JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BUHL

Sur la généralisation des séries trigonométriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 4 (1908), p. 39-78.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__39_0>

Sur la généralisation des séries trigonométriques;

PAR M. A. BUHL,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Objet du Mémoire. — Les travaux sur les fonctions de variables réelles dont l'origine remonte au célèbre théorème de Weierstrass sur la représentation d'une fonction continue par une série de polynomes ont conduit à étudier des développements susceptibles de représenter, d'une infinité de manières différentes, des fonctions données dans un intervalle donné. Ainsi les séries de polynomes que l'on sait former à l'heure actuelle par un nombre considérable de procédés contiennent, en général, une infinité de constantes arbitraires équivalant à une ou plusieurs fonctions arbitraires [1].

Dans un ordre d'idées assez différent au premier abord et tout au moins beaucoup plus ancien, on peut représenter des fonctions données dans un intervalle où elles satisfont à des conditions assez générales telles que celles de Dirichlet, par des séries de fonctions continues telles que les séries trigonométriques, ce qui, au point de vue théorique pur, suffit pour qu'on puisse affirmer qu'il existe, pour ces mêmes fonctions, une infinité d'autres développements en séries de fonctions continues.

[1] Je suis revenu sur ce caractère d'indétermination dans une Note aux *Comptes rendus* en date du 23 janvier 1905. Quant aux recherches du présent Mémoire, elles ont donné lieu aux Notes des 7 mai, 16 juillet et 24 septembre 1906.

Mais cependant, si l'on construit une série trigonométrique représentant une fonction bien déterminée, on se trouve en présence d'un développement qui ne comporte, par lui-même, absolument rien d'arbitraire. Aurait-on pu le former différemment? Pourrait-on mettre en évidence une opération simple et *immédiate* le transformant en d'autres développements en nombre infini et qui tous, cependant, représenteraient bien la même fonction primitivement donnée et toujours dans le même intervalle?

Telles sont les questions que je me suis posées et qui me paraissent recevoir dans ce Mémoire des réponses suffisamment complètes et curieuses par plus d'un côté.

Je crois d'abord que, toutes les fois que l'on cherchera à représenter une fonction réelle $f(x)$ au moyen des signes de l'Analyse, on donnera naissance à un problème de *prolongement*. Si l'on considère la fonction *elle-même*, bien définie dans un certain intervalle α mais non hors de celui-ci, il est clair que dans ce domaine extérieur β on pourra la continuer absolument au hasard; mais, si l'on considère une *représentation* de cette fonction, les symboles employés pourront garder une signification précise même lorsque la variable x ne sera plus dans α et donner dans β un prolongement dont l'arbitraire pourra être diminué jusqu'au point de disparaître totalement. C'est ainsi qu'une fonction développée en série trigonométrique est reproduite identiquement dans tous les intervalles identiques à celui où elle est d'abord définie et qui précèdent ou suivent celui-ci.

On comprend alors que l'étude d'une représentation n'est complète que lorsqu'elle est faite non seulement dans l'intervalle particulier où l'on peut spécialement en avoir besoin, mais dans tout le domaine extérieur.

C'est ainsi que je suis amené à montrer qu'on peut former des séries plus générales que les séries trigonométriques, séries qui contiennent un paramètre arbitraire ψ, qui représentent $f(x)$ dans un premier intervalle, puis cette fonction multipliée par $\cos\psi$, $\cos 2\psi$, ... ou par $\sin\psi$, $\sin 2\psi$, ... dans les intervalles suivant le premier et d'étendue identique. Si l'on multiplie de telles séries par une fonction arbitraire de x et de ψ, puis par $d\psi$ et que l'on intègre, on aura de nouvelles séries représentant toujours $f(x)$ dans le premier intervalle, mais des transformations données à l'avance de cette fonction dans tous les autres.

De remarquables considérations se greffent sur ces idées générales.

Tout d'abord, le procédé de génération étudié au Chapitre I donne naissance à des séries (A), (B), (C), (D_1) et (D_2) non distinctes au fond, ce qui fait que dans la suite je me borne à considérer l'un de ces types, à savoir le type (B). Leur comparaison est cependant intéressante et pourrait servir à la classification des séries trigonométriques.

Un des points les plus curieux du Chapitre II provient de ce que les coefficients d'une série (B) se laissent rassembler en séries de formes quadratiques que l'on peut facilement sommer, tout comme dans le cas des séries de Fourier [formules (H) et (H')].

Dans ce dernier cas, on ne peut obtenir que des séries arithmétiques, puisque les coefficients ne sont que des nombres. Dans le cas des séries (B), au contraire, les coefficients contiennent ψ et l'on obtient des développements où ψ peut jouer jusqu'au rôle d'une variable complexe. On retrouve ainsi des séries de fractions rationnelles, des relations entre ces séries, etc.

Je montre, d'autre part, que les séries trigonométriques généralisées sont sommables par le procédé de Cesàro, déjà appliqué aux séries de Fourier par M. Fejér. On conclut de là qu'un des développements considérés n'est cependant pas encore complètement caractérisé par le fait que la fonction qu'il représente est assujettie à des conditions données dans une infinité d'intervalles. Ainsi, la reproduction périodique de $f(x)$ ne caractérise pas une série de Fourier ([1]).

Je mentionne, en terminant ces préliminaires, que je ne me suis nullement préoccupé, quant à tous les résultats obtenus, des conditions de validité les plus générales. J'ai supposé que les fonctions considérées satisfaisaient toujours aux conditions de Dirichlet, bien qu'ayant constaté maintes fois la possibilité d'hypothèses moins restrictives. Je ferai remarquer aussi que tout le Mémoire repose sur la considération préliminaire de séries, dont les termes sont formés de sinus et de cosinus, c'est-à-dire de fonctions satisfaisant à des équations différentielles linéaires *à coefficients constants*. L'étude du cas des coefficients va-

([1]) *Voir* la note placée à la fin du Mémoire.

riables est tout indiquée par cette remarque et donnerait, sans doute, des résultats plus généraux encore qui s'ajouteraient de façon intéressante à ceux récemment obtenus, quoique dans un ordre d'idées un peu différent, par MM. Stekloff, Kneser et Fredholm. Pour l'instant, je me suis borné au premier cas, dont on pouvait plus aisément poursuivre de nombreuses conséquences.

CHAPITRE I.

FORMATION DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES DANS UN INTERVALLE DONNÉ.

1. Je me propose d'indiquer tout d'abord un procédé de formation des séries trigonométriques qui nous conduira non pas seulement à la série de Fourier, mais aux différentes formes qui se présentent dans des applications très diverses. On remarquera que le raisonnement suivant, loin d'être plus compliqué que le raisonnement classique qui sert à établir formellement la série de Fourier, est, au contraire, plus simple tout en étant plus général. Il ne nécessite même pas l'écriture explicite d'intégrales définies portant sur des produits de sinus ou de cosinus, et je ramène cette partie du raisonnement à une identité entre intégrales, laquelle se vérifie immédiatement et sans aucun calcul.

Soient des fonctions v et u de la variable x et du paramètre k, fonctions définies par le système d'équations simultanées

$$\frac{dv}{dx} = -ku, \qquad \frac{du}{dx} = kv; \tag{1}$$

d'où l'on tire immédiatement

$$v = A\cos(kx - \theta), \qquad u = A\sin(kx - \theta), \tag{2}$$

θ étant un paramètre arbitraire de même nature que k.

Supposons que k et θ puissent prendre une infinité de valeurs associées k_ν et θ_ν, ν étant un entier variant de $-\infty$ à $+\infty$; on aura identiquement (1)

$$(3)\qquad \begin{cases} k_\nu \displaystyle\int_\alpha^\beta v_\mu v_\nu\,dx - k_\mu \int_\alpha^\beta u_\nu u_\mu\,dx = (u_\nu v_\mu)_\alpha^\beta, \\ k_\mu \displaystyle\int_\alpha^\beta v_\nu v_\mu\,dx - k_\nu \int_\alpha^\beta u_\mu u_\nu\,dx = (u_\mu v_\nu)_\alpha^\beta. \end{cases}$$

Si les seconds membres de ces égalités sont toujours nuls quels que soient μ et ν, on conclut alors que les intégrales définies

$$\int_\alpha^\beta v_\mu v_\nu\,dx, \quad \int_\alpha^\beta u_\mu u_\nu\,dx$$

sont identiquement nulles si $\mu \neq \nu$, et non nulles mais égales entre elles si $\mu = \nu$.

La condition $(u_\nu v_\mu)_\alpha^\beta = 0$ s'écrit plus explicitement

$$(4)\qquad \frac{u_\nu(\alpha)}{u_\nu(\beta)} = \frac{v_\mu(\beta)}{v_\mu(\alpha)} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin(k_\nu\alpha - \theta_\nu)}{\sin(k_\nu\beta - \theta_\nu)} = \frac{\cos(k_\mu\beta - \theta_\mu)}{\cos(k_\mu\alpha - \theta_\mu)}.$$

Or, une telle égalité ne peut avoir lieu, quels que soient μ et ν, que si ses deux membres sont indépendants des indices en question. Pour l'instant j'attribue à chacun de ces membres une valeur purement constante $\tang\varphi$.

Les équations

$$\frac{\sin(k_\nu\alpha - \theta_\nu)}{\sin(k_\nu\beta - \theta_\nu)} = \tang\varphi, \qquad \frac{\cos(k_\nu\beta - \theta_\nu)}{\cos(k_\nu\alpha - \theta_\nu)} = \tang\varphi$$

donnent alors effectivement une infinité de valeurs k_ν et θ_ν. On en tire, en effet,

$$\sin 2(k_\nu\alpha - \theta_\nu) = \sin 2(k_\nu\beta - \theta_\nu), \qquad \cos k_\nu(\beta - \alpha) = \sin 2\varphi,$$

(1) Et, en effet, sans aucun calcul. Il suffit de remarquer que $k_\nu v_\nu dx = du_\nu$ et que $-k_\mu u_\mu dx = dv_\mu$.

la seconde équation s'obtenant par élimination de θ_ν, et finalement

$$(5)\quad k_\nu = \frac{2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}{\beta - \alpha}, \qquad \theta_\nu = \left[\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right]\frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{2\lambda + 1}{4}\pi,$$

λ étant un paramètre entier que l'on peut supposer choisi une fois pour toutes.

Ceci posé, soit une fonction $f(x)$ qui, dans l'intervalle réel α, β, est supposée satisfaire aux conditions de Dirichlet et imaginons que l'on tente de la développer en séries de la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \ldots + a_{-1}\cos(k_{-1}x - \theta_{-1}) + a_0\cos(k_0x - \theta_0) \\ &\qquad + a_1\cos(k_1x - \theta_1) + \ldots, \\ f(x) &= \ldots + b_{-1}\sin(k_{-1}x - \theta_{-1}) + b_0\sin(k_0x - \theta_0) \\ &\qquad + b_1\sin(k_1x - \theta_1) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Le raisonnement habituel nous donnera alors

$$(\mathrm{A})\quad f(x) = \frac{2}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} {}^{\cos}_{\sin}(k_\nu x - \theta_\nu)\int_\alpha^\beta f(\xi)\, {}^{\cos}_{\sin}(k_\nu\xi - \theta_\nu)\,d\xi.$$

C'est là le *premier type* des formules qui seront étudiées dans ce Mémoire. Ce type contient le paramètre arbitraire φ. Observons aussi que les deux développements (A) ne sont pas distincts au fond. Ils se permutent lorsqu'on change la valeur de l'entier λ qui figure dans θ_ν, mais il y a néanmoins grand avantage, au point de vue de la symétrie, à les conserver tous deux.

2. L'étude directe des développements (A) serait moins commode que celle de deux autres que nous en conclurons immédiatement par addition et soustraction, savoir :

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\cos k_\nu(x - \xi)\,d\xi,$$

$$0 = \frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\sin k_\nu(x' - \xi)\,d\xi.$$

La première formule est évidente. Quant à la seconde, après soustraction des formules (A), elle doit contenir le cosinus de

$$k_\nu(x+\xi) - 2\theta_\nu = k_\nu(x+\xi) - k_\nu(\beta+\alpha) + (2\lambda+1)\frac{\pi}{2}$$
$$= \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - k_\nu(\beta + \alpha - x - \xi),$$

ce qui est bien le sinus de $k_\nu(x'-\xi)$, si l'on pose

$$x' = \beta + \alpha - x.$$

Ici x' a une signification géométrique remarquable. C'est le point symétrique de x par rapport au milieu de l'intervalle α, β.

Et comme x' est alors toujours dans α, β en même temps que x, la première formule obtenue est aussi bien valable si l'on y remplace x par x'.

De même la seconde subsiste aussi si l'on y remplace x' par x.

En résumé, on peut écrire

$$\text{(B)}\quad \left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,{}^{\cos}_{\sin}\,k_\nu(x-\xi)\,d\xi, \qquad k_\nu = \frac{2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}{\beta-\alpha}.$$

C'est là un *second type* de formules. Ce type est beaucoup plus rapproché que le premier (A) de formules habituelles. Les θ_ν ont disparu et avec eux l'entier λ. Il reste le paramètre arbitraire φ dans k_ν. Pour $4\varphi = \pi$ on retrouve la formule de Fourier.

2 *bis*. L'examen des formules (A) conduit à se demander ce que peuvent représenter les formules

$$\mathrm{I} = \frac{2}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\sin(k_\nu x - \theta_\nu)\int_\alpha^\beta f(\xi)\cos(k_\nu\xi - \theta_\nu)\,d\xi,$$

$$\mathrm{J} = \frac{2}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\cos(k_\nu x - \theta_\nu)\int_\alpha^\beta f(\xi)\sin(k_\nu\xi - \theta_\nu)\,d\xi.$$

On en conclut

$$\frac{I+J}{2} = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\sin[k_\nu(x+\xi)-2\theta_\nu]\,d\xi,$$

$$\frac{I-J}{2} = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta f(\xi)\sin k_\nu(x-\xi)\,d\xi.$$

Or, d'après le paragraphe précédent,

$$\sin[k_\nu(x+\xi)-2\theta_\nu] = (-1)^\lambda \cos k_\nu(x'-\xi).$$

Donc

$$\frac{I+J}{2} = (-1)^\lambda f(x'), \qquad \frac{I-J}{2} = 0, \qquad I = J = (-1)^\lambda f(x').$$

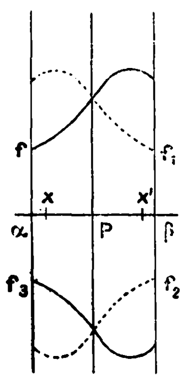
Finalement

$$\text{(C)}\quad (-1)^\lambda f(x') = \frac{2}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}{}^{\sin}_{\cos}(k_\nu x-\theta_\nu)\int_\alpha^\beta f(\xi)\,{}^{\cos}_{\sin}(k_\nu\xi-\theta_\nu)\,d\xi.$$

Ce sont des formules d'un *troisième type*. Elles offrent une particularité curieuse.

Représentons-nous géométriquement l'intervalle α, β (*fig.* 1) et la

Fig. 1.



fonction f, comme il est indiqué sur la figure. Considérons aussi le point P milieu de α, β et la droite qui passe par ce point parallèlement à celles qui limitent latéralement l'intervalle considéré.

Ce n'est pas f qui est représentée par le second membre de (C), mais la symétrique f_1 de cette courbe par rapport à la droite P.

Ceci si λ est pair. Si λ est impair, c'est la symétrique f_2 de f_1 par rapport à $\alpha\beta$ ou la symétrique de f par rapport au point P qui est représentée.

Remarquons encore que la formule (C) doit subsister si l'on y permute x et x'. Dans ces conditions, suivant que λ est pair ou impair, c'est f ou la symétrique f_3 de f par rapport à $\alpha\beta$ qui est représentée, mais il faut observer que le point de f ou de f_3 ayant une abscisse x s'obtiendra en mettant dans le second membre de (C) la valeur x' symétrique de x par rapport à P.

3. *Démonstration directe des formules précédentes.* — Tous les résultats obtenus jusqu'ici n'ont qu'un caractère purement formel et ne sont pas mieux démontrés que ne l'est l'ordinaire formule de Fourier tant qu'on n'a pas fait directement la somme de ses termes. C'est cette lacune que nous allons combler. Observons d'abord qu'il est inutile de chercher une démonstration directe de toutes nos formules, car elles se déduisent les unes des autres. Nous nous tiendrons au type (B). Le procédé de sommation de Dirichlet s'étend facilement aux séries de ce type et il nous suffira de commencer le raisonnement.

Je rappelle tout d'abord l'identité

$$\sum_{p=\varpi}^{p=\varpi'} \frac{\cos}{\sin}(a+pr) = \frac{\sin\dfrac{\varpi'-\varpi+1}{2}r}{\sin\dfrac{r}{2}} \frac{\cos}{\sin}\left(a+\frac{\varpi+\varpi'}{2}r\right),$$

où ϖ et ϖ' sont des entiers positifs ou négatifs ($\varpi' > \varpi$). Les formules (B) peuvent s'écrire

$$\left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,d\xi \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\cos}{\sin}\left[\frac{2\nu\pi \pm \left(\dfrac{\pi}{2}-2\varphi\right)}{\beta-\alpha}(x-\xi)\right],$$

et l'on a, d'après l'identité précédente,

$$\sum_{\nu=-\varpi'}^{\nu=+\varpi'} \frac{\cos}{\sin}\left[2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]\frac{x-\xi}{\beta-\alpha} = \frac{\sin\left[(2\varpi'+1)\pi\dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right]}{\sin\pi\dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}} \frac{\cos}{\sin}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right];$$

en posant

$$\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}=-\gamma, \qquad \xi = x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}, \qquad d\xi=\frac{\beta-\alpha}{\pi}d\gamma,$$

on voit que le second membre de la formule à démontrer est la limite, pour ϖ' tendant vers l'infini, de

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi\frac{\alpha-x}{\beta-\alpha}}^{\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\frac{\sin(2\varpi'+1)\gamma}{\sin\gamma}\,\frac{\cos}{\sin}\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)f\left(x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma.$$

Les limites de cette intégrale sont de part et d'autre de zéro. On peut la scinder en deux autres. Dans la première prise de $\pi\frac{\alpha-x}{\beta-\alpha}$ à o, nous changerons γ en $-\gamma$.

Il viendra finalement

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\frac{\sin(2\varpi'+1)\gamma}{\sin\gamma}\,\frac{\cos}{\sin}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]f\left(x-\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma,$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\frac{\sin(2\varpi'+1)\gamma}{\sin\gamma}\,\frac{\cos}{\sin}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\right]f\left(x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma.$$

Nous retombons donc, comme à l'ordinaire, sur des intégrales de la forme

$$J=\int_0^h\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\psi(\gamma)\,d\gamma,$$

et l'on voit que (*voir* par exemple : E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, 2^e édit., p. 237)

$$\lim_{n=\infty} J=\frac{\pi}{2}\psi(o).$$

Par suite la somme des deux intégrales précédentes se réduit à

$$\frac{1}{2}[f(x-o)+f(x+o)] \qquad \text{ou à} \qquad o,$$

suivant que l'on y prend les cosinus ou les sinus.

Cette démonstration est si exactement calquée sur celle habituellement faite pour $\varphi = 4\pi$ qu'elle peut paraître superflue. Nous verrons dans la suite, et particulièrement au paragraphe **5**, qu'elle est indispensable, car elle nous servira dans des cas où φ jouera un tout autre rôle que celui joué jusqu'ici par ce paramètre.

4. *Les séries trigonométriques de M. A. Kneser.* — M. A. Kneser, dans ses *Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik* (*Mathematische Annalen,* Bd. LVIII, 1904) a attiré l'attention sur quatre types de séries trigonométriques. Il est intéressant de voir, ne serait-ce qu'au point de vue de la classification, comment ces types se rattachent à ceux déjà étudiés ici. Ils n'en sont pas tous des cas particuliers, mais plutôt des cas singuliers.

Reprenons l'égalité du paragraphe **1**,

$$\frac{\sin(k_\nu\alpha-\theta_\nu)}{\sin(k_\nu\beta-\theta_\nu)}=\frac{\cos(k_\mu\beta-\theta_\mu)}{\cos(k_\mu\alpha-\theta_\mu)}; \tag{4}$$

on peut y satisfaire autrement qu'en supposant aux deux membres une valeur arbitraire, mais bien déterminée, $\operatorname{tang}\varphi$. Nous prendrons d'abord pour le premier membre la valeur indéterminée $\frac{0}{0}$, si bien que la valeur du second pourra être quelconque pourvu qu'elle soit finie. Les équations

$$\sin(k\alpha-\theta)=0,\qquad \sin(k\beta-\theta)=0$$

donnent, μ et ν étant des entiers,

$$(k\alpha-\theta)=\mu\pi,\qquad k\beta-\theta=(\nu+\mu)\pi,$$

d'où

$$k=\frac{\nu\pi}{\beta-\alpha},\qquad \theta=\frac{\nu\pi\alpha}{\beta-\alpha}-\mu\pi.$$

Les séries (6) du paragraphe **1** sont alors remplacées par

$$f(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\begin{matrix}a_\nu\cos\\ b_\nu\sin\end{matrix}\left(\nu\pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}+\mu\pi\right).$$

On peut d'abord supprimer $\mu\pi$ dans les parenthèses, car cela revient, quand μ est impair, à changer les signes des coefficients a_ν ou b_ν non encore déterminés. On peut ensuite rassembler les termes de coefficients a_ν et $a_{-\nu}$ ou b_ν et $b_{-\nu}$, si bien que les séries précédentes doivent être de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \begin{matrix} a'_\nu \cos \\ b'_\nu \sin \end{matrix} \left(\nu\pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right).$$

En déterminant les coefficients par le procédé ordinaire on a finalement les deux formules

$$(\mathrm{D}_1) \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta f(\xi)\, d\xi + \frac{2}{\beta-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \cos\left(\nu\pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \int_\alpha^\beta f(\xi) \cos\left(\nu\pi \frac{\xi-\alpha}{\beta-\alpha}\right) d\xi, \\ f(x) &= \frac{2}{\beta-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \sin\left(\nu\pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \int_\alpha^\beta f(\xi) \sin\left(\nu\pi \frac{\xi-\alpha}{\beta-\alpha}\right) d\xi. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose maintenant que l'on prenne

$$\cos(k\beta - \theta) = 0, \qquad \cos(k\alpha - \theta) = 0,$$

on retrouvera les séries (D_1) dans l'ordre inverse.

Enfin l'égalité (4) est encore satisfaite si l'on égale à zéro les deux numérateurs ou les deux dénominateurs. Soient

$$\sin(k\alpha - \theta) = 0, \qquad \cos(k\beta - \theta) = 0.$$

Un raisonnement semblable au précédent donne alors

$$(\mathrm{D}_2) \quad f(x) = \frac{2}{\beta-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right] \int_\alpha^\beta f(\xi) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi \frac{\xi-\alpha}{\beta-\alpha}\right] d\xi.$$

Les quatre séries comprises dans les formules (D_1) et (D_2) sont celles données par M. Kneser à l'endroit cité, avec cette seule différence que les limites α et β y sont respectivement égales à zéro et à π. On voit immédiatement que ces séries ne peuvent pas toutes servir, du moins sous la forme précédente, à la représentation d'une fonction

$f(x)$ *quelconque* dans α, β.

La seconde série (D_1) exige.... $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$
La première série (D_2) exige.... $f(\alpha) = 0$
La seconde série (D_2) exige.... $f(\beta) = 0$

De plus, ces séries ont le grave inconvénient de ne plus contenir le paramètre arbitraire φ, ce qui les rend impropres au mode de généralisation que nous allons étudier maintenant.

5. ***Génération des séries trigonométriques généralisées.*** — Reprenons la formule (B) qui est plus facilement maniable que les autres et posons

$$\psi = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right).$$

Soit de plus une fonction $F(x, \psi)$ existant pour toutes les valeurs réelles de x et pour les valeurs de ψ comprises dans un certain intervalle ψ_0, ψ_1.

Nous supposons toujours les conditions de Dirichlet satisfaites. Pour l'instant, considérons seulement $F(x, \psi)$ lorsque x est dans l'intervalle α, β, ce qué nous indiquerons par $F_0(x, \psi)$ lorsque quelque ambiguïté sera à craindre.

Ceci posé, imaginons que l'on multiplie les deux membres de (B) par $F(x, \psi)\, d\psi$, et que l'on intègre par rapport à ψ, de ψ_0 à ψ_1. Le résultat pourra s'écrire

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} f(x) \\ 0 \end{array}\right\} = \dfrac{\dfrac{1}{\beta - \alpha} \displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_\alpha^\beta \int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)\, F(x, \psi) \begin{array}{c}\cos \\ \sin\end{array} k_\nu(x - \xi)\, d\psi\, d\xi}{\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x, \psi)\, d\psi}, \\ \qquad k_\nu = \dfrac{2\nu\pi + \psi}{\beta - \alpha}. \end{array} \right.$$

Dans l'intégrale double du numérateur, l'ordre des intégrations est indifférent, puisque les limites des intégrales sont finies.

Le second membre de (E) est ce que nous appellerons une ***série trigonométrique généralisée.*** On peut démontrer directement la formule (E). Le procédé de formation est légitime, car nous avons intégré terme à terme une série en ψ qui, ainsi que cela a été démontré directement au n° **3**, ne dépend pas de ψ et qui peut, par suite, être considérée comme uniformément convergente par rapport à ce paramètre. Si maintenant nous voulons sommer directement le numérateur du second membre de (E), nous pourrons toujours imaginer que l'on réserve pour la fin des calculs l'intégration par rapport à ψ. En effectuant d'abord la sommation par rapport à ν tout se passera comme au n° **3**, et nous conclurons que le numérateur considéré est égal à

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x, \psi)\,d\psi \quad \text{ou à} \quad 0,$$

suivant qu'on y prend le cosinus ou le sinus.

6. *Remarques sur les développements en séries de fonctions continues.* — On sait que la représentation des fonctions de variables réelles par des développements en séries de fonctions continues a donné lieu, dans ces dernières années, à d'importants travaux dus notamment, en France, à MM. Baire et Lebesgue. M. Baire dit que de telles fonctions sont de classe 1, les fonctions continues étant de classe zéro. De tels développements sont possibles d'une infinité de manières et peuvent notamment prendre la forme de séries de polynomes.

Je n'ai nullement à revenir ici sur la démonstration *abstraite* de ces résultats (*voir* pour cela les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. E. Borel), mais, tout au contraire, à faire remarquer que nous avons obtenu des formules *explicites* d'accord avec les théorèmes précités.

Nous sommes partis du développement de $f(x)$ en série (B) de cosinus ou de sinus, c'est-à-dire de fonctions continues très-simples, et nous nous sommes élevés ensuite à des développements en série (E) qui, en général, n'auront plus des termes de même nature. Et comme la fonction $F(x, \psi)$ est arbitraire, on voit la vaste indétermination formelle de ces développements. On pourrait même les transformer encore en remarquant que, l'intégration en ψ une fois effectuée, ils dépendront formellement des constantes ψ_0 et ψ_1; une nouvelle multiplication par une fonction arbitraire contenant ψ_0 et ψ_1, et une nouvelle intégration par rapport à ces paramètres constitueraient une transformation qui se pourrait répéter indéfiniment.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES HORS DE L'INTERVALLE DANS LEQUEL ELLES ONT ÉTÉ FORMÉES.

7. Considérons l'intervalle α, β (toujours au point de vue géométrique précédemment adopté) et tous les intervalles identiques obtenus par une translation faite tout le long de l'axe Ox et dans les deux sens de segments tels que α, β placés bout à bout. Ces intervalles seront

$$\ldots;\ [\alpha-(\beta-\alpha)], \alpha;\ \ \alpha, \beta;\ \ \beta, [\beta+(\beta-\alpha)];\ \ [\beta+(\beta-\alpha)], [\beta+2(\beta-\alpha)];\ \ldots,$$

et, pour plus de commodité, nous ferons correspondre à chacun un simple numéro d'ordre

$$\ldots;\qquad -1\qquad;\ 0\ ;\qquad 1\qquad;\qquad\qquad 2\qquad\qquad;\ \ldots$$

que nous appellerons le *rang* de l'intervalle.

Si $f(x)$ est donné dans l'intervalle de rang 0 et qu'on y représente cette fonction par une série de Fourier ordinaire, on sait que cette série reproduira identiquement $f(x)$ dans tous les autres intervalles, ce qui est souvent considéré comme une propriété caractéristique des séries de Fourier (à tort, ainsi que nous le verrons plus loin).

Dans un ordre d'idées analogue nous allons essayer de voir ce que les séries du type (E), formées pour l'intervalle de rang 0, représentent dans tous les autres. Le résultat nous éclairera définitivement sur la nature des séries (E) ainsi que sur l'usage qui peut en être fait.

Nous avons dit que $F(x, \psi)$ était supposée définie pour x entre $-\infty$ et $+\infty$. Nous écrirons $F_n(x, \psi)$ lorsque x sera dans l'intervalle de rang n et aura pour valeur $x + n(\beta - \alpha)$. Ceci posé, essayons de voir directement ce que devient le numérateur du second membre de (E) quand x y est remplacé par $x + n(\beta - \alpha)$. L'argument $k_\nu(x - \xi)$ augmente de

$$k_\nu n(\beta - \alpha) = n(2\nu\pi + \psi) \equiv n\psi$$

et

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[k_\nu(x-\xi) + n\psi] = \begin{cases}\cos k_\nu(x-\xi)\cos n\psi - \sin k_\nu(x-\xi)\sin n\psi \\ \sin k_\nu(x-\xi)\cos n\psi + \cos k_\nu(x-\xi)\sin n\psi\end{cases}.$$

Comme de plus la formule (E) peut être appliquée si l'on y remplace $F(x, \psi)$ par $F(x, \psi)\begin{matrix}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{matrix}$, puisque ces fonctions satisfont ensemble aux conditions de Dirichlet, nous voyons que le numérateur considéré prend d'abord la forme

$$\frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta \int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi) F_n(x, \psi) \begin{matrix}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{matrix} \cos k_\nu(x - \xi)\, d\psi\, d\xi.$$

Il n'y a pas lieu de se préoccuper de l'expression analogue en $\sin k_\nu(x - \xi)$, car elle est nulle d'après la seconde partie de la formule (E). Et d'après la première partie de (E), l'expression précédente est égale à

$$f(x)\int_{\psi_0}^{\psi_1} F_n(x, \psi) \begin{matrix}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{matrix}\, d\psi.$$

En résumé, nous devons remplacer les formules (E) par les suivantes,

$$\text{(F)} \quad f(x)\frac{\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x,\psi) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\psi\, d\psi}{\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x,\psi)\, d\psi} = \frac{\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi) F(x,\psi) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k_\nu(x-\xi)\, d\psi\, d\xi}{\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(x,\psi)\, d\psi},$$

dans lesquelles x peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ et où il faut prendre n égal au rang de l'intervalle dans lequel se trouve x. Si $n = 0$ on retrouve (E). On aurait pu croire, au premier abord, qu'il y avait une différence profonde entre les deux formules (E), puisque l'une donnait

$f(x)$ et l'autre identiquement zéro; on voit maintenant que ceci est une simple particularité relative à l'intervalle de rang zéro.

8. Les formules (F) vont nous donner avec plus de facilité des résultats importants si nous supposons $\psi_1 - \psi_0 = 2\pi$ ou, plus simplement encore, $\psi_1 = 2\pi$, $\psi_0 = 0$, ce qui n'est pas moins général. Comme, par hypothèse [1], $F(x, \psi)$ satisfait aux conditions de Dirichlet aussi bien par rapport à ψ que par rapport à x, nous pouvons poser

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, \psi) = \frac{A_0(x)}{2} &+ A_1(x)\cos\psi + A_2(x)\cos 2\psi + \ldots \\ &+ B_1(x)\sin\psi + B_2(x)\sin 2\psi + \ldots, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} F(x, \psi)\cos m\psi\, d\psi = \pi A_m(x), \qquad \int_0^{2\pi} F(x, \psi)\sin m\psi\, d\psi = \pi B_m(x),$$

si bien qu'ici le premier membre de (F) s'écrit

$$(2) \qquad f(x)\frac{A_n(x)}{A_0(x)} \quad \text{ou} \quad f(x)\frac{B_n(x)}{A_0(x)},$$

suivant qu'on prend dans le second le cosinus ou le sinus.

On voit que les séries (F) représentent, dans tous les intervalles de rang positif, la fonction primitive $f(x)$ multipliée par des fonctions de x arbitraires dans chaque intervalle. Dans l'intervalle de rang zéro, $f(x)$ est multipliée soit par la constante 1, soit par la constante zéro, suivant qu'on prend dans (F) les cosinus ou les sinus. Quant à ce qui se passe dans les intervalles de rang négatif, il est facile de voir que, dans l'intervalle de rang $-n$, les multiplicateurs de $f(x)$ du premier

---

[1] Il est quelque peu superflu de s'embarrasser ici d'hypothèses relatives à $F(x, \psi)$. Tout va se passer comme si l'on voulait développer $F(x, \psi)$ en série trigonométrique double. (*Voir* à ce sujet : E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 2^e édition, p. 294.)

membre de (F) deviennent

$$\frac{\pm\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(-x,\psi)\,{}^{\cos}_{\sin}\, n\psi\, d\psi}{\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(-x,\psi)\, d\psi}.$$

D'autre part, on pourra poser

$$F(-x,\psi) = \frac{A_0(-x)}{2} + A_1(-x)\cos\psi + \ldots + B_1(-x)\sin\psi + \ldots,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} F(-x,\psi)\cos m\psi\, d\psi = \pi A_m(-x),$$

$$\int_0^{2\pi} F(-x,\psi)\sin m\psi\, d\psi = \pi B_m(-x).$$

Les expressions (2) sont alors à remplacer, toujours pour l'intervalle de rang $-n$, par

$$f(x)\frac{A_n(-x)}{A_0(-x)}, \qquad -f(x)\frac{B_n(-x)}{A_0(-x)}.$$

Or, ces nouveaux coefficients de $f(x)$ ne sont pas moins quelconques que ceux qui figurent dans les expressions (2). Donc *une série trigonométrique généralisée du type* (F) *qui représente* $f(x)$ *ou* o *dans l'intervalle de rang* o (suivant qu'on y prend les cosinus ou les sinus) *représente, dans tous les autres intervalles,* $f(x)$ *multipliée par des fonctions de* x *qui peuvent être données à l'avance.*

Une seule restriction peut provenir des conditions de convergence du second membre de (1). Ainsi, $A_n(x)$ et $B_n(x)$ doivent tendre uniformément vers zéro, quand n croît indéfiniment. On pourrait se demander, il est vrai, si la convergence de la série (1) est bien nécessaire pour ce qui précède et si l'on ne pourrait pas considérer cette série comme un pur symbole, mais cette question ne paraît pas présenter grand intérêt; il suffira de remarquer que les A_n et les B_n peuvent être quelconques dans un nombre *fini* d'intervalles, nombre d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra.

Observons encore que les résultats que nous venons d'obtenir ne sont pas spécialement particularisés par les hypothèses $\psi_1 = 2\pi$, $\psi_0 = 0$. Soit, par exemple, $0 < \psi_0 < \psi_1 < 2\pi$. On peut alors imaginer que $F(x, \psi)$ est nulle dans l'intervalle $0, \psi_0$ et dans l'intervalle $\psi_1, 2\pi$, ce qui nous ramène au cas précédent. Si ψ_0 et ψ_1 se rapprochent de manière à ne plus différer que de $d\psi$, l'intégration par rapport à ψ disparaît et les formules (F) redonnent les formules (B).

9. *Cas où* $F(x, \psi)$ *ne dépend pas de* x. — Si nous remplaçons $F(x, \psi)$ par une fonction $F(\psi)$ de la seule variable ψ, les formules (F) deviennent simplement

$$\text{(G)}\qquad f(x)\frac{\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(\psi)\,{\cos \atop \sin}\, n\psi\, d\psi}{\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(\psi)\, d\psi} = \frac{\displaystyle\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_\alpha^\beta\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)F(\psi)\,{\cos \atop \sin}\, k_\nu(x-\xi)\, d\psi\, d\xi}{\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1} F(\psi)\, d\psi}.$$

Là encore, on pourra supposer, en général, que

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} F(\psi) = \frac{a_0}{2} &+ a_1\cos\psi + a_2\cos 2\psi + \ldots \\ &+ b_1\sin\psi + b_2\sin 2\psi + \ldots \end{aligned}\right.$$

et l'on démontrera comme précédemment que, dans l'intervalle de rang positif n, le premier membre de (G) peut s'écrire

$$(4)\qquad f(x)\frac{a_n}{a_0} \quad \text{ou} \quad f(x)\frac{b_n}{a_0},$$

suivant que dans (G) on a pris les cosinus ou les sinus. Dans l'intervalle de rang $-n$, la représentation est la même que dans l'intervalle symétrique de rang n (au signe près si l'on a pris les sinus). Ici se place un léger paradoxe. De l'examen des expressions (4), il semble que l'on puisse conclure qu'en faisant

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots \quad \text{et} \quad 0 = b_1 = b_2 = \ldots$$

les formules (G) doivent naturellement se réduire à une série de Fourier, puisque alors la fonction représentée dans l'intervalle de rang zéro se répéterait identiquement dans tous les autres intervalles. Au fond, cette conclusion n'a pas de sens précis parce qu'alors la série (3) est divergente. D'autre part, en observant que

$$\pi a_m = \int_0^{2\pi} F(\psi) \cos m\psi \, d\psi, \qquad \pi b_m = \int_0^{2\pi} F(\psi) \sin m\psi \, d\psi$$

[$F(\psi)$ étant nulle s'il le faut pour ψ entre o et ψ_0 et entre ψ_1 et 2π], on voit que tous les a_m ne peuvent être égaux, ni tous les b_m nuls, à moins que $F(\psi)$ ne soit identiquement nulle. Or, on peut obtenir cela, en rapprochant ψ_1 et ψ_0 dans le voisinage de zéro, ce qui est une remarque analogue à celle du paragraphe précédent. Alors, la formule (G) se réduit bien à la formule de Fourier [1].

10. *Étude des formules* (B) *dans un intervalle de rang quelconque.* — Les formules (B) déduites de (F) ou de (G), comme il a été expliqué, se présentent sous la forme

$$(\mathrm{B}') \qquad f(x) {\scriptstyle\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}} n\psi = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_\alpha^\beta f(\xi) {\scriptstyle\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}} k_\nu (x - \xi) \, d\xi,$$

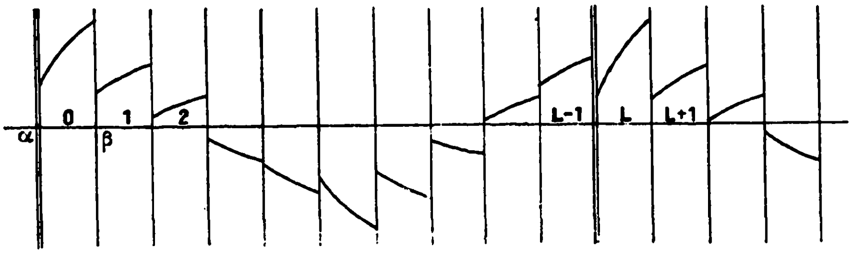
$$k_\nu = \frac{2\nu\pi + \psi}{\beta - \alpha}.$$

On voit très aisément ici que la courbe représentée dans l'intervalle de rang zéro est représentée, dans les intervalles suivants, avec toutes ses ordonnées multipliées par des facteurs de la forme ${\scriptstyle\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}} n\psi$, ce qui donne finalement une ligne discontinue à allure sinusoïdale. La figure est faite en supposant que l'on prenne les cosinus dans (B'). Les sinus auraient donné quelque chose d'analogue avec cette seule différence

(1) Les résultats de ce paragraphe ont été communiqués aux *Comptes rendus* (16 juillet 1906). Ils forment dans cette Note une seconde moitié indépendante de la première, celle-ci ayant trait à certaines remarques sur les équations aux dérivées partielles, remarques qui seront l'objet d'une réexposition spéciale.

que dans o nous aurions simplement représenté le segment α, β. En général, l'arc relatif à l'intervalle o ne sera jamais reproduit *identiquement* dans aucun autre, mais ceci se produira toutes les fois que ψ sera commensurable avec 2π. Soit, en effet, $L\psi = 2M\pi$, L et M étant

Fig. 2.



des entiers. Lorsque le rang n atteindra la valeur L, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} n\psi$ prendront l'une des valeurs 1, 0.

Dans ce cas de commensurabilité de ψ *et de* 2π, on peut remarquer qu'il est loisible de déduire (B′) de la formule de Fourier appliquée d'abord à la totalité des intervalles $0, 1, 2, \ldots, L-1$, car la représentation y est identiquement la même que dans les intervalles $L, \ldots, 2L-1, \ldots$ formés de la même manière. Mais, si l'on établit ainsi la formule (B′), il faut démontrer après coup qu'elle est encore valable même lorsque ψ et 2π ne sont plus commensurables, et, inconvénient encore beaucoup plus grave, on fait jouer à ψ un rôle très artificiel en dissimulant la véritable origine de ce paramètre, qui tient, comme on l'a vu au n° 1, à la nature même des fonctions employées dans les développements ici étudiés, sans considération préliminaire d'un développement déjà formé.

Les formules (B′) ont encore une autre importance qui provient de ce que, en les élevant au carré et les ajoutant, on a, pour représenter $[f(x)]^2$, un développement curieux au point de vue formel. Mais, comme dans ces conditions $[f(x)]^2$ est identiquement représenté dans un intervalle de rang quelconque, on peut se demander (question déjà rencontrée) si cela n'implique pas que le nouveau développement ne soit au fond qu'une série de Fourier déguisée. Nous allons voir qu'ici il en est effectivement ainsi, mais que ceci implique cependant de nouveaux résultats dignes d'attention.

11. *Relations entre les coefficients du développement de $f(x)$ en série* (B) *et ceux du développement de $[f(x)]^2$ en série de Fourier.* — Séparons les deux formules contenues dans (B').

Les sigmas des seconds membres peuvent s'écrire respectivement

$$\sum \quad A_\nu \cos k_\nu x + B_\nu \sin k_\nu x,$$

$$\sum - B_\nu \cos k_\nu x + A_\nu \sin k_\nu x,$$

en posant

$$A_\nu = \int_\alpha^\beta f(\xi)\cos k_\nu \xi \, d\xi, \qquad B_\nu = \int_\alpha^\beta f(\xi)\sin k_\nu \xi \, d\xi.$$

Élevant au carré les sigmas précédents et ajoutant on obtient, après des réductions faciles,

$$\sum\sum (A_\nu A_{\lambda+\nu} + B_\nu B_{\lambda+\nu})\cos(k_{\lambda+\nu} - k_\nu)x$$
$$+ (A_\nu B_{\lambda+\nu} - A_{\lambda+\nu}B_\nu)\sin(k_{\lambda+\nu} - k_\nu)x.$$

Or

$$k_\nu = \frac{2\nu\pi + \psi}{\beta - \alpha}, \qquad k_{\lambda+\nu} - k_\nu = \frac{2\lambda\pi}{\beta - \alpha}.$$

Donc

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\sum\sum (A_\nu A_{\lambda+\nu} + B_\nu B_{\lambda+\nu})\cos\frac{2\lambda\pi x}{\beta - \alpha}$$
$$+ (A_\nu B_{\lambda+\nu} - A_{\lambda+\nu}B_\nu)\sin\frac{2\lambda\pi x}{\beta-\alpha}.$$

Calculons maintenant

$$(5) \qquad \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}(A_\nu A_{\lambda+\nu} + B_\nu B_{\lambda+\nu}), \qquad \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}(A_\nu B_{\lambda+\nu} - A_{\lambda+\nu}B_\nu).$$

Dans chaque produit d'intégrales tel que $A_\nu A_{\lambda+\nu}$ nous pouvons, dans le second facteur, par exemple, remplacer la variable d'intégration ξ par une variable auxiliaire ζ, ce qui permet de remplacer ledit produit par une intégrale double.

La première des expressions (5) devient ainsi

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta f(\xi)f(\zeta)\cos\frac{(2\nu\pi+\psi)(\xi-\zeta)-2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}d\xi\,d\zeta$$

ou

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta f(\xi)f(\zeta)\cos k_\nu(\xi-\zeta)\cos\frac{2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}d\xi\,d\zeta.$$

L'expression analogue contenant des sinus est nulle, d'après la seconde des formules (B); d'après la première, on trouve immédiatement, pour l'expression précédente et pour celle qui correspond à la seconde formule (5),

$$(6)\qquad \int_\alpha^\beta [f(\zeta)]^2\cos\frac{2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}d\zeta,\qquad \int_\alpha^\beta [f(\zeta)]^2\sin\frac{2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}d\zeta.$$

Si, dans le développement de $[f(x)]^2$, on met ces expressions à la place des expressions (5), on retrouve bien une série de Fourier.

Les égalités

$$(\mathrm{H})\qquad \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\begin{pmatrix}A_\nu A_{\lambda+\nu}+B_\nu B_{\lambda+\nu}\\ A_\nu B_{\lambda+\nu}-B_\nu A_{\lambda+\nu}\end{pmatrix}=\int_\alpha^\beta [f(\zeta)]^2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{2\lambda\pi\zeta}{\beta-\alpha}d\zeta$$

sont des généralisations d'égalités analogues données par M. H. Lebesgue pour les séries de Fourier (*Leçons sur les séries trigonométriques*, 1906, p. 100). On voit qu'une série (B) contient non seulement un paramètre ψ dont elle est au fond indépendante, mais que l'on peut former avec ses coefficients des séries de formes quadratiques qui sont dans le même cas. Pour $\lambda = 0$, la formule (H) nous permet d'exprimer la somme des carrés des coefficients d'une série (B). On trouve, en effet,

$$(\mathrm{H}')\qquad \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}(A_\nu^2+B_\nu^2)=\int_\alpha^\beta [f(\zeta)]^2 d\zeta.$$

12. *Exemples explicites de séries trigonométriques généralisées.* — Il n'est pas beaucoup plus difficile, en général, de former des séries (B) que des séries de Fourier. L'intégration en ψ peut être ensuite plus pénible, mais les séries (E) n'en sont pas moins remarquables parmi des séries qui dépendent d'opérations transcendantes pratiquement et même symboliquement inexécutables. De plus, une série (B) étant formée, elle peut donner, par l'intermédiaire des formules (H) et (H'), des résultats très remarquables, tels que des séries arithmétiques, des séries de fractions rationnelles, etc. Reprenons les formules (B) écrites un peu plus explicitement comme suit :

$$\left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\beta-\alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} k_\nu x \pm B_\nu \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} k_\nu x, \qquad k_\nu = \frac{2\nu\pi+\psi}{\beta-\alpha},$$

A_ν et B_ν ayant les significations indiquées au paragraphe précédent.

Proposons-nous de développer d'abord une simple constante, soit 1, en série (B) et cela dans l'intervalle $\alpha = -\pi$ à $\beta = +\pi$ qui sera ici l'intervalle de rang zéro. Une série de Fourier ne donnerait pas à proprement parler un développement, non pas que la formation en soit impossible, mais parce qu'elle n'est que trop simple; tous les coefficients du développement, sauf le premier, seraient nuls et l'on aurait seulement $1 = 1$. Il en est autrement avec une série (B).

Tout d'abord, on a $k_\nu = \nu + \frac{\psi}{2\pi} = \nu + \psi'$ et, pour plus de simplicité, nous supprimerons l'accent de ψ'. On aura ensuite

$$A_\nu = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\nu+\psi)\xi \, d\xi = 2\frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi},$$

$$B_\nu = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(\nu+\psi)\xi \, d\xi = 0.$$

Donc

$$(7) \qquad 1 = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi} \cos(\nu+\psi)x.$$

Pour $\psi = 0$, on retrouve l'identité $1 = 1$. Le principal intérêt d'une telle série provient des relations que les formules (H) et (H') vont donner entre ses coefficients. Ainsi (H′) donne

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} 4\frac{\sin^2(\nu+\psi)\pi}{(\nu+\psi)^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} d\zeta,$$

d'où

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{(\nu+\psi)^2}.$$

Cette formule subsiste évidemment si l'on y considère ψ comme une variable complexe. Le second membre est une série de fractions rationnelles uniformément convergente que l'on peut dériver ou intégrer par rapport à ψ. De plus, comme ψ est arbitraire on peut, dans les formules obtenues, remplacer ψ par $\frac{1}{2} - \psi$. On a ainsi des formules en nombre infini, dont voici quelques-unes qui seront utiles un peu plus loin :

$$\pi \cot \pi\psi = \sum_\nu \frac{1}{\nu+\psi}, \qquad \pi \operatorname{tang} \pi\psi = \sum_\nu \frac{1}{\nu + \frac{1}{2} - \psi},$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{(\nu+\psi)^2}, \qquad \frac{\pi^2}{\cos^2\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}-\psi\right)^2},$$

$$\frac{\pi^3\cos\pi\psi}{\sin^3\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{(\nu+\psi)^3}, \qquad \frac{\pi^3\sin\pi\psi}{\cos^3\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}-\psi\right)^3},$$

$$\frac{\pi^4}{3}\,\frac{1+2\cos^2\pi\psi}{\sin^4\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{(\nu+\psi)^4}, \qquad \frac{\pi^4}{3}\,\frac{1+2\sin^2\pi\psi}{\cos^4\pi\psi} = \sum_\nu \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}-\psi\right)^4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Ces formules, bien entendu, sont faciles à obtenir par l'habituelle méthode de Cauchy. L'intérêt ici consiste à les obtenir comme résultant des propriétés des coefficients d'une série (B).

13. Développons maintenant $\frac{x}{2}$ de $-\pi$ à $+\pi$. On a sans peine

$$A_\nu = 0, \qquad B_\nu = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\xi}{2}\sin(\nu+\psi)\xi\, d\xi = \frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{(\nu+\psi)^2} - \frac{\pi\cos(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi}.$$

Donc

$$(8)\qquad \frac{x}{2} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\left[\frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi} - \pi\cos(\nu+\psi)\pi\right]\frac{\sin(\nu+\psi)x}{\nu+\psi}.$$

Pour $\psi = 0$, on retrouve la formule bien connue

$$(9)\qquad \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots.$$

Si nous reprenons la série précédente, la formule (H′) nous donnera

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\frac{1}{(\nu+\psi)^2}\left[\frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{(\nu+\psi)\pi} - \pi\cos(\nu+\psi)\pi\right]^2 = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\zeta^2}{4}\,d\zeta,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\pi^4}{3} = \sin^2\pi\psi\sum\frac{1}{(\nu+\psi)^4} - 2\pi\sin\pi\psi\cos\pi\psi\sum\frac{1}{(\nu+\psi)^3}$$
$$+ \pi^2\cos^2\pi\psi\sum\frac{1}{(\nu+\psi)^2}.$$

C'est là une formule récurrente qui pourrait servir à calculer une des sommes considérées au paragraphe précédent, lorsqu'on en connaît deux autres. On la vérifie immédiatement, les trois sigmas qu'elle contient étant connus d'après les formules terminant le n° **12**.

14. Cherchons encore à développer $\frac{x^2}{4}$ toujours dans le même intervalle. Cette fois B_ν est nul et l'on a, tout calcul fait,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x^2}{4} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}&\left[\frac{\pi^2}{2}\sin(\nu+\psi)\pi\right.\\ &\left.+\pi\frac{\cos(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi} - \frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{(\nu+\psi)^2}\right]\frac{\cos(\nu+\psi)x}{\nu+\psi}.\end{aligned}\right.$$

Pour $\psi = 0$, on a

$$\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2\pi}\sum\left(\frac{\pi^2}{2}\frac{\sin\nu\pi}{\nu} + \pi\frac{\cos\nu\pi}{\nu^2} - \frac{\sin\nu\pi}{\nu^3}\right)\cos\nu x.$$

Le terme qui correspond à $\nu = 0$ se présente alors sous une forme indéterminée, mais on trouve sans peine que sa vraie valeur est $\frac{\pi^2}{12}$ et le développement précédent devient

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots, \tag{11}$$

ce qui est encore un résultat bien connu. La formule (H′) nous donnerait ici

$$\frac{\pi^6}{5} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left[\frac{\pi^2 \sin \pi\psi}{\nu+\psi} + \frac{2\pi \cos \pi\psi}{(\nu+\psi)^2} - \frac{2 \sin \pi\psi}{(\nu+\psi)^3}\right]^2,$$

ce qui prend encore facilement la forme d'une formule récurrente relative aux sommes déjà considérées.

15. *Sur l'intégration et la dérivation des séries* (B). — Peut-on admettre que les séries (B) sont intégrables ou dérivables en même temps que les séries de Fourier que l'on en tire pour $\psi = 0$. Il est facile de voir que la réponse est affirmative si toutefois on remarque qu'une certaine série (B) et sa fonction primitive peuvent ne se correspondre qu'à la condition de donner à la constante d'intégration la forme d'une série (B). Ainsi (11) ayant pour dérivée (9), (10) doit avoir (8) pour dérivée. Mais cela n'est immédiatement vérifiable qu'en remarquant que, dans le second membre de (10), on peut poser, d'après la formule (7),

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\pi^2}{2} \frac{\sin(\nu+\psi)\pi}{\nu+\psi} \cos(\nu+\psi)x = \frac{\pi^3}{2}.$$

Cette précaution prise, la dérivation est immédiate et redonne bien la série (8). Par contre (8) ne saurait donner (7) par dérivation, mais cela n'a rien d'extraordinaire, puisque (9) n'est pas dérivable.

16. *Développements de* $\sin mx$ *et de* $\cos mx$. — Prenons encore, comme exemples simples et remarquables, les développements en série (B) de $\sin mx$ et de $\cos mx$, m étant un nombre quelconque. On trouve facilement

$$\sin mx = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (-1)^\nu \left[\frac{\sin(m-\psi)\pi}{m-\nu-\psi} - \frac{\sin(m+\psi)\pi}{m+\nu+\psi}\right] \sin(\nu+\psi)x,$$

$$\cos mx = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (-1)^\nu \left[\frac{\sin(m-\psi)\pi}{m-\nu-\psi} + \frac{\sin(m+\psi)\pi}{m+\nu+\psi}\right] \cos(\nu+\psi)x.$$

La formule (H′) nous donne maintenant

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left[\frac{\sin(m-\psi)\pi}{m-\nu-\psi} \pm \frac{\sin(m+\psi)\pi}{m+\nu+\psi}\right]^2 = \int_{\pi}^{+\pi} \left(\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, m\zeta\right)^2 d\zeta = \pi.$$

On peut déduire de là

$$2\pi^2 = \sin^2(m-\psi)\pi \sum \frac{1}{(m-\psi-\nu)^2} + \sin^2(m+\psi)\pi \sum \frac{1}{(m+\psi+\nu)^2},$$

ce qu'il est facile de vérifier.

On voit suffisamment par ces exemples comment l'existence d'un développement en série (B) entraîne l'existence de plusieurs autres séries intéressantes et élégantes.

17. *Remarques sur l'intégration relative à ψ.* — Les quelques exemples qui précèdent montrent que des séries (B) fort simples ne se laissent pas facilement intégrer par rapport à ψ, s'il s'agit, bien entendu, d'une intégration explicite. Mais cette difficulté peut être déplacée de façon remarquable. Considérons à nouveau le numérateur du second membre de (E) ou de (F). On peut l'écrire, en modifiant un peu la forme de ψ,

$$\frac{1}{\beta-\alpha} \sum \int_\alpha^\beta \int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi) F(x, \psi) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left[\frac{2\pi}{\beta-\alpha}(\nu-\psi)(x-\xi)\right] d\psi\, d\xi.$$

On voit alors que, *si l'on convient de commencer par l'intégration relative à ψ*, celle-ci sera exactement de même nature que si l'on se proposait de développer $F(x, \psi)$ en série trigonométrique. La plus grande complication sera alors reportée sur l'intégration en ξ. Comme exemple extrêmement simple, prenons la série (B),

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) \cos[(\nu - \psi)(x - \xi)]\, d\xi,$$

faisons $F(x, \psi) = 1$, c'est-à-dire multiplions simplement par $d\psi$ et intégrons entre $-\pi$ et $+\pi$; on aura

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) \frac{\sin\pi(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} \cos\nu(x-\xi)\, d\xi.$$

Cette formule, qui représente $f(x)$ dans l'intervalle de rang zéro $(-\pi, +\pi)$, représente identiquement zéro dans tous les autres, ce qui ressort clairement du procédé de formation. La méthode employée permettrait évidemment de former beaucoup d'autres séries analogues. Enfin, pour $F(x, \psi) = 1$, $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 2\pi$, on tire de (F)

$$2\pi \left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{2\pi} f(\xi) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \left[\frac{2\nu\pi + \psi}{\beta - \alpha}(x - \xi)\right] d\psi\, d\xi$$

ou, comme il est facile de le voir,

$$\left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, \varkappa(x - \xi)\, d\varkappa\, d\xi.$$

Le second membre ainsi obtenu doit représenter $f(x)$ (ou zéro) dans α, β et toujours zéro hors de α, β. Or, c'est là la formule bien connue de Fourier où ne figurent que des intégrales et non des sigmas.

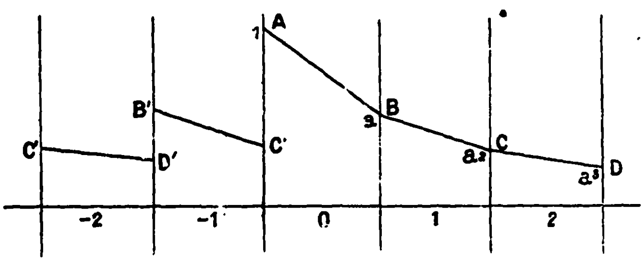
CHAPITRE III.

APPLICATIONS ET PROPRIÉTÉS DIVERSES DES SÉRIES GÉNÉRALISÉES.

18. *Représentation des fonctions ponctuellement discontinues.* — Considérons une série (B) ou plus généralement une série (E), dans laquelle $F(x, \psi)$ est fonction continue de x et de ψ. Si dans l'une des séries en question on ne prend qu'un nombre *fini* de termes, on ne construira jamais ainsi autre chose qu'une fonction continue, tout comme dans le cas d'une série trigonométrique ordinaire. Cependant, si l'on prend une infinité de termes, on représente, *en général*, une fonction discontinue, car il n'y a aucune raison pour qu'il y ait partout raccordement entre les différents segments de courbe qui se trouvent dans des intervalles de rangs consécutifs. Avec la terminologie adoptée par M. R. Baire (*Leçons sur les fonctions discontinues*, 1905), on peut donc dire que les fonctions discontinues représentées par les séries trigonométriques généralisées sont des fonctions *limites* de fonctions continues. Nous allons voir comment la considération des séries généralisées permet de mettre en lumière certains faits concernant les fonctions discontinues de façon particulièrement simple.

Commençons d'abord par le cas exceptionnel où la formule (G) permettra la représentation d'une fonction continue dans le champ réel

Fig. 3.



indéfiniment étendu dans le sens positif, c'est-à-dire formé par les intervalles de rangs 0, 1, 2, ... Soit, pour simplifier, un segment de droite considéré dans l'intervalle de rang zéro et dont les extrémités ont pour ordonnées 1 et a ($a < 1$).

Si nous prenons la série (G), susceptible de représenter ce segment dans l'intervalle zéro, cette même série représentera dans les intervalles suivants un segment analogue formé en multipliant les ordonnées du premier par des constantes $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots$, et les conditions de raccordement entre tous ces segments seront

$$\frac{a_1}{a_0} = a, \qquad \frac{a_2}{a_0} = a^2, \qquad \ldots.$$

Par suite (n° **9**),

$$F(\psi) = a_0\left(\frac{1}{2} + a\cos\psi + a^2\cos 2\psi + \ldots\right) = a_0\left(\frac{1 - a\cos\psi}{1 - 2a\cos\psi + a^2} - \frac{1}{2}\right).$$

Dans les intervalles de rang négatif, on obtient alors des segments B′C′, C′D′, ... respectivement placés dans -1, -2, ... comme BC, CD, ... dans 1, 2, ... et il est clair qu'alors le raccordement est impossible. Si à AB on avait substitué un segment curviligne ayant mêmes extrémités, les conclusions auraient été identiques et, en résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

Une série (G) *représente, en général, une ligne ayant pour discontinuités les extrémités d'un intervalle de rang quelconque. Il peut y avoir exceptionnellement continuité quand on passe de tout intervalle de rang nul ou positif au suivant et l'on obtient alors une ligne à points anguleux situés sur la courbe exponentielle*

$$y = a^n, \qquad x = n(\beta - \alpha).$$

Observons toujours que ceci suppose $a < 1$. Pour $a > 1$ on obtiendrait les raccordements dans l'ensemble des intervalles de rang négatif.

19. Si, d'une série (G), nous revenons à une série (E), nous reconnaîtrons immédiatement qu'une question analogue à celle que nous venons de résoudre ne se pose plus. A coup sûr, si l'on part d'une fonction continue dans tout l'intervalle de rang zéro et que l'on construise une série (E) quelconque [1] pour l'y représenter, il arrivera, *en général,* que la fonction ainsi construite entre $-\infty$ et $+\infty$ sera continue dans l'intervalle de rang zéro et dans tous les autres, mais discontinue quand on passera d'un intervalle à un autre. Mais cela n'empêche pas que ces dernières discontinuités n'existent qu'en géné-

---

[1] C'est-à-dire telle que $F(x, \psi)$ n'y soit pas particulièrement déterminée.

ral et non de façon inévitable. Nous avons vu, en effet, en écrivant la formule (E) sous la forme (F) qu'elle représentait $f(x)$ dans o et cette fonction multipliée par des fonctions arbitraires ([1]) dans tous les autres intervalles. Cela permettra évidemment de supprimer autant de discontinuités qu'on le voudra.

Revenons au cas général. Soit $\varphi(x)$ le second membre de (E). C'est là une fonction de x dont nous connaissons parfaitement l'allure entre $-\infty$ et $+\infty$. Soit k un nombre entier et considérons $\varphi(kx+\alpha)$, α et β étant toujours les limites de l'intervalle de rang zéro. Les discontinuités de cette nouvelle fonction seront définies par

$$(1)\qquad kx+\alpha=\alpha+m(\beta-\alpha)\qquad\text{ou}\qquad x=\frac{m}{k}(\beta-\alpha).$$

Donc $\varphi(kx+\alpha)$ est une fonction ayant, comme $\varphi(x)$, des discontinuités équidistantes, mais elles sont d'autant plus rapprochées que k est plus grand.

20. *Fonctions discontinues dans tout intervalle.* — En partant de ce qui précède, on peut construire, avec une extrême facilité, des fonctions discontinues dans tout intervalle d'un type analogue à celui de certaines fonctions déjà construites par M. G. Darboux, dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale*, 1875). Ces fonctions sont développables en séries, dont les termes ne sont que ponctuellement discontinus. D'après la terminologie de M. Baire, elles sont de classe 2. Soit la série

$$(2)\qquad \Phi(x)=a_1\varphi(x+\alpha)+a_2\varphi(2x+\alpha)+a_3\varphi(3x+\alpha)+\ldots,$$

qui, avec les hypothèses faites pour la construction de φ, est uniformément convergente si $a_1+a_2+a_3+\ldots$ est absolument convergente. Pour $x=\frac{m}{k}(\beta-\alpha)$, le terme d'indice k et tous ceux d'indice multiple de k sont discontinus.

Donc $\Phi(x)$ est une fonction discontinue pour toutes les valeurs de x

---

([1]) Fonctions assujetties cependant à rendre convergente la série (1) du n° 8.

commensurables avec $\beta - \alpha$, mais continue pour toutes les autres valeurs de x.

On peut former des exemples plus intéressants encore. Soit $y = \psi(x)$ une courbe continue, dont l'ordonnée y varie de $-\infty$ à $+\infty$, lorsque x parcourt un intervalle d'extrémités à distance finie. Une telle courbe sera coupée au moins en un point par une parallèle à l'axe des x, ce qui revient à dire qu'une équation telle que

$$\psi(x) = \alpha + m(\beta - \alpha) \tag{3}$$

aura au moins une racine, lorsque le second membre y sera considéré comme une simple constante. Par suite, cette équation aura une infinité de racines correspondant chacune à une valeur de l'entier m. Soit maintenant la série

$$\Phi(x) = a_1\varphi[\psi_1(x)] + a_2\varphi[\psi_2(x)] + \ldots, \tag{4}$$

où $\psi_1, \psi_2, \ldots$ sont des fonctions du type ψ. On conçoit que $\Phi(x)$ puisse être dans ces conditions une fonction admettant pour discontinuités les racines de toute une classe d'équations (algébriques ou transcendantes), en entendant par classe d'équations l'ensemble des équations de même forme, mais de coefficients différents.

Nous n'insisterons pas davantage sur de telles considérations qui seraient mieux à leur place dans une étude sur les fonctions de variables réelles et rentrent d'ailleurs dans le problème de la construction de fonctions discontinues pour tous les points d'un ensemble dénombrable.

21. *Application du procédé de sommation de M. Fejér aux séries trigonométriques généralisées.* — Dans un court mais très intéressant Mémoire intitulé *Untersuchungen über Fouriersche Reihen* (*Mathematische Annalen*, t. LVIII, 1904), M. Fejér applique aux séries de Fourier un procédé de sommation étudié dans le cas des séries entières par MM. Borel, Mittag-Leffler, etc. Il montre que, si s_n est la somme des n premiers termes d'une série de Fourier, la limite de l'expression

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n},$$

pour n croissant indéfiniment, est, en général, la même que celle de s_n. Bien plus l'expression précédente peut avoir une limite, s_n n'en ayant pas, d'où la notion de série trigonométrique divergente et sommable ([1]). Je vais montrer ici que la méthode de M. Fejér s'applique aux séries (B) ou (F). Commençons par étudier les séries (B).

Posons

$$(5)\quad s_\varpi = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\nu=-\varpi}^{\nu=+\varpi}\int_\alpha^\beta f(\xi)\,{\cos \atop \sin}\,k_\nu(x-\xi)\,d\xi,\qquad k_\nu = \frac{2\nu\pi \pm \left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)}{\beta-\alpha},$$

en reprenant les mêmes notations qu'au n° **3**, car il sera intéressant de comparer les résultats obtenus dans ce numéro avec ceux que nous allons obtenir maintenant. D'après une identité déjà employée, on a

$$s_\varpi = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\xi)\frac{\sin\left[(2\varpi+1)\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right]}{\sin\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}}\,{\cos \atop \sin}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right]d\xi.$$

De plus

$$\sum_{\varpi=0}^{\varpi=n-1}\sin\left[(2\varpi+1)\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right] = \frac{\sin^2 n\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}}{\sin\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}};$$

donc

$$\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(\beta-\alpha)}\int_\alpha^\beta f(\xi)\frac{\sin^2 n\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}}{\sin^2\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}}\,{\cos \atop \sin}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\frac{x-\xi}{\beta-\alpha}\right]d\xi.$$

Toujours comme au n° **3**, posons

$$\pi\frac{x-\xi}{\beta-\alpha} = -\gamma,\qquad \xi = x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi},\qquad d\xi = \frac{\beta-\alpha}{\pi}d\gamma;$$

il viendra

$$\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n} = \frac{1}{\pi n}\int_{\pi\frac{\alpha-x}{\beta-\alpha}}^{\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\frac{\sin^2 n\gamma}{\sin^2\gamma}\,{\cos \atop \sin}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]f\left(x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma.$$

([1]) *Voir* la note placée à la fin du Mémoire.

Il nous reste à chercher la limite de cette expression pour n croissant indéfiniment. C'est là une étude absolument analogue à celle de l'intégrale de Dirichlet qui se rencontre quand on fait la sommation des termes d'une série de Fourier.

M. Fejér, qui a étudié cette intégrale dans le cas un peu plus simple où le facteur $\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\frac{\gamma}{\pi}\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$ n'y figure pas, fait à son sujet des remarques aussi importantes que judicieuses. Contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, elle est plus simple que celle de Dirichlet. Dans cette dernière, en effet, figure un quotient de sinus qui change de signe de plus en plus fréquemment lorsque n croît, tandis qu'ici un pareil quotient figure par son carré, lequel garde un signe invariable. Ceci entraîne que l'intégrale ici considérée peut être évaluée au moyen du premier théorème de la moyenne, tandis que l'intégrale de Dirichlet nécessite l'emploi moins simple du second.

Comme au n° **3** nous remarquerons que zéro est compris entre les deux limites $\pi\frac{\alpha-x}{\beta-\alpha}$ et $\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}$, et, par suite, l'intégrale précédente pourra se scinder en les deux suivantes,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\frac{\sin^2 n\gamma}{\sin^2\gamma}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]f\left(x+\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma\\ &+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\frac{\sin^2 n\gamma}{\sin^2\gamma}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\left[\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\right]f\left(x-\gamma\frac{\beta-\alpha}{\pi}\right)d\gamma,\end{aligned}$$

γ ayant été changé en $-\gamma$ dans la seconde. Ce sont là des intégrales de la forme

$$J=\int_0^h\frac{\sin^2 n\gamma}{n\sin^2\gamma}\psi(\gamma)\,d\gamma,$$

et l'on sait que (*voir* L. Fejér, *loc. cit.*, p. 55)

$$\lim_{n=\infty} J=\frac{\pi}{2}\psi(0).$$

Donc

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n}=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],$$

si l'on a pris les cosinus dans (5); le second membre est à remplacer par *zéro* si l'on a pris les sinus. On voit que le résultat est entièrement analogue à celui qu'on obtient en sommant directement, terme à terme, une série (B).

22. Pour simplifier l'écriture, supposons que $f(x)$ soit continue dans α, β, et posons

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}, \qquad S_0 = 0,$$

d'où

$$f(x) = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots.$$

Observons de plus les identités

$$\frac{\sin^2 n\theta}{n \sin^2\theta} - \frac{\sin^2(n-1)\theta}{(n-1)\sin^2\theta} = \frac{n\cos 2(n-1)\theta - (n-1)\cos 2n\theta - 1}{2n(n-1)\sin^2\theta}$$
$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{k=n-1} k \cos 2k\theta.$$

Le dernier membre est la dérivée, par rapport à θ, de

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{k=n-1} \sin 2k\theta = \frac{\sin(n-1)\theta \sin n\theta}{n(n-1)\sin\theta} = \frac{\cos\theta - \cos(2n-1)\theta}{2n(n-1)\sin\theta}.$$

Dans ces conditions on forme facilement $S_n - S_{n-1}$ et l'on conclut

$$\text{(I)} \quad \left.\begin{matrix} f(x) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_\alpha^\beta f(\xi) \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(n-1)\pi \dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha} \sin n\pi \dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}}{n(n-1)\sin\pi \dfrac{x-\xi}{\beta-\alpha}} \right] \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left| \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) \frac{x-\xi}{\beta-\alpha} \right] d\xi.$$

Ce sont là des séries d'un nouveau type entièrement comparables aux séries (B).

Dans un intervalle de rang quelconque elles représentent exactement ce que représente une série (B) dans le même intervalle. En particulier, pour $4\varphi = \pi$, la formule (I) donne une série entièrement comparable à la série de Fourier et, par suite, *le fait de représenter une fonction donnée dans l'intervalle de rang zéro et de la répéter* *identiquement dans tous les autres intervalles n'est pas une propriété caractéristique de la série de Fourier.*

Remarquons que de la série (I) on pourrait essayer d'en déduire d'autres en réappliquant le procédé qui a été appliqué à (B). La somme des n premiers termes de (I) est S_n et l'on pourrait alors chercher la limite, pour n croissant indéfiniment, de

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}.$$

Mais c'est là une étude que je me borne à signaler et qui, indéfiniment poursuivie, conduirait vraisemblablement à une infinité de séries jouissant des propriétés des séries (B) ou de la série de Fourier. On se reportera à ce sujet aux *Comptes rendus* du 13 janvier 1908.

23. On voit maintenant sans peine que le procédé de sommation précédent s'applique aussi bien aux séries généralisées du type (F). Il suffirait de raisonner comme au numéro précédent, en convenant de reporter toujours à la fin des calculs les intégrations par rapport à ψ. La conclusion serait la même qu'au n° **5**.

Ce sont là des résultats remarquables, non seulement quant aux séries ici étudiées, mais aussi quant à la méthode de sommation due à Cesàro, à MM. Mittag-Leffler, Borel, etc.

Observons aussi que, si une série (F) a été employée à la représentation d'une fonction ayant des expressions diverses et données à l'avance dans des intervalles de rangs différents, il y aura, en général, une infinité d'autres séries permettant une représentation identique.

24. *Remarques sur les solutions des équations linéaires aux dérivées partielles.* — Reprenons la formule (I) pour $4\varphi = \pi$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$. Elle s'écrit alors, en utilisant l'une des identités précédentes et en remplaçant x par θ,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi) \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{k\cos k(\theta-\xi)}{n(n-1)}\,d\xi.$$

Le second membre est évidemment une fonction périodique de θ

admettant la période 2π. Considérons maintenant l'expression

$$U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi) \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{k r^k \cos k(\theta-\xi)}{n(n-1)}\,d\xi.$$

C'est une solution de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

Or, U_1 est de période 2π par rapport à θ et prend sur le cercle $r=1$ la valeur $f(\theta)$. Comme il ne peut y avoir qu'une solution de cette nature (principe de Dirichlet) il faut conclure que U_1 est identiquement équivalente à la solution de Poisson

$$U_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi) r^n \cos n(\theta-\xi)\,d\xi.$$

Remarquons que dans les solutions U_1 et U_2 ce sont toujours des termes de la forme $r^n \cos n(\theta-\xi)$ qui figurent dans les intégrales, mais ils sont rassemblés dans U_1 de manière à donner une série convergeant tout autrement que U_2.

On peut ajouter aussi que la méthode de sommation de M. Fejér n'est pas essentiellement distincte de la méthode analogue relative aux séries entières. Considérons les deux développements suivants, qui jouent un rôle capital en Physique mathématique et en Astronomie :

$$\log\sqrt{1+2r\cos\theta+r^2} = \frac{r\cos\theta}{1} - \frac{r^2\cos 2\theta}{2} + \frac{r^3\cos 3\theta}{3} - \ldots,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{1} - \frac{r^2\sin 2\theta}{2} + \frac{r^3\sin 3\theta}{3} - \ldots.$$

D'après ce que nous venons de voir, les deux seconds membres peuvent être remplacés respectivement par

$$\frac{r\cos\theta}{1.2} + \frac{r\cos\theta - r^2\cos 2\theta}{2.3} + \frac{r\cos\theta - r^2\cos 2\theta + r^3\cos 3\theta}{3.4} + \ldots,$$

$$\frac{r\sin\theta}{1.2} + \frac{r\sin\theta - r^2\sin 2\theta}{2.3} + \frac{r\sin\theta - r^2\sin 2\theta + r^3\sin 3\theta}{3.4} + \ldots;$$

Or, les deux premiers développements s'obtiennent directement en partant de

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots,$$

et en posant $z = re^{\theta i}$; en réunissant de même les deux derniers on trouve

$$\log(1+z) = \frac{z}{1.2} + \frac{z-z^2}{2.3} + \frac{z-z^2+z^3}{3.4} + \ldots,$$

formule facile à établir directement. On voit par cet exemple élémentaire que la possibilité de sommer de manières différentes une série trigonométrique découle d'une possibilité de même nature relative aux séries entières.

25. Reprenons maintenant les formules (G) du n° **9** et, pour simplifier l'écriture, considérons uniquement le numérateur du second membre où l'on prendra seulement le cosinus et $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$. Ce numérateur pourra alors s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)\,\mathrm{F}(\psi)\cos[(\nu+\psi)(x-\xi)]\,d\psi\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\psi_0}^{\psi_1} f(\xi)\,\mathrm{F}(\psi)\cos[(\nu-\psi)(x-\xi)]\,d\psi\,d\xi.$$

Imaginons ensuite que l'on forme une nouvelle expression en partant de celle-ci dans laquelle on mettrait $r^{\nu+\psi}$ en facteur devant $\cos[(\nu+\psi)(x-\xi)]$ et $r^{\nu-\psi}$ en facteur devant $\cos[(\nu-\psi)(x-\xi)]$. L'expression ainsi formée serait bien encore une solution de l'équation de Laplace primitivement considérée; de plus, elle représenterait $f(x)$ [ou $f(\theta)$] sur le cercle $r=1$, mais à la condition que x (ou θ) ne croisse pas au delà de 2π, sans quoi, d'après les propriétés reconnues à la formule (G), c'est le produit de $f(x)$ par une certaine constante qui serait représenté, constante qui changerait à nouveau lorsque la variable franchirait la valeur 4π et ainsi de suite.

Physiquement on pourrait se représenter une surface de Riemann formée de feuillets circulaires (de rayon 1) superposés dont les lignes de passage seraient des rayons. Sur le pourtour du feuillet supérieur, la température serait $f(\theta)$ et, sur les pourtours des second, troisième, etc. feuillets, les températures seraient respectivement $a_1 f(\theta)$, $a_2 f(\theta)$, etc. Nous aurions alors construit une fonction représentant la distribution des températures dans la surface précédente.

Notre étude pourrait encore conduire à d'autres comparaisons.

Prenons d'abord une ordinaire série de Fourier construite dans l'intervalle de rang zéro pour y représenter une fonction de variable réelle $f(x)$. L'expression ainsi formée ne changera pas quand x augmentera d'un multiple de $\beta - \alpha$ et par suite elle est comparable à une fonction analytique *uniforme* dans une aire, laquelle ne change pas quand la variable tourne autour d'un point quelconque de cette aire.

De même $f(x)$ représenté par une série (B) se multiplie par certaines constantes quand on passe d'un intervalle à un autre; elle est ainsi comparable à une fonction analytique dans le voisinage d'un point de ramification, car une telle fonction se multiplie aussi par certaines constantes quand la variable tourne autour dudit point.

Si la constante ψ est commensurable avec 2π (*voir* n° **10**) les différents facteurs constants de $f(x)$ seront en nombre fini et nous serons dans un cas analogue à celui de la fonction multiforme à un nombre fini de branches z^μ. Dans le cas tout à fait général, les fonctions représentées par des séries qui les modifient complètement quand la variable change d'intervalle, pourront être comparées aux fonctions analytiques dont les déterminations se modifient de même quand la variable tourne autour de certains points singuliers.

NOTE. — Depuis que ce Mémoire est écrit (février 1907), j'ai obtenu de très grands perfectionnements quant à la sommabilité des séries (*Comptes rendus,* 2 avril et 14 octobre 1907; *Bulletin des Sciences mathématiques*, juin et décembre 1907). Dans le *Bulletin* de décembre on trouvera notamment une formule de sommabilité concernant les séries de Laurent et des premières indications sur la possibilité d'en faire une formule concernant les séries de Fourier, car les nouveaux résultats, obtenus d'abord dans le champ complexe, peuvent se transporter dans le champ réel. Ils entraîneront d'autres publications où les n^{os} **21** et suivants du présent Mémoire seront considérablement généralisés. On trouvera une Note toute récente *Sur la sommabilité des séries de Fourier* dans les *Comptes rendus* du 13 janvier 1908.