JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRIK PETRINI

Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 5 (1909), p. 127-223.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1909_6_5__127_0>

Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique;

PAR M. HENRIK PETRINI.

CHAPITRE I.

LA DÉRIVÉE SECONDE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE D'UNE SURFACE PLANE.

1. *Le potentiel logarithmique et sa dérivée première.* — Soit ρ une fonction finie et intégrable des coordonnées d'un point Q situé dans le plan considéré. Nous définirons le potentiel logarithmique V d'une portion finie du plan pour un point $P_0(x, y)$ du plan par la formule

$$V(x, y) = \int \rho \log \frac{1}{r} d\omega, \tag{1}$$

où x et y sont les coordonnées rectangulaires du point P_0 et où $d\omega$ est l'élément de surface au point Q; r est la distance P_0Q et l'intégration s'étend sur tous les éléments de l'aire considérée qui est supposée finie. Si le point P_0 est situé à l'extérieur de cette aire, la fonction V, ainsi que toutes ses dérivées, est finie. Pour un point intérieur il suffit d'étudier la partie du potentiel qui se rapporte à un petit cercle dont le centre est en ce point P_0. Soit a le rayon de ce cercle, et prenons le point P_0 peur origine d'un système de coordonnées polaires (r, φ); donc nous aurons

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho(r, \varphi) \frac{1}{r} r\, dr; \tag{2}$$

d'où il suit que la fonction V *est toujours finie et continue.*

Soit maintenant V_h la valeur du potentiel logarithmique en un point P voisin de P_0; nous aurons

$$(3)\qquad \begin{cases} V_h = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \rho \log \frac{1}{R} r\, dr, \\ R \equiv PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu_1 + h^2}, \\ h \equiv P_0P, \\ u_1 \equiv \cos(P_0P, P_0Q), \end{cases}$$

$$(4)\qquad \therefore V_h - V = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \rho \log \frac{r}{R} r\, dr.$$

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} r = ht, \\ \therefore \frac{1}{h}(V_h - V) = h \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{a}{h}} \rho(ht, v) \log \frac{t}{q} t\, dt, \\ q \equiv \sqrt{t^2 - 2tu_1 + 1}. \end{cases}$$

Soit w une constante > 1. Pour $t > w$ nous trouverons, en développant,

$$(6)\qquad \log \frac{t}{q} = \frac{u_1}{t} + \frac{1}{t_2} P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie},$$

$$(7)\qquad \therefore \frac{1}{h}(V_h - V) = h \int_0^{2\pi} dv \int_0^w \rho(ht, v) \log \frac{t}{q} t\, dt$$
$$+ \int_0^{2\pi} u_1\, dv \int_{wh}^a \rho\, dr + h \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{a}{h}} \rho P \frac{dt}{t}.$$

La quantité $V_h - V$ étant toujours finie pour toutes les valeurs de h, quelle que soit la fonction ρ, le premier terme du second membre de l'égalité (7) est fini quelle que soit ρ,

$$\therefore \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} dv \int_0^w \rho(ht, v) \log \frac{t}{q} t\, dt$$

est finie, parce que h n'entre dans cette quantité que dans la fonction ρ. Le second terme est toujours fini. Enfin le troisième terme peut s'écrire

$$2\pi h(\rho P)_m \log \frac{a}{wh},$$

$(\rho P)_m$ étant une valeur moyenne de ρP. Par suite, la limite pour $h = 0$ de ce terme est zéro. En passant à la limite pour $\lim h = 0$ l'équation (7) se réduit à

$$(8)\qquad \frac{\partial V}{\partial s_1} \equiv \lim_{h=0} \frac{1}{h}(V_h - V) = \int_0^{2\pi} u_1\, dv \int_0^a \rho\, dr = \int \rho \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s_1} dw,$$

ds_1 étant un élément pris dans la direction de P_0P. L'équation (8) montre que *la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s_1}$ *est toujours finie*. Nous disons aussi que *la dérivée première est toujours continue*. En effet, soient V_h le potentiel logarithmique au point P, $P_0P = h$, et ds_2 un élément quelconque. De l'équation (8) nous tirons [*cf.* équation (3)]

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V_h}{\partial s_2} = \int \rho \frac{\partial \log \frac{1}{R}}{\partial s_2} dw = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \rho \frac{ru_2 - hc}{R^2} r\, dr, \\ &R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu_1 + h^2}, \\ &u_1 = \cos(r, ds_1), \\ &u_2 = \cos(r, ds_2), \\ &C = \cos(ds_1, ds_2), \end{aligned}\right.$$

ds_1 étant un élément pris dans la direction de P_0P. Posons

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &r = ht, \\ &\therefore \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s_2} - \frac{\partial V}{\partial s_2}\right) = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{a}{h}} \rho(ht, v)\left(\frac{t^2u_2 - tc}{q^2} - u_2\right) dt, \\ &q = \sqrt{t^2 - 2tu_1 + 1}. \end{aligned}\right.$$

En développant, nous trouverons pour $t > 1$

$$(11)\qquad \frac{t^2u_2 - tc}{q^2} - u_2 = \frac{2u_1u_2 - c}{t} + \frac{1}{t^2}P', \qquad \lim_{t=\infty} P' \text{ finie}:$$

par suite, nous pourrons écrire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s_2} - \frac{\partial V}{\partial s_2}\right) = K_h + L_h.\\ &K_h = \int_0^{2\pi}(2u_1u_2 - c)\,dv\int_h^a \rho(r, v)\frac{dr}{r} = \int_{(h)} \rho\frac{\partial^2 \log\frac{1}{r}}{\partial s_1\,\partial s_2}\,dw,\\ &L_h = \int_0^{2\pi} dv\int_0^w \rho(ht, v)\left(\frac{t^2u_2 - tc}{q^2} - u_2\right)dt\\ &\qquad + \int_0^{2\pi} dv\int_w^{\frac{a}{h}} \rho P'\frac{dt}{t^2} - \int_0^{2\pi}(2u_1u_2 - c)\,dv\int_1^w \rho\frac{dr}{r}, \end{aligned}\right.$$

où w est une constante > 1 mais $< \frac{a}{h}$, et où l'intégration par rapport à dw s'étend sur toute l'aire considérée, excepté un cercle de rayon h dont le centre se trouve au point P_0. On peut écrire

$$K_h = 2\pi[(2u_1u_2 - c)\rho]_m \log\frac{a}{h},$$

où l'indice m indique une valeur moyenne

$$\therefore \lim_{h=0}(hK_h) = 0.$$

Quant à L_h le premier terme du second membre est fini pour $\lim h = 0$, parce que $\frac{\partial V_h}{\partial s_2}$ est finie quelle que soit ρ, et que h n'entre dans ce terme que dans la fonction $\rho(ht, v)$. Le second terme du même membre est aussi fini même pour $\lim h = 0$ d'après (11). Enfin, le troisième terme est toujours fini,

$$\therefore \lim_{h=0} L_h \text{ finie},$$

$$\therefore \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s_2} - \frac{\partial V}{\partial s_2}\right) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'où le résultat suivant :

Si la fonction ρ [équation (1)] *est intégrable et reste toujours numériquement plus petite qu'une quantité fixe finie, le potentiel logarithmique d'une aire finie reste toujours fini et continu ainsi que sa dérivée première.*

2. *Existence de la dérivée seconde.* — La quantité L_h (12) peut s'écrire (11)

$$(13) \qquad L_h = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \rho\left(\frac{t^2 u_2 - tc}{q^2} - u_2\right) dt + \int_0^{2\pi} dv \int_1^{\frac{a}{h}} \rho P' \frac{dt}{t^2}.$$

Or on a identiquement, si ρ_0 est une quantité qui est indépendante de t,

$$(14) \qquad \int_1^{\frac{a}{h}} \rho P' \frac{dt}{t^2} = \rho_0 \int_1^{\infty} P' \frac{dt}{t^2} - \rho_0 \int_{\frac{a}{h}}^{\infty} P' \frac{dt}{t^2}$$
$$+ \int_w^{\frac{a}{h}} (\rho - \rho_0) P' \frac{dt}{t^2} + \int_1^w (\rho - \rho_0) P' \frac{dt}{t^2},$$

w étant une constante arbitraire telle que $1 < w < \frac{a}{h}$.

Le premier terme du second membre de l'égalité (14) est toujours fini (11). De plus, on peut choisir la quantité w si grande que pour toutes les valeurs de h, telles que $\frac{a}{h} > w$, le deuxième et le troisième terme du même membre restent numériquement plus petits qu'une constante arbitraire σ choisie d'avance, quelque petite qu'elle soit. Nous supposerons maintenant que *la fonction ρ est continue par rapport à r pour chaque valeur de v*, et nous posons

$$(15) \qquad \rho_0(v) = \lim_{r=0} \rho(r, v).$$

Donc nous pourrons choisir h assez petite pour que le dernier terme du second membre de l'égalité (14) soit numériquement $< \sigma$. D'où nous tirons

$$\lim_{h=0} \int_1^{\frac{a}{h}} \rho P' \frac{dt}{t^2} = \rho_0 \int_1^{\infty} P' \frac{dt}{t^2}.$$

Si nous posons

$$L = \lim_{h=0} L_h,$$

nous trouverons

$$(16) \qquad L = \int_0^{2\pi} \rho_0(v) u_2 \, dv \int_0^1 \left(\frac{t^2}{q^2} - 1\right) dt + \int_0^{2\pi} \rho_0(v) u_2 \, dv \int_1^{\infty} \left(\frac{t^2}{q^2} - 1 - \frac{2u_1}{t}\right) dt$$
$$- c \int_0^{2\pi} \rho_0(v) \, dv \int_0^1 \frac{t \, dt}{q^2} - c \int_0^{2\pi} \rho_0(v) \, dv \int_1^{\infty} \left(\frac{t}{q^2} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

Posons

$$(\chi, ds_1) \equiv \psi_1, \qquad (\chi, ds_2) \equiv \psi_2, \qquad \therefore (ds_1, ds_2) = (\psi_2 - \psi_1),$$

$$(17) \qquad \therefore u_1 = \cos(v - \psi_1), \qquad u_2 = \cos(v - \psi_2), \qquad c = \cos(\psi_2 - \psi_1).$$

En effectuant l'intégration par rapport à t de chaque terme du second membre de l'égalité (16) au moyen de la Table des intégrales à la fin du Volume, nous trouverons

$$L = \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(2u_1^2 - 1)u_2 \bar{I}\, dv - c\int_0^{2\pi} \rho_0(v) u_1 \bar{I}\, dv,$$

$$\bar{I} \equiv \int_0^{\infty} \frac{dt}{q^2} = \frac{\pi - |v - \psi_1|}{\sin|v - \psi_1|}.$$

Au moyen de l'identité

$$2u_1^2 u_2 - u_2 - cu_1 = -\sin(v - \psi_1)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)$$

nous trouverons enfin

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= -\int_0^{2\pi} \rho_0(v)(\pi - v + \psi_1)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ &\quad + 2\pi\int_0^{\psi_1} \rho_0(v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ &= -\int_0^{2\pi} \rho_0(v + \psi_1)(\pi - v)\sin(2v + \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ &\qquad\qquad (0 \leqq \psi_1 < 2\pi). \end{aligned} \right.$$

En passant à la limite nous tirons du système (12)

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2} = K_{s_1 s_2} + L, \\ &K_{s_1 s_2} \equiv \lim_{h=0} K_h, \\ &K_h = \int_0^{2\pi} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \int_{h_1}^{a} \rho \frac{dr}{r} = \int_{\omega_h} \rho \frac{\partial^2 \log\frac{1}{r}}{\partial s_1\, \partial s_2}\, d\omega. \end{aligned} \right.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si donc la fonction ρ est intégrable et reste toujours numériquement plus petite qu'une constante finie, si de plus pour* *chaque direction v la fonction ρ est continue par rapport au rayon vecteur r, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ du potentiel logarithmique est que la quantité K_{s_1, s_2}* (19) *existe, et la valeur de la dérivée est donnée par les égalités* (19) *et* (18).

Corollaires. — 1° Si $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe, on trouvera

$$\int_0^{2\pi} \rho_0(v) \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv = 0. \tag{20}$$

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} K_h - K_{h'} &= \int_0^{2\pi} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \int_h^{h'} \rho(r, v) \frac{dr}{r} \\ &= \log\frac{h'}{h} \int_0^{2\pi} \rho(r_m, v) \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv, \end{aligned}$$

où r_m est une valeur moyenne de r. Par hypothèse, la limite pour $h = 0$ et $h' = 0$ du premier membre est zéro quel que soit le rapport $\frac{h'}{h}$; donc, etc.

2° On trouvera (19) et (18)

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1} \\ &\quad = (\psi_2 - \psi_1) \int_0^{2\pi} \rho_0(v) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv - 2\pi \int_{\psi_1}^{\psi_2} \rho_0(v) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ &\quad = -\int_0^{2\pi} [\rho_0(v + \psi_1) \sin(2v + \psi_1 - \psi_2) - \rho_0(v + \psi_2) \sin(2v + \psi_2 - \psi_1)](\pi - v)\, dv \\ &\qquad\qquad (0 \leqq \psi_1 < 2\pi, \quad 0 \leqq \psi_2 < 2\pi), \end{aligned} \right. \tag{21}$$

où le second membre est toujours fini. Par suite, si l'une des deux dérivées du premier membre de l'égalité (21) existe, l'autre existe aussi.

3° Si la fonction $\rho(r, v)$ est continue, $\rho_0(v)$ est une constante, et l'on trouvera

$$L = -\pi \rho_0 c. \tag{22}$$

Remarque I. — Dans ce cas les deux dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1}$ sont égales, si elles existent.

4° Pour les directions suivant les axes on trouvera

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos 2v\,dv\int_h^a \rho(r,v)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi}\rho_0(v)(\pi - v)\sin 2v\,dv, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = \lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2v\,dv\int_h^a \rho(r,v)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi}\rho_0(v)(\pi - v)\cos 2v\,dv, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\partial x} = \lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2v\,dv\int_h^a \rho(r,v)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi}\rho_0(v)\left(\frac{3\pi}{2} - v\right)\cos 2v\,dv - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho_0(v)\cos 2v\,dv \\ \qquad = \lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2v\quad\int_h^a \rho(r,v)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi}\rho_0\left(v+\frac{\pi}{2}\right)(\pi - v)\cos 2v\,dv, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos 2v\,dv\int_h^a \rho(r,v)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi}\rho_0(v)\left(\frac{3\pi}{2} - v\right)\sin 2v\,dv - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho_0(v)\sin 2v\,dv \\ \qquad = -\lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos 2v\,dv\int_h^a \rho(r,v)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi}\rho_0\left(v+\frac{\pi}{2}\right)(\pi - v)\sin 2v\,dv. \end{cases}$$

Remarque II. — Si $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe, donc $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ existe et inversement.

5° On trouvera les relations suivantes :

$$(24)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = \cos\psi_2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial x} + \sin\psi_2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial y},$$

$$(25)\qquad K_{yy} = -K_{xx},$$

$$(26)\qquad K_{s_1 s_2} = K_{xx}\cos(\psi_1+\psi_2) + K_{xy}\sin(\psi_1+\psi_2).$$

Remarque III. — De l'égalité (26) on conclut que, si $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ existent, donc $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe pour toutes les directions de ds_1 et ds_2.

6° *Cas particuliers.* — La dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe :

α. Si ρ est indépendante de v;

β. Si ρ est indépendante de r, pourvu que

$$(20^*)\qquad \int^{2\pi} \rho\cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv = 0;$$

par conséquent, pourvu que

$$(27)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \rho \cos 2v \, dv = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \\ \text{ou que} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \rho \sin 2v \, dv = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial x}; \end{cases}$$

γ. Si

$$(28)\qquad \int_0^a (\rho - \rho_0) \frac{dr}{r}$$

est finie pour toutes les valeurs de v, pourvu que $\rho_0(v)$ satisfasse à l'égalité (20);

δ. Si $\frac{\partial \rho}{\partial s_1}$ existe en chaque point du voisinage de P_0, et si

$$(29)\qquad \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} u_2 \, dv \int_h^a \frac{\partial \rho}{\partial s_1} dr$$

est finie et déterminée.

En effet, soit a' le rayon d'un cercle dont le centre se trouve au point P_0 et dans l'intérieur duquel la dérivée $\frac{\partial \rho}{\partial s_1}$ satisfasse aux conditions citées; on aura seulement à considérer la partie K'_h de K_h qui se rapporte à l'aire renfermée entre les deux circonférences de rayons h et a'. On trouvera

$$K'_h = \int_{(h)}^{(a')} \rho \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial s_1 \, \partial s_2} dw = \int \int_{(h)}^{(a')} \rho \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s_2} u_1 \, dl - \int_{(h)}^{(a')} \frac{\partial \rho}{\partial s_1} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s_2} dw,$$

où dl est l'élément de chacune des deux circonférences (h) et (a')

$$(30)\quad \therefore K'_h = -\int_0^{2\pi} [\rho(a', v) - \rho(h, v)] u_1 u_2 \, dv + \int_0^{2\pi} u_2 \, dv \int_h^{a'} \frac{\partial \rho}{\partial s_1} dr.$$

Le deuxième membre de l'égalité (30) a une limite finie pour $\lim h = 0$; donc, etc.

ε. Si ρ est fonction de ξ seulement ou de η seulement, ξ et η étant les coordonnées rectangulaires du point Q, c'est-à-dire

$$(31)\qquad \begin{cases} \xi = x + r\cos v, \\ \eta = y + r\sin v. \end{cases}$$

En effet, soit $\rho = \rho(\eta)$; $\frac{\partial\rho}{\partial\xi}$ existe, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ existent d'après δ, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ existe (5°, remarque III).

7° Si la densité ρ est discontinue suivant les axes des x et des y et si elle prend des valeurs constantes ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4 dans les quatre quadrants autour de l'origine respective, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ existent, et l'on trouvera

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{\pi}{4}(-3\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - 3\rho_4), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \dfrac{\pi}{4}(-3\rho_2 + \rho_3 + \rho_4 - 3\rho_1), \end{cases}$$

les éléments dx et dy étant dirigés dans les directions positives des deux axes respectifs. De plus, on trouvera

$$K_{xy}^{(h)} = (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4)\log\frac{a}{h};$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ n'existent que si

$$(33)\qquad \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 = 0.$$

Dans ce cas, on aura

$$(34)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = 0.$$

Remarque IV. — Les égalités (32) font voir qu'en général la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_+}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ n'est pas égale à $-\frac{\partial}{\partial x_-}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, où les éléments dx_+ et dx_- sont dirigés en des directions opposées. Ces deux quantités sont égales, si

$$\rho_2 + \rho_3 = \rho_1 + \rho_4,$$

et dans ce cas on aura

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_4).$$

8° Si $\rho_0(v) =$ une constante ρ_1 pour $0 \leqq v \leqq \pi$ et une constante ρ_2 pour $\pi \leqq v \leqq 2\pi$, nous trouverons (18)

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} L = -\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2)\cos(\psi_1 + \psi_2) - 2\pi\rho' \sin\psi_1 \sin\psi_2, \\ \text{où} \\ \rho' = \rho_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \psi_1 \leqq \pi \quad \text{et} \quad \rho' = \rho_2 \quad \text{pour} \quad \pi \leqq \psi_1 \leqq 2\pi. \end{array}\right.$$

3. *La fonction* ΔV. — Soit

$$(37)\quad \Delta V \equiv \lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0}} \left\{ \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1, y)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}\right] + \frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial V(x, y+h_2)}{\partial y} - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}\right]\right\}.$$

Si

$$(38)\quad \lim \frac{h_2}{h_1} = \text{une quantité finie } \bar{c} \neq 0,$$

nous trouverons

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta v = \log \bar{c} \int_0^{2\pi} \rho_0(v) \cos 2v \, dv + L_{xx} + L_{yy}, \\ L_{xx} + L_{yy} = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \rho_0(v) \sin 2v \, dv - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_0(v) \sin 2v \, dv \\ \qquad = \int_0^{2\pi} \left[\rho_0(v) + \rho_0\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right](\pi - v) \sin 2v \, dv. \end{array}\right.$$

Remarque I. — L'égalité (39) renferme, comme cas particulier, l'équation de Poisson. En effet, si ρ est continue au point P_0, ρ_0 est une constante, et nous trouverons

$$(40)\quad \Delta V = -2\pi\rho_0.$$

Remarque II. — La fonction ΔV est toujours finie dans le cas (68), mais, en général, elle dépend de la quantité c. Elle en est indépendante, si

$$(27^*)\quad \int_0^{2\pi} \rho_0(v) \cos 2v \, dv = 0,$$

ce qui arrivera, par exemple, toutes les fois où $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe, et toutes les fois où ρ est continue au point P_0 (40) quoique $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ n'existent pas séparément. Si, par exemple,

$$\rho = \frac{\cos^2 v}{\log \frac{1}{r}}, \tag{41}$$

on trouvera, pour $a > 1$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\pi}{2} \lim_{h=0} \log \frac{\log \frac{1}{h}}{\log \frac{1}{a}} = \infty, \tag{42}$$

quoique ρ soit continue pour $r = 0$. D'autre part, on trouvera pour le point P_0

$$\Delta V = 0, \tag{43}$$

pourvu que la condition (38) soit satisfaite.

Remarque III. — Plus généralement, nous pourrons définir

$$\left\{\begin{aligned} \Delta V = \lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0}} \Bigg\{ & \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1\cos\psi_1, y+h_1\sin\psi_1)}{ds_2} - \frac{\partial V(x,y)}{ds_2}\right] \\ & + \frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial V(x+h_2\cos\psi', y+h_2\sin\psi')}{ds''} - \frac{\partial V(x,y)}{ds''}\right]\Bigg\}, \\ & \psi'+\psi'' = \psi_1+\psi_2+\pi, \end{aligned}\right. \tag{37*}$$

ψ_1, ψ_2, ψ', ψ'' étant les angles (x, ds_1), (x, ds_2), (x, ds'), (x, ds'') respectivement. Donc nous trouverons (18) et (19)

$$\left\{\begin{aligned} \Delta V = \log \bar{c} & \int_0^{2\pi} \rho_0(v)\cos(2v-\psi)\,dv \\ & + (\psi'-\psi_1)\int_0^{2\pi} \rho_0(v)\sin(2v-\psi)\,dv \\ & - 2\pi\int_{\psi_1}^{\psi'} \rho_0(v)\sin(2v-\psi)\,dv, \\ & \bar{c} = \lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0}} \frac{h_2}{h_1}, \qquad \psi = \psi_1+\psi_2; \end{aligned}\right. \tag{39*}$$

ΔV est finie si c est finie et $\neq 0$. Dans le cas particulier où $h_2 = h_1$,

et

$$(44)\quad \begin{cases} \rho_0(v) = \text{const.}\,\rho_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \lambda' < v < \pi - \lambda \\ \text{et} \\ \rho_0(v) = \text{const.}\,\rho_2 \ \text{pour les autres valeurs de } v, \end{cases}$$

nous trouverons

$$(45)\quad \begin{cases} \Delta_{11} V \equiv \Delta V = -\pi\rho_1(c+c') + \frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)(\psi'-\psi_1) \\ \qquad \times [\cos(2\lambda+\psi) - \cos(2\lambda'-\psi)] \\ \qquad \text{pour} \quad \lambda' \leqq \psi_1 \leqq \pi - \lambda \quad \text{et} \quad \lambda' \leqq \psi' \leqq \pi - \lambda, \\ \text{mais} \\ \Delta_{12} V \equiv \Delta V = -\pi\rho_1 c - \pi\rho_2 c' + \frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)(\psi'-\psi_1) \\ \qquad \times [\cos(2\lambda+\psi) - \cos(2\lambda'-\psi)] - \pi(\rho_2-\rho_1)\cos(2\lambda+\psi) \\ \qquad \text{pour} \quad \lambda' \leqq \psi_1 \leqq \pi - \lambda \quad \text{et} \quad \psi' > \pi - \lambda; \\ \qquad c \equiv \cos(ds_1, ds_2), \qquad c' \equiv \cos(ds', ds''). \end{cases}$$

Enfin nous trouverons, si ρ est continue au point P_0,

$$(45^*)\qquad \Delta V = -\pi\rho_0(c+c').$$

4. *Existence de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *en un point quelconque.* — Supposons que le point P soit situé sur l'axe des x à la distance k de l'origine P_0 qui est le centre de l'aire circulaire considérée dont le rayon est a, et soit $k < a$. Décrivons autour du point P un cercle dont le rayon est h, $h < a - k$. Nous trouverons pour la quantité K_h, rapportée au point P, l'expression suivante,

$$(46)\qquad K_h = \int_{(h)}^{(a)} \rho \frac{\partial^2 \log \frac{1}{R}}{ds_1\, ds_2} dw = \int_{(h)}^{(a)} \rho(2v_1v_2 - c)\frac{dw}{R^2},$$

où l'intégration s'étend sur la portion du cercle qui est comprise entre les deux circonférences, et où

$$(47)\quad \begin{cases} R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rku + k^2}, \\ u = \cos v, \\ v_1 = \cos(r, ds_1) = \dfrac{r\cos v - k}{R}\cos\psi_1 + \dfrac{r\sin v}{R}\sin\psi_1, \\ v_2 = \cos(r\ ds_2) = \dfrac{r\cos v - k}{R}\cos\psi_2 + \dfrac{r\sin v}{R}\sin\psi_2, \\ c = \cos(ds_1, ds_2) = \cos(\psi_2 - \psi_1), \end{cases}$$

et

$$(48)\quad \begin{cases} \therefore K_h = K^{(h)}_{xx}\cos(\psi_1+\psi_2) + K^{(h)}_{xy}\sin(\psi_1+\psi_2), \\ K^{(h)}_{xx} = \displaystyle\int_{(h)}^{(a)} \rho\left[\frac{2(ru-k)^2}{R^2}-1\right]\frac{dv}{R^2}, \\ K^{(h)}_{xy} = 2\displaystyle\int_{(h)}^{(a)} \rho(ru-k)r\sin v\,\frac{dv}{R^4}. \end{cases}$$

Nous pourrons écrire

$$(49)\quad \begin{cases} K^{(h)}_{xx} = I_1 + I_2 + I_3, \\ I_1 \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} dv \int_0^{k-h} \rho\left[\frac{2(ru-k)^2}{R^2}-1\right]\frac{r\,dr}{R^2}, \\ I_2 \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} dv \int_{k+h}^{a} \rho\left[\frac{2(ru-k)^2}{R^2}-1\right]\frac{r\,dr}{R^2}, \\ I_3 \equiv \displaystyle\int_{k-h}^{k+h} r\,dr \int_{v_1}^{2\pi-v_1} \rho\left[\frac{2(ru-k)^2}{R^2}-1\right]\frac{dv}{R^2}, \\ \qquad r^2 - 2rk\cos v_1 + k^2 = h^2. \end{cases}$$

Posons

$$(50)\quad \begin{cases} r = ks, \\ h = k\alpha, \\ R = kp, \qquad \therefore p = \sqrt{s^2 - 2su + 1}, \\ \bar\rho(r, v) = \rho(r, v) + \rho(r, 2\pi - v), \end{cases}$$

$$(51)\quad \begin{cases} \therefore I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} dv \int_0^{1-\alpha} \bar\rho(ks, v)\left[\frac{2su-1)^2}{p^2}-1\right]\frac{s\,ds}{p^2}, \\ I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} dv \int_{1+\alpha}^{\frac{a}{k}} \bar\rho(ks, v)\left[\frac{2(su-1)^2}{p^2}-1\right]\frac{s\,ds}{p^2}, \\ I_3 = \displaystyle\int_{1-\alpha}^{1+\alpha} s\,ds \int_{v_1}^{\pi} \bar\rho(ks, v)\left[\frac{2(su-1)^2}{p^2}-1\right]\frac{dv}{p^2}, \\ \qquad s^2 - 2s\cos v_1 + 1 = \alpha^2. \end{cases}$$

Posons

$$(52)\quad \begin{cases} s = 1 - \sigma, \\ \underline{p} = \sqrt{\sigma^2 + 2(1-\sigma)(1-u)}, \\ \therefore \dfrac{1-u}{\underline{p}^2} \leqq 1, \qquad \dfrac{\sigma}{\underline{p}} \leqq 1, \end{cases}$$

et

$$\therefore \mathrm{I}_1 = \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho}(k - k\sigma, v)$$
$$\times \left[\frac{2(1-\sigma)^3(1-u)^2 + 4(1-\sigma)^2\sigma(1-u) + 2(1-\sigma)\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{1-\sigma}{\underline{p}^2}\right] dv.$$

Mais (52) les quantités

$$\frac{(1-u)^2}{\underline{p}^4} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma^2(1-u)}{\underline{p}^4}$$

ont des limites finies pour $\lim \alpha = 0$, et nous trouverons

$$(53) \qquad \int_\alpha^1 \sigma\, d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho} \frac{dv}{\underline{p}^2} = \pi\bar{\rho}' \log(2-\alpha),$$

$\bar{\rho}'$ étant une valeur moyenne de $\bar{\rho}$. Par suite, nous pourrons écrire, le second membre de l'égalité (53) ayant une limite finie,

$$(54) \qquad \mathrm{I}_1 = \int_\alpha d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho}(k - k\sigma, v)\left[\frac{2\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{1}{\underline{p}^2}\right] dv + a_1, \qquad \lim_{\alpha=0} a_1 \text{ finie.}$$

Posons

$$(55) \qquad \bar{p} = \sqrt{v^2 + \sigma^2}, \qquad \therefore \bar{p} > \underline{p}.$$

Posons de plus

$$2(1-u) = v^2 - v^4 \mu(v), \qquad \therefore \mu(0) = \frac{1}{12},$$
$$\therefore 0 \leq \frac{1}{\underline{p}^2} - \frac{1}{\bar{p}^2} = \frac{v^4 \mu(v)}{\underline{p}^2 \bar{p}^2} + \frac{2\sigma(1-u)}{\underline{p}^2 \bar{p}^2}.$$

Le premier terme du dernier membre reste toujours plus petit qu'une constante finie. Le second terme est plus petit que $\frac{2\sigma}{\underline{p}^2}$; par suite, en ayant égard à l'égalité (53), nous trouverons

$$(56) \qquad \lim_{\alpha=0} \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \left(\frac{1}{\underline{p}^2} - \frac{1}{\bar{p}^2}\right) dv = \text{une quantité finie.}$$

De plus, nous aurons (52)

$$\frac{\sigma^2}{\underline{p}^4}-\frac{\sigma^2}{\overline{p}^4}=\left(\frac{\sigma^2}{\underline{p}^2}+\frac{\sigma^2}{\overline{p}^2}\right)\left(\frac{1}{\underline{p}^2}-\frac{1}{\overline{p}^2}\right)\leqq 2\left(\frac{1}{\underline{p}^2}-\frac{1}{\overline{p}^2}\right),$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0}\int_\alpha^1 d\sigma\int_0^\pi\left(\frac{\sigma^2}{\underline{p}^4}-\frac{\sigma^2}{\overline{p}^4}\right)dv = \text{une quantité finie.}$$

Posons

$$(57)\qquad \bar{\mathrm{I}}_1\equiv\int_\alpha^1 d\sigma\int_0^\pi \rho(k-k\sigma,v)\left(\frac{2\sigma^2}{\overline{p}^4}-\frac{1}{\overline{p}^2}\right)dv,$$

$$\therefore \mathrm{I}_1-\bar{\mathrm{I}}_1=2\int_\alpha^1 d\sigma\int_0^\pi\bar{\rho}\left(\frac{\sigma^2}{\underline{p}^4}-\frac{\sigma^2}{\overline{p}^4}\right)dv-\int_\alpha^1 d\sigma\int_0^\pi\bar{\rho}\left(\frac{1}{\underline{p}^2}-\frac{1}{\overline{p}^2}\right)dv+a_1$$

$$=2\bar{\rho}'_1\int_\alpha^1 d\sigma\int_0^\pi\left(\frac{\sigma^2}{\underline{p}^4}-\frac{\sigma^2}{\overline{p}^4}\right)dv-\bar{\rho}''_1\int_\alpha^1 d\sigma\int_0^\pi\left(\frac{1}{\underline{p}^2}-\frac{1}{\overline{p}^2}\right)dv+a_1,$$

$\bar{\rho}'_1$ et $\bar{\rho}''_1$ étant des valeurs moyennes de $\bar{\rho}$,

$$(58)\qquad \therefore \lim_{\alpha=0}(\mathrm{I}_1-\bar{\mathrm{I}}_1)=\text{une quantité finie.}$$

Nous pourrons traiter l'intégrale I_2 (51) d'une manière analogue; en posant

$$(59)\qquad \begin{cases} s=1+\sigma,\\ p_+=\sqrt{\sigma^2+2(1+\sigma)(1-u)},\end{cases}$$

nous trouverons

$$(60)\qquad \mathrm{I}_2=\int_\alpha^{\frac{a}{k}-1}d\sigma\int_0^\pi\bar{\rho}(k+k\sigma,v)\left(\frac{2\sigma^2}{p_+^4}-\frac{1}{p_+^2}\right)dv+a_2,\qquad \lim_{\alpha=0}a_2 \text{ finie.}$$

Or

$$0\leqq\frac{1}{p_-^2}-\frac{1}{p_+^2}=\frac{4\sigma(1-u)}{p_-^2p_+^2}\leqq\frac{4\sigma}{p_-^2},$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0}\int_\alpha^1 d\sigma\int_0^\pi\left(\frac{1}{p_-^2}-\frac{1}{p_+^2}\right)dv<4\lim_{\alpha=0}\int_\alpha^1\sigma\,d\sigma\int_0^\pi\frac{dv}{p_-^2}=4\pi\log 2$$

et

$$0\leqq\frac{\sigma^2}{p_-^4}-\frac{\sigma^2}{p_+^4}=\left(\frac{\sigma^2}{p_-^2}+\frac{\sigma^2}{p_+^2}\right)\left(\frac{1}{p_-^2}-\frac{1}{p_+^2}\right)\leqq 2\left(\frac{1}{p_-^2}-\frac{1}{p_+^2}\right)\cdots$$

Donc nous trouverons, comme dans le cas précédent,

$$\lim_{\alpha=0}(I_2 - I'_2) = \text{une quantité finie},$$

où

$$I'_2 \equiv \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho}(k+k\sigma, v)\left(\frac{2\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{1}{\underline{p}^2}\right)dv.$$

Mais (58)

$$\lim_{\alpha=0}(I'_2 - \bar{I}_2) = \text{une quantité finie},$$

où

$$(61) \qquad \bar{I}_2 \equiv \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \rho(k+k\sigma, v)\left(\frac{2\sigma^2}{\bar{p}^4} - \frac{1}{\bar{p}^2}\right)dv,$$

$$(62) \qquad \therefore \lim_{\alpha=0}(I_2 - \bar{I}_2)^a = \text{une quantité finie}.$$

L'intégrale I_3 peut s'écrire

$$I_3 = I' + I'',$$

$$I' \equiv \int_{1-\alpha}^1 s\,ds \int_{v_1}^\pi \rho\left[\frac{2(su-1)^2}{p^4} - \frac{1}{p^2}\right]dv,$$

$$I'' \equiv \int_1^{1+\alpha} s\,ds \int_{v_1}^\pi \rho\left[\frac{2(su-1)^2}{p^4} - \frac{1}{p^2}\right]dv.$$

Si, dans l'intégrale I', nous posons

$$s = 1 - \sigma, \qquad p = \underline{p},$$

et en employant la formule

$$(63) \quad \lim_{\alpha=0}\int_0^\alpha d\sigma \int_{v_1}^\pi \sigma \frac{dv}{\underline{p}^2} = \lim_{\alpha=0}\int_0^\alpha \frac{d\sigma}{1-\frac{\sigma}{2}} \Big|_{v_1}^\pi \operatorname{tang}\left(\frac{2-\sigma}{\sigma}\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right) = 0,$$

nous trouverons, comme dans le cas de l'intégrale I_1,

$$(64) \quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\alpha=0}(I' - \bar{I}') = 0 \\ &\text{ou} \\ &\bar{I}' = \int_0^\alpha d\sigma \int_{v_1}^\pi \rho(k - k\sigma, v)\left(\frac{2\sigma^2}{\bar{p}^4} - \frac{1}{\bar{p}^2}\right)dv, \\ &\sigma^2 + 2(1-\sigma)(1-\cos v_1) = \alpha^2, \\ &\bar{p}^2 = v^2 + \sigma^2. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\sigma = \alpha\tau, \quad v = \alpha\theta, \quad v_1 = \alpha\theta_1, \quad 2(1-\cos v) = v^2\lambda(v), \quad \therefore \lambda(0) = 1,$$

$$\therefore \overline{I'} = \int_0^1 d\tau \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \rho(k - k\alpha\tau, \alpha\theta)\left[\frac{2\tau^2}{(\theta^2+\tau^2)^2} - \frac{1}{\theta^2+\tau^2}\right] d\theta,$$

$$\tau^2 + (1-\alpha\tau)\theta_1^2\lambda(\alpha\theta_1) = 1,$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \overline{I'} = \overline{\rho_k}\int_0^1 d\tau \int_{\theta_0}^{\infty}\left[\frac{2\tau^2}{(\theta^2+\tau^2)^2} - \frac{1}{\theta^2+r^2}\right] d\theta = \overline{\rho_k}\int_0^1 d\tau \Big|_{\theta_0}^{\infty} \frac{\theta}{\theta^2+\tau^2},$$

$$\overline{\rho_k} \equiv \lim_{\alpha=0} \rho(k - k\alpha\tau, \alpha\theta),$$

$$\theta_0 = \lim_{\alpha=0} \theta_1 = \sqrt{1-\tau^2},$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \overline{I'} = -\frac{\pi}{4}\overline{\rho_k}. \tag{65}$$

En traitant l'intégrale I″ de la même manière, nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\alpha=0} I_3 = -\frac{\pi}{4} P_k, \\ &P_k = \lim_{\alpha=0}[\rho(k + k\alpha\tau, \alpha\theta) + \rho(k - k\alpha\tau, \alpha\theta)]. \end{aligned}\right. \tag{66}$$

Si enfin nous traitons la quantité $K_{xy}^{(k)}$ de la même manière, nous obtiendrons le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ *au point* $P(k, 0)$, $k > 0$ *est que la quantité*

$$H = \lim_{\alpha=0} H^{(\alpha)} \tag{67}$$

soit finie, où

$$\left\{\begin{aligned} & H^{(\alpha)} = H_{xx}^{(\alpha)}\cos(\psi_1+\psi_2) + H_{xy}^{(\alpha)}\sin(\psi_1+\psi_2), \\ & H_{xx}^{(\alpha)} = \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \underset{+}{P}\frac{\sigma^2 - v^2}{\overline{p}^4}\, dv, \\ & H_{xy}^{(\alpha)} = 2\int_\alpha^1 \sigma\, d\sigma \int_0^\pi \underset{-}{P}\frac{v\, dv}{\overline{p}^4}, \\ & \overline{p} = \sqrt{v^2+\sigma^2}, \\ & \underset{+}{P} = \rho(k + k\sigma, v) + \rho(k + k\sigma, 2\pi - v) \\ & \qquad + \rho(k - k\sigma, v) + \rho(k - k\sigma, 2\pi - v), \\ & \underset{-}{P} = \rho(k + k\sigma, v) - \rho(k + k\sigma, 2\pi - v) \\ & \qquad - \rho(k - k\sigma, v) + \rho(k - k\sigma, 2\pi - v). \end{aligned}\right. \tag{68}$$

Remarque I. — La partie de K_{xy} qui correspond à $\lim\limits_{\alpha=0} I_3$ est $= \frac{1}{2} P'_k$, $P'_k \equiv \lim\limits_{\alpha=0} P$ pour $\sigma = \alpha\tau$ et $v = \alpha\theta$.

Remarque II. — Nous pourrons remplacer H (67) par la quantité H′, où

$$
(68') \quad \left\{
\begin{aligned}
& H' \equiv \lim_{\alpha=0} H'^{(\alpha)}, \\
& H'^{(\alpha)} \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_\alpha^1 P' \frac{dp}{p}, \\
& P' \equiv \quad [\rho(k + k\sigma, v) + \rho(k - k\sigma, 2\pi - v)] \cos(2\varphi - \psi_1 - \psi_2) \\
& \qquad + [\rho(k + k\sigma, 2\pi - v) + \rho(k - k\sigma, v)] \cos(2\varphi + \psi_1 + \psi_2), \\
& \sigma = p\cos\varphi, \\
& v = p\sin\varphi.
\end{aligned}
\right.
$$

Cas particuliers. — 1° Si la fonction ρ est indépendante de v, on trouvera que la quantité H est finie. Dans ce cas la dérivée existe aussi à l'origine.

2° Si la fonction ρ est indépendante de r, on trouvera aussi que la quantité H est finie. Pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}$ existe aussi à l'origine il faut et il suffit que la fonction $\rho(v)$ satisfasse à l'égalité (20*).

5. *Continuité de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}$. — *Cas particulier :* La fonction ρ est indépendante de r. Si nous posons

$$
(69) \quad \begin{aligned}
\varphi(s) &\equiv \int \left[\frac{2(su-1)^2}{p^4} - \frac{1}{p^2}\right] s\, ds \\
&= (2u^2 - 1)\log p + \frac{su(3 - 4u^2) + 2u^2 - 1}{p^2} - 2u(1 - u^2)\int_0^s \frac{ds}{p^2},
\end{aligned}
$$

nous trouverons (51) et (66)

$$
(70) \quad \left\{
\begin{aligned}
& K_{xx}^{(h)} \;\; = I_1 + I_2 + I_3, \\
& I_1 + I_2 = \int_0^{2\pi} \rho(v) \left[\varphi\left(\frac{a}{k}\right) - \varphi(1 + \alpha) + \varphi(1 - \alpha) - \varphi(0)\right] dv, \\
& \lim_{\alpha=0} I_3 \;\; = -\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2), \\
& \text{où} \\
& \rho_1 \quad = \lim_{v=0} \rho(v), \qquad v > 0, \\
& \rho_2 \quad = \lim_{v=2\pi} \rho(v), \qquad v < 2\pi.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$(71)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{I}_\alpha \equiv \int_0^{2\pi} \rho(v)\,[\varphi(1-\alpha)-\varphi(1+\alpha)]\,dv,\\
&p_1 \equiv \sqrt{\alpha^2+2(1-\alpha)(1-u)}, \qquad p_2 - \sqrt{\alpha^2+2(1+\alpha)(1-u)},\\
&\qquad\qquad \therefore p_1 \leqq p_2, \qquad \frac{1-u}{p_2^2} \leqq \frac{1-u}{p_1^2} \leqq 1,\\
&\bar\rho(v) \equiv \rho(v)+\rho(2\pi-v), \qquad \therefore \lim_{v=0}\bar\rho(v)=\rho_1+\rho_2 \quad \text{pour} \quad v>0,
\end{aligned}\right.$$

$$(72)\quad \therefore \mathrm{I}_\alpha = \int_0^\pi \bar\rho(v)\left[\log\frac{p_1}{p_2}+\alpha\left(\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}\right)\right]dv+\eta_\alpha, \qquad \lim_{\alpha=0}\eta_\alpha=0.$$

Or

$$\frac{p_1}{p_2}=\sqrt{1-\frac{4\alpha(1-u)}{p_2^2}}, \qquad \therefore \lim_{\alpha=0}\frac{p_1}{p_2}=1.$$

De plus, nous trouverons

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha=0}\alpha\int_0^\pi \bar\rho(v)\frac{dv}{p_2^2} &= \lim_{\alpha=0}\alpha\int_0^\pi \bar\rho(v)\frac{dv}{p^2} = \lim_{\alpha=0}\alpha\int_0^\varepsilon \bar\rho(v)\frac{dv}{p_1^2} = \lim_{\alpha=0}\bar\rho'\alpha\int_0^\varepsilon\frac{dv}{p_1^2}\\
&= \lim_{\alpha=0}\bar\rho'\frac{2}{2-\alpha}\Big/_0^\varepsilon \operatorname{tang}\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(\rho_1+\rho_2);
\end{aligned}$$

$\bar\rho'$ étant une valeur moyenne de $\bar\rho$ pour $0\leqq v\leqq\varepsilon$, ε étant une constante positive quelque petite qu'elle soit,

$$(73)\quad \therefore \lim_{\alpha=0}\mathrm{I}_\alpha=\pi(\rho_1+\rho_2),$$

$$(74)\quad \therefore \mathrm{K}_{xx}=\int_0^\pi \bar\rho(v)\left[\varphi\left(\frac{a}{k}\right)-\varphi(0)\right]dv+\frac{\pi}{2}(\rho_1+\rho_2).$$

De même, nous trouverons

$$(75)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{K}_{xy} = \int_0^\pi \bar{\bar\rho}(v)\left[\varphi_1\left(\frac{a}{k}\right)-\varphi_1(0)\right]\sin v\,dv,\\
&\varphi_1(s) \equiv 2\int(su-1)s^2\frac{ds}{p^4} = 2u\log p+\frac{s(1-4u^2)+2u}{p^2}+(2u^2-1)\int_0^s\frac{ds}{p^2},\\
&\bar{\bar\rho}(v) \equiv \rho(v)-\rho(2\pi-v).
\end{aligned}\right.$$

En effet, posons

$$\mathrm{I}'_\alpha=\int_0^\pi \bar{\bar\rho}(v)\,[\varphi_1(1-\alpha)-\varphi_1(1+\alpha)]\sin v\,dv,$$

et

$$\therefore\ I'_\alpha = \int_0^\pi \rho(v)\left[3\alpha\left(\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}\right)-\left(\frac{1}{p_1^2}-\frac{1}{p_2^2}\right)\right]\sin v\,dv+\eta'_\alpha,\quad \lim_{\alpha=}\eta'_\alpha=0,$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0} I'_\alpha = 6\lim_{\alpha=0}\alpha\overline{\overline{\rho'}}\sin v'\int_0^\varepsilon\frac{dv}{p_1^2}-\frac{1}{2}\lim_{\alpha=0}\overline{\overline{\rho''}}\int_0^\pi\left(\frac{\log p_1}{1-\alpha}-\frac{\log p_2}{1+\alpha}\right)=0,.$$

$\overline{\overline{\rho'}}$, $\overline{\overline{\rho''}}$ et v' étant des valeurs moyennes de ρ et de v pour $0\leqq v\leqq\varepsilon$, ε étant une constante quelque petite qu'elle soit.

De plus, nous avons trouvé (nº **3**, remarque I) que la partie de K_{xy} qui correspond à $\lim\limits_{\alpha=0} I$ est $=\frac{1}{2}p'_k$, et nous aurons

$$p'_k=\rho_1-\rho_2-\rho_1+\rho_2=0.$$

Donc, etc.

Pour de grandes valeurs de s nous pourrons écrire

$$\varphi(s) = (2u^2-1)\log s-2u(\pi-v)\sin v+\frac{1}{s}P,\qquad \lim_{s=\infty}P \text{ finie},$$

$$\varphi_1(s) = 2u\log s+\frac{2u^2-1}{\sin v}(\pi-v)+\frac{1}{s}P_1,\qquad \lim_{s=\infty}P_1 \text{ finie};$$

par suite, nous trouverons, pour de petites valeurs de k,

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} K_{xx} &= \left(\log\frac{a}{k}-1\right)\int_0^{2\pi}\rho(v)\cos 2v\,dv \\ &\quad -\int_0^{2\pi}\rho(v)(\pi-v)\sin 2v\,dv+\frac{\pi}{2}(\rho_1+\rho_2)+kQ,\qquad \lim_{k=0}Q \text{ finie}, \\ K_{xy} &= \left(\log\frac{a}{k}-1\right)\int_0^{2\pi}\rho(v)\sin 2v\,dv \\ &\quad +\int_0^{2\pi}\rho(v)(\pi-v)\cos 2v\,dv+kQ_1,\qquad \lim_{k=0}Q_1 \text{ finie}, \end{aligned}\right.$$

$$(77)\quad \begin{aligned} \therefore\ K_{s_1s_2} &= \left(\log\frac{a}{k}-1\right)\int_0^{2\pi}\rho(v)\cos(2v-\psi_1-\psi_2)\,dv \\ &\quad -\int_0^{2\pi}\rho(v)(\pi-v)\sin(2v-\psi_1-\psi_2)\,dv \\ &\quad +\frac{\pi}{2}(\rho_1+\rho_2)\cos(\psi_1+\psi_2)+kQ', \end{aligned}$$

où Q' est continue par rapport à k, et $\lim\limits_{k=0} Q'$ est finie.

Prenons pour un moment le point $P(k, o)$ pour centre d'un système de coordonnées polaires $(R, \bar{v})$, $\bar{v}$ étant l'angle que fait le rayon vecteur PQ avec l'axe des x positifs. Nous trouverons (36)

$$\rho_0 = \lim_{R=0} \rho = \rho_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \bar{v} \leq \pi,$$
$$= \rho_2 \quad \text{pour} \quad \pi \leq \bar{v} \leq 2\pi,$$

$$(78) \qquad \therefore L = -\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2)\cos(\psi_1 + \psi_2) - 2\pi\rho_1 \sin\psi_1 \sin\psi_2$$
$$= -\frac{\pi}{2}(\rho_2 - \rho_1)\cos(\psi_1 + \psi_2) - \pi\rho_1 \cos(\psi_2 - \psi_1),$$

pour

$$0 \leq \psi_1 \leq \pi.$$

Pour

$$\pi \leq \psi_1 \leq 2\pi$$

il faut échanger ρ_1 et ρ_2 dans la formule (78).

Il suit des égalités (77) et (78) que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ est continue le long de l'axe des x pour $a > k > o$. Pour que cette dérivée soit finie à l'origine, il faut et il suffit que l'égalité (20*) soit satisfaite, et dans ce cas la valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ est

$$(79) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = -\int_0^{2\pi} \rho(v)(\pi - v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv \\ &\qquad - 2\pi\rho' \sin\psi_1 \sin\psi_2 + kQ' \quad \text{au point} \quad P(k, o), \quad k > o, \\ &\text{où} \\ &\rho' = \rho_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \psi_1 \leq \pi \quad \text{et} \quad \rho' = \rho_2 \quad \text{pour} \quad \pi \leq \psi_1 \leq 2\pi, \\ &\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_0 = -\int_0^{2\pi} \rho(v)(\pi - v + \psi)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv \\ &\qquad + 2\pi \int_0^{\psi_1} \rho(v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv \quad \text{à l'origine,} \quad 0 \leq \psi_1 \leq 2\pi. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(80) \left\{ \begin{aligned} &\lim_{k=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_0 = \Gamma, \\ &\therefore \Gamma = \psi_1 \int_0^{2\pi} \rho(v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv \\ &\qquad - 2\pi \int_0^{\psi_1} \rho(v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv - 2\pi\rho' \sin\psi_1 \sin\psi_2. \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la densité* ρ *est fonction de l'azimut* v *seulement, la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *est continue suivant chaque rayon vecteur, sauf à l'origine. Si* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *existe à l'origine, la discontinuité dans la direction de l'axe des* xy *est* égale à Γ (80).

Cas particuliers. — 1° Pour $\psi_2 = 0$, nous trouverons (21)

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial s_1}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial x}\right)_0 = \Gamma = \lim_{k=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial x} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial x}\right)_0,$$

$$\therefore \lim_{k=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial x} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial s_1}\right)_0. \tag{81}$$

2° Pour $\psi_1 = 0$,

$$\Gamma = 0. \tag{82}$$

3° Si

$$\begin{aligned} \rho(v) &= \rho_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq v \leqq \pi, \\ &= \rho_2 \quad \text{pour} \quad \pi \leqq v \leqq 2\pi, \end{aligned}$$

nous trouverons

$$\Gamma = 0. \tag{83}$$

Remarque I. — Soit K_h^0 la valeur de K_h au point P_0; on aura

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h=0\\k=0}} (K - K_h^0) = \lim_{\substack{h=0\\k=0}} \left(\log\frac{h}{k} - 1\right) \int_0^{2\pi} \rho(v) \cos(2v - \psi_1 + \psi_2)\, dv \\ - \int_0^{2\pi} \rho(v)(\pi - v) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ + \frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2)\cos(\psi_1 + \psi_2). \end{aligned} \tag{84}$$

Par suite, si $\lim\limits_{\substack{h=0\\k=0}} \frac{h}{k}$ est finie et $\neq 0$, le premier membre de l'égalité (84) existe même dans le cas où la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ n'existe pas à l'origine.

Remarque II. — Si $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence à l'origine de la troisième dérivée $\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial s_1 \partial s_2}$ est

$$\Gamma = 0, \tag{85}$$

et l'on trouvera (79)

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x\,\partial s_1\,\partial s_2} = \lim_{h=0} Q'. \tag{86}$$

II. *Cas général.* — Si la densité ρ est continue par rapport à r, nous disons que la quantité (68)

$$\lim_{h=0}(K_h - H^{(\alpha)})$$

est continue par rapport à k pour $k > 0$. En effet, soit $K'_{h'}$ la quantité qui correspond à K_h au point $P(k', 0)$, $k' > 0$, lorsqu'on y écrit h' au lieu de h. La quantité $K'_{h'}$ est une intégrale de même forme que K_h, mais où l'on a remplacé $\rho \equiv \rho(ks, v)$ par

$$\rho' \equiv \rho(k's, v), \tag{87}$$

et α par $\alpha' \equiv \frac{h'}{k'}\cdot$ En choisissant

$$h' = \frac{k'}{k} h, \tag{88}$$

nous aurons $\alpha' = \alpha$. Dans ce cas, la quantité

$$\mathfrak{K}_h \equiv K'_{h'} - K_h - \int_0^{2\pi} dv \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{a}{k'}} \rho'(2v_1v_2 - c)\frac{s\,ds}{p^2} \tag{89}$$

peut être écrite comme une intégrale de même forme que K_h, mais où la fonction ρ est remplacée par $\rho' = \rho$. En traitant la quantité $\mathfrak{K}_h$ de la même manière que nous avons traité la quantité K_h dans le numéro précédent, nous trouverons que les limites pour $\alpha = 0$ de tous les termes, outre ceux qui correspondent à $H^{(\alpha)}$ (68), peuvent être mises sous la forme

$$(\rho' - \rho)_m a', \qquad \lim_{\alpha=0} a' \text{ finie},$$

où $(\rho' - \rho)_m$ est une valeur moyenne de $\rho' - \rho$. Mais $\rho' - \rho$ est, par hypothèse, infiniment petite en même temps que $k' - k$, et cela arrive aussi pour le troisième terme de l'égalité (89),

$$\therefore \lim_{k'=k}\lim_{h'=0}(K'_{h'} - H'^{(\alpha)}) = \lim_{h=0}(K_h - H^{(\alpha)}), \tag{90}$$

ce qu'il fallait démontrer, $H'^{(\alpha)}$ étant la quantité qui correspond à $H^{(\alpha)}$

pour le point $(k', 0)$. De plus, nous trouverons que L a la même valeur (78) que dans le cas particulier I. Cette quantité est aussi continue, ρ_1 et ρ_2 étant continues par hypothèse. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction ρ est continue le long de chaque rayon vecteur, la condition nécessaire et suffisante pour qu'en un point de l'axe des x qui n'est pas l'origine la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit continue dans la direction de cet axe, est que la quantité* H (67) *soit continue en ce point dans la même direction.*

Pour l'étude du cas $k = 0$, nous nommerons $\overline{K_h}$ ce que deviendra K_h au point $P(k, 0)$, si nous y remplaçons $\rho(ks, v)$ par $\rho_0(v)$. En traitant la quantité

$$K_h - \overline{K_h} - \int_0^{2\pi} dv \int_w^{\frac{a}{k}} (\rho - \rho_0)(2v_1v_2 - c)\frac{s\,ds}{p^2}, \qquad w > 1,$$

de la même manière que nous venons de traiter la quantité $\mathfrak{K}_h$ (89), nous trouverons que les limites pour $\alpha = 0$ de tous les termes, sauf ceux qui correspondent à $H^{(\alpha)}$ (68), sont infiniment petites en même temps que k. Pour de grandes valeurs de s, nous pourrons écrire (47)

$$(2v_1v_2 - c)\frac{s}{p^2} = (2u_1u_2 - c)\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}P, \qquad \lim_{s=\infty} P \text{ finie};$$

par suite, nous aurons

$$(91)\quad \begin{cases} K_h - \overline{K_h} = H^{(\alpha)} - \overline{H^{(\alpha)}} + \displaystyle\int_0^{2\pi} (2u_1u_2 - c)\,dv \int_k^a [\rho(r, v) - \rho_0(v)]\frac{dr}{r} + b_h, \\ \lim\limits_{h=0} b_h \equiv b, \qquad \lim\limits_{k=0} b = 0, \end{cases}$$

$\overline{H^{(\alpha)}}$ étant ce que deviendra $H^{(\alpha)}$ lorsqu'on y remplace ρ par $\rho_0(v)$. Si $\overline{K_h^0}$ est la valeur de $\overline{K_h}$ à l'origine, nous aurons (77)

$$(92)\quad \overline{K_h} - \overline{K_h^0} = \left(\log\frac{h}{k} - 1\right)\int_0^{2\pi} \rho_0(v)(2u_1u_2 - c)\,dv$$
$$- \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(\pi - v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv$$
$$+ \frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2)\cos(\psi_1 + \psi_2) + b'_h, \qquad \lim_{h=0} b'_h = b', \qquad \lim_{k=0} b' = 0.$$

Enfin, soit K_h^0 la valeur de K_h à l'origine,

$$(93)\qquad \therefore\ K_h^0 - \overline{K_h^0} = \int_0^{2\pi}(2u_1u_2 - c)\,dv\int_h^a(\rho - \rho_0)\frac{dr}{r}.$$

Des égalités (91), (92) et (93) nous tirons

$$(94)\quad K_h - K_h^0 = H^{(\alpha)} - \overline{H^{(\alpha)}} - \int_0^{2\pi}\rho_0(v)(2u_1u_2 - c)\,dv$$
$$-\int_0^{2\pi}(2u_1u_2 - c)\,dv\int_h^k \rho\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi}\rho_0(v)(\pi - v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv$$
$$+\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2)\cos(\psi_1 + \psi_2) + (b_h + b'_h).$$

La quantité L ayant la même valeur que dans le cas particulier I, nous trouverons que nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction ρ est continue par rapport à r, et si la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ existe à l'origine, la condition nécessaire et suffisante pour que cette dérivée y soit continue dans la direction de l'axe des x positifs est*

$$(95)\qquad \lim_{k=0} H - \overline{H} + \Gamma = 0,\qquad \overline{H} \equiv \lim_{\alpha=0}\overline{H^{(\alpha)}},$$

où Γ est donnée par l'égalité (80) *et* $H^{(\alpha)}$ *est ce que deviendra* $H^{(\alpha)}$ *lorsqu'on y remplace* $\rho(r, v)$ *par* $\rho_0(v)$.

6. *La dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ au bord de la surface.* — Nous supposerons que le point P_0 est situé sur la ligne qui sépare l'aire plane en deux parties dont les densités sont constantes et égales à ρ_1 et ρ_2 respectivement, et nous considérerons seulement une partie circulaire de cette aire, dont le centre se trouve au point P_0 et dont le rayon est a. Si la ligne de séparation est une droite qui passe par le point P_0, nous trouverons, en posant $\rho = \rho_1$ pour $0 \leq v \leq \pi$ et $\rho = \rho_2$ pour $\pi \leq v \leq 2\pi$,

$$K_h = 0,$$
$$(96)\qquad \therefore\ \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2} = L,$$

où la valeur de L est donnée par la formule (36). Si, au contraire, la ligne de séparation des deux densités n'est pas droite, nous nommerons

$v_1(r)$ et $v_2(r)$ les valeurs limites de v, et soit $\rho = \rho_1$ pour $v_1 \leqq v \leqq v_2$,

$$\begin{aligned} \therefore K_h = \; & \rho_2 \int_h^a \frac{dr}{r} \int_0^{v_1} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ & + \rho_1 \int_h^a \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{v_2} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ & + \rho_2 \int_h^a \frac{dr}{r} \int_{v_2}^{2\pi} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv, \end{aligned}$$

en supposant que le cercle $r = \text{const.}$ ne rencontre chaque ligne de séparation qu'en un seul point. Or

$$\rho_2 \int_h^a \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv = 0,$$

$$(97) \qquad \therefore K_h = (\rho_1 - \rho_2) \int_h^a \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{v_2} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv.$$

Posons

$$(98) \qquad \pi - v_2 \equiv v_3,$$

$$(97^*) \qquad \therefore K_h = (\rho_2 - \rho_1) \int_h^a \cos(v_1 - v_3 - \psi_1 - \psi_2) \sin(v_1 + v_3) \frac{dr}{r}.$$

Posons, de plus [(18), (22)],

$$(99) \qquad \lim_{r=0} v_1 \equiv v_1^0, \qquad \lim_{r=0} v_2 \equiv v_2^0, \qquad \cos(\psi_2 - \psi_1) \equiv c,$$

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} \therefore L = & -\pi \rho_2 c + (\rho_2 - \rho_1) \int_{v_1^0}^{v_2^0} (\pi - v + \psi_1) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ & + 2\pi \int_0^{\psi_1} (\rho - \rho_2) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv, \end{aligned} \right.$$

où $\rho = \rho_1$ pour $v_1^0 \leqq v \leqq v_2^0$ et $= \rho_2$ pour les valeurs de $v \leqq v_1^0$ et $\geqq v_2^0$.

En intégrant, nous trouverons

$$(100^*) \quad \left\{ \begin{aligned} & L = -\pi \rho_2 c + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1) \\ & \qquad \times [2(\pi + \psi_1) \sin(v_1^0 + v_2^0 - \psi) \sin(v_2^0 - v_1^0) + v_2^0 \cos(2v_2^0 - \psi) \\ & \qquad\qquad - v_1^0 \cos(2v_1^0 - \psi) - \cos(v_1^0 + v_2^0 - \psi) \sin(v_2^0 - v_1^0)] + B, \\ & \quad B = \pi(\rho_2 - \rho_1)[c - \cos(2, v_1^0 - \psi)] \qquad \text{pour} \qquad v_1^0 < \psi_1 < v_2^0, \\ & \text{mais} \\ & \qquad B = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < \psi_1 < v_1^0. \qquad \psi \equiv \psi_1 + \psi_2. \end{aligned} \right.$$

Cas particuliers : 1° *Point régulier.* — Soient $v_1^0 = 0$, $v_2^0 = \pi$. Dans ce cas, le bord a, au point P_0, une tangente unique bien déterminée, et la valeur de L est donnée par la formule (36). La quantité $K_{s_1 s_2}$ est finie et déterminée si

$$(101)\quad \left\{\begin{array}{lll} & & \displaystyle\int_0^a (v_1 + v_2)\frac{dr}{r} \text{ est finie et déterminée,} \\ \text{ou si} & & \\ \psi = \dfrac{\pi}{2} & \text{et} & \displaystyle\int_0^a (v_1^2 - v_2^2)\frac{dr}{r} \text{ est finie et déterminée.} \end{array}\right.$$

2° *Point de rebroussement.* — Soient $v_1^0 = v_2^0 = \frac{\pi}{2}$. Posons

$$(102)\qquad v_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1, \qquad v_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_2, \qquad \therefore \lim_{r=0} \varphi_1 = \lim_{r=0} \varphi_2 = 0.$$

Nous trouverons [(22), (97*)]

$$(103)\quad \left\{\begin{array}{l} L = -\pi\rho_2 c, \\ K_h = (\rho_2 - \rho_1)\displaystyle\int_h^a \cos(\psi + \varphi_1 - \varphi_2)\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\frac{dr}{r}; \end{array}\right.$$

par suite, la quantité $K_{s_1 s_2}$ est finie et déterminée si

$$(104)\quad \left\{\begin{array}{lll} & & \displaystyle\int_0^a (\varphi_1 + \varphi_2)\frac{dr}{r} \text{ est finie et déterminée,} \\ \text{ou si} & & \\ \psi = \dfrac{\pi}{2} & \text{et} & \displaystyle\int_0^a (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)\frac{dr}{r} \text{ est finie et déterminée.} \end{array}\right.$$

3° *Point saillant.* — Soit $v_2^0 - v_1^0 \neq \pi$ et $\neq 0$. Posons

$$(105)\qquad v_1 = v_1^0 + \varphi', \qquad v_2 = v_2^0 - \varphi'', \qquad \therefore \lim_{r=0} \varphi' = \lim_{r=0} \varphi'' = 0.$$

$$(106)\qquad \therefore K_h = -(\rho_2 - \rho_1)\int_h^a \cos(v_1^0 + v_2^0 - \psi + \varphi' - \varphi'')\sin(v_2^0 - v_1^0 - \varphi' - \varphi'')\frac{dr}{r}.$$

Pour que $K_{s_1 s_2}$ existe, il faut donc

$$(107)\qquad v_1^0 + v_2^0 - \psi = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n \text{ un nombre entier} \gtrless 0).$$

Si la condition (107) est satisfaite, $K_{s_1 s_2}$ existe si

$$(108) \qquad \int_0^a (\varphi' - \varphi'') \frac{dr}{r} \text{ est finie.}$$

Remarque. — En désignant l'axe des x de manière que

$$v_1^0 + v_2^0 = \pi,$$

l'égalité (107) peut s'écrire

$$(107^a) \qquad \psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \psi = \frac{3\pi}{2}$$

7. *La limite de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}$ *au bord de la surface : 1° Ligne droite.* — Soit le centre P_0 situé sur le bord, supposé droit, qui sépare les deux domaines où les densités sont constantes et égales à ρ_1 et ρ_2 respectivement, et soit le point P situé sur la normale qui passe par P_0 et qui est dirigée vers l'intérieur du domaine où la densité est ρ_1. Posons $PP_0 = k$, et calculons la valeur de $K_{s_1 s_2}$ pour ce point. Nous trouverons

$$K_{s_1 s_2} = (\rho_2 - \rho_1) \int_k^{\sqrt{a^2+k^2}} \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{\pi} \cos(2v - \psi') \, dv$$

$$+ (\rho_2 - \rho_1) \int_k^{\sqrt{a^2+k^2}} \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{\pi} \cos(2v + \psi') \, dv + e_k,$$

$$\cos v_1 = -\frac{k}{r}, \qquad \lim_{k=0} e_k = 0, \qquad \psi' \equiv \psi_1' + \psi_2';$$

ψ_1' et ψ_2' étant les angles que font les éléments ds_1 et ds_2 avec la direction P_0P respectivement, la quantité e_k se rapporte à la partie restante du domaine (ρ_2),

$$(109) \qquad \therefore \overline{K}_{\rho_1} = \lim K_{s_1 s_2} = \frac{\pi}{2} (\rho_2 - \rho_1) \cos \psi'.$$

La quantité L étant égale à $-\pi \rho_1 c$ (22), nous aurons

$$(110) \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2} \right)_{\rho_1} = \lim_{k=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2} = \frac{\pi}{2} (\rho_2 - \rho_1) \cos(\psi_1' + \psi_2') - \pi \rho_1 \cos(\psi_2' - \psi_1').$$

De même, nous trouverons pour la limite de l'autre côté

$$(111) \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2} \right)_{\rho_2} = -\frac{\pi}{2} (\rho_2 - \rho_1) \cos(\psi_1' + \psi_2') - \pi \rho_2 \cos(\psi_2' - \psi_1').$$

Remarque I. — La limite $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1}$ étant continue le long de la droite de séparation des densités ρ_1 et ρ_2, il suit que cette limite est indépendante de la direction dans laquelle le point P s'approche du bord. Par suite, on retrouvera les égalités (110) et (111), même dans le cas où la droite P_0P n'est pas normale au bord. Cela arrive même dans le cas où le point P s'approche du point P_0 suivant une courbe tangente au bord.

Remarque II. — Pour le point P_0, la quantité $K_{s_1 s_2}$ est égale à zéro, et nous avons trouvé (78)

$$(78^*)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right) = L = -\frac{\pi}{2}(\rho_2 - \rho_1)\cos(\psi_1 + \psi_2) - \pi\rho_1\cos(\psi_2 - \psi_1) \\ \qquad\qquad (\text{pour } 0 \leqq \psi_1 \leqq \pi). \end{cases}$$

En observant que $\psi'_1 = \psi_1 - \frac{\pi}{2}$ et $\psi'_2 = \psi_2 - \frac{\pi}{2}$, nous trouverons

$$(110^*)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_0,$$

l'élément ds_1 étant dirigé vers l'intérieur du domaine ρ_1. Un résultat analogue s'obtiendra pour $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2}$, en observant que, dans la formule (78*), il faut échanger ρ_1 et ρ_2 pour $\pi \leqq \psi_1 \leqq 2\pi$.

2° *Le bord est curviligne.* — Supposons que le point P soit situé à l'intérieur du domaine où la densité est ρ_1 et qu'il s'approche indéfiniment du point P_0 du bord. Prenons P comme origine et la direction P_0P comme axe des coordonnées polaires (r, v). Posons $P_0P = k$ et soit, pour $0 \leqq v \leqq \pi$, k' la valeur minimum de r, $\therefore k' \leqq k$. Nous supposerons que le bord jouit des deux propriétés suivantes :

$$(\alpha)\qquad \lim_{k=0} \frac{k'}{k} \gtrless 0;$$

si

$$(\beta)\qquad k' < r \leqq k,$$

le cercle décrit autour de P comme centre avec le rayon r ne rencontre ladite branche du bord qu'en deux points, Q_1 et Q_2, et, si r est plus grand que k, qu'en un seul point. Nous supposons que l'autre branche ($\pi \leqq v \leqq 2\pi$) jouit de propriétés analogues. Donc, la valeur de $K_{s_1 s_2}$ au point P s'obtient en ajoutant à la valeur trouvée dans l'alinéa 1° de ce paragraphe deux termes I et I' qui se rapportent aux deux branches du bord. Soient v_1 et v_2 les valeurs de v qui correspondent aux points Q_1 et Q_2; on aura

$$(112)\quad \left\{\begin{aligned} I = &\quad (\rho_2-\rho_1)\int_{k'}^{k}\frac{dr}{r}\int_{v_1}^{v_2}\cos(2v-\psi')\,dv \\ &+(\rho_2-\rho_1)\int_{k}^{a'}\frac{dr}{r}\int_{v_1}^{v_3}\cos(2v-\psi')\,dv + e'_k \equiv I_1+I_2+e'_k, \\ &\lim_{k=0} a' = a, \qquad \lim_{k=0} e'_k = 0, \qquad \cos v_3 = -\frac{k}{r}, \qquad \psi' \equiv \psi'_1+\psi'_2, \end{aligned}\right.$$

où e'_k se rapporte à la partie restante du domaine ρ_2, a' est la valeur limite de r, et où ψ'_1 et ψ'_2 sont les angles que font les éléments ds_1 et ds_2 avec la direction P_0P. A cause de la supposition (α), nous trouverons

$$(113)\qquad \lim_{k=0} I_1 = \text{une quantité finie} \equiv I_1^0.$$

Pour l'étude de I_2, nous posons

$$(114)\quad \left\{\begin{aligned} &r = PQ', \qquad r' = P_0Q', \qquad \frac{\pi}{2}-\lambda = \text{l'angle}\,(P_0P,\,P_0Q'), \\ &\qquad\therefore\; r^2 = r'^2 - 2r'k\sin\lambda + k^2, \end{aligned}\right.$$

Q' étant un point quelconque du bord. Pour $r > k$, nous aurons

$$(115)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos v_1 = \frac{r'\sin\lambda - k}{r}, \\ &\sin v_1 = \frac{r'}{r}\cos\lambda, \qquad r > k; \end{aligned}\right.$$

mais, pour $k' < r \leqq k$, nous avons deux valeurs r'_1 et r'_2 de r' pour chaque valeur de r à cause de la supposition (β), et nous aurons

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos v_1 = \frac{r'_1\sin\lambda_1 - k}{r}, \qquad \sin v_1 = \frac{r'_1}{r}\cos\lambda_1, \\ &\cos v_2 = \frac{r'_2\sin\lambda_2 - k}{r}, \qquad \sin v_2 = \frac{r'_2}{r}\cos\lambda_2, \end{aligned}\right.$$

λ_1 et λ_2 étant les valeurs de λ qui correspondent à r'_1 et r'_2 respectivement. Posons

$$(117)\qquad \begin{cases} r = kt, \qquad r' = kt', \\ \therefore t_2 = t'^2 - 2t'\sin\lambda + 1, \end{cases}$$

$$(118)\qquad \begin{cases} \therefore \mathrm{I}_2 = -(\rho_2 - \rho_1)\displaystyle\int_1^{\frac{a'}{k}} \mathrm{F}\frac{dt}{t}, \\ \mathrm{F} = \dfrac{1}{t}\sqrt{1 - \dfrac{1}{t^2}}\cos\psi' + \dfrac{t'}{t^2}\sin\lambda\sin\psi' + \dfrac{t'}{t^2}(t'\sin\lambda - 1)\cos(\lambda + \psi'). \end{cases}$$

Décrivons un cercle sur $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$ comme diamètre. Pour tous les points du bord qui tombent dans l'intérieur du cercle, nous trouverons (117)

$$(119)\qquad t' = \sin\lambda - \sqrt{t^2 - \cos^2\lambda},$$

et, pour tous les points du bord extérieurs au cercle, nous aurons

$$(120)\qquad t' = \sin\lambda + \sqrt{t^2 - \cos^2\lambda}.$$

Pour $t > 1$ il faut toujours employer la formule (120). Soit maintenant t'_0 une constante > 2, et posons

$$(121)\qquad \begin{cases} t_0 = \sqrt{t_0'^2 - 2t'_0\sin\lambda + 1}, \\ \therefore t_0 > 1. \end{cases}$$

Pour $t > t_0$ nous trouverons $t' > t'_0$ et inversement.

Nous écrivons, t_1 étant une constante $\geqq t_0$,

$$(122)\qquad \mathrm{I}_2 = -(\rho_2 - \rho_1)\int_1^{t_1} \mathrm{F}\frac{dt}{t} - (\rho_2 - \rho_1)\int_{t_1}^{\frac{a'}{k}} \mathrm{F}\frac{dt}{t} \equiv \bar{\mathrm{I}} + \bar{\bar{\mathrm{I}}},$$

où $\lim\limits_{k=0} \bar{\mathrm{I}}$ est finie. Pour de grandes valeurs de t nous pourrons écrire

$$(123)\qquad \mathrm{F} = \sin\lambda\cos(\lambda + \psi') + \frac{1}{t}\mathrm{P}, \qquad \lim_{t=\infty} \mathrm{P} \text{ finie.}$$

De plus, nous aurons

$$\frac{dt}{t} = \frac{(t' - \sin\lambda)\,dt' - t'\cos\lambda\,d\lambda}{t'^2 - 2t'\sin\lambda + 1} = \frac{dt'}{t'}\left(1 + \frac{1}{t'}\mathrm{P}_1\right) - \cos\lambda\left(1 + \frac{1}{t'}\mathrm{P}_2\right)\frac{d\lambda}{t'},$$

où $\lim\limits_{t'=\infty} \mathrm{P}_1$ et $\lim\limits_{t'=\infty} \mathrm{P}_2$ sont finies. D'où il suit, si t'_1 est la valeur de t' qui correspond à la valeur t_1 de t,

$$(124)\quad \left\{\begin{aligned} \bar{I} &= -(\rho_2-\rho_1)\int_{t'_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt'}{t'} \\ &\quad + (\rho_2-\rho_1)\int_{r'=t'_1 k}^{r'=a} \sin\lambda\cos\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{k}{r'}\,d\lambda + e''_k, \\ &\qquad \lim_{k=0} e''_k \text{ finie.}\end{aligned}\right.$$

Nous faisons sur le bord encore la troisième hypothèse

$$(\gamma)\qquad \int_{r'=0}^{r'=a'} (\lambda\, d\lambda) = \text{une quantité finie;}$$

la seconde intégrale du deuxième membre de l'égalité (124) reste finie pour $\lim k = 0$.

Quant à l'autre branche, nous trouverons des formules analogues. Nous n'avons qu'à remplacer ψ' par $-\psi'$, et λ par l'angle correspondant λ'_1 dans les formules trouvées pour avoir celles qui ont lieu pour l'autre branche du bord. Ainsi nous obtiendrons le résultat

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned} K_{s_1 s_2} &= -(\rho_2-\rho_1)\int_k^a \cos(\lambda-\lambda'+\psi')\sin(\lambda+\lambda')\frac{dr'}{r'} + \bar{e}_k, \\ &\qquad \lim_{k=0} \bar{e}_k \text{ finie.}\end{aligned}\right.$$

En comparant cette formule à la formule (97*), il faut observer que λ et λ' correspondent à v_2 et v_1 respectivement, et que

$$(126)\qquad \psi'_1 = \psi_1 - \frac{\pi}{2},\qquad \psi'_2 = \psi_2 - \frac{\pi}{2},\qquad \therefore \psi' = \psi - \pi,$$

$$(125^*)\quad \left\{\begin{aligned} \therefore K_{s_1 s_2} &= (\rho_2-\rho_1)\int_k^a \cos(\lambda-\lambda'+\psi)\sin(\lambda+\lambda')\frac{dr'}{r'} + \bar{e}_k, \\ &\qquad \lim_{k=0} \bar{e}_k \text{ finie.}\end{aligned}\right.$$

D'où le théorème :

Théorème. — *Si le point* P *s'approche indéfiniment du point* P_0 *du bord qui sépare deux parties du plan où les densités sont con-*

stantes, la limite vers laquelle tend la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *au point* P *est finie en même temps que la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *au point* P_0, *indépendamment de la direction de la droite* P_0P, *pourvu qu'au point* P_0 *le bord jouisse des propriétés* (α), (β) *et* (γ).

Remarque III. — Soit K_h^0 la valeur de K_h au point S_0; donc

$$(127)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{k=0\\h=0}}(K_{s_1 s_2} - K_h^0) = \text{une quantité finie,} \\ \text{si} \\ \qquad \lim\limits_{\substack{k=0\\h=0}} \frac{h}{k} \text{ est finie et } \neq 0. \end{cases}$$

Nous chercherons maintenant la valeur de la limite en question dans le cas où (δ) chacune des deux branches du bord a, au point P_0, une tangente bien déterminée.

Posons

$$(128)\qquad \lim_{r=0}\lambda = \lambda_0, \quad \lim_{r=0} v_1 = v_1^0, \quad \lim_{r=0} v_2 = v_2^0 \quad \text{et} \quad \lim_{r=0}\lambda' = \lambda'_0.$$

$$(129)\qquad \begin{cases} \therefore \lim\limits_{k=0} \frac{k'}{k} = \cos\lambda_0, \\ v_1^0 + v_2^0 = 2\pi - 2\lambda_0, \\ \cos(v_1^0 + \lambda_0) = \cos(v_2^0 + \lambda_0) = -\frac{\cos\lambda_0}{t}; \end{cases}$$

$$(130)\qquad \begin{aligned} \therefore I_1^0 &= 2(\rho_2 - \rho_1)\cos(2\lambda_0 + \psi')\cos\lambda_0 \int_{\cos\lambda_0}^{1} \sqrt{1 - \frac{\cos^2\lambda_0}{t^2}}\,\frac{dt}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(2\lambda_0 - \sin 2\lambda_0)\cos(2\lambda_0 + \psi'), \qquad \lambda_0 \gtreqless 0. \end{aligned}$$

L'intégrale I_2 peut s'écrire (118)

$$(131)\qquad \begin{aligned} I_2 = &-(\rho_2 - \rho_1)\int_1^{\frac{a'}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda + \psi')\frac{dt}{t} \\ &-(\rho_2 - \rho_1)\int_1^{\frac{a'}{k}} [F - \sin\lambda\cos(\lambda + \psi')]\frac{dt}{t} = (\rho_2 - \rho_1)\bar{I}_2 + (\rho_2 - \rho_1)\bar{\bar{I}}_2. \end{aligned}$$

Écrivons t_1 étant plus grand que 1,

(132) $$\mathrm{I}_2 = -\int_1^{t_1} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt}{t} - \int_{t_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt}{t}.$$

La limite pour $k=0$ du premier terme du second membre de l'égalité (132) est

$$-\sin\lambda_0\cos(\lambda_0+\psi')\log t_1.$$

Le second terme du même membre peut s'écrire

$$-\int_{t'_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{t'-\sin\lambda}{t'^2-2t'\sin\lambda+1}dt' + \int_{r'=t'_1 k}^{r'=a} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t^2}d\lambda + f_k,$$
$$\lim_{k=0} f_k = 0,$$

où le premier terme peut s'écrire

$$-\int_{t'_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\left(\frac{t'-\sin\lambda}{t'^2-2t'\sin\lambda+1} - \frac{1}{t'}\right)dt' - \int_{t'_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt'}{t'},$$

et la somme de ces deux termes peut s'écrire

$$\sin\lambda_0\cos(\lambda_0+\psi')\log t_1 - \int_k^a \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dr'}{r'} + f'_k, \qquad \lim_{k=0} f'_k = 0.$$

De plus, nous pourrons écrire

(133) $$\int_{r'=t'_1 k}^{r'=a} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t^2}d\lambda$$
$$= \int_{r'=t'_1 k}^{r'=wk} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t^2}d\lambda + \int_{t'=w}^{t'=\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t^2}d\lambda,$$

où w est une constante qui peut être supposée assez grande pour que la limite pour $k=0$ du dernier terme soit plus petite qu'une quantité donnée d'avance.

Dans le premier terme du second membre de l'égalité (33), la quantité $\frac{\sin\lambda\cos(\lambda+\psi')}{\lambda}\cos\lambda\frac{t'}{t^2}$ est toujours numériquement plus petite qu'une quantité finie qui est indépendante de k. Mais les limites de l'intégration pour $d\lambda$ sont infiniment voisines l'une de l'autre; par suite, d'après la propriété (γ) du bord, la limite pour $k=0$ de ce terme est égale à zéro,

$$(133^*) \qquad \therefore \lim_{k=0}\int_{r'=t'_1}^{r'=a} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t^2}\,d\lambda = 0.$$

Nous pourrons donc écrire

$$(132^*) \qquad \bar{\mathrm{I}}_2 = -\int_k^a \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dr'}{r'} + g_k, \qquad \lim_{k=0} g_k = 0.$$

Pour l'évaluation de $\lim\limits_{k=0}\bar{\bar{\mathrm{I}}}_2$ (131) nous n'avons qu'à poser $k=0$ dans l'intégrale $\bar{\bar{\mathrm{I}}}_2$,

$$\begin{aligned}
\therefore \bar{\mathrm{I}}_2^0 \equiv \lim_{k=0}\bar{\mathrm{I}}_2 = &-\cos\psi'\int_1^\infty\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\,\frac{dt}{t^2} \\
&+\cos\psi'\cos\lambda_0\int_1^\infty\left[2\cos^2\lambda_0\sin\lambda_0+(2\cos^2\lambda_0-1)\sqrt{t^2-\cos^2\lambda_0}\right]\frac{dt}{t^3} \\
&-\sin\psi'\sin\lambda_0\int_1^\infty\left(2\cos^2\lambda_0\sin\lambda_0+\sin\lambda_0+2\cos^2\lambda_0\sqrt{t^2-\cos^2\lambda_0}\right)\frac{dt}{t^3} \\
= &-\frac{1}{4}(2\lambda_0-\sin 2\lambda_0)\cos(2\lambda_0+\psi')+\frac{\pi}{4}[\cos(2\lambda_0+\psi')-\cos\psi'] \\
&+\frac{1}{2}[\cos^2\lambda_0\sin(2\lambda_0+\psi')-\sin\psi'] \qquad \text{pour} \qquad \lambda_0 \geqq 0;
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
= &\ \frac{1}{4}(2\lambda_0-\sin 2\lambda_0)\cos(2\lambda_0+\psi')+\frac{\pi}{4}[\cos(2\lambda_0+\psi')-\cos\psi'] \\
&+\frac{1}{2}[\cos^2\lambda_0\sin(2\lambda_0+\psi')-\sin\psi'] \qquad \text{pour} \qquad \lambda_0 < 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(134) \quad \mathrm{I}_1^0+(\rho_2-\rho_1)\bar{\mathrm{I}}_2^0 = \frac{1}{4}(\rho_2-\rho_1)\{&2\lambda_0\cos(2\lambda_0+\psi')+\sin(2\lambda_0+\psi') \\
&-\sin\psi'+\pi[\cos(2\lambda_0+\psi')-\cos\psi']\}.
\end{aligned}$$

Nous trouverons un résultat analogue pour l'autre bord. Soient $\mathrm{I}_1'^0$ et $\bar{\bar{\mathrm{I}}}{}_2'^0$ ce que deviendront I_1^0 et $\bar{\bar{\mathrm{I}}}{}_2^0$, lorsqu'on y remplace λ_0 et ψ' par λ'_0 et $-\psi'$; nous trouverons (132*)

$$(135) \qquad \mathrm{K}_{\rho_1} = \mathrm{K}_{s_1 s_2}^0 + \bar{\mathrm{K}}_{\rho_1} + \mathrm{I}_1^0 + \mathrm{I}_1'^0 + (\rho_2+\rho_1)(\bar{\mathrm{I}}_2^0+\bar{\mathrm{I}}_2'^0),$$

où K_{ρ_1}, $\mathrm{K}_{s_1 s_2}^0$ et $\bar{\mathrm{K}}_{\rho_1}$ représentent respectivement les quantités $\lim\limits_{k=0}\mathrm{K}_{s_1 s_2}$, la valeur de $K_{s_1 s_2}$ au point P_0 et $\lim_{k=0} K_{s_1 s_2}$ pour le cas où le bord est rectiligne et perpendiculaire à la droite P_0P. La valeur de $\overline{K}_{\rho_1}$ étant donnée par l'égalité (107), nous trouverons le résultat suivant :

$$(136)\quad \left\{\begin{array}{l} K_{\rho_1} = K^0_{s_1 s_2} + \frac{1}{4}(\rho_2 - \rho_1)M + \frac{\pi}{4}(\rho_2 - \rho_1)[\cos(2\lambda_0 + \psi') + \cos(2\lambda'_0 - \psi')], \\ M \equiv 2\lambda_0 \cos(2\lambda_0 + \psi') + \sin(2\lambda_0 + \psi') + 2\lambda'_0 \cos(2\lambda'_0 - \psi') + \sin(2\lambda'_0 - \psi'). \end{array}\right.$$

Cas particulier. — Si P_0P est la bissectrice de l'angle que font, au point P_0, les tangentes des deux branches, et si nous posons dans ce cas

$$(137)\quad K'_{\rho_1} \equiv K_{\rho_1}, \qquad \mu \equiv \lambda_0 = \lambda'_0, \qquad \varphi_1 \equiv \psi'_1, \qquad \varphi_2 \equiv \psi'_2 \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \varphi_1 + \varphi_2,$$

nous trouverons

$$(138)\qquad K'_{\rho_1} = K^0_{s_1 s_2} + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)[(\pi + 2\mu)\cos 2\mu + \sin 2\mu]\cos\varphi.$$

Cas général. — Si la droite P_0P fait l'angle α avec la bissectrice, nous trouverons

$$(139)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda = \mu + \alpha, \qquad \lambda' = \mu - \alpha, \qquad \psi' = \varphi - 2\alpha, \\ \quad \therefore\ K_{\rho_1} = K'_{\rho_1} - (\rho_2 - \rho_1)\alpha \sin 2\mu \sin\varphi. \end{array}\right.$$

En nommant $\frac{\partial^2 V'}{\partial s_1\, \partial s_2}$ la dérivée prise en un point de la bissectrice, nous trouverons

$$(140)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 V'}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} \equiv \lim\limits_{k=0} \dfrac{\partial^2 V'}{\partial s_1\, \partial s_2} = K'_{\rho_1} - \pi\rho_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \lim\limits_{k=0}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2} - \dfrac{\partial^2 V'}{\partial s_1\, \partial s_2}\right) = -(\rho_2 - \rho_1)\alpha \sin 2\mu \sin\varphi. \end{array}\right.$$

D'où le théorème :

THÉORÈME. — *Si le bord commun de deux parties du plan dont les densités sont constantes jouit, au point P_0, des propriétés* (β) *et* (γ), *et si chacune des deux branches du bord y admet une tangente unique et bien déterminée; si, de plus, le point* P *s'approche indéfiniment du point* P_0 *suivant une droite qui ne touche pas le bord, la limite de la différence* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial s_1\, \partial s_2}$ *est toujours finie,* *les dérivées secondes du potentiel logarithmique étant prises respectivement pour le point* P *et pour un autre point* P′ *qui se meut suivant la bissectrice des tangentes des deux branches de manière que toujours* $P_0P' = P_0P$. *Cette limite est proportionnelle à l'angle* α *que fait* P_0P *avec* P_0P', *et sa valeur est donnée par l'égalité* (140).

Remarque IV. — Pour un point régulier $\mu = 0$,

$$\therefore \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} = \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1}.$$

D'où il suit qu'en un point régulier la limite $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1}$, si elle existe, a une certaine valeur unique indépendamment de la direction de la droite P_0P. Cela arrivera aussi dans le cas où $\sin\varphi = 0$.

Remarque V. — La condition (α) $\lim\limits_{k=0} \frac{k'}{k} \neq 0$ n'est pas indispensable, de manière que la dérivée existe dans certains cas où P_0P touche le bord au point P_0. En effet, nous aurons (112)

$$I_1 = (\rho_2 - \rho_1) \int_{k'}^{k} \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{v_2} \cos(2v - \psi')\, dv.$$

Posons

$$(141)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{k}{k'} = \beta, \\ & J_1 \equiv \frac{1}{2} \int_{\beta}^{1-\varkappa} [\sin(2v_2 - \psi') - \sin(2v_1 - \psi')] \frac{dt}{t}, \\ & J_2 \equiv \frac{1}{2} \int_{1-\varkappa}^{\beta} [\sin(2v_2 - \psi') - \sin(2v_1 - \psi')] \frac{dt}{t}, \\ & \therefore I_1 = (\rho_2 - \rho_1)(J_1 + J_2), \end{aligned} \right.$$

$\varkappa$ étant une constante positive < 1. De plus, nous aurons

$$(142)\quad \left\{ \begin{aligned} & \cos(v_1 + \lambda_1) = -\frac{k}{r}\cos\lambda_1, \qquad \cos(v_2 + \lambda_2) = -\frac{k}{r}\cos\lambda_2, \\ & \sin(v_1 + \lambda_1) = \sqrt{1 - \frac{k^2\cos^2\lambda_1}{r^2}}, \qquad \sin(v_2 + \lambda_2) = -\sqrt{1 - \frac{k^2\cos^2\lambda_2}{r^2}}, \end{aligned} \right.$$

λ_1 et λ_2 étant les valeurs de λ qui correspondent aux deux points (r, v_1)

et (r, v_2) du bord. $\lim\limits_{k=0} J_2$ étant évidemment finie, il nous faut seulement étudier $\lim\limits_{k=0} J_1$. En éliminant v_1 et v_2 au moyen des formules (142), nous trouverons

$$(143)\qquad \begin{cases} J_1 = A_1 \int_\beta^{1-\varkappa} \cos\lambda_1 \dfrac{dt}{t^2} + A_2 \int_\beta^{1-\varkappa} \cos\lambda_2 \dfrac{dt}{t^2}, \\ \lim\limits_{k=0} A_1 \text{ finie}, \qquad \lim\limits_{k=0} A_2 \text{ finie}, \end{cases}$$

ou

$$(143^*)\qquad J_1 = A_1 \int_{\frac{\beta}{1-\varkappa}}^{1} \frac{\cos\lambda_1}{\beta} d\tau + A_2 \int_{\frac{\beta}{1-\varkappa}}^{1} \frac{\cos\lambda_2}{\beta} d\tau \qquad \text{pour} \qquad t = \frac{\beta}{\tau},$$

$$\therefore \lim_{k=0} J_1 \quad \text{est finie, si} \quad \lim_{k=0} \frac{\cos\lambda_1}{\beta} \quad \text{et} \quad \lim_{k=0} \frac{\cos\lambda_2}{\beta} \quad \text{sont finies.}$$

Posons

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} - w_1, \qquad \lambda_2 = \frac{\pi}{2} - w_2,$$

et soient w_0 et r'_0 les valeurs de w et r' qui correspondent au point du bord pour lequel $r = k'$;

$$\sin w_0 \leqq \beta \frac{k}{r'_0}, \qquad \lim_{k=0} \frac{k}{r'_0} = 1,$$

$$(144)\qquad \therefore \lim_{k=0} I_1 \quad \text{existe, si} \quad \lim_{k=0} \frac{w}{w_0} \quad \text{est finie,}$$

pour toutes les valeurs de w pour lesquelles $k' \leqq r \leqq k(1 - \varkappa)$.

Dans le cas particulier où l'on peut regarder la partie P_0Q_1 de la branche du bord approximativement comme un cercle de rayon R, Q_1 étant le point (k, v_1) du bord, et en posant $\varkappa = 0$, on trouvera que la plus grande valeur de $\cos\lambda$ se rapporte au point Q_1 pour lequel on a

$$\cos\lambda = \frac{k}{R + k'}.$$

De plus, on aura avec l'approximation supposée

$$k'(2R + k') = k^2,$$

$$(144^*)\qquad \therefore \left(\frac{\cos\lambda}{\beta}\right)_{\max.} = 2 - \frac{k'}{R + k'} < 2.$$

et

$$\therefore \lim_{k=0}\left(\frac{\cos\lambda}{\beta}\right)_{\max.} \quad \text{est finie même dans le cas où} \quad \lim_{k=0} R \quad \text{est nulle ou infinie.}$$

8. *Changement brusque de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ au bord de la surface.* — Si le point P traverse, au point P_0, le bord qui sépare les deux parties du plan où les densités sont égales aux constantes ρ_1 et ρ_2 respectivement, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ éprouve, en général, un changement brusque dont nous chercherons la valeur dans le cas où le point P suit une droite PP_0P_1. Nous avons trouvé la valeur $\frac{\partial^2 V_\rho}{\partial s_1 \partial s_2}$ de cette dérivée au point P_0 (§ 6), l'élément ds_1 étant dirigé vers l'intérieur du domaine (ρ_1), et la valeur limite $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1}$ du côté de la densité ρ_1 (§ 6).

Afin de trouver la valeur limite $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2}$ de l'autre côté il nous faut remplacer dans la formule (140)

$$(145)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_1, \quad \rho_2, \quad \mu, \quad \alpha \quad \text{et} \quad \varphi, \\ \text{par} \\ \rho_2, \quad \rho_1, \quad -\mu, \quad -\alpha \quad \text{et} \quad 2\pi-\varphi, \end{array}\right.$$

l'angle φ_1 étant remplacé par $\pi - \varphi_1$ et π_2 par $\pi - \varphi_2$.

Nous obtiendrons ainsi les valeurs suivantes :

$$(146)\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1} &= K^0_{s_1 s_2} + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)[(\pi + 2\mu)\cos 2\mu + \sin 2\mu]\cos\varphi \\ &\quad - \pi\rho_1 c - (\rho_2 - \rho_1)\alpha \sin 2\mu \sin\varphi, \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2} &= K^0_{s_1 s_2} - \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)[(\pi - 2\mu)\cos 2\mu - \sin 2\mu]\cos\varphi \\ &\quad - \pi\rho_2 c - (\rho_2 - \rho_1)\alpha \sin 2\mu \sin\varphi, \\ K^0_{s_1 s_2} &= -\lim_{h=0}(\rho_2 - \rho_1)\int_h^a \cos(v_1 - v_3 - \varphi)\sin(v_1 + v_3)\frac{dr}{r} \quad \text{pour } \psi = \varphi + \pi; \end{aligned}\right.$$

$$(147)\qquad \therefore \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2} = \pi(\rho_2 - \rho_1)(\cos 2\mu \cos\varphi + c).$$

Pour la dérivée au point P_0 nous trouverons la valeur suivante, en posant dans l'égalité (100^*)

$$
(148)\quad \begin{cases}
\nu_1^0 = \mu, \quad \nu_2^0 = \pi - \mu, \quad \psi_1 = \dfrac{\pi}{2} + \varphi_1, \quad \psi_2 = \dfrac{\pi}{2} + \varphi_2, \quad \therefore \psi = \pi + \varphi, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 V_{\rho_1}}{\partial s_1\, \partial s_2} = K^0_{s_1 s_2} - \pi\rho_1 c + (\rho_2 - \rho_1)\left[\left(\dfrac{\pi}{2} + \mu\right)\cos 2\mu \cos\varphi \right. \\
\qquad\qquad \left. - \varphi_1 \sin 2\mu \sin\varphi - \dfrac{1}{2}\sin 2\mu \cos\varphi\right], \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 V_{\rho_2}}{\partial s_1\, \partial s_2} = K^0_{s_1 s_2} - \pi\rho_2 c - (\rho_2 - \rho_1)\left[\left(\dfrac{\pi}{2} - \mu\right)\cos 2\mu \cos\varphi \right. \\
\qquad\qquad \left. - (\pi - \varphi_1)\sin 2\mu \sin\varphi + \dfrac{1}{2}\sin 2\mu \cos\varphi\right],
\end{cases}
$$

selon que l'élément ds_1 est dirigé vers l'intérieur du domaine (ρ_1) ou du domaine (ρ_2).

Si l'élément ds'_1 est dirigé en sens opposé à ds_1, il faut changer

$$(149)\quad K^0_{s_1 s_2},\ \rho_1,\ \rho_2,\ \mu \ \text{ et } \ \varphi_2 \ \text{ en } \ -K_{s_1 s_2},\ \rho_2,\ \rho_1,\ -\mu \ \text{ et } \ \varphi_2 + \pi \ \text{ resp.,}$$

$$
(150)\quad \therefore \frac{\partial^2 V_{\rho_2}}{\partial s'_1\, \partial s_2} = - K^0_{s_1 s_2} + \pi\rho_2 c + (\rho_2 - \rho_1)
\times\left[\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right)\cos 2\mu \cos\varphi + \varphi_1 \sin 2\mu \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\mu \cos\varphi\right],
$$

$$
(151)\quad \begin{cases}
\therefore \dfrac{\partial^2 V_{\rho_1}}{\partial s_1\, \partial s_2} - \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} = (\rho_2 - \rho_1)\left[(\varphi_1 - \alpha)\sin\varphi + \cos\varphi\right]\sin 2\mu, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 V_{\rho_1}}{\partial s_1\, \partial s_2} + \dfrac{\partial^2 V_{\rho_2}}{\partial s'_1\, \partial s_2} = \pi(\rho_2 - \rho_1)(\cos 2\mu \cos\varphi + c), \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 V_{\rho_1}}{\partial s_1\, \partial s_2} + \dfrac{\partial^2 V_{\rho_2}}{\partial s'_1\, \partial s_2} = -\pi(\rho_2 - \rho_1)\sin 2\mu \sin\varphi.
\end{cases}
$$

Enfin, nous trouverons pour la fonction ΔV (§ 3)

$$
(152)\quad \begin{cases}
(\Delta V)_{\rho_1} = -\pi\rho_1(c + c'), \\
(\Delta V)_{\rho_2} = -\pi\rho_2(c + c'),
\end{cases}
$$

$(\Delta V)_{\rho_1}$ et $(\Delta V)_{\rho_2}$ étant les valeurs limites de ΔV des deux côtés du bord;

$$(153)\quad \therefore (\Delta V)_{\rho_1} - (\Delta V)_{\rho_2} = \pi(\rho_2 - \rho_1)(c + c').$$

De plus, nous trouverons (45)

$$(154)\quad \begin{cases} (\Delta V)_{\rho_1} - \Delta V_{11} = -\frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\psi' - \psi_1)[\cos(2\lambda + \psi) - \cos(2\lambda' - \psi)], \\ (\Delta V)_{\rho_1} - \Delta V_{12} = \pi(\rho_2 - \rho_1)c' - \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\psi' - \psi_1) \\ \qquad \times [\cos(2\lambda + \psi) - \cos(2\lambda' - \psi)] \\ \qquad + \pi(\rho_2 - \rho_1)\cos(2\lambda + \psi) \quad \text{pour} \quad \psi' > \pi - \lambda, \\ (\Delta V)_{\rho_1} - \Delta V_{12} = \pi(\rho_2 - \rho_1)c' - \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\psi_1 - \psi') \\ \qquad \times [\cos(2\lambda + \psi) - \cos(2\lambda' - \psi)] \\ \qquad + \pi(\rho_2 - \rho_1)\cos(2\lambda' - \psi) \quad \text{pour} \quad 0 < \psi' < \lambda'. \end{cases}$$

En renversant la direction de ds_1 et ds', il faut augmenter ψ_1 et ψ' de π. Donc nous trouverons

$$(155)\qquad \Delta V_{11} + \Delta V_{22} = \pi(\rho_2 - \rho_1)(c + c').$$

Remarque. — Les premiers membres des égalités (147) et (151) peuvent être remplacés par des expressions analogues aux premiers membres de la seconde des égalités (140). Sous cette forme ces égalités ont lieu même dans le cas où $K''_{s_1 s_2}$ n'existe pas, c'est-à-dire où ces dérivées ou limites n'existent pas elles-mêmes.

CHAPITRE II.

LA DÉRIVÉE PREMIÈRE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE D'UNE LIGNE PLANE.

9. *Existence de la dérivée.* — Soit μ_0 une masse finie répandue d'une manière quelconque dans le plan, et soit

$$(156)\qquad V = \int_0^{\mu_0} \log\frac{1}{R}\,d\mu$$

le potentiel logarithmique de cette masse au point P, R étant la distance PQ de P jusqu'au point Q où se trouve l'élément de masse. Soit de plus

$$V_0 = \int_0^{\mu_0} \log\frac{1}{r}\,d\mu \tag{157}$$

le potentiel logarithmique de la masse considérée pour un point fixe P_0, $r = P_0Q$. Posons

$$\left\{\begin{aligned} P_0P &= h,\\ r &= ht,\\ R &= hq,\\ \cos(h, r) &= u;\end{aligned}\right. \tag{158}$$

$$\left\{\begin{aligned} \therefore R &= \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2},\\ q &= \sqrt{t^2 - 2tu + 1},\\ V - V_0 &= \int_0^{\mu_0} \log\frac{t}{q}\,d\mu.\end{aligned}\right. \tag{159}$$

Nous supposerons que la masse μ_0 est répandue de telle manière qu'à tout point P le potentiel logarithmique soit fini. D'où il suit que l'intégrale de (159) est finie, quoique la quantité $\log\frac{t}{q}$ devienne infinie pour $t = 0$ et pour $t = u = 1$. De plus, nous supposons que nous pourrons prendre les éléments $d\mu$ dans un ordre tel que nous commencions à prendre tous les éléments des points Q′ pour lesquels P_0Q' est plus grand qu'une quantité r; puis successivement la somme $\delta\mu$ des éléments pour lesquels $r \leqq P_0Q' < r + \delta r$, de manière que nous pourrons écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{P_0Q'=r}^{P_0Q'=r+\delta r} d\mu = \delta\mu,\\ &\int_{P_0Q'=0}^{P_0Q'=r} d\mu = \mu(r),\end{aligned}\right. \tag{160}$$

et, par suite,

$$V - V_0 = \int_0^{\mu(wh)} \log\frac{t}{q}\,d\mu + \int_{\mu(wh)}^{\mu_0} \log\frac{t}{q}\,d\mu, \tag{161}$$

w étant une constante > 1 et $\mu(wh)$ la valeur de $\mu(r)$ pour $t = w$.

En développant $\log \frac{t}{q}$ pour $t > 1$, nous trouverons

$$\log \frac{t}{q} = \frac{1}{t} \mathrm{P}, \qquad \lim_{t=\infty} \mathrm{P} \text{ finie};$$

donc nous pourrons choisir la constante w assez grande pour que le second terme du second membre de l'égalité (161) soit plus petit qu'une quantité donnée d'avance, quelque petite qu'elle soit, quelle que soit la valeur de h. De plus, $\lim_{h=0} \mu(wh) = 0$; par suite, la quantité h peut être choisie assez petite pour que le premier terme du second membre devienne aussi petit qu'on voudra. D'où le théorème :

Théorème. — *Si le potentiel logarithmique d'une masse finie quelconque est fini au point* P_0 *et en tous les points du voisinage de* P_0, *ce potentiel est continu au point* P_0 *dans toutes les directions.*

Posons dans (160) dr au lieu de δr, et soit

$$(162) \qquad \begin{cases} d\mu = \sigma(r, u)\, dr, \\ \therefore \delta\mu = dr \sum_u \sigma(r, u). \end{cases}$$

Nous supposerons, dans la suite, que la quantité

$$\sum_u |\sigma(r, u)|$$

reste toujours plus petite qu'une constante finie. Si a est la valeur maximum de r, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(\mathrm{V} - \mathrm{V}_0) &= \frac{1}{h} \int_0^a \sum \sigma \log \frac{r}{\mathrm{R}}\, dr \\ &= \int_0^{\frac{a}{h}} \sum \sigma(ht, u) \log \frac{t}{q}\, dt \\ &= \int_0^w \sum \sigma \log \frac{t}{q}\, dt + \int_w^{\frac{a}{h}} \sum \sigma \log \frac{t}{q}\, dt \equiv \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2, \end{aligned}$$

ϖ étant une constante telle que $1 < \varpi < \frac{a}{h}$. Or,

$$\int_0^{\varpi} \sum \sigma \log t \, dt = \left(\sum \sigma\right)_m \varpi(\log \varpi - 1),$$

où m désigne une valeur moyenne. De plus, nous pourrons écrire

$$q = \sqrt{(1-t)^2 + 2t(1-u)}, \qquad \therefore q \geqq (1-t),$$

$$\therefore \left| \int_0^{\varpi} \sum \sigma \log \frac{1}{q} \, dt \right| \leqq G \int_0^1 \log \frac{1}{1-t} dt + G \int_1^{\varpi} \left| \log \frac{1}{t-1} \right| dt$$
$$= G\left(1 + \overline{\varpi - 1} \left| \log \overline{\varpi - 1} - 1 \right|\right);$$

G étant une quantité finie $\geqq \sum |\sigma|$, $\therefore I'_1$ reste plus petite qu'une constante finie pour chaque valeur de h, c'est-à-dire que

$$\lim_{h=0} I_1 \text{ est finie.}$$

Pour $t > 1$, on peut écrire

$$\log \frac{t}{q} = \frac{u}{t} + \frac{1}{t^2} P_1, \qquad \lim_{t=\infty} P_1 \text{ finie,}$$

$$\therefore I_2 = \int_{\varpi}^{\frac{a}{h}} \sum \sigma u \frac{dt}{t} + \int_{\varpi}^{\frac{a}{h}} \sum \sigma P_1 \frac{dt}{t^2}$$
$$= \int_h^a \sum \sigma u \frac{dr}{r} - \int_1^{\varpi} \sum \sigma u \frac{dt}{t} + \left(\sum \sigma P_1\right)_m \left(\frac{1}{\varpi} - \frac{h}{a}\right),$$

où les deux derniers termes ont des limites finies pour $\lim h = 0$, l'indice m désignant une valeur moyenne. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soit μ_0 une masse finie répandue de manière qu'on puisse écrire*

(163) $$d\mu = dr \sum_u \sigma(r, u), \qquad u = \cos(r, ds),$$

où $d\mu$ est l'élément de masse en un certain point Q, r la distance P_0Q de Q à un point fixe P_0, ds un élément de ligne émanant du *point* P_0, *et* $\sum_u |\sigma|$ *une quantité qui reste plus petite qu'une constante finie quelle que soit la valeur de* r. *La condition nécessaire et suffisante pour que le potentiel logarithmique de cette masse ait, au point* P_0, *une dérivée finie dans la direction* ds, *est que la quantité*

$$W_s \equiv \lim_{h=0} \int_h^a \sum \sigma u \frac{dr}{r} \quad \textit{soit finie.} \tag{164}$$

Nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= W + Q, \\ W_s &= \lim_{h=0} W_s^{(h)}, \\ Q &= \lim_{h=0} Q_h, \\ W_s^{(h)} &= \int_h^a \sum \sigma u \frac{dr}{r} = \int_{(h)}^{\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{1}{r}\, d\mu, \\ Q_h &= \int_0^1 \sum \sigma \log \frac{t}{q}\, dt + \int_1^{\frac{a}{h}} \sum \sigma \left(\log \frac{t}{q} - \frac{u}{t}\right) dt, \\ q &= \sqrt{t^2 - 2tu + 1}. \end{aligned}\right. \tag{165}$$

Si les quantités

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{r=0} \sigma(r, u) = \sigma_0 \\ &\text{et} \\ &\lim_{r=0} u \equiv u_0 \end{aligned}\right. \tag{166}$$

sont déterminées, nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned} Q &= \sum \sigma_0 L, \\ L &= u_0 - \sqrt{1 - u_0^2}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{tang}^{-1} \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}}\right) = \cos\delta_0 - (\pi - \delta_0)\sin\delta_0, \\ &\qquad \delta_0 \geqq 0, \\ \delta_0 &= \lim_{r=0} \delta, \\ \delta &= \text{l'angle } (r, ds). \quad \therefore u = \cos\delta. \quad u_0 = \cos\delta_0. \end{aligned}\right. \tag{167}$$

Corollaire. — *Si* W *existe, nous trouverons*

$$\sum \sigma_0 u_0 = 0. \tag{168}$$

Remarque. — Nous supposerons dans la suite que la masse est répartie sur une courbe qui passe par le point P_0 et y a deux branches à tangentes déterminées. Nous aurons dans ce cas

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= \int_0^a (\sigma' \cos\delta' + \sigma'' \cos\delta'')\frac{dr}{r} \\ &\quad + \sigma'_0 \cos\delta'_0 + \sigma''_0 \cos\delta''_0 - \sigma'_0(\pi - \delta'_0)\sin\delta'_0 - \sigma''(\pi - \delta''_0)\sin\delta''_0, \\ &\qquad \delta'_0 \gtreqless 0, \qquad \delta''_0 \gtreqless 0, \end{aligned}\right. \tag{169}$$

où σ' et σ'', u' et u'', δ' et δ'' se rapportent aux deux branches respectives.

Cas particulier. — Si, au point P_0, la courbe a une tangente unique, on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\delta'_0 + \delta''_0 = \pi, \qquad \therefore u'_0 + u''_0 = 0, \\ &\therefore \frac{\partial V}{\partial s} = \int_0^a (\sigma' u' + \sigma'' u'')\frac{dr}{r} \\ &\qquad + (\sigma'_0 - \sigma''_0)u'_0 - \pi\sigma'_0 \sin\delta'_0 + (\sigma'_0 - \sigma''_0)\delta'_0 \sin\delta'_0, \end{aligned}\right. \tag{170}$$

et, si $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe,

$$(\sigma'_0 - \sigma''_0)u'_0 = 0. \tag{171}$$

Pour la dérivée normale, nous trouverons

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \int_0^a (\sigma' \sin\lambda' + \sigma'' \sin\lambda'')\frac{dr}{r} - \frac{\pi}{2}(\sigma'_0 + \sigma''_0), \tag{172}$$

où nous avons posé

$$\lambda' = \frac{\pi}{2} - \delta', \qquad \lambda'' = \frac{\pi}{2} - \delta''. \tag{173}$$

10. *La limite,* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$, *de la dérivée extérieure.* — Soit P un point extérieur aux masses, et posons $P_0P = h$. Soient de plus V_h le potentiel logarithmique des masses au point P, et ds un élément émanant du point P dans une direction quelconque;

$$(174)\qquad \frac{\partial V_h}{\partial s}=\int_0^{\mu_0}\frac{\partial}{\partial s}\log\frac{1}{R}\,d\mu=\int_0^{\mu_0}v\frac{d\mu}{R},\qquad v=\cos(R,ds),$$

R étant la distance PQ. Soient de plus

$$(175)\quad \left\{\begin{array}{l} r=P_0Q,\qquad \varphi=\text{l'angle}(h,r),\qquad \omega=\text{l'angle}(h,ds)>0,\\ \text{si } ds \text{ se trouve du même côté de } P_0P \text{ que } r, \text{ et } <0 \text{ dans le}\\ \qquad\qquad\text{cas contraire, et } u=\cos\varphi,\\ \qquad\therefore R=\sqrt{r^2-2rhu+h^2},\\ \qquad v=\dfrac{ru-h}{R}\cos\omega+\dfrac{r\sin\varphi}{R}\sin\omega;\end{array}\right.$$

$$(176)\quad \left\{\begin{array}{l} \therefore\dfrac{\partial V_h}{\partial s}=\cos\omega\dfrac{\partial V_h}{\partial s_1}+\sin\omega\dfrac{\partial V_h}{\partial s_2},\\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_1}=\displaystyle\int_0^{\mu_0}\frac{ru-h}{R^2}\,d\mu,\\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2}=\displaystyle\int_0^{\mu_0}\sin\varphi\frac{r\,du}{R^2},\end{array}\right.$$

l'élément ds_1 étant pris dans la direction de P_0P_1 et ds_2 dans la direction normale à P_0P. Posons

$$(177)\qquad \left\{\begin{array}{l} r=ht,\\ R=hq,\\ \therefore q=\sqrt{t^2-2tu+1},\end{array}\right.$$

et supposons

$$(178)\qquad d\mu=\sigma\,dr,\qquad \sigma \text{ finie},$$

$$(179)\quad \left\{\begin{array}{l} \therefore\dfrac{\partial V_h}{\partial s_1}=\displaystyle\sum\int_0^{\frac{a}{h}}\sigma\frac{tu-1}{q^2}\,dt\\ \qquad=\displaystyle\sum\int_0^1\sigma\frac{tu-1}{q^2}\,dt+\sum\int_1^{\frac{a}{h}}\sigma\left(\frac{tu-1}{q^2}-\frac{u}{t}\right)dt+\sum\int_h^a\sigma u\frac{dr}{r},\\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2}=\displaystyle\sum\int_0^1\sigma\sin\varphi\frac{t\,dt}{q^2}+\sum\int_1^{\frac{a}{h}}\sigma\sin\varphi\left(\frac{t}{q^2}-\frac{1}{t}\right)dt\\ \qquad\qquad+\displaystyle\sum\int_h^a\sigma\sin\varphi\frac{dr}{r}.\end{array}\right.$$

Nous distinguerons deux cas :

Cas I. —

$$\lim_{h=0} \varphi \neq 0,$$

$$\therefore q \neq 0;$$

par suite, nous pourrons passer à la limite immédiatement, et nous trouverons (179)

$$(180)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s_1} = W_1 + Q_1,\\
&\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s_2} = W_2 + Q_2,\\
&\quad W_1 \equiv \lim_{h=0} \int_h^a \sum \sigma \cos\varphi \frac{dr}{r},\\
&\quad W_2 \equiv \lim_{h=0} \int_h^a \sum \sigma \sin\varphi \frac{dr}{r},\\
&\quad Q_1 \equiv \sum \sigma_0 L_1,\\
&\quad Q_2 \equiv \sum \sigma_0 L_2,\\
&\quad L_1 = -(\pi - \varphi_0) \sin\varphi_0, \qquad \varphi_0 > 0,\\
&\quad L_2 = (\pi - \varphi_0) \cos\varphi_0,\\
&\quad\quad \sigma_0 \equiv \lim_{r=0} \sigma, \qquad \varphi_0 \equiv \lim_{r=0} \varphi;
\end{aligned}\right.$$

$$(181)\quad \left\{\begin{aligned}
&\therefore \lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s} = W + Q',\\
&\quad W_s \equiv \lim_{h=0} W_s^{(h)},\\
&\quad W_s^{(h)} \equiv \int_h^a \sum \sigma \cos\varepsilon \frac{dr}{r} = \int_{\mu(h)}^{\mu_0} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s} d\mu,\\
&\quad Q' \equiv \sum \sigma_0 L',\\
&\quad L' = -(\pi - \varphi_0) \sin\varepsilon,\\
&\quad \varepsilon = \text{l'angle}\,(ds, r) = \varphi - \omega, \qquad \varepsilon_0 \equiv \lim_{r=0} \varepsilon.
\end{aligned}\right.$$

Si la masse est répandue sur une courbe qui, au point P_0, ait deux branches à tangentes déterminées, nous trouverons (181)

$$(182)\quad \begin{cases} W_s^{(h)} = \displaystyle\int_h^a (\sigma' \cos\varepsilon' + \sigma'' \cos\varepsilon'') \frac{dr}{r}, \\ Q' \quad = -\sigma'_0(\pi - \varphi'_0)\sin\varepsilon'_0 - \sigma''_0(\pi - \varphi''_0)\sin\varepsilon''_0, \qquad \varphi'_0 > 0, \qquad \varphi''_0 > 0. \end{cases}$$

Corollaires. — 1° *Si* W_s *existe,*

$$(183)\qquad \sigma'_0 \cos\varepsilon'_0 + \sigma''_0 \cos\varepsilon''_0 = 0.$$

2° *Changement brusque de la dérivée.* — Si le point P traverse la courbe en suivant une droite, la dérivée éprouve, en général, un changement brusque. La valeur limite de l'autre côté s'obtient des formules précédentes en y changeant φ, ω et ε en $\pi - \varphi$, $\pi - \omega$ et $-\varepsilon$ respectivement. En désignant les limites de $\frac{\partial V_h}{\partial s}$ des deux côtés par $\frac{\partial V_+}{\partial s}$ et $\frac{\partial V_-}{\partial s}$ et la valeur de la dérivée au point P_0 par $\frac{\partial V_0}{\partial s}$, nous trouverons (167), (182)

$$(184)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = W_s + \sigma'_0 \cos\delta'_0 + \sigma''_0 \cos\delta''_0 - \sigma'_0(\pi - \delta'_0)\sin\delta'_0 - \sigma''_0(\pi - \delta''_0)\sin\delta''_0. \\ \qquad\qquad \delta'_0 > 0, \qquad \delta''_0 > 0, \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} = W_s - \sigma'_0(\pi - \varphi'_0)\sin\varepsilon'_0 - \sigma''_0(\pi - \varphi''_0)\sin\varepsilon''_0, \\ \dfrac{\partial V_-}{\partial s} = W_s + \sigma'_0\varphi'_0 \sin\varepsilon'_0 + \sigma''_0\varphi''_0 \sin\varepsilon''_0, \qquad \varphi'_0 > 0, \qquad \varphi''_0 > 0, \end{cases}$$

où

$$\varepsilon'_0 = \delta'_0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon''_0 = \delta''_0,$$

si $\varphi > \omega$, c'est-à-dire si l'élément ds est dirigé vers le côté positif de la courbe, et

$$\varepsilon'_0 = -\delta'_0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon''_0 = -\delta''_0,$$

si $\varphi < \omega$, c'est-à-dire si l'élément ds est dirigé vers le côté négatif de la courbe.

Si l'élément ds' est dirigé en sens opposé à ds, il faut changer W_s, δ'_0 et δ''_0 en $-W_s$, $\pi - \delta'_0$ et $\pi - \delta''_0$:

$$(185)\quad \therefore \frac{\partial V}{\partial s'} = -W_s - \sigma'_0 \cos\delta'_0 - \sigma''_0 \cos\delta''_0 - \sigma'_0\delta'_0 \sin\delta'_0 - \sigma''_0\delta''_0 \sin\delta''_0.$$

Des égalités (184) et (185) nous tirons

$$(186)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_0}{\partial s} - \dfrac{\partial V_0}{\partial s'} = -\pi\Gamma, \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} - \dfrac{\partial V_-}{\partial s} = -\pi\Gamma, \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} - \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = \omega\Gamma - \Gamma', \quad \text{si} \quad \varphi > \omega, \\ \text{mais} \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} - \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = (2\pi - \omega)\Gamma - \Gamma', \quad \text{si} \quad \varphi_0 < \omega, \\ \Gamma \equiv \sigma'_0 \sin\delta'_0 + \sigma''_0 \sin\delta''_0, \qquad \Gamma' \equiv \sigma'_0 \cos\delta'_0 + \sigma''_0 \cos\delta''_0. \end{cases}$$

Remarque. — Si W_s existe, nous avons trouvé

$$(183^*)\qquad \Gamma' = 0.$$

Si W n'existe pas, le système (186) peut être remplacé par le suivant :

$$(187)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h_-=0}} \left[\dfrac{1}{h_+}(V_{h_+} - V_0) + \dfrac{1}{h_-}(V_{h_-} - V_0)\right] = -\pi\Gamma - \Gamma' c, \\ \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h_-=0}} \left(\dfrac{\partial V_{h_+}}{\partial s} - \dfrac{\partial V_{h_-}}{\partial s}\right) = -\pi\Gamma - \Gamma' c, \\ \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h'=0}} \left[\dfrac{\partial V_{h_+}}{\partial s} - \dfrac{1}{h'}(V_{h'} - V_0)\right] = \omega\Gamma - \Gamma'(1+c'), \quad \text{si} \quad \varphi_0 > \omega. \\ \text{mais} \\ \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h'=0}} \left[\dfrac{\partial V_{h_+}}{\partial s} - \dfrac{1}{h'}(V_{h'} - V_0)\right] = (2\pi - \omega)\Gamma - \Gamma'(1+c'), \\ \qquad \text{si} \quad \varphi_0 < \omega, \\ c \equiv \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h_-=0}} \log\dfrac{h_+}{h_-}, \qquad c' \equiv \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h'=0}} \log\dfrac{h_+}{h'}, \end{cases}$$

h_+ et $h'(\varphi_0 > \omega)$ étant les valeurs de h pour deux points du côté positif, h_- et $h'(\varphi < \omega)$ étant les valeurs de h et h' pour deux points correspondants du côté négatif.

Les deuxièmes membres des égalités (187) deviennent identiques à ceux des égalités (186), si

$$(183^*) \qquad \Gamma' = 0,$$

ou si

$$(188) \qquad h_+ = h_- = \frac{h'}{e}.$$

Cas particulier : Point régulier. — Si les deux branches de la courbe ont une tangente commune, nous trouverons $\delta'_0 + \delta''_0 = \pi$, $\varphi'_0 + \varphi''_0 = \pi$,

$$(189) \qquad \therefore \Gamma = (\sigma'_0 + \sigma''_0)\sin\delta'_0, \qquad \Gamma' = (\sigma'_0 - \sigma''_0)\cos\delta'_0.$$

Pour $\sigma'_0 = \sigma''_0$ nous trouverons dans ce cas $\Gamma' = 0$ et

$$(190) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = W_s - \pi\sigma_0 \sin\delta_0, & \dfrac{\partial V_0}{\partial s'} = - W_s - \pi\sigma_0 \sin\delta_0, \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} = W_s - \pi\sigma_0 \sin\varepsilon_0, & \dfrac{\partial V_-}{\partial s} = \quad W_s + \pi\sigma_0 \sin\varepsilon_0 ; \end{cases}$$

par suite, les limites $\dfrac{\partial V_+}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial V_-}{\partial s}$ sont dans ce cas indépendantes de la direction de la droite P_0P.

Cas II. — $\lim\limits_{h=0} \varphi = 0$, c'est-à-dire que la ligne suivant laquelle se meut le point P vers le point P_0 touche, au point P_0, une des branches de la courbe où est concentrée la masse. Dans ce cas la quantité q devient infiniment petite pour des valeurs infiniment petites de h, car alors $\lim\limits_{h=0} u = 1$.

Avant de passer à la limite pour $\lim h = 0$ dans les égalités (179), il faut étudier séparément les quantités

$$(191) \qquad \begin{cases} O_1 = \displaystyle\int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht)\frac{tu-1}{q^2}\,dt \\ \text{et} \\ O_2 = \displaystyle\int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht)\sin\varphi\,\frac{t\,dt}{q^2}, \qquad 0 < \varkappa < 1, \end{cases}$$

où σ et u se rapportent à la branche en question.

En posant

$$(192)\qquad \begin{cases} t = 1 - \tau & \text{pour} \quad 1 - \varkappa \leqq t \leqq 1 \\ \text{et} & \\ t = \tau - 1 & \text{pour} \quad 1 \leqq t \leqq 1 + \varkappa \end{cases}$$

et en observant que

$$\frac{1-u}{q^2} = \frac{1-u}{(t-1)^2 + 2t(1-u)} \leqq 1,$$

nous trouverons que la quantité O_1 peut s'écrire

$$O_1 = \int_0^{\varkappa} \left[\frac{\sigma(h + h\tau)}{q_+^2} - \frac{\sigma(h - h\tau)}{q_-^2} \right] \tau\, d\tau + a_1, \quad \lim_{h=0} a_1 = a'_1 \text{ finie}, \quad \lim_{\varkappa=0} a'_1 = 0,$$

$$q_+ = \sqrt{\tau^2 + 2(1+\tau)(1-u_+)},$$

$$q_- = \sqrt{\tau^2 + 2(1-\tau)(1-u_-)},$$

$$u_+ = \cos\varphi_+, \qquad u_- = \cos\varphi_-, \qquad \varphi_+ = \varphi(h + h\tau, h), \qquad \varphi_- = \varphi(h - h\tau, h).$$

Or, en posant

$$q' = \sqrt{\tau^2 + 2(1-\tau)(1-u_+)},$$

nous trouverons

$$0 \leqq \frac{\tau}{q'^2} - \frac{\tau}{q_+^2} = \frac{4\tau^2(1-u_+)}{q'^2 q_+^2} \leqq 4,$$

$$\therefore \int_0^{\varkappa} \sigma(h + h\tau) \frac{\tau\, d\tau}{q_+^2} = \int_0^{\varkappa} \sigma(h + h\tau) \frac{\tau\, d\tau}{q'^2} - 4\int_0^{\varkappa} \sigma(h + h\tau) \frac{\tau^2(1-u_+)\, d\tau}{q'^2 q_+^2},$$

où le deuxième terme du second membre a pour $\lim h = 0$, une valeur limite finie qui devient infiniment petite en même temps que $\varkappa$. Posons de plus

$$\bar{q} = \sqrt{\tau^2 + \varphi_+^2},$$

$$2(1 - u_+) = \varphi_+^2 - \varphi_+^4 \mu(\varphi_+), \qquad \therefore \mu(0) = \frac{1}{12},$$

$$\therefore 0 < \frac{\tau}{q'^2} - \frac{\tau}{\bar{q}^2} = \frac{\tau \varphi_+^4 \mu}{q'^2 \bar{q}^2} + \frac{\tau^2 \varphi_+^2 (1 - \varphi_+^2 \mu)}{q'^2 \bar{q}^2}.$$

Mais

$$\frac{\varphi_+}{q'} \leqq \frac{1}{\sqrt{(1 - \varphi_+^2 \mu)(1-\tau)}},$$

$\therefore$ pour des petites valeurs de τ et φ

$$0 < \frac{\tau}{q'^2} - \frac{\tau}{\overline{q}^2} < \text{une constante finie,}$$

$$\therefore \int_0^{\varkappa} \frac{\sigma(h+h\tau)}{q_+^2} \tau \, d\tau = \int_0^{\varkappa} \frac{\sigma(h+h\tau)}{\overline{q}^2} \tau \, d\tau + a_2$$

$$= \int_1^{1+\varkappa} \frac{\sigma(ht)}{(t-1)^2+\varphi^2} (t-1) \, dt + a_2.$$

$$\lim_{h=0} a_2 \equiv a'_2 \text{ finie}, \qquad \lim_{\varkappa=0} a'_2 = 0.$$

En traitant les quantités

$$\int_0^{\varkappa} \frac{\sigma(h-h\tau)}{q^2} \tau \, d\tau \qquad \text{et} \qquad O_2$$

d'une manière analogue, nous trouverons le théorème suivant :

Théorème. — *Si le point* P *se meut suivant une ligne* $P_0 P$ *qui, au point* P_0, *touche une branche de la courbe qui est pourvue de masse, pour que* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *soit finie, il faut et il suffit que*

$$(193) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{h=0} (W_h + O_h) \qquad \text{soit finie,} \\ \text{où} \\ O_h = \cos\omega \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht) \frac{(t-1)\,dt}{(t-1)^2+\varphi^2} + \sin\omega \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht) \frac{\varphi \, dt}{(t-1)^2+\varphi^2}, \\ 0 < \varkappa < 1. \end{array} \right.$$

Si

$$(194) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\varkappa=0} O = 0, \\ \text{où} \\ O \equiv \lim_{h=0} O_h, \end{array} \right.$$

la valeur de $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *sera donnée dans le système* (181) *en y posant* $\varphi_0 = 0$ *pour la branche en question.*

11. *Continuité de la dérivée.* — L'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point situé sur la courbe matérielle ou de la limite de la dérivée extérieure dépend essentiellement de l'existence de la quantité

$$W_s = \lim_{h=0} W_s^{(h)}.$$

Cette quantité $W_s^{(h)}$, rapportée à un point P situé sur une branche de la courbe matérielle, à la distance k du point P_0, peut s'écrire

$$(195)\quad \left\{\begin{aligned} &W_s^{(h)} = \int_{\overline{\mu_{(h)}}}^{\mu_0} \frac{\partial \log \frac{1}{R}}{\partial s}\, \partial\mu = \int_{\overline{\mu_{(h)}}}^{\mu_0} v \frac{d\mu}{R},\\ &R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rku + k^2},\\ &k = P_0 P,\\ &u = \cos(k, r) = \cos\varphi,\\ &v = \cos(R, ds) = \frac{ru - k}{R}\cos\omega + \frac{r\sin\varphi}{R}\sin\omega,\end{aligned}\right.$$

$\overline{\mu_{(h)}}$ étant la somme des éléments de masse pour lesquels $R \leqq h$, $\omega =$ l'angle(k, ds) et $\varphi =$ l'angle(k, r). Posons

$$(196)\quad \left\{\begin{aligned} &r = ks,\\ &R = kp, \qquad \therefore p = \sqrt{s^2 - 2su + 1},\\ &d\mu = k\, d\mu',\\ &\overline{\mu_{(h)}} = k \mu'_h,\\ &\therefore W_h = \cos\omega \int_{\mu'_{(h)}}^{\frac{\mu_0}{k}} \frac{su - 1}{p^2}\, d\mu' + \sin\omega \int_{\mu'_h}^{\frac{\mu_0}{k}} s \sin\varphi \frac{d\mu'}{p^2},\end{aligned}\right.$$

où p ne peut s'évanouir que pour $\overline{\mu_{(h)}} = 0$, car alors

$$s = u = 1.$$

En procédant comme dans le paragraphe précédent, nous trouverons le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la quantité* W *qui correspond au point* $P(r = k > 0)$ *de la courbe* *matérielle existe, est que la quantité*

$$
(197)\quad \begin{cases} H \equiv \lim\limits_{h=0} H_h \qquad \text{existe,} \\ \text{où} \\ H_h = \cos\omega \displaystyle\int_{\mu'_h}^{\mu'_x} \frac{s-1}{(s-1)^2+\varphi^2}\, d\mu' + \sin\omega \int_{\mu'_h}^{\mu'_x} \frac{\varphi\, d\mu'}{(s-1)^2+\varphi^2}, \\ \qquad\qquad \lim\limits_{h=0} \mu'_h = 0, \end{cases}
$$

μ'_x étant la valeur de μ' pour $R = kx$, x étant une constante arbitraire telle que

$$0 < x < 1.$$

D'autre part, la quantité

$$
(198)\quad \lim_{h=0}(W_s^{(h)} - H_h) = \int_0^{\mu'_x} \left[\cos\omega \left(\frac{su-1}{p^2} - \frac{s-1}{\overline{s-1}^2+\varphi^2} \right) \right.
$$
$$
\left. + \sin\omega \left(\frac{s\sin\varphi}{p^2} - \frac{\varphi}{\overline{s-1}^2+\varphi^2} \right) \right] d\mu'
$$
$$
+ \int_{\mu'_x}^{\frac{a_0}{k}} \left(\cos\omega \frac{su-1}{p^2} + \sin\omega \frac{s\sin\varphi}{p^2} \right) d\mu'
$$

est continue par rapport à k, si k est > 0, et la limite pour $\mu'_x = 0$ du premier terme du second membre de (198) est égale à zéro. Ce terme peut donc s'écrire

$$\int_0^{\mu'_x} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\mu'_x}, \qquad \alpha > 0,$$

où α peut être prise assez petite pour que $\int_0^{\alpha}$ soit aussi petite qu'on le voudra. L'intégrale $\int_{\alpha}^{\mu'_x}$ a une valeur limite nulle pour $\lim k = 0$, $\lim\limits_{h=0} \varphi$ étant $= 0$, et p étant toujours > 0, parce que $\overline{s-1}^2$ ne peut pas s'évanouir entre les limites α et μ'_x de l'intégration. D'où il suit que la limite pour $k = 0$ du premier terme du second membre de l'égalité (198) est égale à zéro. Soient Q_1 et Q_2 les deux points de l'un et de l'autre côté de P pour lesquels $\bar{\mu} = \overline{\mu_x}$, $\bar{\mu}$ étant comptée à zéro au point P, et soit le point Q, situé entre P_0 et P. Soit de plus Q_3 un point de l'autre branche pour lequel $P_0Q_3 = P_0Q_2$. Posons

$$P_0Q_1 = ks_1, \qquad P_0Q_2 = ks_2,$$

et soit μ_1 la masse qui se trouve entre les points Q_1 et Q_3. Posons

$$(199)\quad \left\{\begin{aligned} -H_k^0 &= \int_{(\mu_1)} \left(\cos\omega\frac{su-1}{p^2} + \sin\omega\sin\varphi\frac{s}{p^2}\right)d\mu' \\ &\quad + \int_{\frac{\mu_1(ks_2)}{k}}^{\frac{\mu}{k}} \left[\cos\omega\left(\frac{su-1}{p^2} - \frac{u}{s}\right) + \sin\omega\sin\varphi\left(\frac{s}{p^2} - \frac{u}{s}\right)\right]d\mu' \\ &\quad - \int_{\frac{\mu_1 k_1}{k}}^{\frac{\mu_1(ks_1)}{k^2}} \cos(\varphi-\omega)\frac{d\mu'}{s}, \\ W_k^0 &= \int_{\mu_1 k_1}^{\mu_0} \cos(\varphi-\omega)\frac{d\mu}{r}; \end{aligned}\right.$$

Le deuxième terme du second membre de l'égalité (198) est

$$W_k^0 - H_k^0.$$

Posons

$$(200)\quad \left\{\begin{aligned} \lim_{k=0} H_k^0 &= H^0, \\ \lim_{k=0} W_k^0 &= W^0, \end{aligned}\right.$$

$$(201)\quad \therefore \lim_{h=0}(W_h - H_h) = W^0 - H^0 + b, \qquad \lim_{k=0} b = 0,$$

où W^0 est égale à la valeur de W_s pour le point P_0. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *soit continue lorsque le point* P *se déplace suivant la courbe*, $P_0P > 0$, *est que la quantité*

$$(202)\qquad H + Q \quad \textit{soit continue au point } P,$$

H *étant donnée par les équations* (197) *et la quantité* Q (167) *étant rapportée au point* P.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{\partial V}{\partial s}$ *soit continue* *au point* P_0 *suivant une branche de la courbe, est qu'elle y existe et que*

$$(203) \qquad \lim_{k=0}(H+Q) = H^0 + Q^0,$$

H^0 *étant donnée par l'équation* (200), *et* Q^0 *étant la valeur de* Q *au point* P_0.

Pour la continuité de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ *il faut remplacer* Q *par* Q' (181) *et* Q_0 *par* Q'_0, Q' *étant rapportée au point* P *et* Q'_0 *au point* P_0.

Remarque I. — Soit par rapport au point P

$$(204) \qquad d\mu = \overline{\sigma}\, dR, \qquad \overline{\sigma_0} = \lim_{R=0} \overline{\sigma}.$$

Si $\overline{\sigma_0}$ est continue lorsque le point P se déplace sur la courbe, et si, au point P et dans tout le voisinage de P, la courbe a une tangente unique et bien déterminée, les quantités Q et Q' sont continues; par suite, la continuité de la dérivée $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ et de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ dépend de la continuité de la seule quantité H, H^0 étant considérée comme la valeur de H au point P_0.

Remarque II. — Soit par rapport au point P_0

$$(205) \qquad d\mu = \sum \sigma\, dr, \qquad \lim_{r=0} \sigma = \sigma'_0 \qquad \text{et} \qquad = \sigma''_0$$

pour les deux branches,

$$\therefore -H^0 = \sigma'_0 \cos\omega \int_0^{s_1^0} \frac{ds}{s-1} + \sigma'_0 \cos\omega \int_{s_2^0}^{\infty} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) ds - \sigma'_0 \cos\omega \int_1^{s_2^0} \frac{ds}{s}$$
$$+ \sigma''_0 \int_0^{s_0^2} \left(\cos\omega \frac{su_0 - 1}{p_0^2} - \sin\omega \sin\gamma \frac{s}{p_0^2}\right) ds$$
$$+ \sigma''_0 \int_{s_2^0}^{\infty} \left[\cos\omega \left(\frac{su_0 - 1}{p_0^2} - \frac{u_0}{s}\right) - \sin\omega \sin\gamma \left(\frac{s}{p_0^2} - \frac{1}{s}\right)\right]$$
$$- \sigma''_0 \cos(\gamma + \omega) \int_1^{s_2^0} \frac{ds}{s},$$

où

$$s_1^0 = \lim_{k=0} s_1, \qquad s_2^0 = \lim_{k=0} s_2,$$
$$u_0 = \cos\gamma, \qquad p_0 = \sqrt{s^2 - 2su_0 + 1}, \qquad \gamma = \lim_{r=0} \rho$$

pour l'autre branche égale l'angle que font, au point P_0, les deux tangentes des deux branches. En intégrant et en supposant $s_1^0 < 1$ et $s_2^0 > 1$, nous obtiendrons

$$H^0 = \sigma_0' \cos\omega \log \frac{s_2^0 - 1}{1 - s_1^0} + \sigma_0''(\pi - \gamma)\sin(\gamma + \omega).$$

Or

$$s_1 = 1 - \varkappa, \qquad s_2 = 1 + \varkappa,$$

$$(206) \qquad \therefore H^0 = \sigma_0''(\pi - \gamma)\sin(\gamma + \omega).$$

La quantité H_h peut s'écrire (197)

$$H_h = \int_{1-\varkappa_1}^{1-\alpha_1} \sigma \frac{(s-1)\cos\omega + \varphi \sin\omega}{\overline{s-1}^2 + \varphi^2} ds + \int_{1+\alpha_2}^{1+\varkappa_2} \frac{(s-1)\cos\omega + \varphi\sin\omega}{\overline{s-1}^2 + \varphi^2} ds,$$

où $1 - \varkappa_1 = s_1$, $1 - \varkappa_2 = s_2$, et où $1 - \alpha_1$ et $1 + \alpha_2$ sont les valeurs de s aux deux points pour lesquels $\overline{\mu} = \overline{\mu_{(h)}}$, $\overline{\mu_{(h)}}$ étant rapportée au point P,

$$\therefore \lim_{h=0} \alpha_1 = \lim_{h=0} \alpha_2 = 0, \qquad \lim_{k=0} \varkappa_1 = \lim_{k=0} \varkappa_2 = \varkappa.$$

Posons d'une part $1 - s = \tau$ et de l'autre $s - 1 = \tau$; nous trouverons

$$(207) \quad \left\{ \begin{aligned} H_h = {} & \cos\omega \int_{\alpha_1}^{\varkappa} \left[\frac{\sigma(k + k\tau)}{\tau^2 + \varphi_+^2} - \frac{\sigma(k - k\tau)}{\tau^2 + \varphi_-^2} \right] \tau\, d\tau \\ & + \sin\omega \int_{\alpha_1}^{\varkappa} \left[\frac{\sigma(k + k\tau)\varphi_+}{\tau^2 + \varphi_+^2} + \frac{\sigma(k - k\tau)\varphi_-}{\tau^2 + \varphi_-^2} \right] d\tau \\ & + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\sigma(k + k\tau)(\tau\cos\omega + \varphi\sin\omega)}{\tau^2 + \varphi_+^2} d\tau + \beta, \end{aligned} \right.$$

φ_+ et φ_- étant ce que deviendra φ en y remplaçant s par $1 + \tau$ et $1 - \tau$ respectivement; β est indépendante de α_1 et α_2 et $\lim_{k=0} \beta = 0$.

Cas particuliers. — 1° *Point régulier.* — Si le point P_0 est un point régulier, nous aurons

$$(208) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \gamma = \pi, \\ & \therefore H^0 = 0. \end{aligned} \right.$$

2° *Ligne droite.* — Pour $\varphi = 0$, respectivement $= \pi$ pour les deux branches, nous trouverons

$$
(209)\quad \begin{cases} H^0 = 0, \\ H = \cos\omega \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_{\mu'_h}^{\mu'_\varkappa} \frac{d\mu'}{s-1} = \cos\omega \lim\limits_{\alpha=0} \int_\alpha^\varkappa \frac{\sigma(k+k\tau)-\sigma(k-k\tau)}{\tau}\,d\tau. \end{cases}
$$

La dérivée normale est toujours finie, et sa valeur est (172)

$$
(210)\qquad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\pi}{2}(\sigma_1+\sigma_2),
$$

σ_1 et σ_2 étant les valeurs limites de σ des deux côtés du point P. La condition pour la continuité au point P_0 de toute autre dérivée est que $\lim\limits_{k=0} H = 0$. Cette condition peut être écrite

$$
(211)\qquad \lim_{k=0}\int_0^k \frac{\sigma(k+x)-\sigma(k-x)}{x}\,dx = 0.
$$

La condition de l'existence de $\frac{\partial V}{\partial s}$ au point P_0 est

$$
(212)\qquad W^0 = \cos\omega \int_0^a (\sigma'-\sigma'')\frac{dr}{r} = \text{une quantité finie},
$$

σ' et σ'' se rapportant aux deux branches de la droite des deux côtés du point P_0.

3° *Ligne brisée.* — Pour $\varphi = 0$ et $= -\gamma$ respectivement, nous trouverons

$$
(213)\quad \begin{cases} H^0 = \sigma''_0(\pi-\gamma)\sin(\gamma+\omega), \\ H = \cos\omega \displaystyle\int_0^\varkappa \frac{\sigma(k+k\tau)-\sigma(k-k\tau)}{\tau}\,d\tau, \qquad 0<\varkappa<1. \\ W^0 = \displaystyle\int_0^a [\sigma'\cos\omega + \sigma''\cos(\gamma+\omega)]\frac{dr}{r}, \\ Q^0 = \sigma'_0[\cos\omega - (\pi-|\omega|)\sin|\omega|] \\ \qquad + \sigma''_0[\cos(\gamma+\omega) - (\pi-|\gamma+\omega|)\sin|\gamma+\omega|], \\ Q'_0 = -\sigma'_0(\pi-\varphi_0)\sin\omega - \sigma''_0(\pi-|\gamma+\varphi_0|)\sin(\gamma+\omega), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lim\limits_{k=0} Q = -\pi\sigma'_0\sin|\omega|, \qquad \lim\limits_{k=0} Q' = -\pi\sigma'_0\sin\omega. \end{cases}
$$

φ_0 et ω étant les angles que font le chemin P_0P et l'élément ds respectivement avec une branche. Si W^0 existe,

$$(214)\quad \begin{cases} \sigma'_0 \cos\omega + \sigma''_0 \cos(\gamma+\omega) = 0, \\ \therefore Q_0 = -\sigma'_0(\pi - |\omega|)\sin|\omega| - \sigma''_0(\pi - |\gamma+\omega|)\sin|\gamma+\omega|, \end{cases}$$

$\therefore$ la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ soit continue au point P_0 est que V^0 existe et que

$$(215)\quad \begin{cases} \lim\limits_{k=0} H = \omega\Gamma_1, \\ \Gamma_1 = \sigma'_0 \sin\omega + \sigma''_0 \sin(\gamma+\omega), \qquad -\gamma \leqq \omega \leqq 2\pi - \gamma. \end{cases}$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ soit continue, il faut et il suffit que W_0 existe et que

$$(216)\qquad \lim_{k=0} H = \varphi_0 \Gamma_1.$$

Remarque. — Si $\gamma \neq \pi$ et si W existe, Γ_1 n'est pas nul (214). Par suite $\lim\limits_{k=0} H$ n'est pas nul, si $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ est continue. Mais H est indépendante de φ_0, $\therefore$ si $\gamma \neq \pi$ la quantité $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ ne peut pas être continue que pour une valeur unique de φ_0. L'égalité (216) peut s'écrire

$$(216^*)\quad \varphi_0[\sigma'_0 \sin\omega + \sigma''_0 \sin(\gamma+\omega)] = \cos\omega \lim_{k=0} \int_0^k \frac{\sigma(k+x) - \sigma(k-x)}{x}\,dx.$$

CHAPITRE III.

LA DÉRIVÉE SECONDE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE D'UNE LIGNE PLANE.

12. *La ligne est une droite. Dérivée suivant la ligne.* — Nous supposerons dans ce paragraphe que la masse est concentrée sur une *droite*, et qu'on peut écrire l'élément de masse $d\mu$ sous la forme suivante :

$$(217)\quad \begin{cases} d\mu = [\sigma_0 + x\bar\sigma(x)]\,dx, & \lim\limits_{x=0} \bar\sigma(x) \text{ finie} = \bar\sigma_0 \quad \text{pour} \quad x > 0, \\ d\mu = [\sigma_1 + x\bar\sigma(x)]\,dx, & \lim\limits_{x=0} \bar\sigma(x) \text{ finie} = \bar\sigma_1 \quad \text{pour} \quad x < 0, \end{cases}$$

σ_0 et σ_1 étant des constantes, et la droite considérée étant prise pour axe des x. Nous trouverons pour l'origine P_0 (170), en observant que $r = x$ pour $x > 0$ et $= -x$ pour $x < 0$, et que l'angle $(r, ds) = \delta$ pour $x > 0$, mais $= \pi - \delta$ pour $x < 0$,

$$(218)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0 &= W_0 + Q_0, \\ W_0 &= W_0^0 + \overline{W}_0, \\ W_0^0 &\equiv \lim_{x=0} \left[(\sigma_0 - \sigma_1) \cos\delta \log \frac{a}{h} \right], \\ \overline{W}_0 &\equiv \cos\delta \int_0^a \left[\bar{\sigma}(x) + \bar{\sigma}(-x) \right] dx, \\ Q_0 &= (\sigma_0 - \sigma_1)\cos\delta - \pi\sigma_0 \sin\delta + (\sigma_0 - \sigma_1)\delta \sin\delta, \qquad \delta > 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0$ existe, il faut et il suffit ou que $\delta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que la dérivée soit normale, ou que $\sigma = \sigma_0$. Nous trouverons pour les deux cas

$$(219^a)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 = -\frac{\pi}{2}(\sigma_0 + \sigma_1),$$

$$(219^b)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0 = \cos\delta \int_0^a \left[\bar{\sigma}(x) + \bar{\sigma}(-x) \right] dx - \pi\sigma_0 \sin\delta, \\ &\sigma_1 = \sigma_0. \end{aligned} \right.$$

Pour le point P, situé sur l'axe des x positifs à la distance k de l'origine, nous trouverons de même

$$(220)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} = k \cos\delta & \int_a^{a-k} \frac{\bar{\sigma}(k + x') - \bar{\sigma}(k - x')}{x'} dx' \\ & - k\cos\delta \int_{a-k}^{a+k} \bar{\sigma}(k - x') \frac{dx'}{x'} + \cos\delta \int_{-a}^{a} \bar{\sigma}(x)\, dx \\ & - \pi \left[\sigma_0 + k\bar{\sigma}(k) \right] \sin\delta \\ & - \sigma_1 \cos\delta \log \frac{a+k}{a-k} + (\sigma_0 - \sigma_1)\cos\delta \log \frac{a-k}{k}, \end{aligned}$$

$$(221^a)\qquad \therefore \frac{1}{k}\left[\frac{\partial V}{\partial n} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 \right] = -\frac{1}{k}\,\frac{\pi}{2}(\sigma_0 - \sigma_1) - \pi\bar{\sigma}(k).$$

$$(221^b)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{k}\left[\frac{\partial V}{\partial s} - \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0 \right] = \cos\delta & \int_0^{a-k} \frac{\bar{\sigma}(k + x') - \bar{\sigma}(k - x')}{x'} dx' - \pi\bar{\sigma}(k)\sin\delta \\ & - \frac{\sigma_0}{k}\cos\delta \log\frac{a+k}{a-k} - \cos\delta \int_{a-k}^{a+k} \bar{\sigma}(k - x') \frac{dx'}{x'}, \\ & \sigma_1 = \sigma_0. \end{aligned} \right.$$

Des égalités (221^a) et (221^b) nous tirons le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si la masse est répandue sur une droite de la manière* (217), *il faut et il suffit pour l'existence de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial s}$ *suivant la droite que*

$$(222)\quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_0, \\ \textit{et que} \\ \overline{\Pi}_0 = \textit{une quantité finie}, \\ \textit{où} \\ \overline{\Pi}_0 \equiv \lim\limits_{k=0} \cos\delta \displaystyle\int_0^{a-k} \frac{\overline{\sigma}(k+x') - \overline{\sigma}(k-x')}{x'}\, dx', \end{cases}$$

et la valeur de la dérivée est donnée par la formule

$$(223)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial s} = -\frac{2}{a}\sigma_0 \cos\delta - \pi\overline{\sigma}_0 \sin\delta + \overline{\Pi}_0.$$

Remarque. — Si l'élément ds est pris suivant la normale, la seule condition à remplir est $\sigma_1 = \sigma_0$, et l'on trouvera

$$(223^a)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial n} = -\pi\overline{\sigma}_0.$$

13. *Dérivée extérieure en un point de la ligne.* — Si le point P se trouve extérieurement aux masses qui, par hypothèse, sont concentrées sur une courbe quelconque, nous avons trouvé (§ **10**), en posant $P_0P = h$, $r = ht$, $R = hq$ (179, 181), P_0 étant pris sur la courbe,

$$(224)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} - \cos\omega \dfrac{\partial V_h}{\partial s_1} + \sin\omega \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2}, \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_1} = \sum \displaystyle\int_0^{\frac{a}{k}} \sigma \frac{tu - 1}{q^2}\, dt, \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2} = \sum \displaystyle\int_0^{\frac{a}{k}} \sigma \sin\varphi \frac{t\, dt}{q^2}, \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lim\limits_{h=0} \sum \displaystyle\int_h^a \sigma \cos\varepsilon \frac{ds}{r} - \sum \sigma_0(\pi - \varphi_0) \sin\varepsilon_0, \qquad \varphi_0 > 0, \\ q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \qquad u = \cos\varphi, \qquad \varepsilon = (r, ds), \\ \varphi = (P_0P, r), \qquad \omega = (P_0P, ds), \qquad \varepsilon_0 = \lim\limits_{r=0} \varepsilon, \end{cases}$$

où la somme est prise pour toutes les branches de la courbe. L'angle ω est compté positif dans une direction telle que ds se trouve du même côté de la droite P_0P que r,

$$(225) \qquad \therefore \varepsilon = \varphi - \omega, \qquad 0 < \varphi_0 < 2\pi, \qquad 0 \leqq \omega \leqq 2\pi.$$

Supposons pour chaque branche

$$(226) \qquad \sigma = \sigma_0 + r\bar{\sigma}(r), \qquad \lim_{r=0} \bar{\sigma}(r) \text{ finie} = \bar{\sigma}_0.$$

et posons

$$(227) \qquad V_h = V_h^0 + \overline{V}_h,$$

V_h^0 et $\overline{V_h}$ étant ce que deviendra V_h en y substituant à la quantité σ les valeurs σ_0 et $r\bar{\sigma}$ respectivement. Enfin nous supposerons pour chaque branche

$$(228) \qquad \varphi = \varphi_0 + r\bar{\varphi}(r), \qquad \lim_{r=0} \bar{\varphi} \text{ finie} = \bar{\varphi}_0.$$

φ_0 étant une constante. Nous aurons

$$\frac{tu-1}{q^2} = \frac{u}{t} + \frac{2u^2-1}{t^2} + \frac{1}{t^3}P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie};$$

par suite, en posant

$$\frac{tu-1}{q^2} - \frac{u}{t} + \frac{2u^2-1}{t^2} = f(\varphi)$$

et en employant la formule

$$f(\varphi) = f(\varphi_0) + r\bar{\varphi}f'(\varphi_1), \qquad \varphi_1 = \varphi_0 + \theta r\bar{\varphi}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

nous trouverons

$$(229) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{tu-1}{q^2} = \frac{u}{t} + \frac{2u^2-1}{t^2} + \frac{tu_0-1}{q_0^2} - \frac{u_0}{t} - \frac{2u_0^2-1}{t^2} + r\bar{\varphi}F(\varphi_1), \\ &F(\varphi_1) \equiv -\sin\varphi_1 \left[\frac{t}{q_1^2} + \frac{2t(tu_1-1)}{q_1^4} - \frac{1}{t} - \frac{4u_1}{t^2}\right] = -\frac{\sin\varphi_1}{t^3}P_1, \\ &\qquad \lim_{t=\infty} P_1 \text{ finie}, \end{aligned} \right.$$

où u_0 et q_0 d'une part et u_1 et q_1 de l'autre se rapportent aux quantités φ_0 et φ_1. Nous pourrons donc écrire

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h^s}{\partial s_1} - \lim_{h'=0}\frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_1}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_0^1\left(\frac{tu-1}{q^2} - \frac{tu_0-1}{q_0^2}\right)dt - \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_1^{\frac{a}{h}}\frac{2u_0^2-1}{t^2}dt$$

$$- \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_{\frac{a}{h}}^{\infty}\left(\frac{tu_0-1}{q_0^2} - \frac{u_0}{t}\right)dt + \sum\sigma_0\int_1^{\frac{a}{h}}\bar{\varphi}\,F(\varphi_1)\,t\,dt$$

$$+ \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_1^{\frac{a}{h}}\left(\frac{u}{t} + \frac{2u^2-1}{t^2}\right)dt - \frac{1}{h}\lim_{h'=0}\sum\sigma_0\int_{h'}^{a} u\frac{dr}{r},$$

$$\therefore \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h^0}{\partial s_1} - \lim_{h'=0}\frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_1}\right)$$

$$= \sum\sigma_0\int_h^a\frac{(2u^2-1)-(2u_0^2-1)}{r^2}dr - \sum\sigma_0\bar{\varphi}_0 T_1\sin\varphi_0$$

$$- \sum\frac{1}{a}\sigma_0(2u_0^2-1) - \frac{1}{h}\lim_{h'=0}\sum\sigma_0\int_{h'}^{h}u\frac{dr}{r} + \eta_1. \qquad \lim_{h=0}\eta_1 = 0.$$

En supposant $u_0 \neq 1$, nous aurons

$$T_1 \equiv \int_0^1\left[\frac{t^2}{q_0^2} + \frac{2t^2(tu_0-1)}{q_0^4}\right]dt + \int_1^{\infty}\left[\frac{t^2}{q_0^2} + \frac{2t^2(tu_0-1)}{q_0^4} - 1 - \frac{4u_0}{t}\right]dt$$

$$= 1 - 2u_0 + 2(2u_0^2-1)\frac{\pi-\varphi_0}{\sin\varphi_0}.$$

De plus, nous aurons (186) pour $\omega = 0$

$$\lim_{h'=0}\frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_1} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial s_1}\right)_0 = -\sum\sigma_0 u_0 = 0,$$

$$(230)\quad \left\{\begin{aligned} &\therefore \frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s_1} = -\sum\frac{1}{a}\sigma_0\cos 2\varphi_0 \\ &\qquad\qquad + \sum\sigma_0\bar{\varphi}_0[\sin 2\varphi_0 - 2(\pi-\varphi_0)\cos 2\varphi_0] + W^{01}, \\ &W^{01} \equiv \lim_{h=0} W_h^{01}, \\ &W_h^{01} = \sum\sigma_0\int_h^a(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0)\frac{dr}{r^2} \end{aligned}\right.$$

avec la condition (168)

$$\sum \sigma_0 u_0 = 0, \tag{231}$$

l'élément ds' étant pris dans la direction de P_0P, c'est-à-dire de ds_1.

D'autre part, nous aurons

$$\frac{t \sin \varphi}{q^2} = \frac{\sin \varphi}{t} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{t^2} + \frac{1}{t^3} P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie.}$$

et, en employant la même méthode que précédemment, nous trouverons

$$(232) \left\{ \begin{aligned} \frac{t \sin \varphi}{q^2} &= \frac{\sin \varphi}{t} + \frac{\sin 2\varphi}{t^2} + \frac{t \sin \varphi_0}{q_0^2} - \frac{\sin \varphi_0}{t} - \frac{\sin 2\varphi_0}{t^2} + r \bar{\varphi} F_1(\varphi_1). \\ F_1(\varphi_1) &= \frac{t u_1}{q_1^2} - \frac{2 t^2 (1 - u_1^2)}{q_1^4} - \frac{u_1}{t} - \frac{2(2u_1^2 - 1)}{t^2}. \end{aligned} \right.$$

Nous pourrons donc écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h^0}{\partial s_2} - \lim_{h'=0} \frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_2}\right) \\ &\quad = \frac{1}{h} \sum \sigma_0 \int_0^1 \left(\frac{t \sin \varphi}{q^2} - \frac{t \sin \varphi_0}{q_0^2}\right) dt + \frac{1}{h} \sum \sigma_0 \int_1^{\frac{a}{h}} (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0) \frac{dt}{t^2} \\ &\qquad + \frac{1}{h} \sum \sigma_0 \int_h^a \sin \varphi \frac{dr}{r} - \frac{1}{h} \lim_{h'=0} \sum \sigma_0 \int_{h'}^a \sin \varphi \frac{dr}{r} \\ &\qquad - \frac{1}{h} \sum \sigma_0 \int_{\frac{a}{h}}^{\infty} \left(\frac{t \sin \varphi_0}{q_0^2} - \frac{\sin \varphi_0}{t}\right) dt + \sum \sigma_0 \int_1^{\frac{a}{h}} \bar{\varphi} F_1(\varphi_1) t \, dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\therefore \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h^0}{\partial s_2} - \lim_{h'=0} \frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_2}\right) \\ &\quad = \sum \sigma_0 \int_h^a (\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0) \frac{dr}{r^2} + \sum \sigma_0 \bar{\varphi}_0 T_2 \\ &\qquad - \frac{1}{a} \sum \sigma_0 \sin 2\varphi_0 - \frac{1}{h} \lim_{h'=0} \sum \sigma_0 \int_{h'}^h \sin \varphi \frac{dr}{r} + \eta_2. \qquad \lim_{h=0} \eta_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 \equiv & \int_0^1 \left[\frac{t^2 u_0}{q_0^2} - \frac{2 t^3 (1 - u_0^2)}{q_0^4}\right] dt \\ & + \int_1^{\infty} \left[\frac{t^2 u_0}{q_0^2} - \frac{2 t^3 (1 - u_0^2)}{q_0^4} - u_0 - \frac{2(2u_0^2 - 1)}{t}\right] dt \\ & = 1 + u_0 - 2u_0^2 - 2(\pi - \varphi_0) \sin 2\varphi_0. \end{aligned}$$

De plus, nous aurons (186)

$$(233)\qquad \lim_{h'=0}\frac{\partial V^0_{h'}}{\partial s_2}-\left(\frac{\partial V^0}{\partial s_2}\right)_0=-\Omega\sum\sigma_0\cos\varphi_0-\sum\sigma_0\sin\varphi_0$$

$$\left(\Omega=\frac{\pi}{2}\text{ si }\varphi_0>\frac{\pi}{2},\quad\text{mais}\quad\Omega=\frac{3\pi}{2}\text{ si }\varphi_0<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(234)\qquad \left\{\begin{aligned}&\therefore\frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s_2}=-\sum\frac{1}{a}\sigma_0\sin 2\varphi_0\\&\qquad-\sum\sigma_0\bar{\varphi}_0[\cos 2\varphi_0+2(\pi-\varphi_0)\sin 2\varphi_0]+W^{02},\\&W^{02}=\lim_{h=0}W^{02}_h,\\&W^{02}_h=\sum\sigma_0\int_h^a[\sin 2\varphi-\sin 2\varphi_0]\frac{dr}{r^2}\end{aligned}\right.$$

avec les conditions

$$(235)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum\sigma_0\sin\varphi_0=0,\\&\sum\sigma_0\cos\varphi_0=0.\end{aligned}\right.$$

Plus généralement, nous trouverons

$$(236)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s}=-\sum\frac{1}{a}\sigma_0\cos(2\varphi_0-\omega)+Q^0+W^0,\\&Q^0=\sum\sigma_0\bar{\varphi}_0[\sin(2\varphi_0-\omega)-2(\pi-\varphi_0)\cos(2\varphi_0-\omega)],\\&W^0=\lim_{h=0}W^0_h,\\&W^0_h=\sum\sigma_0\int_h^a[\cos(2\varphi-\omega)-\cos(2\varphi_0-\omega)]\frac{dr}{r^2}\end{aligned}\right.$$

avec les conditions

$$(237)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum\sigma_0\cos(\varphi_0-\omega)=0\\&\text{et}\\&\omega\sum\sigma_0\sin(\varphi_0-\omega)=0.\end{aligned}\right.$$

Remarque. — En posant

$$(238)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s}\equiv\lim_{\substack{h=0\\h'=0}}\left[\frac{1}{h'}\frac{\partial V_{h'}}{\partial s}-\frac{1}{h}(V_h-V)\right],$$

les deux conditions (237) se réduisent à la condition unique (187)

$$(237^*)\quad \begin{cases} \Omega\sum \sigma_0 \sin(\varphi_0-\omega) - (1+c')\sum \sigma_0\cos(\varphi_0-\omega), & c' \equiv \log\dfrac{h}{h'}, \\ \Omega \equiv \omega \quad \text{pour} \quad \varphi_0>\omega, \qquad \text{mais} \quad = \omega - 2\pi \quad \text{pour} \quad \varphi_0<\omega. \end{cases}$$

Enfin, nous aurons

$$\frac{1}{h}\frac{\partial \overline{V}_h}{\partial s} = \cos\omega\sum\int_0^{\frac{a}{h}} \bar\sigma\,\frac{tu-1}{q^2}\,t\,dt + \sin\omega\sum\int_0^{\frac{a}{h}} \sigma\sin\varphi\,\frac{t^2\,dt}{q^2},$$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial s}\right)_0 = \sum\int_0^{\frac{a}{h}} \bar\sigma\cos(\varphi-\omega)\,dt.$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{h}\left[\frac{\partial \overline{V}_h}{\partial s} - \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial s}\right)_0\right] = {}& \cos\omega\sum\int_0^{1} \bar\sigma\,\frac{tu-1}{q^2}\,t\,dt + \sin\omega\sum\int_0^{1} \bar\sigma\sin\varphi\,\frac{t^2\,dt}{q^2} \\ & + \cos\omega\sum\int_1^{\frac{a}{h}} \bar\sigma\left(\frac{t^2u-t}{q^2} - u - \frac{2u^2-1}{t}\right)dt \\ & + \sin\omega\sum\int_1^{\frac{a}{h}} \bar\sigma\sin\varphi\left(\frac{t^2}{q^2} - 1 - \frac{2u}{t}\right)dt \\ & - \sum\int_0^{1} \bar\sigma\cos(\varphi-\omega)\,dt + \sum\int_h^{a} \bar\sigma\cos(2\varphi-\omega)\,\frac{dr}{r},\end{aligned}$$

$$(239)\quad \begin{cases} \therefore \dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial s'\,\partial s} = -\sum \bar\sigma_0(\pi-\varphi_0)\sin(2\varphi_0-\omega) + \overline{W}, \\ \overline{W} = \lim\limits_{h=0} \overline{W}_h, \\ \overline{W}_h = \sum\displaystyle\int_h^{a} \bar\sigma\cos(2\varphi-\omega)\,\frac{dr}{r}. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si la masse est répandue de manière que pour chaque branche*

$$(226^*)\quad \begin{cases} d\mu = \sigma\,dr, \\ \sigma = \sigma_0 + r\,\bar\sigma(r). \qquad \lim\limits_{r=0}\bar\sigma(r)\ \text{finie} = \bar\sigma_0, \end{cases}$$

et si l'angle $\varphi \equiv (ds', r)$ *peut s'écrire*

(228*) $$\varphi = \varphi_0 + r\bar{\varphi}(r), \quad \lim_{r=0} \bar{\varphi}(r) \text{ finie} = \bar{\varphi}_0.$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s}$ *au point* P_0 *sont que les égalités* (237) *soient satisfaites et que la quantité*

(240) $$W_{s's} \equiv \lim_{h=0} W_{s's}^{(h)}$$

soit finie, où

(241) $$W_{s's}^{(h)} = \sum \int_h^a [\sigma \cos(2\varphi - \omega) - \sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega)] \frac{dr}{r^2},$$

ω *étant l'angle* (ds', ds). *La valeur de* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s}$ *est donnée par la formule*

(242) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s} &= W_{s's} + Q - \sum \frac{1}{a} \sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega), \\ Q &\equiv \sum \sigma_0 \bar{\varphi}_0 [\sin(2\varphi_0 - \omega) - 2(\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega)] \\ &\quad - \sum \bar{\sigma}_0 (\pi - \varphi_0) \sin(2\varphi_0 - \omega), \\ & \qquad 0 < \varphi_0 < 2\pi. \end{aligned}\right.$$

14. *La limite de la dérivée pour un point extérieur.* — Soit P un point extérieur aux masses, et posons $P_0P = h$. Soient, de plus, ds_1 et ds_2 deux éléments émanant du point P dans des directions qui fassent les angles ω_1 et ω_2 avec la droite P_0P. Si V_h est le potentiel logarithmique des masses pour le point P,

(243) $$\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int_0^{\mu_0} \frac{\partial^2 \log \frac{1}{R}}{\partial s_1 \partial s_2} d\mu = \sum \int_0^a \sigma(2 c_1 c_2 - c) \frac{dr}{R^2},$$

pour $d\mu = \sigma dr$, où la sommation s'étend sur les diverses branches de la courbe, et où

$$(244)\quad \begin{cases} R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}, \\ r = P_0Q, \\ u = \cos\varphi, & \varphi = \text{l'angle}\,(h, r), \\ v_1 = \cos(R, \ ds_1) = \dfrac{ru_1 - hc_1}{R}, & v_2 = \cos(R, ds_2) = \dfrac{ru_2 - hc_2}{R}, \\ u_1 = \cos(r, \ ds_1) = \cos(\varphi - \omega_1), & u_2 = \cos(r, \ ds_2) = \cos(\varphi - \omega_2), \\ c_1 = \cos(h, \ ds_1) = \cos\omega_1, & c_2 = \cos(h, \ ds_2) = \cos\omega_2, \\ c = \cos(ds_1, ds_2) = \cos(\omega_2 - \omega_1), \end{cases}$$

P_0 étant un point fixe et Q un point variable de la courbe. Les angles φ, ω_1 et ω_2 sont comptés positifs vers le même côté de la droite P_0P.

Nous supposerons

$$(226)\qquad \sigma = \sigma_0 + r\,\bar{\sigma}(r), \qquad \lim_{r=0} \bar{\sigma}(r) \text{ finie} = \bar{\sigma}_0,$$

$$(228)\qquad \varphi = \varphi_0 + r\,\bar{\varphi}(r), \qquad \lim_{r=0} \bar{\varphi}(r) \text{ finie} = \bar{\varphi}_0,$$

et nous posons

$$(245)\qquad V_h = V_h^0 + \overline{V}_h,$$

où V_h^0 et $\overline{V}_h$ se rapportent à σ_0 et $\bar{\sigma}$ respectivement. En posant

$$(246)\qquad r = ht, \qquad R = hq, \qquad q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1},$$

nous trouverons

$$\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1\,\partial s_2} = \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \int_0^{\frac{a}{h}} \left[\frac{2(tu_1 - c_1)(tu_2 - c_2)}{q^2} - c\right]\frac{dt}{q^2}.$$

Nous aurons

$$(247)\qquad f \equiv \frac{2(tu_1 - c_1)(tu_2 - c_2)}{q^4} - \frac{c}{q^2} = \frac{2u_1u_2 - c}{t^2} + \frac{1}{t^3}P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie};$$

par suite, en posant

$$g(\varphi) \equiv f - \frac{2u_1u_2 - c}{t^2}$$

et en employant la formule

$$g(\varphi) = g(\varphi_0) + r\bar{\varphi}\,g'(\varphi_1), \qquad \varphi_1 = \varphi_0 + \theta r\bar{\varphi}, \qquad 0 \leq \theta \leq 1,$$

nous trouverons pour $0 < \varphi_0 < 2\pi$

$$f = f_0 + \frac{2u_1u_2 - c}{t^2} - \frac{2u_1^0u_2^0 - c}{t^2} + r\overline{\varphi}g'(\varphi_1), \qquad \lim_{t=\infty}(t^3g') \text{ finie},$$

$$\therefore \int_0^{\frac{a}{h}} f\,dt = \int_0^1 (f - f_0)\,dt$$

$$+ \int_0^{\frac{a}{h}} f_0\,dt + \int_1^{\frac{a}{h}}\left(\frac{2u_1u_2 - c}{t^2} - \frac{2u_1^0u_2^0 - c}{t^2}\right)dt + h\int_1^{\frac{a}{h}} t\overline{\varphi}g'(\varphi_1)\,dt,$$

$$(278)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1\,\partial s_2} &= \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_0^\infty f_0\,dt - \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_{\frac{a}{h}}^\infty f_0\,dt + \sum\sigma_0\overline{\varphi_0}\mathrm{T}\\
&\quad + 2\sum\sigma_0\int_h^a (u_1u_2 - u_1^0u_2^0)\frac{dr}{r^2} + \eta_h, \qquad \lim_{h=0}\eta_h = 0,\\
\mathrm{T} &= \int_0^1 f_0'\,t\,dt + \int_1^\infty g_0'\,t\,dt,\\
f' &= -\frac{8(tu_1 - c_1)(tu_2 - c_2)t\sin\varphi}{q^6}\\
&\quad + \frac{2t}{q^4}[-t\sin(2\varphi - \omega_1 - \omega_2)\\
&\qquad + c_1\sin(\varphi - \omega_2) + c_2\sin(\varphi - \omega_1) + c\sin\varphi],\\
g' &= f' + \frac{2\sin(2\varphi - \omega_1 - \omega_2)}{t^2},
\end{aligned}\right.$$

$$\therefore \mathrm{T} = -8\sin\varphi_0 u_1^0u_2^0 a_1 + 8\sin\varphi_0(c_1u_2^0 + c_2u_1^0)a_2 - 8c_1c_2\sin\varphi_0 a_3$$
$$- 2\sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)a_4 + 2[c_1\sin(\varphi - \omega_2) + c_2\sin(\varphi - \omega_1) + c\sin\varphi]a_5,$$

$$a_1 = \int_0^\infty \frac{t^4\,dt}{q_0^6} = \frac{5u_0 - 2u_0^3 + 3\overline{\mathrm{I}}}{8(1 - u_0^2)^2},$$

$$a_2 = \int_0^\infty \frac{t^3\,dt}{q_0^6} = \frac{2 + u_0^2 + 3u_0\overline{\mathrm{I}}}{8(1 - u_0^2)^2},$$

$$a_3 = \int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{q_0^6} = \frac{3u_0 + (1 + 2u_0^2)\overline{\mathrm{I}}}{8(1 - u_0^2)^2},$$

$$a_4 = \int_0^1 \frac{t^3\,dt}{q_0^4} + \int_1^\infty\left(\frac{t^3}{q_0^4} - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{2u_0^2 - 1 + u_0(3 - 2u_0^2)\overline{\mathrm{I}}}{2(1 - u_0^2)},$$

$$a_5 = \int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{q_0^4} = \frac{u_0 + \overline{\mathrm{I}}}{2(1 - u_0^2)},$$

et

$$\bar{\mathrm{I}} = \frac{\pi - \varphi_0}{\sin\varphi_0}, \qquad \varphi_0 > 0,$$

(249) $$\therefore \mathrm{T} = 3\sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2(\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2).$$

De plus, nous aurons

(250) $$\int_0^{\infty} f_0\, dt = -\cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2),$$

(251) $$\lim_{h=0}\int_{\frac{a}{h}}^{\infty} f_0\, dt = \frac{1}{a}(2u_1^0 u_2^0 - c),$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \mathrm{V}^0}{\partial s_1\,\partial s_2} = -\sum \frac{1}{a}\sigma_0(2u_1^0 u_2^0 - c) + 2\sum \sigma_0 \int_h^a (u_1 u_2 - u_1^0 u_2^0)\frac{dr}{r^2}$$
$$+\sum \sigma_0 \overline{\varphi_0}\mathrm{T} - \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + \eta_h^0, \qquad \lim_{h=0} \eta_h^0 = 0.$$

D'autre part, nous aurons

$$\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{V}_h}}{\partial s_1\,\partial s_2} = \sum \int_0^{\frac{a}{h}} \bar{\sigma} f t\, dt,$$

et, en traitant cette intégrale de la manière ordinaire, nous trouverons

(252) $$\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{V}_h}}{\partial s_1\,\partial s_2} = \sum \int_h^a \bar{\sigma}(2u_1 u_2 - c)\frac{dr}{r}$$
$$-\sum \overline{\sigma_0}[2u_1^0 u_2^0 - c + (\pi - \varphi_0)\sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)]$$
$$+\overline{\eta_h}. \qquad \lim_{h=0} \overline{\eta_h} = 0.$$

En observant que $2u_1 u_2 - c = \cos(2\varphi - \omega_1 - \omega_2)$, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la masse est répandue de manière que pour chaque branche*

(226*) $$\begin{cases} d\mu = \sigma\, dr, \\ \sigma = \sigma_0 + r\bar{\sigma}(r), \qquad \lim_{r=0}\bar{\sigma}(r) \text{ finie} = \overline{\sigma_0}, \end{cases}$$

et si l'angle $\varphi = (h, r)$ *peut s'écrire*

(228*) $\varphi = \varphi_0 + r\overline{\varphi}(r)$, $o < \varphi_0 < 2\pi$, $\lim\limits_{r=0} \overline{\varphi}(r)$ finie $= \overline{\varphi_0}$,

les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *sont que*

(253) $$\sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) = 0,$$

et que la quantité

(254) $$W_{s_1 s_2} \equiv \lim_{h=0} W_{s_1 s_2}^{(h)} \quad \text{soit finie,}$$

où

(255) $$W_{s_1 s_2}^{(h)} = \sum \int_h^a [\sigma \cos(2\varphi - \omega_1 - \omega_2) - \sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)] \frac{dr}{r^2}.$$

La valeur de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *est donnée par la formule*

(256) $$\left\{ \begin{aligned} \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} &= -\sum \frac{1}{a} \sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + W_{s_1 s_2} + \sum \sigma_0 \overline{\varphi_0} T - \sum \overline{\sigma_0} \overline{T}, \\ T &= 3\sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2(\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2), \\ \overline{T} &= \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + (\pi - \varphi_0)\sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \right.$$

Corollaires. — 1° *Posons*

(257) $$C_h = \sum \int_h^a [\overline{\sigma} \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2\sigma_0 \overline{\varphi} \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)] \frac{dr}{r},$$

$$\therefore \lim_{h=0} (W_{s_1 s_2}^{(h)} - C_h) = \text{une quantité finie.}$$

Par suite, la condition (254) *peut être remplacée par celle que la quantité*

(258) $$C \equiv \lim C_h \text{ soit finie.}$$

2° *Si* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *est finie,*

(259) $$\sum [\overline{\sigma}_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2\sigma_0 \overline{\varphi}_0 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)] = 0.$$

3° *En posant*

$$
(260)\qquad \begin{cases} \bar\sigma = \bar\sigma_0 + \bar\sigma_1, \qquad \bar\varphi = \bar\varphi_0 + \bar\varphi_1, \\ \therefore \lim\limits_{r=0} \bar\sigma_1 = \lim\limits_{r=0} \bar\varphi_1 = 0, \end{cases}
$$

et

$$
(261)\qquad \begin{cases} C_1 = \lim\limits_{h=0} C_1^{(h)}, \\ C_1^{(h)} = \sum \displaystyle\int_h^a \left[\bar\sigma_1 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2\sigma_0 \bar\varphi_1 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)\right] \frac{dr}{r}, \end{cases}
$$

nous trouverons que la condition (258) *peut être remplacée par l'égalité* (259) *et la condition que la quantité*

$$
(262)\qquad C_1 \text{ soit finie.}
$$

Remarque I. — Pour les diverses directions des éléments ds_1 et ds_2 la quantité $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ ne dépend que de la somme $\omega_1 + \omega_2$.

Remarque II. — En comparant les valeurs de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ et de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s}$, nous trouverons, si les éléments ds' et ds sont pris dans les directions de ds_1 et ds_2 respectivement, qu'il faut remplacer les angles φ et ω du paragraphe **15** par $\varphi - \omega_1$ et $\omega_2 - \omega_1$ respectivement (187),

$$
(263)\qquad \therefore W_{s's}^{(h)} = W_{s_1 s_2}^{(h)},
$$

$$
(264)\qquad \begin{cases} \therefore \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} - \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\partial V'_h}{\partial s} - \dfrac{\partial V}{\partial s}\right) \\ \qquad = \sum \left[\bar\sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2\sigma_0 \bar\varphi_0 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)\right] \\ \qquad + \omega_1 \sum \left[\bar\sigma_0 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + 2\sigma_0 \bar\varphi_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)\right] \\ \qquad - \dfrac{1}{h} \sum \sigma_0 \left[\cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + (\omega_2 - \omega_1) \sin(\varphi_0 - \omega_2)\right] + \eta_h, \\ \qquad\qquad \lim\limits_{h=0} \eta_h = 0, \qquad \omega_2 > \omega_1, \end{cases}
$$

avec la condition pour l'existence de $\dfrac{\partial V}{\partial s}$

$$
(265)\qquad \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega_2) = 0.
$$

V'_h étant le potentiel au point P' pris sur le prolongement de l'élément ds_1 à la distance $P_0 P' = h$. Si

$$(266) \qquad (\sin\omega_1 + \omega_2 - \omega_1) \sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - \omega_2) = 0, \qquad \omega_2 > \omega_1,$$

les quantités $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ et $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ existent ou n'existent pas à la fois. Si ces quantités existent, nous trouverons (259, 264, 265 et 266)

$$(267) \quad \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$$
$$= \omega_1 \sum \left[\bar{\sigma}_0 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + 2\sigma_0 \bar{\varphi}_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)\right].$$

Cas particulier. — Si, au point P_0, la courbe a une tangente unique, les deux valeurs de $\lim\limits_{r=0}(P_0 P, r)$ pour les deux branches sont φ_0 et $\varphi_0 + \pi$.

L'égalité (253) se réduit à

$$(268) \qquad (\sigma'_0 - \sigma''_0)\cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) = 0.$$

σ'_0 et σ''_0 étant les valeurs limites de σ_0 pour les deux branches respectives. Pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, l'égalité (268) est satisfaite, et l'on trouvera pour la limite de la dérivée normale

$$(269) \quad \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial n^2} = \frac{1}{a}(\sigma'_0 + \sigma''_0) + \int_0^a (\sigma' \cos 2\varphi' + \sigma'' \cos 2\varphi'' + \sigma'_0 + \sigma''_0) \frac{dr}{r^2}$$
$$+ \pi(\sigma'_0 \bar{\varphi}'_0 - \sigma''_0 \bar{\varphi}'') + \bar{\sigma}'_0 + \bar{\sigma}''_0.$$

les astérisques se rapportant aux deux branches respectives.

La condition (266) se réduit à une identité.

15. *Changement brusque de la dérivée des deux côtés de la courbe.* — Si le point P traverse la courbe suivant une droite qui passe par le point P_0 et arrive à un point P_1 situé à la même distance h de P_0, on aura les mêmes formules que précédemment pour $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ au point P_1, si l'on change φ, ω_1 et ω_2 en $\pi - \varphi$, $\pi - \omega_1$ et $\pi - \omega_2$. En distinguant les deux côtés de la courbe par les signes + et −, nous trouverons

$$(270)\quad \left\{\begin{aligned} \lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2} &= -\sum \frac{1}{a}\sigma_0 \cos(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)+W_{s_1 s_2}\\ &\quad+\sum \sigma_0\bar{\varphi}_0 T_- - \sum \bar{\sigma}_0 \bar{T}_-,\\ T_- &= 3\sin(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)+2\varphi_0\cos(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2),\\ \bar{T}_- &= \cos(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)-\varphi_0\sin(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2). \end{aligned}\right.$$

les conditions (253) et (259) restant les mêmes,

$$(271)\quad \therefore \lim_{h=0}\left(\frac{\partial^2 V_{h_+}}{\partial s_1\,\partial s_2}-\frac{\partial^2 V_{h_-}}{\partial s_1\,\partial s_2}\right) = -\pi\left[\bar{\sigma}_0\sin(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)+2\sigma_0\bar{\varphi}_0\cos(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)\right].$$

De même, si dans les égalités (242) on change la direction de ds' en la direction opposée, on retrouvera les mêmes formules en y changeant φ et ω en $\pi-\varphi$ et $\pi-\omega$. On trouvera

$$(272)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial s'_+\,\partial s}+\frac{\partial^2 V}{\partial s'_-\,\partial s} = -\pi\sum\left[\bar{\sigma}_0\sin(2\varphi_0-\omega)+2\sigma_0\bar{\varphi}_0\cos(2\varphi_0-\omega)\right].$$

Remarque I. — Le premier membre de l'égalité (271) a une valeur finie même dans le cas où $W_{s_1 s_2}$ et, par suite, les limites des dérivées elles-mêmes n'existent pas, pourvu que l'égalité (253) soit toujours satisfaite. Des considérations analogues se rapportent à l'égalité (272) en remplaçant le premier membre par la quantité

$$(273)\quad \lim_{h=0}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{\partial V_{h_+}}{\partial s}-\frac{\partial V_+}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial V_{h_-}}{\partial s}-\frac{\partial V_-}{\partial s}\right)\right],\qquad h_+=h_-=h.$$

Remarque II. — Le changement considéré (271) est indépendant de la direction du chemin P_1P_0P et dépend seulement des quantités σ_0, $\bar{\sigma}_0$, $\bar{\varphi}_0$ et de la somme des angles $\varphi_0-\omega_1$ et $\varphi_0-\omega_2$ que font les directions ds_1 et ds_2 avec la tangente de chaque branche au point P_0.

CHAPITRE IV.

DOUBLE LIGNE.

16. *Les fonctions* W *et* W_h. — Menons, par le point variable Q de la courbe matérielle, un vecteur N qui fasse l'angle n avec l'axe des coordonnées polaires, et prenons un point Q' sur ce vecteur dans le sens négatif. Soit

$$h' \equiv QQ'. \tag{274}$$

Nous définirons une fonction W, rapportée au point P_0 de la courbe, par l'équation

$$\left\{\begin{aligned} W &= \lim_{h'=0} W^{(h')},\\ \text{où}&\\ W^{(h')} &= \sum \int_0^a \frac{\sigma}{h'} \log\frac{r'}{r}\,dr,\\ r' &= P_0Q' = \sqrt{r^2 - 2rh'\cos(\varphi - n) + h'^2}. \end{aligned}\right. \tag{275}$$

Nous trouverons comme dans le paragraphe **9**, en supposant que toutes les distances QQ' soient égales (167),

$$\left\{\begin{aligned} W &= -\lim_{h'=0} W_N^{(h')} + \sum \sigma_0(\pi - |\varphi_0 - n_0|)\sin|\varphi_0 - n_0|\\ &\qquad - \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0),\\ W_N^{(h')} &= \sum \int_{h'}^a \sigma\cos(\varphi - n)\frac{dr}{r}, \qquad n_0 = \lim_{r=0} n. \end{aligned}\right. \tag{276}$$

Si, au contraire, le point Q' est pris dans le sens positif de N, nous aurons

$$r' = \sqrt{r^2 + 2rh\cos(\varphi - n) + h^2},$$

et, en posant $\pi - (\varphi - n)$ au lieu de $(\varphi - n)$, nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned} W_- &= -\lim_{h'=0} W'_{h'} - \sum \sigma_0(\varphi_0 - n_0)\sin|\varphi_0 - n_0| - \sum \sigma_0\cos(\varphi_0 - n_0),\\ &\qquad \varphi_0 - n_0 < \pi \end{aligned}\right. \tag{277}$$

en écrivant, dans ce cas, W_- au lieu de W.

Pour un point extérieur P nous définirons une fonction W_h d'une manière analogue, et nous aurons

$$(278)\qquad \begin{cases} W_h = \sum\int_0^a \sigma \dfrac{\partial \log \frac{1}{R}}{\partial N}\, dr, \\ R \;= PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}, \\ h \;= P_0Q, \\ u \;= \cos(h, r) \equiv \cos\varphi. \end{cases}$$

dN étant un élément du vecteur N pris dans le sens positif. En nommant ξ et η les coordonnées du point Q, nous pourrons écrire

$$(279)\qquad \begin{cases} W_h = \sum\int_0^a \sigma \cos n \dfrac{\partial \frac{1}{R}}{\partial \xi}\, dr + \sum\int_0^a \sin n \dfrac{\partial \frac{1}{R}}{\partial \eta}\, dr, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \xi} = \cos(x, R) = \dfrac{r\cos v - h\cos\alpha}{R}, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \eta} = \cos(y, R) = \dfrac{r\sin v - h\sin\alpha}{R}, \\ \qquad\qquad \varphi = v - \alpha, \end{cases}$$

v et α étant les angles que font les droites P_0Q et P_0P avec l'axe des x respectivement,

$$(280)\qquad \therefore\ W_h = -\sum\int_0^a \sigma[r\cos(v - n) - h\cos(\alpha - n)]\frac{dr}{R^2}.$$

Nous trouverons (181), pour $0 < \varphi_0 < 2\pi$ et en posant $\alpha =$ zéro,

$$(281)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} W_h = -\lim\limits_{h=0} W_N^{(h)} + \sum \sigma_0(\pi - \varphi_0)\sin(\varphi_0 - n_0), \\ W_N^{(h)} = \sum\int_h^a \sigma\cos(\varphi - n)\dfrac{dr}{r} = -\sum\int_h^a \sigma \dfrac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial N}\, dr. \end{cases}$$

Des égalités (276) et (281) nous tirons

$$(282)\qquad \lim_{h=0}[W_h - W^{(h)}] = \sum \sigma_0 n_0 \sin(\varphi_0 - n_0) + \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0). \qquad \varphi_0 > n_0.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les quantités* W *et* $\lim_{h=0} W_h$ *existent en même temps, et leur existence dépend de l'existence de la quantité* $\lim_{h=0} W_N^{(h')}$ (281).

Remarque I. — Dans la définition de la quantité W_h, il n'a pas été nécessaire de supposer que tous les éléments QQ' soient égaux, comme nous l'avons supposé en définissant la quantité W. Sur l'angle n nous n'avons fait d'autre hypothèse que celle que $n_0 = \lim_{r=0} n$ existe. Si la courbe admet, en chaque point, une tangente bien déterminée, et si le vecteur N est dirigé suivant la normale, les quantités W et W'_h sont les potentiels d'une double couche pour un point de la couche et pour un point extérieur respectif, σ étant le moment de la couche.

Remarque II. — Si $\lim_{h=0} W'_h$ existe,

$$\sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0) = 0. \tag{283}$$

Changement brusque des deux côtés de la courbe. — Si le point P traverse la courbe suivant la droite PP_0P_1, et arrive au point P_1 qui est situé à la même distance h du point P_0, nous trouverons la valeur W_{h-} de W_h au point P_1 si, dans les formules (278) et (281), nous remplaçons φ et n par $\pi - \varphi$ et $\pi - n$, et nous aurons

$$\lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-}) = \pi \sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - n_0). \tag{284}$$

De même, nous trouverons (276, 277)

$$W_+ - W = \pi \sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - n_0), \qquad \varphi_0 > n_0. \tag{285}$$

Remarque III. — Il suit de l'égalité (284) que $\lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-})$ est indépendante de la direction de la droite P_0P. Cette égalité (284) aura lieu même dans le cas où $\lim_{h=0} W_h$ n'existe pas, et la même considération se rapporte à l'égalité (285) en remplaçant le premier membre par la quantité

$$\lim_{h'=0} [W^{(h')} - W_-^{(h')}]. \tag{286}$$

17. *La dérivée première des fonctions* W_h *et* W. — Nous trouverons (243), en prenant P_0P pour axe des x,

$$(287)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W_h}{ds} = -\frac{1}{h}\sum\int_0^{\frac{a}{h}} \sigma f\,dt,\\ &f = \frac{2(tu_1-c_1)(tu_2-c_2)}{q^4} - \frac{c}{q^2},\\ &q = \sqrt{t^2-2tu+1},\\ &u = \cos(h,r) = \cos\varphi, \qquad c = \cos(N,ds) = \cos(\omega-n),\\ &u_1 = \cos(ds,r) = \cos(\varphi-\omega), \qquad c_1 = \cos(h,ds) = \cos\omega,\\ &u_2 = \cos(N,r) = \cos(\varphi-n), \qquad c_2 = \cos(h,N) = \cos n,\end{aligned}\right.$$

et nous supposerons que pour chaque branche les quantités σ, φ et n sont continues par rapport à r. Nous écrivons

$$(288)\qquad \sigma f = \sigma_0 f_0 + \sigma_0(f_1 - f_0) + \sigma_0(f - f_1) + (\sigma - \sigma_0)f,$$

où l'indice zéro se rapporte à la limite pour $r = 0$, et où f_1 est ce que deviendra f en y remplaçant φ par φ_0 sans changer la valeur de n,

$$(289)\qquad \therefore \frac{\partial W_h}{ds} = \frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_1 + \frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_2 + \frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_3 + \frac{1}{h}\sum I_4,$$

I_1, I_2, I_3 et I_4 étant les intégrales qui correspondent aux divers termes du second membre de l'égalité (288),

$$\therefore \frac{1}{h} I_1 = -\frac{1}{h}\int_0^\infty f_0\,dt + \frac{1}{h}\int_{\frac{a}{h}}^\infty f_0\,dt = \frac{1}{h}I' + \frac{1}{h}I''.$$

Mais

$$\lim_{h=0}(\sigma_0 I'' + \sigma_0 I_2 + \sigma_0 I_3 + I_4) = 0,$$

$\therefore$ pour que $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial W_h}{ds}$ soit finie, il faut que (*cf.* 250)

$$(290)\qquad I \equiv \sum \sigma_0 I' = \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega - n_0) = 0.$$

De plus, nous trouverons

$$\lim_{h=0}\frac{1}{h}I'' = \frac{1}{a}(2u_1^0 u_{20}^0 - c_0),$$

et

$$(291)\qquad \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \mathrm{I}_1 = \sum \frac{1}{a}\sigma_0(2u_1^0 u_{20}^0 - c_0) + \varepsilon_1, \qquad \lim_{h=0} \varepsilon_1 = 0.$$

$$u_1^0 = \cos(\varphi_0 - \omega), \qquad u_{20}^0 = \cos(\varphi_0 - n_0), \qquad c_0 = \cos(\omega - n_0).$$

Nous supposerons maintenant que, pour chaque branche, on puisse écrire

$$(292)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + r\overline{\sigma}, & \lim_{r=0} \overline{\sigma} \text{ finie} &= \overline{\sigma_0}, \\ \varphi &= \varphi_0 + r\overline{\varphi}, & \lim_{r=0} \overline{\varphi} \text{ finie} &= \overline{\varphi_0}, \qquad 0 < \varphi_0 < 2\pi, \\ n &= n_0 + r\overline{n}, & \lim_{r=0} \overline{n} \text{ finie} &= \overline{n_0}. \end{aligned}\right.$$

Nous trouverons

$$\frac{1}{h}\mathrm{I}_2 = -\int_0^1 \overline{n_0}\overline{f_0}\, t\, dt - \int_1^\infty \overline{n_0}\left(\overline{f_0}\, t - \frac{2u_1^0\overline{u_{20}^0} - \overline{c_0}}{t}\right) dt$$

$$- \int_h^a \frac{(2u_1^0 u_2^0 - c) - (2u_1^0 u_{20}^0 - c_0)}{r^2}\, dr + \varepsilon_2, \qquad \lim_{h=0} \varepsilon_2 = 0,$$

où $u_2^0 = \cos(\varphi_0 - n)$, et où $\overline{f_0}$, $\overline{u_{20}^0}$ et $\overline{c_0}$ sont ce que deviendront f_0, u_{20}^0 et c_0, lorsqu'on y remplace n_0 par $n_0 + \frac{\pi}{2}$; par conséquent (*cf.* 252)

$$\frac{1}{h}\sum \sigma_0 \mathrm{I}_2 = -\sum \sigma_0 \int_h^a \left[(2u_1^0 u_2^0 - c) - (2u_1^0 u_{20}^0 - c_0)\right]\frac{dr}{r^2}$$

$$+ \sum \overline{n_0}\sigma_0\left[\sin(2\varphi_0 - \omega - n_0) - (\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega - n_0)\right] + \varepsilon_2.$$

$$\lim_{h=0} \varepsilon_2 = 0.$$

De même nous aurons (*cf.* 248, 249)

$$\frac{1}{h}\sum \sigma_0 \mathrm{I}_3 = -\sum \sigma_0 \int_h^a \left[(2u_1 u_2 - c) - 2(u_1^0 u_2^0 - c)\right]\frac{dr}{r^2}$$

$$- \sum \sigma_0 \overline{\varphi_0}\left[3\sin(2\varphi_0 - \omega - n_0) - 2(\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega - n_0)\right] + \varepsilon_3,$$

$$\lim_{h=0} \varepsilon_3 = 0,$$

$$\frac{1}{h}\sum \quad \mathrm{I}_4 = -\sum \int_h^a \overline{\sigma}(2u_1 u_2 - c)\frac{dr}{r}$$

$$+ \sum \overline{\sigma_0}\left[(2u_1^0 u_{20}^0 - c_0) + (\pi - \varphi_0)\sin(2\varphi_0 - \omega - n_0)\right] + \varepsilon_4,$$

$$\lim_{h=0} \varepsilon_4 = 0,$$

et

$$(293)\quad \begin{cases} \therefore \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s} = W_{sN} + \sum \dfrac{1}{a}\sigma_0 \cos w_0 \\ \qquad + \sum \left[\sigma_0 \cos w_0 + \sigma_0 (\overline{n}_0 - 3\overline{\varphi}_0) \sin w_0 \right] \\ \qquad + \sum (\pi - \varphi_0) \left[\overline{\sigma} \sin w_0 + \sigma_0 (2\overline{\varphi} - \overline{n}_0) \cos w_0 \right], \\ W_{sN} = \lim\limits_{h=0} W_{sN}^h, \\ W_{sN}^h = \sum \displaystyle\int_h^a (\sigma \cos w - \sigma_0 \cos w_0) \frac{dr}{r^2}, \\ w = 2\varphi - \omega - n, \\ w_0 = 2\varphi_0 - \omega - n_0, \end{cases}$$

avec la condition (290)

$$(294)\quad I = \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega - n_0) = 0.$$

D'où le théorème :

THÉORÈME. — *Sous les suppositions* (292) *les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ *sont que l'égalité* (294) *ait lieu, et que la quantité*

$$(295)\quad W_{sN}\ (293)\ \textit{soit finie}.$$

Remarque I. — Posons

$$(296)\quad E_h = \sum \int_h^a \left[\overline{\sigma} \cos w_0 + \sigma_0 (\overline{n} - 2\overline{\varphi}) \sin w_0 \right] \frac{dr}{r},$$

$$\therefore \lim_{h=0} (W_{sN}^h - E_h)\ \text{finie}.$$

$\therefore$ la condition (295) peut être remplacée par celle que la quantité

$$(297)\quad E = \lim_{h=0} E_h \quad \text{soit finie}.$$

D'où il suit que, si $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ existe, on aura

$$(298)\quad \sum \left[\overline{\sigma}_0 \cos w_0 + \sigma_0 (n_0 - 2\overline{\varphi}_0) \sin w_0 \right] = 0.$$

et

$$(298^*)\qquad \therefore \lim_{h=0}\frac{\partial W_h}{\partial s} = -W_{sN} + \sum \frac{1}{a}\sigma_0 \cos w_0 - \sum \sigma_0 \overline{\varphi_0} \sin w_0$$
$$+ \sum (\pi - \varphi_0)\left[\overline{\sigma_0} \sin w_0 + \sigma_0(2\overline{\varphi_0} - \overline{n_0}) \cos w_0\right].$$

Remarque II. — La fonction W d'un point de la courbe peut être traitée de la même manière, en définissant

$$(299)\qquad \frac{\partial W}{\partial s} = \lim_{h=0}\left[\frac{1}{h}\left(W_h - \lim_{h'=0} W_{h'}\right) + \frac{1}{h}\left(\lim_{h'=0} W_{h'} - W\right)\right],$$

et nous trouverons

$$(300)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial s} &= -W'_{sN} + \sum \frac{1}{a}\sigma_0 \cos w'_0 - \sum \sigma_0 \overline{\varphi_0} \sin w'_0 \\ &\quad + \sum (\pi - \varphi_0)\left[\overline{\sigma_0} \sin w'_0 + \sigma_0(2\overline{\varphi_0} - \overline{n_0}) \cos w'_0\right], \\ W_{sN} &= \lim_{h=0} \sum \int_h^{s''} (\sigma \cos w' - \sigma_0 \cos w'_0)\frac{dr}{r^2}, \\ w' &= 2\varphi - n, \\ w'_0 &= 2\varphi_0 - n_0, \end{aligned}\right.$$

avec les conditions

$$(301)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \sigma_0 \quad \cos(\varphi_0 - n_0) = 0, \\ &\sum \sigma_0 n_0 \sin(\varphi_0 - n_0) = 0, \end{aligned}\right. \qquad \varphi_0 > n_0,$$

l'angle n étant compté à partir de la droite P_0P. La condition que W_{sN} doit être finie peut être remplacée par celle que la quantité F doit être finie, où

$$(302)\qquad F = \lim_{h=0} \sum \int_h^{s''} \left[\overline{\sigma} \cos w'_0 - \sigma_0 (2\varphi - \overline{n}) \sin w'_0\right]\frac{dr}{r}.$$

Si la quantité F est finie,

$$(303)\qquad \sum \left[\overline{\sigma_0} \cos w'_0 - \sigma_0(2\varphi_0 - \overline{n_0}) \sin w'_0\right] = 0.$$

Remarque III. — Pour faire la comparaison des valeurs de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ et de $\dfrac{\partial W}{\partial s}$, il faut, dans les formules de la remarque II, remplacer les angles φ et n par $\varphi - \omega$ et $n - \omega$ respectivement.

Nous trouverons

$$(304) \qquad w' = w,$$

$$(305) \qquad \therefore \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} - \frac{\partial W}{\partial s} = -\omega \sum \left| \bar{\sigma}_0 \sin w_0 + \sigma_0 (2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0) \cos w_0 \right| + \sum \left| \bar{\sigma}_0 \cos w_0 - \sigma_0 (2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0) \sin w_0 \right|$$

avec les conditions (294), (295) et (301) qui peuvent s'écrire

$$(306) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0) = 0, \\ \sin\omega \sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - n_0) - \sum \sigma_0 (n_0 - \omega) \sin(\varphi_0 - n_0) = 0, \\ W_{sx} \quad \text{finie.} \end{array} \right.$$

Si cette dernière condition est satisfaite, nous trouverons (298)

$$(305^*) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} - \frac{\partial W}{\partial s} = -\omega \sum \left| \bar{\sigma}_0 \sin w_0 + \sigma_0 (2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0) \cos w_0 \right|.$$

Mais la condition que W_{sx} soit finie n'est pas indispensable, en écrivant la formule (305) sous la forme

$$(307) \qquad \lim_{h=0} \left[\frac{\partial W_h}{\partial s} - \frac{1}{h}(W_h - W) \right] = -\omega \sum \left| \bar{\sigma}_0 \sin w_0 + \sigma_0 (2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0) \cos w_0 \right| + \sum \left| \bar{\sigma}_0 \cos w_0 - \sigma_0 (2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0) \sin w_0 \right|.$$

Changement brusque en traversant la courbe. — Lorsque le point P traverse la courbe en suivant une droite, les angles φ, ω et n se changent en $\pi - \varphi$, $\pi - \omega$ et $\pi - n$ respectivement, et nous trouverons pour le changement brusque de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ et de $\dfrac{\partial W}{\partial s}$ les valeurs

$$(308) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{h=0} \left(\dfrac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \dfrac{\partial W_{h-}}{\partial s} \right) = \pi \sum \left| \bar{\sigma}_0 \sin w_0 + \sigma_0 (2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0) \cos w_0 \right| \\ \text{avec la seule condition} \\ \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega - n_0) = 0, \end{array} \right.$$

et, en observant que W se change en W_- (277),

$$\frac{\partial W_+}{\partial s_+} + \frac{\partial W_-}{\partial s_-} = \pi \sum \left[\bar{\sigma}_0 \sin \omega'_0 + \sigma_0 (2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0) \cos \omega'_0 \right] \tag{309}$$

avec les deux conditions (301). La troisième des conditions (306) est dispensable, pourvu que le premier membre de l'égalité (309) soit défini d'une manière analogue à celle du premier membre de l'égalité (308) ou

$$\begin{aligned} &\lim_{h=0} \frac{1}{h} \left[W_{h+} + W_{h-} - \lim_{h=0} (W_{h'+} + W_{h'-}) \right] \\ &\qquad = \pi \sum \left[\bar{\sigma}_0 \sin \omega'_0 + \sigma_0 (2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0) \cos \omega'_0 \right]. \end{aligned} \tag{309*}$$

18. *Le potentiel logarithmique d'une double ligne.* — Dans ce cas nous supposerons

$$\left\{ \begin{aligned} &n_0 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, \\ &2\bar{\varphi} - \bar{n} = f(r), \\ &\lim_{h=0} \int_h^a f(r) \frac{dr}{r} = \text{une quantité finie.} \end{aligned} \right. \tag{310}$$

C'est ce qui aura lieu, par exemple, si n est l'angle que fait la normale au point Q avec l'axe des x. En effet, on aura, en supposant que la quantité

$$\bar{\varphi}' = \frac{d\bar{\varphi}}{dr}$$

existe,

$$n_0 + rn = \varphi - \frac{\pi}{2} + \operatorname{tang}^{-1} r \frac{d\varphi}{dr},$$

$$\therefore\ rn = r\bar{\varphi} + \operatorname{tang}^{-1} (r\bar{\varphi} + r^2 \bar{\varphi}'), \qquad \ldots.$$

Dans ce cas, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ se réduisent (290 et 297) à

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum \sigma_0 \sin \omega = 0, \\ &\lim_{h=0} \sum \sin(\varphi_0 - \omega) \int_h^a \sigma \frac{dr}{r} = \text{une quantité finie.} \end{aligned} \right. \tag{311}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\frac{\partial W}{\partial s}$ sont

$$(312)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \sigma_0 n_0 = 0, \\ &\lim_{h=0} \sum \sin\varphi_0 \int_h^a \sigma \frac{dr}{r} = \text{une quantité finie.} \end{aligned}\right.$$

Enfin nous trouverons

$$(313)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right) = \pi \sum \bar{\sigma}_0 \cos(\varphi_0 - \omega),$$

$$(314)\qquad \frac{\partial W_+}{\partial s_+} + \frac{\partial W_-}{\partial s_-} = \pi \sum \bar{\sigma}_0 \cos\varphi_0.$$

Remarque I. — On a

$$(315)\qquad \bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2\rho_0},$$

ρ_0 étant le rayon de courbure de la courbe matérielle au point P_0.

Remarque II. — Pour la dérivée suivant la direction P_0P nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s}$ est que la quantité

$$(316)\qquad \lim_{h=0} \sum \sin\varphi_0 \int_h^a \sigma \frac{dr}{r} \text{ soit finie,}$$

et même, si la condition (316) n'est pas satisfaite, nous aurons

$$(317)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right) = \pi \sum \bar{\sigma}_0 \cos\varphi_0.$$

Cas particulier. — *Pour la dérivée normale suivant la normale en un point régulier,* il faut poser $\omega = 0$ et $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ pour les deux branches. En posant $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}_2$ pour les deux branches, nous trouverons le résultat suivant :

Théorème. — *Sous les suppositions* (290), (309) *et* (310), *la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\frac{\partial W}{\partial N}$, *et* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial N}$,

dN' étant l'élément de la normale qui passe par le point P_0, est que

(318) $$\lim_{h=0} \int_h^a (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) \frac{dr}{r} \textit{ soit finie;}$$

et l'on trouvera

(319) $$\frac{\partial W_+}{\partial N'_+} + \frac{\partial W_-}{\partial N'_-} = 0.$$

Même dans le cas où la condition (318) n'est pas satisfaite nous trouverons

(320) $$\lim_{h=0} \left(\frac{\partial W_{h_+}}{\partial N'} - \frac{\partial W_{h_-}}{\partial N'} \right) = 0,$$

le point P étant supposé suivre la normale qui passe par le point P_0.

Remarque III. — Dans l'énoncé du dernier théorème nous n'avons pas supposé que la fonction σ soit continue au point P_0.

Remarque IV. — Pour le potentiel newtonien d'une double couche, M. Liapounoff (¹) a démontré que les deux limites de la dérivée normale existent et sont égales en supposant au lieu de (318) que

(318') $$\lim_{r=0} \frac{1}{r^{1+\beta}} \sum (\sigma - \sigma_0) \text{ soit finie}, \qquad \beta > 0.$$

19. *L'existence de la dérivée normale.* — Nous étudierons dans ce paragraphe plus en détail les suppositions qu'il faut faire pour la déduction de la formule (320). Pour la dérivée suivant P_0P nous trouverons (287), en portant $\omega = 0$,

(321) $$\left\{ \begin{aligned} \chi &= \frac{\partial W_{h_+}}{\partial N'} - \frac{\partial W_{h_-}}{\partial N'} = -\frac{1}{h} \sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(f_+ - f_-)\, dt, \\ f_+ &= \frac{2(tu-1)(tu_2-c)}{q^4} - \frac{c}{q^2}, \\ f_- &= \frac{2(tu+1)(tu_3+c)}{q_-^4} - \frac{c}{q_-^2}, \\ u &= \cos\varphi, \qquad u_2 = \cos(\varphi - n), \qquad c = \cos n, \\ q &= \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \qquad q_- = \sqrt{t^2 + 2tu + 1}, \end{aligned} \right.$$

(¹) A. Liapounoff, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journ. de Math.*, 1898, p. 241-311).

d'où il suit que, si nous supposons qu'au point P_0 la courbe ait une tangente unique, et que la droite P_0P soit dirigée suivant la normale, nous pourrons écrire

$$(322)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varphi = -\frac{\pi}{2} + r\bar{\varphi}, & \lim_{r=0}(r\bar{\varphi}) = 0, \\ n = r\bar{n}, & \lim_{r=0}(r\bar{n}) = 0, \\ \therefore u_2 = \sin(r\bar{n} - r\bar{\varphi}), & u = -\sin r\bar{\varphi}, \end{array}\right.$$

$$(323)\quad \left\{\begin{array}{l} \therefore f_+ - f_- = -\frac{4t(u_2+2cu)}{p^4} + \frac{16cut}{p^6} + \frac{u^2}{p^3}P. \\ p = \sqrt{t^2+1}, \quad \lim_{t=0} P \text{ finie}, \quad \lim_{t=\infty} P \text{ finie}. \end{array}\right.$$

$$(324)\quad \left\{\begin{array}{l} \therefore \chi = G + G'. \\ G = \frac{4}{h}\sum\int_0^{\frac{a}{h}} \sigma\left[\frac{t(u_2+2cu)}{p^4} - \frac{4cut}{p^6}\right]dt, \\ G' = -\frac{1}{h}\sum\int_0^{\frac{a}{h}} \frac{u^2}{p^3}P\,dt. \end{array}\right.$$

Nous supposerons dans la suite

$$(325)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim_{r=0}(r\bar{\varphi}^{-2}) = 0, \\ \therefore \lim_{h=0} G' = 0. \end{array}\right.$$

Posons

$$(326)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum \sigma(u_2 + 2cu) = \alpha r. \\ \sum \sigma c u = \beta r. \\ \therefore G = 4\int_0^{\frac{a}{h}} \left(\frac{\alpha t^2}{p^4} - \frac{4\beta t^2}{p^6}\right)dt. \end{array}\right.$$

Nous distinguerons deux cas :

1° $\lim_{r=0}\beta$ finie $= \beta_0$. Pour que $\lim_{h=0}\chi$ soit finie, il faut que

$$(327)\quad \lim_{h=0} 4\int_0^{\frac{a}{h}} \frac{\alpha t^2 dt}{p^4} \text{ soit finie.}$$

Si nous supposons que la quantité α ne change pas de signe une infinité de fois pour de petites valeurs de r, la condition (327) peut être remplacée par celle que

$$\lim_{h=0} \alpha \text{ soit finie} = \alpha_0 \tag{328}$$

ou que

$$\lim_{h=0} \frac{1}{r} \sum \sigma \frac{u_2}{r} \text{ soit finie.} \tag{328*}$$

Dans ce cas nous trouverons

$$\lim_{h=0} \left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial N'} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial N'} \right) = \pi(\alpha_0 - \beta_0). \tag{329}$$

Remarque I. — On peut toujours choisir la fonction $\bar{u}$ de manière que la condition (328) soit satisfaite. De plus, nous pourrons choisir $\bar{u}$ de manière que

$$\alpha_0 = \beta_0. \tag{330}$$

Si, par exemple, $\bar{\varphi}_0$ est finie, et si u_0 est choisie $= 2\bar{\varphi}_0$ (*cf.* 210), l'égalité (330) est satisfaite.

2° $\lim\limits_{r=0} \beta$ infinie. Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \gamma\beta, \\ \beta = \omega(h) B(t)(1 + \beta'), \qquad B(t) \text{ finie et } \gtrless 0, \qquad \lim\limits_{h=0} \beta' = 0. \\ \qquad \therefore \lim\limits_{h=0} \omega(h) \quad \text{et} \quad \lim\limits_{t=0} B(t) \text{ infinies.} \\ \lim\limits_{h=0} h\,\omega(h) = \lim\limits_{t=0} t\, B(t) = \lim\limits_{t=\infty} B(t) = 0 \text{ ou finie.} \end{array} \right. \tag{331}$$

$$\therefore G = 4\,\omega(h) \int_0^{\frac{a}{h}} B(t)(1 + \beta') \left(\frac{\gamma t^2}{p^4} - \frac{4t^2}{p^6} \right) dt. \tag{332}$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} G$ soit finie il faut donc que

$$\lim_{h=0} \int_0^{\frac{a}{h}} B(t)(1 + \beta')\gamma \frac{t^2\,dt}{p^4} = 4 \int_0^{\infty} B(t) \frac{t^2\,dt}{p^6}.$$

Or, le deuxième membre de cette égalité est fini (331). Pour que le premier membre soit fini, il faut que

$$\lim_{h=0} \gamma \text{ soit finie } = \gamma_0,$$

en supposant que $\frac{\alpha}{\beta}$ ne change pas de signe une infinité de fois pour de petites valeurs de r,

$$(333) \qquad \therefore \lim_{r=0} \frac{\alpha}{\beta} = \gamma_0 = \text{une constante.}$$

D'où il suit qu'une condition nécessaire pour l'existence de $\lim_{h=0} \mathrm{G}$ est que

$$(334) \qquad \mathrm{I} = \int_0^\infty \mathrm{B}(t)\left(\frac{\gamma_0 t^2}{p^4} - \frac{4t^2}{p^6}\right) dt = 0.$$

Lemme I.

$$(335) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\gamma_0}{p^4} - \frac{4}{p^6}\right) t^{3-\gamma_0}\, dt = 0, \qquad 0 < \gamma_0 < 4.$$

En effet, posons

$$\int_0^\infty \frac{z^{3-\gamma_0}}{(1+z^2)^2}\, dz = \lambda, \qquad \gamma_0 < 4,$$

$$z = \frac{t}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\therefore \bar{\mathrm{I}} = \int_0^\infty \frac{t^{3-\gamma_0}\, dt}{(\alpha + t^2)^2} = \alpha^{-\frac{\gamma_0}{2}} \lambda,$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\mathrm{I}}}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{t^{3-\gamma_0}\, dt}{(\alpha + t^2)^3} = \frac{\gamma_0}{4} \alpha^{-\frac{\gamma_0}{2}-1} \lambda.$$

En posant $\alpha = 1$ nous retrouverons l'identité (335).

Lemme II. — *Soit*

$$(336) \qquad \mathrm{F} = \int_0^\infty \Omega(t)\left(\frac{\gamma_0}{p^4} - \frac{4}{p^6}\right) t^{3-\gamma_0}\, dt.$$

Si $\Omega(t)$ *est une fonction toujours croissante*, $\mathrm{F} > 0$, *et si* $\Omega(t)$ *est une fonction toujours décroissante*, $\mathrm{F} < 0$.

En effet, nous aurons (335)

$$\int_0^\kappa \left(\frac{\gamma_0}{p^4} - \frac{4}{p^6}\right) t^{3-\gamma_0}\, dt = \int_\kappa^\infty \left(\frac{4}{p^6} - \frac{\gamma_0}{p^4}\right) dt, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{4-\gamma_0}{\gamma_0}};$$

par suite, si Ω est une fonction croissante,

$$\int_0^x \Omega(t)\left(\frac{\gamma_0}{p^4}-\frac{4}{p^6}\right)t^{3-\gamma_0}\,dt > \int_x^\infty \Omega(t)\left(\frac{4}{p^6}-\frac{\gamma_0}{p^4}\right)t^{3-\gamma_0}\,dt,$$

donc, etc.

Nous écrirons maintenant l'intégrale I (334) de la manière suivante :

$$(337) \qquad \mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{B}(t)}{t^{1-\gamma_0}}\left(\frac{\gamma_0}{p^4}-\frac{4}{p^6}\right)t^{3-\gamma_0}\,dt.$$

d'où il suit que $\frac{\mathrm{B}(t)}{t^{1-\gamma_0}}$ n'est pas une fonction toujours croissante ou toujours décroissante. Si à partir d'une certaine valeur r_0 de r, la quantité β conserve toujours le même signe, soit $\beta > 0$, et va toujours en croissant, $\mathrm{B}(t)$ est une fonction croissante ou une constante. Par suite, dans ce cas, nous tirons de l'égalité

$$\mathrm{I} = 0$$

la conséquence que

$$(338) \qquad \frac{\mathrm{B}(t)}{t^{1-\gamma_0}} = \text{une constante } \beta_0,$$

$$(339) \qquad \therefore\ \beta = \omega(h)\,t^{1-\gamma_0}\beta_0(1+\beta'),$$

$$(340) \qquad \left\{\begin{array}{l} \therefore\ 2 \leqq \gamma_0 \leqq 1, \\ \beta = \frac{\mathrm{V}(r)}{r^{\gamma_0-1}}, \qquad \mathrm{V}(ht) = m(h)(1+\beta'), \qquad \lim\limits_{h=0}\beta'(h,t) = 0, \\ \therefore\ \beta_0\,\omega(h) = \frac{m(h)}{h^{\gamma_0-1}}. \end{array}\right.$$

La quantité G (332) se réduit maintenant à

$$(341) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{G} = \frac{4\,m(h)}{h^{\gamma_0-1}}\int_0^{\frac{a}{h}} \beta'\left(\frac{\gamma_0+\alpha'+\frac{\alpha'}{\beta'}}{p^4}-\frac{4}{p^6}\right)t^{3-\gamma_0}\,dt, \\ \text{en posant} \\ \qquad \gamma = \gamma_0+\alpha', \qquad \lim\limits_{h=0}\alpha' = 0. \end{array}\right.$$

Nous traiterons cette expression de G (341) de la même manière que l'autre (332) en posant

$$(342) \qquad \left\{\begin{array}{l} \beta' = \omega_1(h)\,\mathrm{B}_1(t)(1+\beta''), \qquad \lim\limits_{h=0}\omega_1(h) = \lim\limits_{h=0}\beta'' = 0, \\ \alpha' = \gamma'\beta'. \end{array}\right.$$

Si α' et β' ne changent pas de signe une infinité de fois pour de petites valeurs de h, nous trouverons qu'il faut choisir l'angle u de manière que

$$(343) \qquad \lim_{h=0} \frac{\alpha'}{\beta'} = \text{une quantité finie} = -\gamma_1.$$

Si, de plus, $\lim\limits_{h=0} \frac{m\omega_1}{h^{\gamma_0-1}}$ est finie, $\lim\limits_{h=0} G$ est finie. Dans le cas où m est une constante, nous trouverons comme précédemment que γ_1 est une constante indépendante de t. Nous trouverons que nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soient* $\lim\limits_{r=0} r\varphi^{-2}$ *finie et*

$$(344) \qquad \beta = \frac{\beta_0}{r^{\gamma_0-1}}(1 + \beta_1 r^{\gamma_1} + \ldots + \beta_{n-1} r^{\gamma_{n-1}}) + \beta_n(r).$$

γ_0, β_0, β_k et γ_k *étant des constantes;* $\gamma_k > \gamma_{k-1} > 0$, $2 > \gamma_0 > 1$ *pour* $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $\lim\limits_{r=0} \beta_n(r)$ *finie. Si nous choisissons* n *de manière que*

$$(345) \qquad \alpha = \frac{\beta_0}{r^{\gamma_0-1}}\left[\gamma_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k(\gamma_0 - \gamma_k) r^{\gamma_k}\right] + \alpha_n(r), \qquad \lim_{r=0} \alpha_n(r) \text{ finie,}$$

$$(346) \qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_h}{\partial N} - \frac{\partial W_h}{\partial N'}\right) = \text{une quantité finie,}$$

et cette limite est égale à zéro, si $\lim\limits_{r=0} r\varphi^{-2} = 0$ *et* $\lim\limits_{r=0} \alpha_n = \lim\limits_{r=0} \beta_n$.

$\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial N'}$. — Nous pourrons écrire (321)

$$(347) \qquad f = \frac{2c}{p^3} - \frac{c}{p^2} + \frac{1}{2}(f_1 - f_2) + 2uu_2\left(\frac{t^2}{p^3} - \frac{4t^2}{p^6}\right) + \frac{u^2}{p^3} g,$$

$\lim\limits_{t=0} g$ et $\lim\limits_{t=\infty} g$ finies; d'où le théorème :

Théorème. — *Si* $\lim\limits_{r=0} \frac{u^2}{r}$, $\lim\limits_{r=0} \frac{uu_2}{r}$ et $\lim\limits_{h=0}\left(\frac{\partial W_h}{\partial N} - \frac{\partial W_h}{\partial N'}\right)$ *sont finies, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial N'}$ *est* *que*

$$\lim_{h=0} \mathrm{I}' \textit{ soit finie,}$$

$$(348) \quad \left\{ \begin{aligned} &\textit{où} \\ &\mathrm{I}' \equiv \frac{1}{h}\int_0^h \rho\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^4}\right) dt - \sum 2\int_h^a \sigma u u_2 \frac{dr}{r^2}, \\ &\rho \equiv \sum \sigma c. \end{aligned} \right.$$

Remarque II. — Soit

$$\rho = \rho_0 + r\bar{\rho}, \qquad \lim_{r=0}(r\bar{\rho}) = 0, \qquad \rho_0 = \text{const.}$$

Si $\lim\limits_{r=0}\bar{\rho}$ est finie, la condition (348) peut être remplacée par celle-ci :

$$(349) \quad \mathrm{W}_{\mathrm{NN}} \equiv \lim_{h=0} \sum \int_h^a [\sigma(2uu_2 - c) + \sigma_0] \frac{dr}{r^2} = \text{une quantité finie.}$$

Si de plus $\int_0^a u^2 \frac{dr}{r^2}$ est finie, ρ peut être remplacée par $\sum \sigma$, et la condition (350) par

$$(349^*) \quad \int_0^a (\rho - \rho_0)\frac{dr}{r^2} = \text{une quantité finie.}$$

Remarque III. — Des considérations analogues peuvent se faire sur la dérivée $\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{N}'}$. Posons

$$(350) \quad \Delta' \equiv \frac{1}{h}[\mathrm{W}_{h+} - \mathrm{W}_+^{(h)}] - \frac{1}{h}[\mathrm{W}_-^{(h)} - \mathrm{W}_{h-}].$$

Nous aurons (280)

$$(351) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{W}_{h+} = -\sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(tu_2 - c)\frac{dt}{q^2}, \qquad q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \\ &\mathrm{W}_{h-} = -\sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(tu_2 + c)\frac{dt}{q_-}, \qquad q_- = \sqrt{t^2 + 2tu + 1}, \\ &u = -\sin\varphi', \qquad u_2 = -\sin(\varphi' - n), \qquad c = \cos n, \\ &\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi'_0 = n_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

et

$$(352)\quad \left\{\begin{aligned} &\therefore \frac{tu_2 - c}{q^2} + \frac{tu_2 + c}{q} = \frac{2tu_2}{p^2} - \frac{4tuc}{p^4} + \frac{u^2}{p^3}\mathrm{P},\\ &p = \sqrt{t^2+1}, \qquad \lim_{t=0}\mathrm{P} \ \text{ et } \ \lim_{t=\infty}\mathrm{P} \text{ finies.}\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(353)\qquad \sum \sigma u_2 = \alpha r, \qquad \sum \sigma uc = \beta r,$$

$$(354)\quad \left\{\begin{aligned} &\therefore \frac{1}{h}(\mathrm{W}_{h+} + \mathrm{W}_{h-}) = \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2,\\ &\mathrm{G}_1 = -2\int_0^{\frac{a}{h}}\left(\frac{\alpha}{p^2} + \frac{2\beta}{p^4}\right)t^2\,dt,\\ &\mathrm{G}_2 = -\sum\int_0^{\frac{a}{h}} \sigma\frac{u^2}{r}\mathrm{P}\frac{t\,dt}{p^3}.\end{aligned}\right.$$

De même nous aurons (275)

$$(355)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{W}_+^{(h')} = \sum\int_0^{\frac{a}{h'}} \sigma' \log\frac{q}{t}\,dt,\\ &\mathrm{W}_-^{(h')} = \sum\int_0^{\frac{a}{h'}} \log\frac{t}{q_-}\,dt,\\ &\log\frac{q}{t} + \log\frac{t}{q_-} = -\frac{2tu'_2}{p^2} + \frac{u'^3}{p^3}\mathrm{P}',\end{aligned}\right.$$

$\lim_{t=0}\mathrm{P}'$ et $\lim_{t=\infty}\mathrm{P}'$ finies,

$$\therefore \mathrm{W}_+^{(h')} + \mathrm{W}_-^{(h')} = -2\sum\int_0^1 \sigma' u'_1 \frac{t}{p^2}\,dt - 2\sum\int_1^{\frac{a}{h'}} \sigma' u'_2\left(\frac{t}{p^2} - \frac{1}{t}\right)dt$$
$$- 2\sum\int_{h'}^{a} \sigma u_2 \frac{dr}{r} + \sum\int_0^{\frac{a}{h'}} \frac{u'^3}{p^3}\mathrm{P}'\,dt,$$

σ' et u'_2 étant égaux à σ et u_2 en y posant $r = h't$,

$$(356)\qquad \therefore \lim_{h'=0}[\mathrm{W}_+^{(h')} + \mathrm{W}_-^{(h')}] = -2\int_0^a \alpha\,dr;$$

et

$$(357)\qquad \therefore\ \Delta = \lim_{h=0}\Delta' = -2\int_0^1 x\,\frac{t^2\,dt}{p^2} - 2\int_1^{\frac{a}{h}} x\left(\frac{t^2}{p^2} - 1\right)dt$$
$$+ 4\int_0^{\frac{a}{h}} \beta\,\frac{t^2\,dt}{p^4} + \frac{2}{h}\int_0^{a} x\,dr + G_2.$$

En supposant que les deux membres de l'égalité (355) soient finies, nous trouverons

$$(358)\qquad \Delta = -2\int_0^{\frac{a}{h}}\left(\frac{x}{p^2} - \frac{2\beta t^2}{p^4}\right)dt + G_2,$$

d'où le théorème :

Théorème. — *Si* $\lim_{r=0}\frac{a_2^2}{r}$ *est finie, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim_{h=0}\Delta$ *est que*

$$(359)\qquad \begin{cases} \lim_{h=0} I_1 \ \text{soit finie,} \\ \text{où} \\ I_1 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}}\left(\frac{x}{p^2} - \frac{2\beta t^2}{p^4}\right)dt. \end{cases}$$

Remarque IV. — L'intégrale I_1 (359) peut être traitée de la même manière que la quantité G(332), en observant que

$$(360)\qquad \int_0^{\frac{a}{h}}\left(\frac{x}{p^2} - \frac{2\beta t^2}{p^4}\right)t^{\gamma-1}\,dt = 0,$$

γ étant une constante.

Pour le potentiel newtonien j'ai établi des résultats analogues ([1]). Quelques-uns des résultats de ce Mémoire ont été obtenus pour la première fois par M. Bromwich ([2]), savoir la première des formules (23),

---

(1) *Les dérivées premières et secondes du potentiel* (*Acta math.*, t. XXXI, p. 127-332; Upsala, 1907).

(2) T.-J. I'A. Bromwich, *Theorems on the logarithmic potential* (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. III, p. 345-370; London, 1905).

celles des formules du paragraphe **6** qui se rapportent à $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}$ et celles du paragraphe **9**, en employant les méthodes que j'avais données pour le potentiel newtonien ([1]).

TABLE DES INTÉGRALES.

$$q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \qquad u = \cos v, \qquad 2\pi > v > 0,$$

$$\int \frac{dv}{q^2} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} \operatorname{tang}^{-1}\left(\frac{t+1}{t-1} \operatorname{tang} \frac{v}{2}\right),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dv}{q^2} = \frac{2\pi}{|t^2 - 1|},$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{q^2} = \frac{\pi - v}{\sin v},$$

$$I = \int \frac{dt}{q^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{tang}^{-1} \frac{t-u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\int \log q \, dt = -t + (t-u)\log q + (1-u^2) I,$$

$$\int \frac{t\,dt}{q^2} = \log q + u I,$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{q^2} = t + 2u \log q + (2u^2 - 1) I.$$

$$\int \frac{dt}{q^4} = \frac{t-u}{2(1-u^2)q^2} + \frac{1}{2(1-u^2)} I,$$

$$\int \frac{t\,dt}{q^4} = \frac{tu - 1}{2(1-u^2)q^2} + \frac{u}{2(1-u^2)} I,$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{q^4} = \frac{t(2u^2 - 1) - u}{2(1-u^2)q^2} + \frac{1}{2(1-u^2)} I,$$

$$\int \frac{t^3\,dt}{q^4} = \log q + \frac{tu(4u^2 - 3) + 1 - 2u^2}{2(1-u^2)q^2} + \frac{u(3 - 2u^2)}{2(1-u^2)} I.$$

([1]) *K. Vet. Akad. Öfvers.*, Bd. LVII, p. 225-237 et 867-874; Stockholm, 1900.

$$\int \frac{dt}{q^6} = \frac{t-u}{\alpha} + \frac{3(t-u)}{\beta} + \frac{3}{\gamma}\,\mathrm{I},$$

$$\int \frac{t\,dt}{q^6} = \frac{tu-1}{\alpha} - \frac{3u(t-u)}{\beta} + \frac{3u}{\gamma}\,\mathrm{I},$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{q^6} = \frac{t(2u^2-1)-u}{\alpha} + \frac{(2u^2+1)(t-u)}{\beta} + \frac{2u^2+1}{\gamma}\,\mathrm{I}.$$

$$\int \frac{t^3\,dt}{q^6} = \frac{tu(4u^2-3)+1-2u^2}{\alpha} + \frac{3tu-4+5u^2-4u^4}{\beta} + \frac{3u}{\gamma}\,\mathrm{I},$$

$$\int \frac{t^4\,dt}{q^6} = \frac{t(1-8u^2+8u^4)+3u-4u^3}{\alpha}$$
$$+ \frac{t(-5+16u^2-8u^4)-u(11-16u^2+8u^4)}{\beta} + \frac{3}{\gamma}\,\mathrm{I}.$$

$$\int \frac{t^5\,dt}{q^6} = \log t + \frac{tu(5-20u^2+16u^4)-1+8u^2-8u^4}{\alpha}$$
$$+ \frac{tu(-25+60u^2-32u^4)+8-39u^2+44u^4-16u^6}{\beta}$$
$$+ \frac{u(15-20u^2+8u^4)}{\gamma}\,\mathrm{I};$$

$$\alpha \equiv 4(1-u^2)q^4, \qquad \beta \equiv 8(1-u^2)^2 q^2, \qquad \gamma = 8(1-u^2)^3.$$