p, \beta$ sont $\neq 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que les solutions déterminantes de (7) soient toutes stables est que $\beta_1, \ldots, \beta_q, \beta$ soient > 0. En effet, les conditions sont nécessaires d'après (18); elles sont de plus suffisantes, car si $\rho_i > 0$, les solutions de (7) pour lesquelles $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, $x_i \neq 0$ sont telles que $dt = \frac{dx_i}{-\beta_i x_i^p}$, c'est-à-dire stables, puisque la valeur ρ_i correspondante est réelle et $\neq 0$, ce qui exige $a > 0$ [équations analogues à (12)].

(¹) Quand $\beta_i < 0$, la solution est instable d'après ma définition; mais cela ne veut pas dire que $|x_i|$ va toujours croître indéfiniment avec t. Si, par exemple, $X'_i = -\beta_i x_i^p - \gamma x_i^{p'}$, $\gamma > 0$, p' impair $> p$, dès que $|x_i|$ est assez grand, $\frac{dx_i}{dt}$ est de signe contraire à x_i, et $|x_i|$ reste limité supérieurement.

J'établis maintenant que les conditions du premier alinéa du théorème I sont suffisantes, et que, quand elles ont lieu, c'est-à-dire quand on a $\beta_1, \ldots, \beta_q$ et $\beta > 0$, les solutions de (6) sont stables dans le domaine de l'origine. On montrera ensuite qu'elles sont de la forme (10).

D'abord, ces conditions étant réalisées, les solutions de (6) pour lesquelles $x_1 = 0$ sont toutes stables. En effet, ces solutions dépendent du système (16); le système (17) correspondant a toutes ses solutions stables, et il en est de même de (16) par hypothèse. De plus $x_2, \ldots x_q$, x sont de la forme (10).

Je suppose donc x_1 et $x_1^0 \neq 0$; par hypothèse, $x_1, \ldots, x_q$ sont de la forme

$$x_j = (\rho_j + \varepsilon_j)(a + t)^{\frac{1}{1-p}},$$

avec $a \geqq 0$, $\rho_1 \neq 0$, $\lim \varepsilon_j = 0$ pour t infini positif.

Lemme I. — *Quand les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_q^0, x^0$ de $x_1, \ldots, x_q, x$ ont leurs valeurs absolues $\leqq \eta$ (η assez petit), $|x_1|, \ldots, |x_q|, |x|$ restent limités supérieurement et $\leqq f_{q+1}(\eta)$ (où f_{q+1} ne peut dépendre que des coefficients des polynomes $X_1, \ldots, X_q$, X et de η, et s'annule avec η).*

On sait que ceci est vrai pour $q = 0$ (cas de $n = 1$). J'admets que le lemme est vrai pour $x_1, \ldots, x_q$; par suite, $|x_1^0|, \ldots, |x_q^0|$ étant $\leqq \eta$, $|x_1|, \ldots, |x_q|$ restent $\leqq \eta' = f_q(\eta)$ qui s'annule avec η. On a

$$\frac{dx}{dt} = X' = \varphi(x_1, \ldots, x_q, x) + Y = -\beta x^p + \ldots + Y.$$

$|x_1|, \ldots, |x_q|$ restant $\leqq \eta'$, dès que $|x|$ atteint $\nu\eta'$, on a

$$\varphi(x_1, \ldots, x_q, x) = -\beta x^p(1 + \varepsilon') \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon'| \leqq \frac{1}{4},$$

ν ne dépendant que des coefficients de φ, puisque φ est homogène [1].

---

[1] En effet, il suffit $\beta|x^p| \geqq 4\Sigma$, Σ étant la somme des valeurs absolues des autres termes de φ, où l'on remplace $x_1, \ldots, x_q$ par η'; si $|x| = \nu_1\eta'$, il suffit $\beta\nu_1^p \geqq 4\Sigma_1$, où Σ_1 se déduit de Σ en y remplaçant $|x|$ par $\nu_1\eta'$, puis supprimant le facteur η'^p : ν est alors une limite supérieure $\geqq 1$ des racines positives de $\beta\nu_1^p - 4\Sigma_1 = 0$, équation en ν_1.

Prenant alors $|x| = \nu\eta'$ assez petit ([1]), ce qui est possible si η et η' sont assez petits, $|Y|$ est très petit par rapport à $|x|^p = (\nu\eta')^p$, et

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x^p(1+\varepsilon'') \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon''| < \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, η étant pris assez petit, et $|x_1^0|, \ldots, |x_q^0|, |x^0|$ au plus égaux à η, $|x|$ ne peut atteindre en croissant une certaine limite $\nu\eta'$ sans décroître; $|x_1|, \ldots, |x_q|, |x|$ ne peuvent dépasser $\nu\eta' = f_{q+1}(\eta)$, $f_{q+1}(\eta)$ s'annulant avec η. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Quand les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_q^0, x^0$ de $x_1, \ldots, x_q, x$ ont leurs valeurs absolues $\leqq \eta$ [η assez petit ([2])], à partir d'un temps t_1 assez grand, $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ reste limité supérieurement et $\leqq \mu$ (où μ ne dépend que des coefficients de $X_1, \ldots, X_q, X$); donc, x tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{t}$.

En effet, soient

$$u_1 = \frac{x_1}{x_1} = 1, \qquad u_2 = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \ldots, \qquad u_q = \frac{x_q}{x_1}, \qquad u = \frac{x}{x_1};$$

on a, d'après (6) et (11),

$$du = \frac{x_1\,dx - x\,dx_1}{x_1^2} = \frac{x_1 X' - x X_1'}{x_1^2}\,dt,$$

$$(19) \qquad \frac{1}{x_1^{p-1}}\frac{du}{dt} = \frac{X' - uX_1'}{x_1^p} = \frac{X - uX_1 + Y - uY_1}{x_1^p} = \psi + \beta_1 u + \psi_1,$$

$$X_1' = -\beta_1 x_1^p + Y_1, \qquad X' = -\beta x^p + \ldots + Y,$$

$$\psi_1 = \frac{Y - uY_1}{x_1^p}, \qquad \psi = \varphi(1, u_2, \ldots, u_q, u).$$

$|x|$ restant limité et aussi petit qu'on veut, d'après le lemme I, on peut

---

([1]) Cette restriction est inutile quand $Y_1 = 0$ identiquement, quel que soit i; alors η est arbitraire, même si les coefficients des φ_i ou des X_i sont variables entre certaines limites, comme il a été dit.

([2]) Cette restriction est inutile quand $Y_i = 0$ identiquement, quel que soit i, même si les coefficients des φ_i ou des X_i sont variables entre certaines limites, comme il a été dit.

toujours n'envisager que des temps t, tels que $u_1, \ldots, u_q$ soient aussi voisins qu'on veut des valeurs de la forme $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}$ vers lesquelles ces quantités tendent par hypothèse. Je suppose qu'il en soit ainsi.

Y et Y_1 ne renferment que des termes de degrés $> p$ en $x_1, \ldots, x_q$, x; ψ_1 est ainsi composé de termes de la forme $\varepsilon' u_2^{k_2} \ldots u^k$, où $k_2 + \ldots + k \leqq p$, et où ε' est aussi petit qu'on veut quand $|x_1|, \ldots, |x_q|$, $|x|$ sont assez petits.

D'autre part

$$\psi + \beta_1 u = -\beta u^p + \lambda_1, \qquad \beta > 0,$$

où λ_1 ne contient que des termes de degré $< p$ en u, de la forme $\gamma u_2^{k_2} \ldots u^k$; lorsque $|u|$ est au moins égal à un certain nombre $\mu \geqq 1$ qui ne dépend que des coefficients de ψ (ou de φ), de β_1, de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q$, c'est-à-dire finalement des coefficients de $X_1, \ldots, X_q$, X,

$$\psi + \beta_1 u = \frac{X - u X_1}{x_1^p} = -\beta u^p + \lambda_1 = -\beta u^p (1 + \varepsilon'_1), \qquad |\varepsilon'_1| < \frac{1}{4}.$$

D'ailleurs, quand $|u| \geqq \mu$, si η est assez petit, $|\psi_1| < \varepsilon'_2 \beta |u^p|$ (où $\varepsilon'_2 < \frac{1}{4}$, et même est aussi petit qu'on veut), car, d'après l'hypothèse, $|\psi_1 x_1^p|$ est d'ordre de petitesse au moins égal à celui de $|x|^{p+\delta}$, quand $|x|$ est suffisamment petit. Donc alors (¹)

$$\frac{1}{x_1^{p-1}} \frac{du}{dt} = -\beta u^p (1 + \varepsilon'_3) \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon'_3| < \frac{1}{2}.$$

Il est maintenant évident que $|u|$ décroît, puisque p est impair, $\frac{du}{dt}$ étant du signe de $-u$; x_1 tendant vers o avec $\frac{1}{t}$, il en est de même de x, puisque $|u|$ a une limite supérieure dès que t dépasse une certaine limite t_1. Il en résulte que ε', $\varepsilon' u_2^{k_2} \ldots u^k$, ψ_1 tendent vers o avec $\frac{1}{t}$.

C. Q. F. D.

(¹) L'égalité reste vraie lorsque, les Y_i étant nuls, les coefficients des $X_1, \ldots, X_q$, X sont variables (y compris β) entre certaines limites, comme il a été dit plus haut, de façon que $\beta_1, \ldots, \beta_q$, β restent supérieurs et inférieurs à des nombres fixes > 0, et que les autres coefficients soient limités supérieurement.

LEMME III. — *Dans les mêmes conditions, au bout d'un temps $t_2 \geqq t_1$ assez grand, u prend une valeur aussi voisine qu'on veut d'une racine réelle σ de l'équation en u*

$$\psi + \beta_1 u = 0.$$

En effet, je suppose que ceci n'ait jamais lieu à partir d'un certain moment t'_1 assez grand; dans cette hypothèse, pour toute racine réelle σ de cette équation, on a indéfiniment, dès que $t \geqq t'_1$, $|u - \sigma| \geqq \zeta'$, où ζ' est un nombre fixe aussi petit qu'on veut; par suite, $|\psi + \beta_1 u| \geqq \zeta_1$ (ζ_1 nombre fixe analogue à ζ' et fonction de ζ' et des coefficients de $X_1, \ldots, X_q, X$). D'après ce qu'on a vu, ψ_1 tend vers o avec $\frac{1}{t}$, et l'on a

$$|\psi + \beta_1 u + \psi_1| \geqq \frac{\zeta_1}{2},$$

à partir d'une certaine valeur de t; $\psi + \beta_1 u + \psi_1$ garde un signe constant, ainsi que $\frac{du}{dt}$, d'après (19). La variation Δu de u pendant l'intervalle de t' à $t' + \tau$ est, d'après (19), telle que

$$|\Delta u| \geqq \int_{t'}^{t'+\tau} \frac{\zeta_1}{2} x_1^{p-1}\, dt = \frac{1}{2}\zeta_1 \int_{t'}^{t'+\tau} (\rho_1 + \varepsilon_1)^{p-1} \frac{dt}{a+t},$$

$$|\Delta u| \geqq \frac{\zeta_1 \rho_1^{p-1}}{4} \int_{t'}^{t'+\tau} \frac{dt}{a+t} = \frac{\zeta_1 \rho_1^{p-1}}{4} \mathrm{L}\left(1 + \frac{\tau}{a+t'}\right).$$

$|u|$ pourrait croître indéfiniment avec τ, ce qui est impossible d'après le lemme II. Il y a donc une racine σ telle que $|u - \sigma| < \zeta'$ à un moment $t_2 \geqq t_1$ assez grand, si petit que soit ζ'. C. Q. F. D.

Remarquant que [1]

$$\psi + \beta_1 u = \varphi(1, u_2, \ldots, u_q, u) + \beta_1 u,$$

et que, lorsque $t \geqq t_1$ et t_1 assez grand, $u_2, \ldots, u_q$ diffèrent aussi peu

---

[1] Lorsque les Y_i sont nuls identiquement, et que les X_i ont leurs coefficients variables comme il a été dit plus haut, les coefficients $A = A'(1 + \varepsilon)$ tendent vers leurs limites A' quand $x_1, \ldots, x_q, x$ tendent vers o, et ce sont ces limites qui interviennent dans (19 *bis*) et (20).

qu'on veut de $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}$ d'après l'hypothèse, on voit que σ diffère de moins de ζ' d'une racine réelle $\frac{\rho}{\rho_1}$ de

$$(19\ bis) \qquad \varphi\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}, \frac{\rho}{\rho_1}\right) + \beta_1 \frac{\rho}{\rho_1} = 0,$$

telle que

$$(20) \qquad \varphi(\rho_1, \ldots, \rho_q, \rho) = m\rho,$$

d'après (15).

ζ' étant donné (aussi petit qu'on veut), on a, au bout d'un temps t_2 assez grand,

$$|u - \sigma| < \zeta', \qquad \left|\sigma - \frac{\rho}{\rho_1}\right| < \zeta',$$
$$\left|u - \frac{\rho}{\rho_1}\right| < 2\zeta'.$$

Si, par la suite, $\left|u - \frac{\rho}{\rho_1}\right|$ redevenait $\geqq 2\zeta'$, le lemme III montre qu'à un moment $t_3 > t_2$ assez grand, $\left|u - \frac{\rho'}{\rho_1}\right|$ devient $< 2\zeta'$, ρ' étant une racine réelle de (20), égale ou non à ρ; on peut continuer de la sorte. Donc :

Lemme IV. — *Ou bien $u\rho_1$ tend vers une racine ρ de* (20) $\left(\textit{auquel cas } \frac{x}{x_1} \textit{ tend vers } \frac{\rho}{\rho_1}\right)$, *ou bien $u\rho_1$ diffère une infinité de fois de moins de $2\zeta'\rho_1$ d'une racine réelle de l'équation* (20) *en ρ, et une infinité de fois d'au moins $2\zeta'\rho_1$ de toute racine réelle de cette équation* (*ζ' étant un nombre fixe aussi petit qu'on veut*).

Pour établir complètement le théorème I, il ne reste plus qu'à écarter ce second cas.

Je suppose que ce second cas soit réalisé. Soit

$$(21) \qquad P = P(u) = \varphi\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}, u\right) + \beta_1 u;$$

on a, d'après (19),

$$(22) \quad \frac{1}{x_1^{p-1}} \frac{du}{dt} = \varphi(1, u_2, \ldots, u_q, u) + \beta_1 u + \psi_1 = P + \varepsilon'_1 + \psi_1 = P + \varepsilon'_2,$$

où ε_2' tend vers o avec $\frac{1}{t}$;

$$P(u) = -\beta u^p + \lambda_2, \qquad \beta > 0,$$

où λ_2 est un polynome en u de degré $< p$.

Soient σ_1 la plus petite racine réelle, σ_2 la plus grande racine réelle de P : si, t étant $> t_4$ (t_4 assez grand), u prend la valeur $\sigma_1 - \varepsilon$, ou la valeur $\sigma_2 + \varepsilon$ (ε fixe, positif et aussi petit qu'on veut), $\frac{du}{dt}$ est respectivement positif ou négatif. On sait, d'après le lemme IV, que u prend pour $t_5 > t_4$ une valeur comprise entre $\sigma_1 - \varepsilon$ et $\sigma_2 + \varepsilon$; donc, à partir de ce moment t_5, u reste compris entre $\sigma_1 - \varepsilon$ et $\sigma_2 + \varepsilon$.

D'autre part, pour $t \geqq t_5$, soit ν_0 une valeur de u qui diffère d'au moins ε' d'une racine réelle quelconque de P (ε' comme ε), et, *par exemple*, $P(\nu_0) > 0$: u croît, et ne peut jamais reprendre la valeur ν_0 par la suite, car on a aussi, par raison de continuité, $P(u) > 0$ quand u est compris entre ν_0 et $\nu_0 + \frac{\varepsilon'}{2}$. Soit ν_1 la racine réelle de P immédiatement supérieure à u_0. Si elle est d'ordre impair, $P(\nu_1 + \varepsilon'') < 0$ (ε'' comme ε), et $\frac{du}{dt}$ est < 0 pour $u = \nu_1 + \varepsilon''$ (dans le cas général, ν_1 est racine simple, et $\frac{\partial P}{\partial \nu_1} < 0$); on voit que u va tendre vers ν_1. Si ν_1 est une racine d'ordre pair, ou bien u tendra vers ν_1, ou bien u prendra une valeur $\nu_1 + \varepsilon''$ telle que $P(\nu_1 + \varepsilon'') > 0$. Dans ce dernier cas, à partir de ce moment, on raisonnera comme ci-dessus en considérant la plus petite racine ν_2 de P supérieure à ν_1.

Le cas où $P(\nu_0) < 0$, et où, par suite, u décroît pour $u = \nu_0$, se traite d'une manière identique : on considère la plus grande racine ν_1' de P inférieure à ν_0; u tend sûrement vers ν_1', si ν_1' est une racine d'ordre impair, et, quand ν_1' est racine simple, $\frac{\partial P}{\partial \nu_1'} < 0$. C. Q. F. D.

Remarque I (¹). — p étant impair, P a toujours une racine réelle et d'ordre impair ν_1 telle que $P(\nu_1 + \varepsilon'') < 0$, et, en général, que $\frac{\partial P}{\partial \nu_1} < 0$,

(¹) Toutes ces remarques supposent $\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$.

puisque $P(-\infty)$ est positif et $P(+\infty)$ négatif. Le système (15) a toujours une ou des solutions réelles qui conviennent.

Il importe de noter que, si ν_2 est une racine de P telle que $\frac{\partial P}{\partial \nu_2} > 0$, on a

$$P(\nu_2 - \varepsilon) < 0, \qquad P(\nu_2 + \varepsilon) > 0,$$

et u ne tend *jamais* vers ν_2, si, pour $t \geqq t_3$, $|u - \nu_2|$ est à un certain moment $\geqq \varepsilon'$.

Remarque II. — Soit la solution de (6) telle que,

$$x_1 = \ldots = x_i = 0, \qquad x_{i+1} \neq 0,$$

avec les valeurs initiales

$$x_1^0 = \ldots = x_i^0 = 0, \qquad x_{i+1}^0 \neq 0.$$

D'après ce qui précède, la solution de (6) pour laquelle

$$x_1^0 = \ldots = x_{k-1}^0 = 0, \qquad x_k^0 \neq 0$$

est telle que

$$x_k = (\rho_k + \varepsilon_k)(a + t)^m \qquad \text{avec} \qquad \rho_k \neq 0,$$

si petit que soit $|x_k^0|$. Les tangentes à l'origine aux deux trajectoires sont distinctes.

On peut alors donner suffisamment, comme il suit, une idée, au moins en général, de la répartition des trajectoires au voisinage de l'origine. Je remplace $P(u)$ par $P_{q+1}(u_{q+1})$, et j'envisage toutes les droites D d'équation $\frac{x_1}{\rho_1} = \frac{x_2}{\rho_2} = \cdots = \frac{x_n}{\rho_n}$. Je suppose que les $P_i(u_i)$ n'aient que des racines simples; soient

$$w_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \qquad \ldots, \qquad w_n = \frac{\rho_n}{\rho_1}.$$

Parmi les droites D, celles pour lesquelles on a à la fois

$$\frac{\partial P_2}{\partial w_2} < 0, \qquad \frac{\partial P_3}{\partial w_3} < 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial P_n}{\partial w_n} < 0$$

seront, pour ainsi dire, attractives pour les trajectoires, c'est-à-dire que la généralité des trajectoires leur sera tangente à l'origine.

Exemple simple :

$$X_i = -x_i^3, \qquad P_i(u_i) = -u_i^3 + u_i, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial u_i} = -3u_i^2 + 1.$$

Les racines de $P_i(u_i)$ sont -1, 0, $+1$, et, pour elles, $\frac{\partial P_i}{\partial u_i}$ est égal à -2, $+1$, -2 respectivement.

Les trajectoires ont, en général, pour équations

$$x_i^2 = \frac{1}{2(C_i + t)} \qquad (C_i \text{ constante}),$$

et ces trajectoires sont tangentes à l'origine à l'une des droites du système $x_1^2 = \ldots = x_n^2$ correspondant aux racines ± 1 des $P_i(u_i)$; mais il y a des trajectoires exceptionnelles correspondant au cas où quelques-uns des C_i sont infinis et les x_i correspondants nuls.

Remarque III. — Je suppose que X' soit de la forme $X' = xX''$, x étant en facteur dans $\varphi(x_1, \ldots, x_q, x)$ et dans Y. Je dis que x conserve un signe constant.

En effet, puisque

$$\frac{dx}{x} = X'' \, dt, \qquad L\left(\frac{x}{x^0}\right) = \int X'' \, dt,$$

$x_1, \ldots, x_q, x$ gardant leurs modules limités, $\int X'' \, dt$ a son module limité au bout d'un temps fini, et x ne peut s'annuler, ni, *a fortiori*, changer de signe, au bout d'un temps fini.

En particulier, lorsque, dans (6), $X'_i = x_i X''_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_1, \ldots, x_n$ conservent constamment leur signe initial quand t varie à partir de $t = 0$.

Bien entendu, sauf pour le cas où les Y_i sont nuls identiquement et où les X_i ont leurs coefficients constants ou variables entre certaines limites comme il a été dit plus haut, il ne s'agit ici que des solutions pour lesquelles les valeurs initiales ont des modules assez petits. Pour les autres solutions, quand $X' = xX''$, le même raisonnement montre seulement que x ne peut changer de signe au bout d'un temps fini tant que $x_1, \ldots, x_q, x, X''$ restent finis.

Plus généralement, un résultat de même genre a lieu quand on a, quel que soit i,

$$X'_i = \xi'_i + x_i \xi''_i, \tag{22 bis}$$

où ξ'_i ne dépend pas de x_i et reste positif ou nul lorsque $x_1, \ldots, x_{i-1}$ sont positifs ou nuls, ξ''_i restant infiniment petit d'ordre $p-1$ lorsque $x_1, \ldots, x_i$ sont infiniment petits du premier ordre.

Pour $n=1$, (22 *bis*) a toujours lieu avec $\xi'_i = 0$, et x_1 reste positif ou nul si $x_1^0 \geqq 0$. Les conditions (22 *bis*) étant supposées réalisées, j'admets que $x_1, \ldots, x_q$ restent $\geqq 0$ si $x_1^0, \ldots, x_q^0$ sont $\geqq 0$, et je vais montrer qu'il en est de même de $x = x_{q+1}$ si $x^0 = x_{q+1}^0 \geqq 0$. En effet, x ne peut devenir négatif sans s'annuler; si, à ce moment t_1, $\xi' = \xi'_{q+1} > 0$, $\frac{dx}{dt} > 0$ et x redevient positif; je suppose donc qu'au temps t_1 on ait à la fois

$$x = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = X' = 0, \qquad \xi' = 0, \tag{22 ter}$$

et j'admets que x devienne aussitôt après négatif : soit $x = -y$,

$$\frac{dy}{dt} = -X' = -\xi' + y\xi'', \qquad \xi' \geqq 0;$$

y^0 étant aussi petit qu'on veut et > 0, si y croît de y^0 à y^1 pendant le temps τ, $\xi'' \geqq 0$ pendant ce temps, et

$$\frac{dy}{y} \leqq \xi'' \, dt, \qquad L\left(\frac{y^1}{y^0}\right) \leqq \int \xi'' \, dt.$$

Le second membre est fini si le temps τ est fini, le premier est au contraire aussi grand qu'on veut, et l'hypothèse que x devient négatif conduit à un résultat absurde ([1]). Dans le cas particulier où les conditions $x_1, \ldots, x_{i-1} \geqq 0$, $\xi'_i = 0$ entraînent $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$ (exemple $\xi'_i = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{i-1}^3$), quel que soit i, ces raisonnements sont superflus, car (22 *ter*) entraîne alors $x_1 = \ldots = x_q = x = 0$ quel que soit t.

Remarque IV. — Je suppose que, dans (6), les X'_i soient holomorphes dans le domaine de l'origine, c'est-à-dire soient des séries de Maclaurin convergentes procédant suivant les puissances entières

---

([1]) Car y^1 étant pris fixe et aussi petit qu'on veut, et τ fini, $\frac{y^0}{y^1}$ peut être pris aussi petit qu'on veut.

croissantes des x_j. Une théorie de M. H. Poincaré et ses compléments ([1]) permettent, dans des cas étendus, de calculer les ε_i, dès que leurs modules sont assez petits.

Soit $\varphi_i = \varphi_i(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i)$: le changement des variables

$$\tau = (a+t)^m, \qquad x_i = (\rho_i + \varepsilon_i)\tau$$

transforme (6) en

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\varepsilon_i}{-\left[(p-1)\sum_1^i \varepsilon_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_j} + \varepsilon_i + \Phi_i + (p-1)\tau^\delta \Psi_i\right]},$$

où

$$Y_i = \tau^{\delta+p}\Psi_i,$$

$|\Psi_i|$ restant limité, δ étant entier, et Φ_i ne contenant que des termes du deuxième degré au moins par rapport aux ε_j. On peut appliquer à ce système la théorie en question : soient $s_1, s_2, \ldots, s_n$, 1 les racines d'une équation qui se réduit ici à

$$\left[s+1+(p-1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}\right]\cdots\left[s+1+(p-1)\frac{\partial\varphi_n}{\partial\rho_n}\right](s-1)=0;$$

si ces $n+1$ racines sont positives >0 et distinctes, les ε_i sont en général développables en séries procédant suivant les puissances croissantes de $\tau^{s_1}, \ldots, \tau^{s_n}, \tau, \log\tau$, et qui tendent vers 0 avec τ.

D'ailleurs, d'après (15),

$$1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}(p-1) = 1 - p\beta_1\rho_1^{p-1}(p-1) = 1 + mp(p-1) = 1-p;$$

d'après (21), où l'on pose $\nu = \frac{\rho}{\rho_1}$ $(\rho_1 \neq 0)$,

$$\rho_1^p P(\nu) = \varphi(\rho_1, \ldots, \rho_q, \rho) + \beta_1\rho\rho_1^{p-1},$$

$$\rho_1^{p-1}\frac{\partial P}{\partial\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \beta_1\rho_1^{p-1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{p-1},$$

$$1+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(p-1) = (p-1)\rho_1^{p-1}\frac{\partial P}{\partial\nu} = \frac{1}{\beta_1}\frac{\partial P}{\partial\nu}.$$

([1]) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 6 et 17, Paris, 1896, et les auteurs cités dans Painlevé, *Encycl. der Math. Wiss.* (Meyer et Burkhardt), Bd II, Heft 2/3, p. 224-225, en particulier E. Lindelöf et J. Horn. Je crois inutile de chercher à discuter ici avec plus de précision les conditions d'application de la *Remarque IV*.

Les développements en séries ci-dessus seront donc sûrement applicables en particulier si la solution $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de (15) est une solution simple et telle que les diverses quantités $\frac{\partial P}{\partial \nu}$ soient distinctes, <0 et distinctes de $-\beta_1$. Les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant, si l'on veut (à part la question des signes des β_i), les polynomes homogènes les plus généraux de leur degré, on voit qu'en général, pour les systèmes réels $\rho_1, \ldots, \rho_n$ tels que les $\frac{\partial P}{\partial \nu}$ soient <0, les ε_i seront calculables par des séries; on sait de plus (*Remarque I*) qu'il y a toujours en général de pareils systèmes $\rho_1, \ldots, \rho_n$ (¹).

V.

Cas où p est pair.

Dans ce cas, d'après le paragraphe II et l'équation (13), il ne saurait être question de stabilité pour les systèmes (6) et (7) dans tout le domaine de l'origine, dès que le système (15) a un système de solutions réelles non toutes nulles. Or, ce système (15) admet toujours une solution réelle telle que

$$\rho_1 = \ldots = \rho_q = 0, \qquad m\rho_{q+1} = -\beta_{q+1}\rho_{q+1}^p.$$

Il n'y a donc jamais stabilité dans tout le voisinage de l'origine.

Toutefois, la question de la stabilité peut s'étudier *dans un secteur solide*, si l'on est assuré que $x_1, \ldots, x_n$ y restent.

(¹) Soit le système

$$\frac{dx_i}{X_i + Y_i} = dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où X_i est un polynome homogène de degré p en $x_1, \ldots, x_n$, Y_i une fonction holomorphe de $x_1, \ldots, x_n$ n'ayant que des termes de degré $>p$. On peut observer que la méthode de la *Remarque IV* est applicable à la recherche des solutions réelles

$$x_i = (\rho_i + \varepsilon_i)(a + t)^m$$

de ce système, voisines des solutions déterminantes réelles du système auxiliaire (1)

$$\frac{dx_i}{X_i} = dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je considérerai le cas du système (6) où l'on suppose $\beta_1, \ldots$ et $\beta_n \neq 0$, et, pour $i = 1, 2, \ldots$ et n,

$$(23) \qquad X'_i = x_i X''_i,$$

(*Remarque III* précédente), c'est-à-dire que X_i et Y_i contiennent x_i en facteur, $\frac{X'_i}{x_i}$ tendant vers o quand $x_1, \ldots, x_i$ tendent vers o d'une manière indépendante. Cette condition (23) a toujours lieu dans (6) pour $i = 1$.

On peut établir pour les systèmes (6) satisfaisant à (23) la propriété suivante :

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les solutions réelles du système* (6) *et* (23) ([1]), *dont les valeurs initiales pour* $t = 0$ *sont* $\geqq 0$ *et assez petites, soient toutes stables, c'est en général que les solutions déterminantes réelles du système* (7) *correspondant, avec des valeurs initiales* $\geqq 0$, *soient toutes stables.*

Quand ces conditions sont remplies, ces solutions sont de la forme (10).

Le théorème s'applique dans le cas général où $\beta_1, \ldots, \beta_n \neq 0$, et les conditions $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$ sont alors *toujours* nécessaires et suffisantes : 1° pour la stabilité des solutions de (6) et (23) considérées; 2° pour celle des solutions déterminantes de (7) en question.

La marche à suivre est à peu près la même que quand p est impair. Le théorème II est d'ailleurs tout à fait semblable au théorème analogue qui résulte du théorème I et de la remarque III ci-dessus quand p est impair.

Le cas de $n = 1$ se traite de la même manière qu'au théorème I :

([1]) On peut aussi substituer aux conditions (23) les conditions plus générales (22 *bis*). De plus, quand (6) est de la forme (7) ou quand, les Y_i étant nuls identiquement, les X_i ont leurs coefficients constants ou variables entre certaines limites, comme il a été dit plus haut, le théorème s'applique pour des valeurs initiales positives quelconques. Les conditions (22 *bis*) ou (23) n'ont d'autre but que de permettre de montrer que les x_i restent $\geqq 0$ quand les x_i^0 sont $\geqq 0$, et aussi que, si $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont $\neq 0$, $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$ sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions déterminantes de (7) considérées soient stables.

mais, dans (12 *bis*), le double signe du second membre disparaît, et ρ_1 y est positif. On établit, grâce à (23), que x_1 reste positif quand x_1^0 est positif (*voir* ci-dessous et remarque III ci-dessus).

On raisonne encore de même pour $n > 1$. On sait que (15) admet toujours un ou des systèmes de solutions réelles. Les conditions du premier alinéa du théorème II sont nécessaires.

En effet, si les solutions de (6) en question sont stables, la considération de celles de ces solutions telles que $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, $x_i \neq 0$ avec $x_i^0 > 0$, donne $\beta_i > 0$, quel que soit i. Ces conditions $\beta_i > 0$ sont donc nécessaires. D'autre part, quand $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont $\neq 0$, ce sont encore les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions déterminantes de (7) à valeurs initiales positives soient toutes stables : on vérifie qu'elles sont suffisantes par la considération des solutions déterminantes réelles de (7) telles que $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, $x_i \neq 0$, $x_i^0 > 0$, qui donnent $\rho_i > 0$, $a > 0$; on voit aussi qu'elles sont nécessaires : si, en effet, les solutions déterminantes réelles de (7) à valeurs initiales positives sont stables, la solution déterminante *réelle* $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n \neq 0$ de (7) donne d'abord $\beta_n > 0$; la solution déterminante réelle $x_1 = \ldots = x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} \neq 0$, qui existe toujours grâce aux conditions (22 *bis*) ou (23), donne $\beta_{n-1} > 0$; on remarque, dans le cas de (22 *bis*), que la condition $\xi'_n \geqq 0$ a pour conséquence $\eta'_n \geqq 0$ (1), η'_n étant l'ensemble des termes de degré p de ξ'_n ; et ainsi de suite.

On voit alors que les conditions $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$ ou celles du premier alinéa du théorème II sont suffisantes.

En effet, le lemme I subsiste légèrement modifié, avec les mêmes notations : $x_1^0, \ldots, x_q^0, x^0$ étant positifs et $\leqq \eta$, $x_1, \ldots, x_q, x$ restent positifs et $\leqq f_{q+1}(\eta)$. Les conditions (23) ou (22 *bis*) interviennent ici, comme dans le cas où $n = 1$, en permettant de montrer que x reste positif. En effet, dans le cas de (23), par exemple, l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x\mathrm{X}'' = -\beta x^p + \ldots + \mathrm{Y}$$

montre encore que $x \leqq \nu\eta'$. On a, d'autre part, comme dans la re-

(1) Au besoin, pour simplifier, on admettra *a priori* la condition complémentaire $\eta'_n \geqq 0$.

marque III du théorème I,

$$L\left(\frac{x}{x^0}\right) = \int X'' dt,$$

tant que x reste positif, et il en résulte, puisque $x_1, \ldots, x_q$, x sont $\leqq f_{q+1}(\eta)$, que x ne peut s'annuler qu'au bout d'un temps infini, en sorte que x conserve son signe ([1]). La démonstration des lemmes II, III, IV subsiste intégralement. Le second cas du lemme IV s'écarte d'une manière analogue : $u = \frac{x}{x_1}$ ne peut dépasser $\sigma_2 + \varepsilon$, si σ_2 est la plus grande racine positive de $P(u)$; $P(u)$ a toujours une pareille racine $\geqq 0$, à cause de (23) ou de (22 *bis*), car

$$P(u) = -\beta u^p + \ldots + \chi + \beta_1 u,$$

où χ, terme indépendant de u, est $\geqq 0$; d'autre part, on sait que u reste positif si, pour $t = 0$, u^0 est positif. La démonstration s'achève comme quand p est impair.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Les conditions (23) ou (22 *bis*) interviennent surtout pour permettre d'établir que x et u restent positifs quand leurs valeurs initiales sont positives et $\geqq 0$. Si donc on sait *a priori* (par exemple à cause de conditions physiques auxquelles doivent satisfaire $x_1, \ldots, x_n$) que $x_1, \ldots, x_n$ restent positifs, on peut négliger les conditions (23) et (22 *bis*); d'après ce qui précède, *quand* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *sont* $\neq 0$, *les conditions* $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$ *sont nécessaires et suffisantes pour que les solutions de* (6) *de valeurs initiales positives assez petites soient stables; si ces solutions sont stables, elles sont de la forme* (10).

Remarque II. — Il me suffira d'indiquer qu'on peut encore calculer en général les ε_i comme il a été dit plus haut dans le cas de p impair, grâce à une théorie de M. H. Poincaré et à ses compléments.

Remarque III. — Quand les conditions (23) ou (22 *bis*) ont lieu,

---

([1]) On peut voir, comme dans la remarque III du théorème I, que x ne peut devenir négatif quand il prend la valeur zéro.

l'équation $P(u) = 0$, en général, ou bien a une racine $\nu_1 > 0$ d'ordre impair, et même une racine $\nu_1 > 0$ simple pour laquelle $\frac{\partial P}{\partial \nu_1} < 0$, puisque $P(-\infty) < 0$, $P(0) \geqq 0$, ou bien une racine nulle telle que $\frac{\partial P}{\partial u} < 0$ pour $u = 0$.

VI.

Extension des résultats précédents.

Les résultats qui précèdent peuvent s'étendre à des systèmes d'équations différentielles analogues à (6), mais où les X'_i et les X_i ont des formes un peu plus générales. Je me contenterai d'envisager le cas suivant qui comporte des applications en hydraulique, comme on le verra plus loin.

Je considère le système

$$dt = \frac{dx_1}{X'_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X'_n}, \tag{6 bis}$$

et le système auxiliaire

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{7 bis}$$

où

$$X_i = \frac{U_i}{V_i}, \qquad X'_i = \frac{U'_i}{V'_i}, \qquad U'_i = U_i + R_i, \qquad V'_i = V_i + S_i;$$

U_i et V_i sont des polynomes homogènes de degré p_1 et p'_1 en $x_1, \ldots, x_i$, et $p_1 - p'_1 = p$ est *pair* et > 0; R_i et S_i sont analogues à Y_i dans (6), c'est-à-dire d'ordre au moins égal à $p_1 + \delta$, $p'_1 + \delta$ (δ fixe > 0) quand $x_1, \ldots, x_i$ sont des infiniment petits du premier ordre; R_i et S_i ne dépendent que de $x_1, \ldots, x_i$, et V_i de x_i.

Le cas où $p'_1 = 0$, $V'_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) a fait l'objet du théorème II.

D'abord, si l'on pose

$$X_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_i),$$

φ_i n'est plus un polynome, mais est homogène et de degré p : la substitution (2) dans (7 *bis*) donne encore des équations analogues à (3),

(4) et (5), et les équations (15) se conservent, ainsi que les résultats du paragraphe II relatifs au cas où p est pair ([1]).

En particulier, quand $n = 1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = X'_1 = \frac{U'_1}{V'_1}; \tag{24}$$

on peut écrire

$$U'_1 = -\beta_1 x_1^{p_1} + Z_1 x_1^{p_1+\delta}, \qquad V'_1 = x_1^{p'_1}(1 + Z'_1 x_1^{\delta}),$$

où $|Z_1|$, $|Z'_1|$ sont limités supérieurement quand $|x_1|$ est assez petit,

$$\frac{U'_1}{V'_1} = \frac{-\beta_1 x_1^p + Z_1 x_1^{p+\delta}}{1 + Z'_1 x_1^{\delta}} = (-\beta_1 x_1^p + Z_1 x_1^{p+\delta})(1 + \varepsilon),$$

et $\lim \varepsilon = 0$ pour $x_1 = 0$. L'équation (15) correspondante est

$$\frac{\rho_1}{1 - p} = -\beta_1 \rho_1^p,$$

et elle a toujours une racine réelle $\rho_1 \neq 0$ puisque p est pair. J'envisage encore les solutions pour lesquelles $x_1 \geqq 0$: elles ne peuvent être stables que si $\beta_1 > 0$, ce que je suppose, d'où $\rho_1 > 0$. Dès lors, x_1 reste limité supérieurement si $0 \leqq x_1^0 \leqq \eta$; si $x_1^0 > 0$, x_1 ne peut s'annuler au bout d'un temps fini; si $x_1^0 = 0$, x_1 ne peut devenir négatif au bout d'un temps fini (raisonnement de la remarque III du théorème I), et x_1 reste nul. Enfin, quand β_1 est > 0, on a ou bien $x_1 = 0$, ou bien

$$x_1 = (\rho_1 + \varepsilon_1)(a + t)^{\frac{1}{1-p}}, \qquad a > 0, \qquad \rho_1 > 0,$$

$\lim \varepsilon_1 = 0$ pour $t = \pm\infty$ (raisonnement du théorème I avec modification légère de la valeur de η_1).

Quand $n > 1$, j'assujettirai, pour $i > 1$, les fonctions U'_i, V'_i aux conditions

$$U'_i = \xi'_i + x_i \xi''_i, \qquad V'_i = x_i^{p'_i}(1 + Z'_i); \tag{25}$$

dans ces formules, ξ'_i est fonction de certaines des quantités $x_1, \ldots, x_{i-1}$; ξ''_i, Z'_i sont fonctions des mêmes quantités que ξ'_i, et, de plus, de x_i.

([1]) Les résultats du paragraphe II subsistent évidemment quand U_i et V_i sont homogènes et de degré p_1, p'_1 respectivement en $x_1, \ldots, x_n$, avec $p_1 - p'_1 > 1$ et pair ou impair.

Enfin, pour $x_1, \ldots, x_{i-1} \geqq 0$, ξ'_i est positif, et ne peut s'annuler que si celles des quantités $x_1, \ldots, x_{i-1}$ qu'elle renferme sont toutes nulles; ξ''_i et Z'_i sont infiniment petits quand $x_1, \ldots, x_i$ le sont à la fois. Je suppose $-\beta_i$, coefficient de $x_i^{p_i}$ dans U_i, différent de zéro quel que soit i. Je ne m'occupe, d'autre part, que des solutions pour lesquelles

$$(25\ bis) \qquad x_i^0 \neq 0, \quad \text{quand} \quad x_{i-1}^0 \neq 0.$$

On peut alors démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Quand $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont $\neq 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que les solutions réelles du système* (6 *bis*) *et* (25) (¹), *dont les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ pour $t = 0$ sont $\geqq 0$, assez petites et telles que* (25 *bis*) *ait lieu, soient toutes stables, c'est que $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$.*

Quand $\beta_1, \ldots$ et β_n sont > 0, ces solutions sont de la forme (10).

En effet, d'après ce qu'on vient de voir, le théorème est vrai pour $n = 1$; soit $n > 1$. La propriété étant supposée exacte pour $n = 1, 2, \ldots, q$, je l'établis pour $n = q + 1$. Les équations (15) se conservent; les conditions du premier alinéa du théorème III sont nécessaires : il faut, si $-\beta_i x_i^{p_i}$ est le terme en $x_i^{p_i}$ dans U'_i, que $\beta_1, \ldots, \beta_q, \beta$, *supposés* $\neq 0$, soient > 0 : la considération de la solution $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, $x_i \neq 0$ le montre de suite.

Cette condition est suffisante. En effet, on peut d'abord admettre que $x_1 > 0$, le théorème étant évidemment vrai quand $x_1^0 = 0$ (d'où $x_1 = 0$). On a donc à traiter le cas où $x_1^0 > 0$, par suite $x_2^0, \ldots, x_q^0$, et $x^0 > 0$ d'après (25 *bis*); on peut encore considérer comme démontré que $x_1, \ldots, x_q$ restent > 0.

Ceci posé, le lemme I subsiste légèrement modifié : d'abord, si $x_1^0, \ldots, x_q^0, x^0 \leqq \eta$, $x_1, \ldots, x_q$, x sont $\leqq f_{q+1}(\eta)$. Les conditions (25) et (25 *bis*) interviennent pour permettre d'établir que x reste > 0. Si ξ' est nul identiquement, ξ'' et Z' ne dépendent que de x,

(¹) Si l'on sait *a priori* que $x_1, \ldots, x_n$ restent $\geqq 0$, la première des conditions (25) relative aux U'_i et la restriction (25 *bis*) deviennent inutiles. D'autre part, quand (6 *bis*) coïncide avec (7 *bis*), le théorème s'applique pour des valeurs initiales *quelconques* positives telles que (25 *bis*) ait lieu.

$\frac{dx}{dt} = X'$ se réduit à une équation de la forme (24) avec $\beta > 0$, et le théorème est évidemment vrai. Si ξ' n'est pas nul identiquement, et si x, positif, tend vers o (t restant fini), $\xi' > 0$, en sorte que, x étant assez petit et > 0, $\xi' + x\xi'' > 0$, $\frac{dx}{dt} > 0$, x croît et ne peut s'annuler : x reste > 0.

Les lemmes II, III, IV subsistent. On a

$$\varphi\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_q}{\rho_1}, u\right) + \beta_1 u = \frac{-\beta u^{p_1} + \lambda_1}{u^{p'_1}} + \beta_1 u = \frac{P(u)}{u^{p'}},$$

$$P(u) = -\beta u^{p_1} + \lambda_1 + \beta_1 u^{p'_1+1},$$

λ_1 étant un polynome en u de degré $< p_1$,

$$\frac{1}{x_1^{p-1}} \frac{du}{dt} = \frac{P + \varepsilon'_2}{u^{p'_1}}, \qquad \lim \varepsilon'_2 = 0 \quad \text{pour} \quad t = +\infty.$$

$u = \frac{x}{x_1}$ reste positif, et ne peut dépasser $\sigma_2 + \varepsilon$, si σ_2 est la plus grande racine positive de $P(u)$ [d'après (25), il y a toujours une pareille racine > 0]. La discussion s'achève comme aux théorèmes I et II ([1]).

Remarque. — Il est utile, pour la suite, de mentionner que le théorème ci-dessus reste vrai quand, dans un domaine sphérique D ayant son centre à l'origine, les U'_i sont des polynomes en $x_1, \dots, x_i$ dont les coefficients A sont constants ou variables et de la forme $A'(1 + \varepsilon)$, et que $V'_i = B'(1 + \varepsilon')x_i^{p'_1}$, avec ε, ε' nuls à l'origine $x_k = 0$, $1 + \varepsilon$ et $1 + \varepsilon'$ restant compris entre des limites fixes > 0 et suffisamment rapprochées, B' étant > 0, et les coefficients des $x_i^{p_1}$ dans les U'_i étant plus petits qu'un nombre fixe < 0. Le domaine Δ des valeurs initiales des solutions pour lesquelles le théorème est vrai peut être pris d'autant plus étendu que D est plus grand. Le domaine sphérique D ne comprend, bien entendu, que les points compris dans une sphère $x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2$ et dont les coordonnées sont ≥ 0. Si D, c'est-à-dire R, est infini, Δ comprend tous les points de D satisfaisant à (25 *bis*).

([1]) Il est facile de vérifier que le théorème III subsiste quand p est impair et > 1 : l'hypothèse que p est pair ne joue en effet aucun rôle essentiel dans la démonstration.

VII.

Applications à l'hydraulique. — Systèmes de réservoirs.

J'ai étudié antérieurement [1] les débits d'un système de n réservoirs d'eau *cylindriques* $S_1, \ldots, S_n$ dont la surface est libre et qui se vident par des déversoirs non noyés ou des ajutages, dans le cas où les eaux issues de S_i alimentent un ou plusieurs des réservoirs $S_{i+1}, \ldots, S_n$.

Je considère encore le même cas, mais en admettant que les réservoirs, au lieu d'être cylindriques, ont des formes quelconques : le débit externe de S_i peut être regardé comme une somme de fonctions $f_i(Y_i) = \sum_k f_{ki}(Y_i)$ exclusivement du niveau Y_i dans S_i, $f_{ki}(Y_i)$, avec $k > i$, étant la fraction du débit externe de S_i qui alimente S_k; la section horizontale s_i de S_i est aussi une fonction $\psi_i(Y_i) = s_i$. Les équations différentielles qui régissent les variations des niveaux des réservoirs sont alors

$$(26) \qquad s_i \frac{dY_i}{dt} = a_{i1} f_{i1}(Y_1) + \ldots + a_{i,i-1} f_{i,i-1}(Y_{i-1}) - f_i(Y_i),$$

où a_{ij} est égal à 1 si S_j alimente S_i, à 0 dans le cas contraire; $f_i(Y_i)$ est fonction croissante de Y_i (condition naturelle) et $\psi_i > 0$. Les fonctions f_{ki} ne dépendent que de la forme, de la nature et de la disposition des exutoires de S_i.

J'examine le cas où chaque réservoir S_i possède des exutoires constitués uniquement par des déversoirs à crête horizontale de même niveau $y_i < Y_i$ pour S_i; on sait qu'alors, si la largeur l_{ki} du déversoir est peu variable avec Y_i,

$$f_{ki}(Y_i) = m_{ki} l_{ki} (Y_i - y_i)^{\frac{3}{2}},$$

où m_{ki} est un coefficient peu variable avec Y_i; c'est ce que je supposerai. Le changement de variables $z_i = (Y_i - y_i)^{\frac{1}{2}}$ transforme le sys-

---

[1] *Comptes rendus*, 13 mars 1905; *Bull. Soc. math.*, t. XXXIII, 1905, p. 129; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1906.

tème (26) dans le système

$$2s_i z_i \frac{dz_i}{dt} = a_{i1} m_{i1} l_{i1} z_1^3 + \ldots - \left(\sum_k m_{ki} l_{ki}\right) z_i^3,$$

qu'on peut écrire plus simplement (¹)

$$(27) \qquad s_i z_i \frac{dz_i}{dt} = b_{i1} z_1^3 + \ldots + b_{i,i-1} z_{i-1}^3 - b_{ii} z_i^3.$$

La remarque du théorème III s'applique à ce système pourvu que s_i ne croisse pas indéfiniment avec Y_i ou z_i et reste limité inférieurement, c'est-à-dire, en fait, pourvu que, dans les limites où les z_j varient, s_i ne soit pas trop variable.

Soient $c_{i1}, \ldots, c_{ii}, s'_i$ les valeurs de $b_{i1}, \ldots, b_{ii}, s_i$ pour $z_1, \ldots, z_i$ nuls : les équations (15) deviennent, puisqu'ici $p = 2$, $m = \frac{1}{1-p} = -1$, $p_1 = 3$, $p'_1 = 1$,

$$-\rho_i = m\rho_i = \varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_i) = \frac{c_{i1}\rho_1^3 + \ldots + c_{i,i-1}\rho_{i-1}^3 - c_{ii}\rho_i^3}{s'_i \rho_i},$$

ou

$$c_{ii}\rho_i^3 - s'_i \rho_i^2 - c_{i1}\rho_1^3 - \ldots - c_{i,i-1}\rho_{i-1}^3 = 0.$$

Cette équation en ρ_i a une racine positive et une seule. Le système

---

(¹) On admet, bien entendu, que les s_i et les b_{ij} satisfont à des conditions telles que l'existence des solutions soit assurée dans le voisinage de

$$z_1 = \ldots = z_n = 0$$

(PICARD, *Analyse*, t. II, 1893, p. 291 et 301). Le cas où une partie des eaux de certains déversoirs se perd en dehors du système se ramène au cas considéré par l'adjonction d'un $(n+1)^{\text{ième}}$ réservoir, avec ou sans débit externe, et recueillant ces eaux.

Si l'on supposait que les largeurs des déversoirs varient de façon que

$$f_{ki} = M_{ki}(Y_i - y_i)^{\frac{r_1}{r}},$$

où r_1 et r sont entiers, et M_{ki} est peu variable avec Y_i, on ferait la transformation

$$z_i^r = Y_i - y_i;$$

le théorème III ou sa remarque s'applique encore au système d'équations différentielles obtenu.

de réservoirs possède ainsi un régime asymptotique unique, où les débits des déversoirs de S_i sont de la forme

$$f_{ki}(Y_i) = \frac{\lambda_{ki}(1+\varepsilon_{ki})}{(a+t)^2},$$

λ_{ki} étant une constante, et $\lim \varepsilon_{ki} = 0$ pour $t = +\infty$. On obtient finalement une extension au cas où les s_i sont variables des résultats que j'avais indiqués (*loc. cit.*) pour le cas où les s_i sont constants.

VIII.

Je voudrais dire encore quelques mots incidemment du cas d'un système analogue de réservoirs $S_1, \ldots, S_n$ dont chacun se vide dans un ou plusieurs des suivants soit par des déversoirs non noyés, soit par des ajutages. On admet de plus que les réservoirs peuvent recevoir du dehors des débits permanents, et que tout réservoir S_i qui ne reçoit l'eau d'aucun des réservoirs $S_1, \ldots, S_{i-1}$ est sûrement alimenté par un débit permanent $A_i \neq 0$; en particulier $A_1 \neq 0$; enfin, les exutoires d'un même réservoir S_i sont ou bien tous des déversoirs dont la crête est au même niveau et la largeur assez peu variable pour chacun avec Y_i, ou bien tous des ajutages de sections assez petites, et dont les centres de gravité sont au même niveau.

En posant encore $Y_i - y_i = u_i$, les équations différentielles des variations des niveaux deviennent

$$(28) \qquad s_i z_i \frac{dz_i}{dt} = B_i + b_{i1} z_1^{\theta_1} + \ldots + b_{i,i-1} z_{i-1}^{\theta_{i-1}} - b_{ii} z_i^{\theta_i},$$

où $b_{ii} > 0$, où les quantités $B_i, b_{i1}, \ldots, b_{i,i-1} \geqq 0$ ne sont pas toutes nulles à la fois, et où θ_j est égal à 1 ou 3 suivant que les exutoires de S_j sont des ajutages ou des déversoirs.

Quand les s_i et les b_{ij} sont des constantes, ce système admet pour solution un régime permanent tel que $z_i = \alpha_i > 0$, les α_i étant donnés par les équations

$$(29) \qquad B_i + b_{i1} \alpha_1^{\theta_1} + \ldots + b_{i,i-1} \alpha_{i-1}^{\theta_{i-1}} - b_{ii} \alpha_i^{\theta_i} = 0.$$

Il est évident que ces équations possèdent un système de solutions réelles, d'ailleurs > 0, et un seul. On peut vérifier par les méthodes déjà utilisées, et qui sont basées sur un théorème de M. Poincaré ([1]), qu'en général cette solution est *stable en ce sens* que les solutions z_i de (28), dont les valeurs initiales diffèrent assez peu des α_i, tendent vers α_i.

Ces procédés sont même applicables ([2]) quand les quantités s_i, b_{ij} peuvent varier dans de certaines limites avec les z_i, car on voit encore facilement que les équations (29), où l'on remplace z_k par α_k dans les b_{ij}, ont au moins un système de solutions réelles > 0 (on vérifie de proche en proche l'existence de $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, ...).

Mais l'on peut montrer directement dans les deux cas, en s'inspirant des paragraphes III à VI, ce résultat beaucoup plus complet :

Théorème. — *Toute solution $z_1, \ldots, z_n$ de* (28) *dont les valeurs initiales sont* > 0 *tend vers une des solutions* $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$ *de* (29).

La méthode de M. Poincaré et ses compléments servent alors à calculer la variation des z_i quand les z_i sont assez voisins des α_i.

Ce théorème est presque évident quand $i = 1$: on a

$$s_1 z_1 \frac{dz_1}{dt} = B_1 - b_{11} z_1^{\theta_1}, \qquad B_1 > \delta_1 > 0. \qquad \delta_1 \text{ fixe};$$

z_1 ne peut s'annuler quand $z_1^0 > 0$; quel que soit t_1, à un instant t_2 fini $> t_1$, z_1 diffère de moins de ζ_1 d'une racine de

$$B_1 - b_{11} z_1^{\theta_1} = 0,$$

sans quoi, $\frac{1}{s_1} | B_1 - b_{11} z_1^{\theta_1} |$ restant $\geqq \zeta_1'$, $\frac{dz_1}{dt}$ conserve un signe constant,

$$\left| z_1 \frac{dz_1}{dt} \right| \geqq \zeta_1', \qquad \left| \frac{z_1^2 - (z_1')^2}{2} \right| \geqq \zeta_1' (t - t_1),$$

z_1' étant la valeur de z_1 pour $t = t_1$.

([1]) *Voir* aussi Liapounoff (traduction Davaux), *Annales Fac. Sc. Toulouse*, 1907, p. 203 et suiv.

([2]) On peut encore supposer $B_i \geqq 0$ légèrement variable avec z_i ou t; dans ce dernier cas, on doit admettre que B_i a une limite fixe pour $t = +\infty$, laquelle doit être substituée à B_i dans (30). B_i reste toujours supérieur à un nombre fixe > 0 si $b_{i1}, \ldots, b_{i,i-1}$ peuvent s'annuler à la fois.

Quand t est assez grand, ceci est absurde, car $z_1 \frac{dz_1}{dt}$ est croissant pour z_1 assez petit, décroissant pour z_1 assez grand. A partir de ce moment t_2, z_1 ne peut s'abaisser de plus de ε au-dessous de la plus petite racine positive, dépasser de plus de ε la plus grande racine positive > 0 de $B_1 - b_{11} z_1^{\theta_1} = 0$, et l'on voit comme au théorème I que z_1 tend vers une racine de cette équation.

On admet le théorème pour $n = 1, 2, \ldots$ et q, et que $z_1, \ldots, z_{i-1}$ restent limités inférieurement par un nombre fixe > 0 et supérieurement, en tendant vers une solution réelle $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_{i-1} > 0$ du système (29) corrélatif. On montre que le théorème et ces résultats sont vrais pour $n = i$. D'après (28), z_i^0 étant > 0, z_i reste limité supérieurement et inférieurement, que B_i soit nul ou non, car, si $B_i = 0$, un des coefficients $b_{i1}, \ldots, b_{i,i-1}$ est $\neq 0$. Au bout d'un temps assez grand, $z_1, \ldots, z_{i-1}$ sont aussi voisins qu'on veut d'une solution $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_{i-1} > 0$ de (28), par hypothèse; on montre encore que z_i tend vers une solution correspondante > 0 de

$$B_i + b_{i1}\alpha_1^{\theta_1} + \ldots + b_{i,i-1}\alpha_{i-1}^{\theta_{i-1}} - b_{ii}\alpha_i^{\theta_i} = 0$$

(on raisonne comme pour $i = 1$). Les débits limites sont faciles à déterminer.

Au point de vue de la théorie des équations différentielles, ce qui précède n'est évidemment qu'un cas particulier de systèmes analogues à (6 *bis*). On pourra, par exemple, considérer le système plus général à certains égards

$$s_i z_i^r \frac{dz_i}{dt} = B_i + \varphi_i(z_1, \ldots, z_i), \qquad B_i \geqq 0, \qquad r \text{ entier} \geqq 0,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, où φ_i est un polynome homogène en $z_1, \ldots, z_i$ de degré p, le coefficient $-\beta_i$ de z_i^p dans φ_i étant négatif et $\neq 0$, et les coefficients pouvant, ainsi que B_i et s_i, être légèrement variables avec $z_1, \ldots, z_i$; on suppose de plus que s_i et β_i restent supérieurs à un nombre fixe > 0, qu'il en est de même de B_i si φ_i ne dépend que de z_i, et que, si φ_i ne dépend pas que de z_i,

$$\varphi_i(z_1, \ldots, z_{i-1}, 0) > 0$$

quand $z_1, \ldots, z_{i-1}$ sont $\geqq 0$ et ne sont pas tous nuls. Alors $B_1 > \delta_1 > 0$

(δ_1 fixe), z_1 reste >0 et tend vers une racine réelle >0 de $B_1 - \beta_1 z_1^p = 0$. On verra encore que $z_1, \ldots, z_n$ tendent vers un système $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$ de solutions des équations

$$B_i + \varphi_i(z_1, \ldots, z_i) = 0$$

(il existe toujours un pareil système, car l'équation en z_i, de degré p, a son terme en z_i^p négatif pour $z_i = +\infty$, et son terme indépendant de z_i positif >0). On admet la propriété pour $n = 1, 2, \ldots$ et $q-1$, et on l'établit pour $n = q$.

Les questions traitées dans les paragraphes VII et VIII et dans mes Notes antérieures précitées sont loin d'être les seules que l'on puisse envisager à propos des systèmes de réservoirs, en vue des applications. La multiplicité des cas susceptibles d'avoir effectivement quelque analogie avec des cas réalisés dans la nature est, pour ainsi dire, indéfinie (1). On pourrait, par exemple, à propos de (28), supposer que les A_t ne soient plus assujettis à être $\neq 0$, chercher alors à avoir des expressions asymptotiques plus précises des z_i, c'est-à-dire calculer la valeur principale des $z_i - \alpha_i$ en fonction de $\frac{1}{t}$, etc. Ce cas, comme celui des équations (28) dont il est une extension, aura alors quelque ressemblance avec celui plus compliqué du régime d'une rivière canalisée (au moins si les barrages sont fixes et ont leur crête horizontale et si les variations de niveau sont assez lentes). Mais je n'insisterai pas ici sur ce sujet.

Bourg-la-Reine, 20 juillet 1908.

---

(1) Voir *Comptes rendus*, 23 novembre 1908, 12 et 19 juillet 1909; *Journ. École Pol.*, 1909.