JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. BACHELIER

Étude sur les probabilités des causes

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 4 (1908), p. 395-425.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__395_0>

Étude sur les probabilités des causes;

PAR M. L. BACHELIER.

Dans la théorie des probabilités des causes et des événements futurs d'après les événements observés, on étudie seulement le cas où deux alternatives sont possibles à chaque épreuve; nous nous proposons d'établir les mêmes théories en supposant que le nombre des alternatives soit quelconque.

Pour employer les mêmes termes que dans mes travaux antérieurs, nous dirons que jusqu'ici on a traité seulement les questions comportant une seule variable, alors que la présente étude est relative au cas où le nombre des variables est quelconque.

Dans la théorie des probabilités des causes, on suppose que toutes les alternatives sont *a priori* également vraisemblables; l'étude actuelle envisage d'autres lois de probabilité et, pour certains problèmes, les résultats sont indépendants de ces lois.

Cette étude, nécessairement fort concise, ne traite pas en particulier le cas d'une seule variable; les questions relatives à ce cas sont exposées dans le Traité de Laplace et dans l'Ouvrage classique de M. H. Poincaré.

La recherche des probabilités des causes (ou probabilités *a posteriori*) exige la connaissance des probabilités des effets (ou probabilités *a priori*). Nous débuterons donc par l'étude des probabilités des effets généralisée au cas de plusieurs variables.

Théorie des épreuves répétées.

1. A chaque épreuve, n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ peuvent se produire et s'excluent mutuellement, de sorte que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. La probabilité pour que, en μ épreuves, le premier événement se produise m_1 fois, le second m_2 fois, ..., le $n^{\text{ième}}$ m_n fois ($m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu$) est

$$\frac{\mu!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}.$$

2. La plus grande probabilité correspond au cas où $m_1 = \mu p_1$, $m_2 = \mu p_2$, ..., $m_n = \mu p_n$.

La valeur moyenne du nombre des arrivées du premier événement est μp_1, celle qui correspond au second événement est μp_2, etc.

Le cas, en quelque sorte normal, est celui pour lequel les événements se produisent proportionnellement à leur probabilité. Les autres cas sont définis par leurs différences à celui-ci.

Nous dirons que les *écarts* sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ quand l'événement A_1 se sera produit $\mu p_1 + x_1$ fois; l'événement A_2, $\mu p_2 + x_2$ fois, ...; l'événement A_n, $\mu p_n + x_n$ fois ($x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$).

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en μ épreuves est, d'après la formule précédente,

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1 + x_1)!\,(\mu p_2 + x)!\ldots(\mu p_n + x_n)!}\,p_1^{\mu p_1 + x_1}p_2^{\mu p_2 + x_2}\ldots p_n^{\mu p_n + x_n}.$$

3. Dans la question qui précède, les probabilités sont les mêmes à chaque épreuve; on serait conduit, par exemple, à cette question en essayant de résoudre le problème suivant :

Une urne renferme ap_1 boules blanches, ap_2 boules noires, ..., ap_n boules vertes; on tire successivement μ boules de l'urne en replaçant chaque fois dans l'urne la boule extraite; quelle est la probabilité pour obtenir m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., m_n boules vertes?

Il est intéressant de traiter le problème analogue dans le cas où les boules ne sont pas replacées :

Une urne renferme k_1 boules blanches, k_2 boules noires, ..., k_n boules vertes; on en extrait μ boules (soit ensemble, soit successivement, sans les replacer dans l'urne); la probabilité pour que, sur les μ boules, il y ait m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ...,

m_n boules vertes $(m_1+m_2+\ldots+m_n=\mu)$ *est*

$$\frac{\mu!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,\frac{k_1!}{(k_1-m_1)!}\,\frac{k_2!}{(k_2-m_2)!}\cdots\frac{k_n!}{(k_n-m_n)!}\,\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n-\mu)!}{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}.$$

4. La valeur moyenne du nombre des boules blanches qui sortent en μ épreuves est $\mu\dfrac{k_1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}$. La plus grande probabilité lorsque μ est un grand nombre correspond au cas où

$$m_1=\mu\frac{k_1}{k_1+k_2+\ldots+k_n},\qquad m_2=\mu\frac{k_2}{k_1+k_2+\ldots+k_n},\qquad \ldots.$$

Ces dernières valeurs de m_1, m_2, ... correspondent au cas en quelque sorte normal.

Lorsqu'il sortira de l'urne $\dfrac{\mu k_1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}+x_1$ boules blanches, $\dfrac{\mu k_2}{k_1+k_2+\ldots+k_n}+x_2$ boules noires, ..., $\dfrac{\mu k_n}{k_1+k_2+\ldots+k_n}+x_n$ boules vertes, nous dirons que les *écarts* sont x_1, x_2, ..., x_n. On a évidemment $(x_1+x_2+\ldots+x_n=0)$.

Si l'on pose

$$p_1=\frac{k_1}{k_1+\ldots+k_n},\qquad p_2=\frac{k_2}{k_1+\ldots+k_n},\qquad \ldots,\qquad p_n=\frac{k_n}{k_1+\ldots+k_n},$$

la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, ..., x_n peut s'écrire

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1+x_1)!\,(\mu p_2+x_2)!\ldots(\mu p_n+x_n)!}\,\frac{sp_1!\,sp_2!\ldots sp_n!}{s!}$$
$$\times\frac{(s-\mu)!}{[(s-\mu)p_1-x_1]!\,[(s-\mu)p_2-x_2]!\ldots[(s-\mu)p_n-x_n]!},$$

s désignant la somme $k_1+k_2+\ldots+k_n$.

Formules asymptotiques.

5. Les formules qui précèdent contiennent des factorielles dont le calcul est impraticable; de plus elles ne sont pas expressives, elles ne permettent pas de se former une idée de la variation des probabilités avec le nombre des épreuves; nous les transformerons en leur appliquant l'égalité asymptotique de Stirling

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$$

Le rapport des deux membres de cette formule tend vers *un* lorsque n augmente et se rapproche beaucoup de l'unité dès que n n'est pas un petit nombre. (Si, par exemple, $n = 20$, le rapport des deux membres est $1,004$.)

6. Nous allons appliquer la formule de Stirling au problème des épreuves identiques (n° **2**). La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1 + x_1)!\,(\mu p_2 + x_2)!\ldots(\mu p_n + x_n)!}\,p_1^{\mu p_1 + x_1} p_2^{\mu p_2 + x_2}\ldots p_n^{\mu p_n + x_n}.$$

Appliquons la formule de Stirling en supposant μ assez grand pour que $\frac{x_1}{\mu}, \frac{x_2}{\mu}, \ldots$ soient négligeables et $\frac{x_1}{\sqrt{\mu}}, \frac{x_2}{\sqrt{\mu}}, \ldots$ finis. L'expression précédente devient

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2\ldots p_n}\left(1 + \frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1 + x_1 + \frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x_2}{\mu p_2}\right)^{\mu p_2 + x_2 + \frac{1}{2}}\cdots\left(1 + \frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n + x_n + \frac{1}{2}}}.$$

On a

$$\log\left(1 + \frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1 + x_1 + \frac{1}{2}} = \left(\mu p_1 + x_1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_1}{\mu p_1} - \frac{x_1^2}{2\mu^2 p_1^2} + \frac{x_1^3}{3\mu^3 p_1^3} - \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\log\left(1 + \frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n + x_n + \frac{1}{2}} = \left(\mu p_n + x_n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_n}{\mu p_n} - \frac{x_n^2}{2\mu^2 p_n^2} + \frac{x_n^3}{3\mu^3 p_n^3} - \ldots\right);$$

en additionnant et en supprimant les quantités négligeables en vertu des hypothèses faites, on obtient

$$\log\left[\left(1 + \frac{x_1}{\mu p_1}\right)^{\mu p_1 + x_1 + \frac{1}{2}}\cdots\left(1 + \frac{x_n}{\mu p_n}\right)^{\mu p_n + x_n + \frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{p_n}\right);$$

en revenant des logarithmes aux nombres et en portant cette valeur dans l'expression ci-dessus, elle devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}.$$

Telle est la formule asymptotique exprimant la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en μ épreuves.

C'est-à-dire la probabilité pour que le premier écart soit compris entre x_1 et x_1+dx_1, le second entre x_2 et x_2+dx_2, ...

En réalité, la formule contient seulement $n-1$ variables x, puisque $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$, et elle devrait être multipliée par un infiniment petit tel que $dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}$ ou $dx_2dx_3\ldots dx_n$ formé par la suppression d'un des éléments de la quantité $dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}dx_n$.

Afin que la formule reste symétrique, nous nous garderons d'éliminer aucune variable et nous n'écrirons l'infiniment petit que dans les cas où une intégration devra être effectuée.

7. La formule asymptotique

$$\frac{\mu!}{(\mu p_1+x_1)!(\mu p_2+x_2)!\ldots(\mu p_n+x_n)!}p_1^{\mu p_1+x_1}p_2^{\mu p_2+x_2}\ldots p_n^{\mu p_n+x_n}$$
$$=\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}},$$

que nous venons de démontrer, nous sera souvent utile; elle suppose que μ est un grand nombre, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des nombres positifs ayant pour somme *un* et que $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

8. La somme des probabilités de tous les cas possibles est un; on a donc

$$\underbrace{\int\int\cdots\int}_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\mu\pi})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}=1.$$

D'après notre démonstration, la formule est asymptotique, mais on peut démontrer directement qu'elle est vraie quel que soit μ.

9. Considérons le cas d'une seule variable; la probabilité de l'écart x

est donnée par la formule connue

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}},$$

où nous avons écrit p au lieu de p_1 et q au lieu de p_2.

La formule du n° **6** constitue une généralisation de cette dernière; d'autres généralisations ont été exposées dans mon étude sur la *Théorie des probabilités continues* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1906); nous allons cependant reprendre le sujet en nous plaçant à un autre point de vue, en cherchant les probabilités des écarts non plus à la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve, mais dans le cours des μ épreuves.

Nous supposerons qu'il y ait une seule variable, mais que les probabilités de l'événement considéré soient différentes à chaque épreuve et qu'elles varient suivant une loi donnée : l'événement aura pour probabilité p_1 à la première épreuve, p_2 à la seconde, ..., p_μ à la $\mu^{\text{ième}}$.

On dit que l'*écart* est x en μ épreuves, quand l'événement s'est produit $p_1 + p_2 + \ldots + p_\mu + x$ fois.

La probabilité pour que l'écart soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve est expérimentée par la formule connue

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}};$$

Σpq désigne la quantité $p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + \ldots + p_\mu(1-p_\mu)$.

L'écart moyen ou valeur moyenne de l'écart considéré en valeur absolue est $\frac{\sqrt{2\Sigma pq}}{\sqrt{\pi}}$.

L'écart probable, c'est-à-dire l'écart qui a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassé, a pour valeur $0,47693\ldots\sqrt{2\Sigma pq}$.

10. Si nous supposons qu'un joueur H perde une somme égale à l'écart, son jeu est équitable.

Il résulte de cette remarque que toutes les formules relatives aux jeux équitables sont applicables à la théorie des écarts dans les épreuves répétées. Ces formules ont été exposées dans mes travaux antérieurs; dans mon Ouvrage sur la *Théorie de la spéculation*, dans mon étude intitulée *Théorie mathématique du jeu* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1901) et dans mon Mémoire sur la *Théorie des probabilités continues* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1906).

Cherchons, par exemple, la probabilité pour que, dans le cours des μ épreuves, l'écart m soit atteint, l'écart $-n$ n'ayant jamais été atteint précédemment.

La question revient à chercher la probabilité pour que le joueur H, qui possède la somme m, soit ruiné en jouant μ parties au maximum, son gain n'ayant jamais précédemment atteint la somme n.

Ce problème a été résolu dans mon étude sur la théorie mathématique du jeu dans le cas où les parties sont identiques et dans mon étude sur la théorie des probabilités continues dans le cas général.

La probabilité cherchée a pour valeur

$$\begin{aligned}
P_{\mu,m,m} = {} & \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2}d\lambda\right) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m+2n}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2}d\lambda\right) \\
& + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{3m+2n}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2}d\lambda\right) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{3m+4n}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2}d\lambda\right) \\
& + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{5m+4n}{\sqrt{2\Sigma pq}}} e^{-\lambda^2}d\lambda\right) - \ldots.
\end{aligned}$$

Elle se calcule sans difficulté par les Tables de Kramp.

Cette formule, établie en supposant la continuité, n'est applicable que si m et n sont grands.

11. Nous appellerons *second écart moyen* la valeur moyenne du plus grand écart qui se produit dans le cours de μ épreuves.

La probabilité pour que $\pm m$ soit le plus grand écart positif ou négatif dans le cours des μ épreuves est

$$\frac{\partial}{\partial m}(1 - 2P_{\mu,m,m}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\left(e^{-\frac{m^2}{2\Sigma pq}} - 3e^{-\frac{(3m)^2}{2\Sigma pq}} + 5e^{-\frac{(5m)^2}{2\Sigma pq}} - \ldots\right),$$

et la valeur moyenne de m est

$$\int_0^\infty m \frac{\partial}{\partial m}(1 - 2P_{\mu,m,m})\,dm$$
$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\left(\int_0^\infty m e^{-\frac{m^2}{2\Sigma pq}}dm - \int_0^\infty 3me^{-\frac{(3m)^2}{2\Sigma pq}}dm + \int_0^\infty 5me^{-\frac{(5m)^2}{2\Sigma pq}}dm - \ldots\right),$$

c'est-à-dire en effectuant les intégrations

$$\frac{2\sqrt{2\Sigma pq}}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

D'après le développement connu de la fonction arc tang$x$, la série a pour valeur $\frac{\pi}{4}$.

Le second écart moyen a donc pour valeur

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{2\Sigma pq};$$

il est égal au premier écart moyen multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

Ce théorème a été démontré pour la première fois dans mon étude sur la théorie mathématique du jeu, mais ici nous ne supposons plus que les épreuves soient identiques.

Le premier écart probable est celui qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassé à la $\mu^{\text{ième}}$ épreuve. Le *second écart probable* est celui qui a des chances égales d'être ou de ne pas être dépassé dans le cours des μ épreuves.

On démontre, en se basant sur la formule du n° **10**, que le second écart probable a pour valeur $0,8062\ldots\sqrt{2\Sigma pq}$; il est égal au premier écart probable multiplié par $1,7\ldots$.

Nous allons maintenant reprendre notre étude sur les probabilités à plusieurs variables.

12. Appliquons la formule du n° **7** au problème relatif aux tirages dans une urne qui a été traité précédemment (n° **4**).

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en μ tirages est,

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{\frac{s-\mu}{s}}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu\frac{s-\mu}{s}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2\ldots p_n}}.$$

Si l'on compare cette formule à celle du n° **6**, on voit que, dans le cas actuel, les écarts sont diminués dans le rapport de $\sqrt{s-\mu}$ à $\sqrt{s}$.

13. L'égalité de Stirling conduit à des formules continues, mais elle a le grand inconvénient d'exiger la connaissance des formules discontinues correspondantes.

La *Théorie des probabilités continues*, qui suppose la continuité *a priori* et qui est absolument indépendante des probabilités discontinues, conduit à des résultats beaucoup plus généraux.

La présente étude montre cependant que, dans certains cas particuliers, l'emploi de la formule de Stirling permet d'obtenir très simplement les résultats et que son usage est susceptible de généralisation.

Formule de Bayes.

14. Nous allons nous occuper des questions relatives aux probabilités des causes.

Un exemple n'est pas inutile pour faire comprendre le sens attribué au mot *cause* dans le calcul des probabilités : un joueur a joué cinq parties; à chaque partie il avait égale probabilité de gagner ou de perdre 1^{fr}; finalement il a gagné en totalité 1^{fr}. A la troisième partie, il avait nécessairement perdu 1^{fr} ou gagné 1^{fr} ou 3^{fr}; ces trois alternatives sont dites *les causes* du fait observé qui est le gain total de 1^{fr}.

Lorsqu'on ignorait l'issue du jeu, les causes avaient pour probabilité *a priori* $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{8}$. Lorsqu'on sait que le joueur a gagné finalement 1^{fr} sans savoir quelle a été la suite de ses gains et de ses pertes, les probabilités des trois alternatives se trouvent changées; on les nomme probabilités *a posteriori*.

Énonçons maintenant le problème de Bayes :

Diverses causes E_1, E_2, ..., E_k *ont pu produire un événement observé. Les probabilités des causes lorsque le résultat n'était pas encore connu (probabilités* a priori) *étaient* $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \omega_k$. *L'événement se produit; la cause* E_i, *quand on est certain que c'est elle qui agit, donne à l'événement la probabilité* Π_i. *Quelle est la probabilité pour que* E_i *soit la cause de l'événement (probabilité* a posteriori)?

Soit x la probabilité cherchée; nous écrirons de deux manières différentes la probabilité pour que le fait se produise et qu'il soit dû à la cause considérée :

1° Il faut d'abord que la cause soit mise en jeu (probabilité ϖ_i) et qu'elle produise l'événement (probabilité Π_i).

2° Il faut que l'événement se produise

$$(\text{probabilité } \varpi_1\Pi_1 + \varpi_2\Pi_2 + \ldots + \varpi_k\Pi_k),$$

et que, s'étant produit, il soit dû à la cause désignée (probabilité x). On a donc

$$\varpi_i\Pi_i = (\varpi_1\Pi_1 + \varpi_2\Pi_2 + \ldots + \varpi_k\Pi_k)x,$$

d'où

$$x = \frac{\varpi_i\Pi_i}{\varpi_1\Pi_1 + \varpi_2\Pi_2 + \ldots + \varpi_k\Pi_k}.$$

Telle est l'expression de la probabilité *a posteriori*.

Probabilités des causes dans les épreuves répétées.

15. *Soient* P_1, P_2, ..., P_n *les probabilités de n événements qui s'excluent mutuellement et qui sont tels que l'un quelconque d'entre eux doit nécessairement se produire à chaque épreuve.*

En μ *épreuves (supposées identiques), le premier s'est produit* m_1 *fois, le second* m_2 *fois, ..., le* $n^{\text{ième}}$ m_n *fois* $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu)$. *Quelle est la probabilité* a posteriori *pour que* P_1 *ait la valeur* y_1, P_2 *la valeur* y_2, ..., P_n *la valeur* y_n, $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1)$?

Soit $\varpi\,(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n$, la probabilité *a priori* (supposée connue) pour que les probabilités des événements soient

$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, c'est-à-dire pour que la probabilité du premier soit comprise entre y_1 et $y_1 + dy_1$, celle du second entre y_2 et $y_2 + dy_2, \ldots$.

Si le fait observé a eu pour cause les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, celles-ci donnent à l'événement observé la probabilité (n° **1**)

$$\frac{\mu!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n};$$

la probabilité demandée est, d'après le théorème de Bayes,

$$\frac{y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{\int\int \cdots \int y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}.$$

L'intégration s'étend à toutes les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ telles que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0,$$

si l'on suppose que la fonction ϖ s'étend à ce même système de valeurs.

Expression finale des probabilités.

16. Si le nombre μ des épreuves était infini, les événements se produiraient proportionnellement à leur probabilité et il n'y aurait pour $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ que le seul système de valeurs

$$y_1 = \frac{m_1}{\mu}, \quad y_2 = \frac{m_2}{\mu}, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = \frac{m_{n-1}}{\mu}, \quad y_n = \frac{m_n}{\mu}.$$

Ces valeurs correspondent nécessairement à la plus grande probabilité *a posteriori*.

Cette plus grande probabilité s'obtient en annulant les dérivées par rapport aux diverses variables du numérateur de l'expression générale du paragraphe précédent. Or la dérivée par rapport à y_1 peut s'écrire

$$y_1^{m_1-1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n - 1}$$
$$\times \left\{ [m_1(1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1}) - y_1 m_n]\varpi - y_1(1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1}) \frac{\partial \varpi}{\partial y_1} \right\};$$

si on l'égale à zéro en négligeant les termes qui ne contiennent pas en facteur les quantités $m_1, \ldots, m_n$, on obtient

$$m_1(1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1}) - y_1 m_n = 0,$$

et $n-2$ équations analogues. La solution de ce système est nécessairement

$$y_1 = \frac{m_1}{\mu}, \qquad y_2 = \frac{m_2}{\mu}, \qquad \ldots, \qquad y_n = \frac{m_n}{\mu}.$$

Expression pénultième des probabilités.

17. Si le nombre μ des épreuves est très grand, les probabilités ne peuvent avoir de valeurs sensibles que pour les valeurs de y_1 voisines de $\frac{m_1}{\mu}$, de y_2 voisines de $\frac{m_2}{\mu}$, ... Posons

$$y_1 = \frac{m_1}{\mu} + \varepsilon_1 = p_1 + \varepsilon_1,$$
$$y_2 = \frac{m_2}{\mu} + \varepsilon_2 = p_2 + \varepsilon_2, \qquad \ldots, \qquad y_n = \frac{m_n}{\mu} + \varepsilon_n = p_n + \varepsilon_n.$$

On a évidemment

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = 0;$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sont très petits et négligeables par rapport à $p_1, p_2, \ldots$.

La probabilité pour que P_1 ait la valeur $p_1 + \varepsilon_1$, P_2 la valeur $p_2 + \varepsilon_2$, ... est, d'après la formule du n° **15**,

$$\frac{(p_1+\varepsilon_1)^{\mu p_1}(p_2+\varepsilon_2)^{\mu p_2}\ldots(p_n+\varepsilon_n)^{\mu p_n}\varpi}{\int\int\cdots\int(p_1+\varepsilon_1)^{\mu p_1}(p_2+\varepsilon_2)^{\mu p_2}\ldots(p_n+\varepsilon_n)^{\mu p_n}\varpi\, d\varepsilon_1\ldots d\varepsilon_{n-1}}.$$

Cette expression peut s'écrire en supprimant les termes négligeables et les facteurs communs

$$\frac{\left[1 - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)\right]\varpi}{\int\int\cdots\int\left[1 - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)\right]\varpi\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{n-1}}$$

ou encore

$$\frac{e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}\varpi}{\int\int\cdots\int e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}\varpi\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{n-1}}.$$

Développons la fonction $\varpi\,[(p_1+\varepsilon_1), (p_2+\varepsilon_2), \ldots, (p_{n-1}+\varepsilon_{n-1})]$ par la formule de Taylor

$$\varpi[(p_1+\varepsilon_1), \ldots, (p_{n-1}+\varepsilon_{n-1})] = \varpi(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) + \varepsilon_1 \frac{\partial\varpi}{\partial p_1} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\frac{\partial\varpi}{\partial p_{n-1}} + \ldots.$$

Les ε étant très petits, la fonction ϖ se réduit à sa partie constante et disparaît de l'expression de la probabilité; celle-ci devient

$$\frac{e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{\int\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{n-1}}.$$

Les intégrations sont prises entre $-\infty$ et $+\infty$, ce qui est légitime par suite de la forme de l'élément de l'intégrale.

La somme $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n$ étant nulle et la somme $p_1+p_2+\ldots+p_n$ ayant pour valeur *un*, l'intégrale se détermine par la formule du n° **8**; sa valeur est

$$\frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}{(\sqrt{\mu})^{n-1}}.$$

La probabilité pour que P_1 ait la valeur $p_1+\varepsilon_1$, P_2 la valeur $p_2+\varepsilon_2$, ... est donc

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1} e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}.$$

Telle est l'expression pénultième des probabilités.

Lorsque le nombre μ des épreuves est très grand, les probabilités *a posteriori* sont, comme on le voit, indépendantes des probabilités initiales (ou probabilités *a priori*), et les lois qui les régissent, qu'on peut dénommer *lois pénultièmes,* ont, par suite, un très haut degré de généralité.

La formule ci-dessus montre que *les quantités* $\frac{m_1}{\mu}, \frac{m_2}{\mu}, \ldots, \frac{m_n}{\mu}$ *expriment les probabilités avec une précision proportionnelle à la racine carrée du nombre des épreuves.*

Étude d'un cas particulier.

18. Si μ n'est pas très grand, à chaque hypothèse faite sur la fonction ϖ correspond une valeur différente pour la probabilité *a posteriori*.

Si l'on n'a aucune idée *a priori* sur les probabilités, l'hypothèse la plus simple consiste à poser $\varpi = 1$. Alors, le dénominateur de la probabilité *a posteriori* (nº **15**) est l'intégrale

$$\int\int\cdots\int y_1^{m_1} y_2^{m_2}\cdots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}$$

qui est étendue à tous les systèmes de valeurs de $y_1, \ldots, y_{n-1}$, tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0.$$

Cette intégrale est du type de celles qui ont été déterminées par Dirichlet; sa valeur est

$$\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)\ldots\Gamma(m_{n-1}+1)\Gamma(m_n+1)}{\Gamma(m_1+m_2+\ldots+m_n+n)}$$

ou

$$\frac{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}.$$

La probabilité cherchée a donc pour valeur

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}.$$

Étude du cas général.

19. Supposons maintenant que $\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ soit quelconque, mais développable en série entière,

$$\begin{aligned}\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = a_0 &+ a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n-1}y_{n-1}\\ &+ a_{2,1}y_1^2 + a_{2,2}y_2^2 + \ldots + b_{1,2}y_1y_2 + \ldots,\end{aligned}$$

et que cette fonction ϖ s'étende à tous les systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0;$$

le dénominateur de l'expression générale de la probabilité *a posteriori* (nº **15**),

$$\int\int\cdots\int y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1},$$

se composera alors d'une somme d'intégrales de Dirichlet et pourra ainsi être obtenu sous forme d'un développement en série; en désignant par S cette série, l'expression de la probabilité sera

$$\frac{1}{S} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

Probabilité des événements futurs d'après les événements observés.

20. *En μ épreuves, l'événement A_1 s'est produit m_1 fois; l'événement A_2, m_2 fois; ...; l'événement A_n, m_n fois. Quelle est la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, les événements se produisent suivant une loi donnée?*

On suppose que les événements s'excluent, que l'un quelconque d'entre eux se produit nécessairement à chaque épreuve et que les nouvelles épreuves sont identiques aux précédentes.

Soit $\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ la probabilité *a posteriori* pour que $P_1, P_2, \ldots$ aient les valeurs $y_1, y_2, \ldots$.

Soit $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')$ la probabilité pour que, en μ' épreuves, les événements se produisent suivant la loi donnée quand les probabilités $P_1, P_2, \ldots$ de ces événements sont $y_1, y_2, \ldots$.

La probabilité pour que $P_1, P_2, \ldots$ aient les valeurs $y_1, y_2, \ldots$ et pour que les événements se produisent suivant la loi donnée est, d'après le principe des probabilités composées,

$$\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \times \psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

D'après le principe des probabilités totales, la probabilité cherchée est la somme des quantités analogues pour l'ensemble des valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ qui satisfont à la loi donnée; cette probabilité est donc exprimée par la formule

$$\int\int\cdots\int\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\times\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1},$$

qu'on peut aussi écrire, en remplaçant λ par sa valeur (nº **15**),

$$\frac{\int\int\cdots\int y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\varpi\psi\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}{\int\int\cdots\int y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\varpi\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}}.$$

L'intégrale du numérateur est relative aux systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ que rendent possibles la forme de la fonction ϖ et la loi exprimée par la fonction ψ.

L'intégrale du dénominateur s'étend aux systèmes de valeurs que rend possibles la forme de la fonction ϖ.

Lorsque $\varpi = 1$, l'expression de la probabilité se réduit à

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}$$
$$\times\int\int\cdots\int y_1^{m_1}y_2^{m_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n}\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mu')\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}.$$

21. *En μ épreuves, l'événement A_1 s'est produit m_1 fois; l'événement A_2, m_2 fois; ...; l'événement A_n, m_n fois. Quelle est la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, l'événement A_1 se produise m'_1 fois; l'événement A_2, m'_2 fois; ...; l'événement A_n, m'_n fois?*

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où $\varpi = 1$. On a, dans le cas considéré,

$$\psi = \frac{(m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}\,y_1^{m'_1}y_2^{m'_2}\ldots y_{n-1}^{m'_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m'_n}.$$

La probabilité est donc

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,\frac{(m'_1+m'_2+\ldots+m'_n)!}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}$$
$$\times\int\int\cdots\int y_1^{m_1+m'_1}y_2^{m_2+m'_2}\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}+m'_{n-1}}(1-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1})^{m_n+m'_n}\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}.$$

l'intégration s'étendant à toutes les valeurs telles que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n + n - 1)!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} \frac{(m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_n)!}{m'_1!\, m'_2! \ldots m'_n!}$$
$$\times \frac{(m_1 + m'_1)!\,(m_2 + m'_2)! \ldots (m_n + m'_n)!}{(m_1 + m'_1 + m_2 + m'_2 + \ldots + m_n + m'_n + n - 1)!}.$$

La probabilité pour que l'événement A_1 se produise si l'on fait une seule épreuve est $\frac{m_1 + 1}{\mu + n}$; elle est très voisine de $\frac{m_1}{\mu}$ lorsque μ est un grand nombre.

22. Supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_n, m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ soient de grands nombres; posons

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{m_n}{\mu} = p_n.$$

Posons encore

$$m'_1 = \mu' p_1 + x_1, \qquad m'_2 = \mu' p_2 + x_2, \qquad \ldots, \qquad m'_n = \mu' p_n + x_n;$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les *écarts*.

Transformons l'expression factorielle en exponentielle; elle devient

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Si les événements avaient pour probabilités exactes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ serait (n° **6**)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi\mu'})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

L'ignorance où l'on est des valeurs exactes des probabilités augmente donc les écarts dans le rapport de $\sqrt{\mu + \mu'}$ à $\sqrt{\mu}$.

Nous nous sommes placés dans l'hypothèse où $\varpi = 1$; mais, le nombre μ étant très grand, le résultat est indépendant de cette hypothèse (n° **17**).

Le théorème ci-dessus, l'un des plus importants du calcul des probabilités, exprime une loi pénultième; il est indépendant de toute hypothèse sur les valeurs initiales des probabilités.

23. Si μ n'est pas très grand et si la fonction ϖ est quelconque, la probabilité pour que, en μ' nouvelles épreuves, le premier événement se produise m'_1 fois, le second m'_2 fois, ... est

$$\frac{(m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_n)!}{m'_1!\, m'_2! \ldots m'_n!} \times \frac{\displaystyle\int\!\!\int \cdots \int y_1^{m_1+m'_1} y_2^{m_2+m'_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}+m'_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n+m'_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{\displaystyle\int\!\!\int \cdots \int y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}} (1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1})^{m_n} \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}.$$

Les deux intégrales sont de la même forme; elles doivent s'étendre à tous les systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ tels que

$$1 > y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} > 0$$

si la fonction ϖ s'étend, comme nous le supposerons, à tous ces systèmes de valeurs. Si, de plus, ϖ est développable en série entière, chacune des intégrales est décomposable en une suite d'intégrales de Dirichlet, et la probabilité est alors exprimée par le quotient des deux séries.

24. Les résultats les plus importants de la théorie que nous venons d'exposer sont exprimés par des lois finales et pénultièmes; il est donc utile de connaître les conditions *a priori* que supposent ces lois.

Supposons pour simplifier qu'il n'y ait qu'une variable; soient P la probabilité d'un événement et $\varpi(y)$ la probabilité *a priori* pour que P ait la valeur y.

La quantité $\varpi(y)$ doit nécessairement être positive et telle que la somme de ses valeurs pour toutes les valeurs possibles de y soit *un*.

Si $\varpi(y)$ est une fonction continue ne s'annulant pas et ne devenant pas infinie entre zéro et *un*, les formules finales et pénultièmes sont légitimes, pourvu que toutes les alternatives possibles se soient produites un grand nombre de fois.

Les formules pénultièmes sont donc applicables quand la loi des probabilités *a priori* est quelconque, mais en quelque sorte naturelle; et il faut, pour les mettre en défaut, former de toutes pièces des lois particulières qui ne présentent aucun intérêt au point de vue du calcul des probabilités.

Si l'on ne connaît rien sur la probabilité *a priori* d'un événement, la fonction $\varpi(y)$ peut être quelconque, mais elle ne peut, pour aucune valeur de y, devenir négative et zéro est son minimum absolu; la supposer nulle pour un intervalle fini de ε est se placer dans un cas infiniment particulier; c'est précisément ce cas qui mettrait en défaut les formules finales si celles-ci conduisaient à une valeur de y qui devrait être nulle *a priori*.

L'emploi des formules finales et pénultièmes est donc légitime.

25. Il n'est peut-être pas inutile de donner un exemple qui montre la décroissance de l'influence des hypothèses initiales lorsque le nombre des épreuves augmente.

Supposons qu'on ait fait $2m$ épreuves et qu'un événement se soit produit m fois.

Dans l'hypothèse où $\varpi = 1$, la probabilité pour que l'événement se produise à l'épreuve suivante est 0,5.

Considérons une autre hypothèse et posons, par exemple,

$$\varpi(y) = 11 y^{10}.$$

Lorsqu'on supposait que ϖ avait pour valeur *un*, la probabilité de l'événement avait *a priori* autant de chances d'être supérieure à $\frac{1}{2}$ que d'être inférieure à $\frac{1}{2}$. Dans l'hypothèse où $\varpi(y) = 11 y^{10}$, il n'y a, *a priori*, qu'une chance sur deux mille pour que la probabilité de l'événement soit inférieure à $\frac{1}{2}$. Le second cas, pour être très différent du premier, conduit cependant à des chiffres très voisins si m est un grand nombre.

Les formules ci-dessus permettent de calculer sans difficulté la probabilité pour que l'événement se produise à l'épreuve suivante dans l'hypothèse où $\varpi(y) = 11y^{10}$. Cette probabilité est $\frac{m+11}{2m+12}$. Lorsque $m = 100$, elle a pour valeur $0,523$; lorsque $m = 10000$, elle a pour valeur $0,5002$, elle est donc très proche de la valeur asymptote $0,5000$ obtenue dans l'hypothèse où $\varpi = 1$.

Problèmes divers.

26. *Une urne contient a boules de n couleurs différentes; les unes sont blanches, les autres noires, rouges, ..., vertes, on ignore en quelle proportion. On tire* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu$ *boules de l'urne :* m_1 *sont blanches,* m_2 *sont noires, ...,* m_n *sont vertes. Quelle est la probabilité pour que l'urne ait une composition donnée?*

On suppose que les μ boules sont extraites simultanément ou successivement, les boules extraites n'étant pas replacées dans l'urne.

Soit $\varpi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ la probabilité *a priori* pour qu'il y ait dans l'urne y_1 boules blanches, y_2 boules noires, ..., y_n boules vertes $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n = a)$.

S'il y avait effectivement y_1 boules blanches, y_2 boules noires, etc., la probabilité pour qu'en $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \mu$ tirages il sorte m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., serait (n° 3)

$$\frac{\mu!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!}\, \frac{y_1!}{(y_1 - m_1)!}\, \frac{y_2!}{(y_2 - m_2)!} \cdots \frac{y_n}{(y_n - m_n)!}\, \frac{(a-\mu)!}{a!}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{y_1!\, y_2! \ldots y_n!\, \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{(y_1 - m_1)!\,(y_2 - m_2)! \ldots (y_n - m_n)! \sum \frac{y_1!\, y_2! \ldots y_n!\, \varpi(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{(y_1 - m_1)!\,(y_2 - m_2)! \ldots (y_n - m_n)!}},$$

le $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ telles que y_1 soit au moins égal à m_1, y_2 au moins égal à m_2, ..., et telles que $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = a$.

A chaque hypothèse faite sur la forme de la fonction ϖ correspond une valeur différente pour la probabilité cherchée.

Nous supposerons d'abord que toutes les compositions de l'urne sont *a priori* également probables; alors ϖ est constant et disparaît dans l'expression de la probabilité. Le $\sum$ a pour valeur

$$\frac{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!}{(\mu+n-1)!}\,\frac{(a+n-1)!}{(a-\mu)!},$$

et la probabilité cherchée est

$$\frac{y_1!\,y_2!\,\ldots\,y_n!\,(\mu+n-1)!\,(a-\mu)!}{(y_1-m_1)!\,(y_2-m_2)!\,\ldots\,(y_n-m_n)!\,m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!\,(a+n-1)!}.$$

La plus grande probabilité correspond au cas où

$$y_1=\frac{m_1}{a},\qquad y_2=\frac{m_2}{a},\qquad \ldots.$$

27. *Si l'on effectue μ' nouveaux tirages, quelle est la probabilité pour obtenir m'_1 boules blanches, m'_2 boules noires, ...?*

Si l'urne contenait y_1 boules blanches, y_2 boules noires, etc., après la sortie des μ boules, elle contient y_1-m_1 boules blanches, y_2-m_2 boules noires, etc. La probabilité pour qu'en μ' tirages il sorte m'_1 boules blanches, m'_2 boules noires, etc., serait alors (n° **3**)

$$\frac{\mu'!}{m'_1!\,m'_2!\,\ldots\,m'_n!}\,\frac{(y_1-m_1)!}{(y_1-m_1-m'_1)!}$$
$$\times\frac{(y_2-m_2)!}{(y_2-m_2-m'_2)!}\cdots\frac{(y_n-m_n)!}{(y_n-m_n-m'_n)!}\,\frac{(a-\mu-\mu')!}{(a-\mu)!}.$$

Si l'on multiplie cette quantité par la probabilité *a posteriori* pour que les y aient respectivement pour valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et si l'on fait la somme de tous les résultats analogues, on obtient, d'après les principes des probabilités composées et totales, la probabilité cherchée; celle-ci a donc pour valeur

$$\frac{\mu'!\,(a-\mu-\mu')!\,(\mu+n-1)!}{m'_1!\,m'_2!\,\ldots\,m'_n!\,m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_n!\,(a+n-1)!}$$
$$\times\sum\frac{y_1!\,y_2!\,\ldots\,y_n!}{(y_1-m_1-m'_1)!\,(y_2-m_2-m'_2)!\,\ldots\,(y_n-m_n-m'_n)!},$$

le $\sum$ s'étendant à tous les systèmes de valeurs de $y_1, y_2, \ldots. y_n$ tels que y_1 soit au moins égal à $m_1+m'_1$, y_2 au moins égal à $m_2+m'_2$, ...

et tels que $y_1+y_2+\ldots+y_n=a$. Ce $\sum$ a pour valeur

$$\frac{(m_1+m'_1)!\,(m_2+m'_2)!\ldots(m_n+m'_n)!}{(\mu+\mu'+n-1)!}\,\frac{(a+n-1)!}{(a-\mu-\mu')!}.$$

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\mu'}{m'_1!\,m'_2!\ldots m'_n!}\,\frac{(\mu+n-1)!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,\frac{(m_1+m'_1)!\,(m_2+m'_2)!\ldots(m_n+m'_n)!}{(\mu+\mu'+n-1)!}.$$

Cette probabilité est indépendante de a, elle a même valeur que si a était infini. Si a était infini, la probabilité *a priori* d'extraire une boule de couleur donnée serait la même à chaque tirage et l'on serait ramené au problème du n° **21**. La dernière formule que nous venons d'obtenir est d'ailleurs identique à celle du n° **21**.

28. Ce résultat curieux demande une explication. Supposons qu'une urne B renferme b boules de diverses couleurs et supposons qu'on tire au hasard a boules de cette urne pour les placer dans une seconde urne A.

La probabilité d'extraire m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., de A est évidemment la même que celle d'extraire ces mêmes nombres de boules de l'urne B quand celle-ci contient encore les b boules.

Lorsqu'on extrait, de l'urne A, m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., on obtient, relativement à la sortie des boules suivantes de cette urne, le même renseignement qu'on aurait obtenu pour la sortie des boules suivantes de l'urne B si l'on supposait que cette urne ait renfermé b boules et qu'on en ait extrait m_1 blanches, m_2 noires, etc.

Lorsque toutes les compositions de l'urne B sont *a priori* également vraisemblables, celles de l'urne A le sont aussi.

Nous avons supposé que toutes les compositions de l'urne A étaient *a priori* également vraisemblables; nous pouvons donc supposer que cette urne a été remplie en tirant a boules au hasard dans une urne B contenant un nombre arbitraire b de boules, toutes les compositions de cette urne B étant *a priori* également vraisemblables.

Si de l'urne A on extrait m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., le renseignement qu'on obtient pour la sortie des boules suivantes est le même que s'il s'agissait de l'urne B quand elle contient b boules;

il est donc indépendant du nombre des boules contenues dans l'urne.

29. Considérons le cas où a, μ et μ' sont grands; posons

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots;$$

posons également

$$m'_1 = \mu' p_1 + x_1, \qquad m'_2 = \mu' p_2 + x_2, \qquad \ldots;$$

x_1, x_2, ... sont les *écarts*.

Transformant alors l'expression factorielle de la probabilité en expression exponentielle, on obtient la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$; c'est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{\mu+\mu'}{\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2\ldots p_n}}.$$

Si l'on savait que l'urne contient exactement $a-\mu$ boules dont $\frac{m_1}{\mu}(a-\mu)$ blanches, $\frac{m_2}{\mu}(a-\mu)$ noires, etc., la probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ après μ' tirages serait (n° **12**)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{a-\mu-\mu'}{a-\mu}}\left(\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{a-\mu-\mu'}{a-\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2\ldots p_n}}.$$

L'ignorance où l'on est de la composition exacte de l'urne augmente donc les écarts dans le rapport de $\sqrt{(\mu+\mu')(a-\mu)}$ à $\sqrt{\mu(a-\mu-\mu')}$.

30. Nous avons supposé que toutes les compositions de l'urne étaient *a priori* également probables; on peut résoudre les mêmes questions en supposant que l'urne ait été remplie en tirant au hasard la couleur des boules avec la probabilité p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires, etc.

On peut obtenir sans grande difficulté la probabilité *a posteriori* pour que l'urne ait une composition donnée, puis la probabilité pour que, si l'on effectue μ' nouveaux tirages (toujours sans remettre les boules), on obtienne m'_1 boules blanches, m'_2 boules noires, etc. Pour ce dernier problème, on est conduit à cette conclusion : c'est que la probabilité a même valeur que si l'on avait tiré directement les μ' boules avec la probabilité p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires, etc.

Pour expliquer ce fait, il suffit de reprendre un raisonnement précédemment employé (n° **28**). L'urne A est remplie en tirant au hasard a boules d'une urne B qui en contient une infinité, les nombres des boules blanches, noires, etc., de cette urne B étant proportionnels à $p_1, p_2, \ldots$.

Lorsqu'on extrait, de l'urne A, m_2 boules blanches, m_2 boules noires, etc., on obtient, relativement à la sortie des boules suivantes, le même renseignement que s'il s'agissait de l'urne B. Cette dernière urne étant infinie, les sorties antérieures n'influent en rien sur les probabilités relatives aux tirages futurs; il en est donc de même quand il s'agit de l'urne A.

On peut aller plus loin et calculer la probabilité *a posteriori* pour que l'urne A ait une composition donnée sans avoir recours à la théorie de la probabilité des causes. L'urne A étant remplie comme il a été dit, le fait d'avoir extrait de cette urne m_1 boules blanches, m_2 boules noires, ..., m_n boules vertes, ne change en rien les probabilités relatives aux $a - m_1 - m_2 - \ldots - m_n$ autres boules; la probabilité pour que, parmi celles-ci, il y ait z_1 boules blanches, z_2 boules noires, ..., z_n boules vertes ($z_1 + \ldots + z_n = a - m_1 - \ldots - m_n$), est donc *a posteriori* comme *a priori*

$$\frac{(a - m_1 - m_2 - \ldots - m_n)!}{z_1!\, z_2! \ldots z_n!} p_1^{z_1} p_2^{z_2} \ldots p_n^{z_n}.$$

Telle est la probabilité *a posteriori* pour que l'urne renferme $m_1 + z_1$ boules blanches, $m_2 + z_2$ boules noires, etc.

31. *Une urne* A *contient un très grand nombre a de boules de n couleurs différentes, blanches, noires, etc., vertes, dans une proportion inconnue.*

L'urne a été remplie en tirant les boules au hasard avec la pro-

babilité p_1 pour les blanches, p_2 pour les noires, etc., p_n pour les vertes.

On tire successivement μ boules de l'urne en remettant après chaque tirage la boule sortie. On obtient m_1 boules blanches, m_2 boules noires, etc., m_n boules vertes. Quelle est la probabilité pour que l'urne ait une composition donnée?

La probabilité *a priori* pour que l'urne renferme ap_1+z_1 boules blanches, ap_2+z_2 boules noires, etc., ap_n+z_n boules vertes est (n° **6**)

$$\frac{e^{-\frac{1}{2a}\left(\frac{z_1^2}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{z_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi a})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}.$$

Dans ces conditions, la probabilité pour extraire une blanche est $\frac{ap_1+z_1}{a}$, pour extraire une noire $\frac{ap_2+z_2}{a}$, etc., et la probabilité de l'événement observé est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu a}\left\{\frac{[am_1-\mu(ap_1+z_1)]^2}{ap_1+z_1}+\frac{[am_2-\mu(ap_2+z_2)]^2}{ap_2+z_2}+\ldots\right\}}}{\sqrt{a}\,(\sqrt{2\pi\mu a})^{n-1}\sqrt{(ap_1+z_1)(ap_2+z_2)\ldots}},$$

a étant un très grand nombre; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont très petits auprès de $ap_1, ap_2, \ldots, ap_n$.

Négligeant les termes en z dans le dénominateur de l'exponentielle, l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu a^2}\left\{\frac{[am_1-\mu(ap_1+z_1)]^2}{p_1}+\frac{[am_2-\mu(ap_2+z_2)]^2}{p_2}+\ldots\right\}}}{a^n(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}},$$

et la probabilité demandée a pour valeur

$$\frac{e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{(\mu+a)z_1^2-2am_1z_1}{p_1}+\frac{(\mu+a)z_2^2-2am_2z_2}{p_2}+\ldots\right]}}{\int\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{(\mu+a)z_1^2-2am_1z_1}{p_1}+\frac{(\mu+a)z_2^2-2am_2z_2}{p_2}+\ldots\right]}dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}}.$$

Occupons-nous de l'intégrale : posons

$$m_1=\mu p_1+u_1,\qquad m_2=\mu p_2+u_2,\qquad \ldots.$$

Les u sont du même ordre que les z si μ est très grand et du même ordre que a.

L'intégrale devient

$$e^{\frac{\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+\ldots}{2(\mu+a)}}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{\left(\sqrt{\mu+a}\,z_1-\frac{au_1}{\sqrt{\mu+a}}\right)^2}{p_1}+\frac{\left(\sqrt{\mu+a}\,z_2-\frac{au_2}{\sqrt{\mu+a}}\right)^2}{p_2}+\ldots\right]}dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1};$$

en posant

$$\sqrt{\mu+a}\,z_1-\frac{au_1}{\sqrt{\mu+a}}=\eta_1,\qquad \sqrt{\mu+a}\,z_2-\frac{au_2}{\sqrt{\mu+a}}=\eta_2,\qquad \ldots,$$

elle se réduit à

$$\frac{e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left(\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+\ldots\right)}}{(\sqrt{\mu+a})^{n-1}}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\eta_1^2}{p_1}+\frac{\eta_2^2}{p_2}+\ldots\right)}d\eta_1\,d\eta_2\ldots d\eta_{n-1}.$$

La somme des η étant nulle, cette dernière intégrale a pour valeur, d'après la formule du n° **8**,

$$a^{n-1}(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n};$$

l'intégrale a donc pour valeur

$$\left(\frac{a\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu+a}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}\,e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left(\frac{u_1^2}{p_1}+\frac{u_2^2}{p_2}+\ldots\right)}$$

ou

$$\left(\frac{a\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu+a}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}\,e^{\frac{1}{2(\mu+a)}\left[\frac{(m_1-\mu p_1)^2}{p_1}+\frac{(m_2-\mu p_2)^2}{p_2}+\ldots\right]},$$

et *la probabilité cherchée pour que l'urne renferme ap_1+z_1 boules blanches, ap_2+z_2 boules noires, etc., est*

$$\left(\frac{\sqrt{\mu+a}}{a\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}$$
$$\times\, e^{\frac{\mu^2}{2(\mu+a)}-\frac{1}{2(\mu+a)}\left(\frac{m_1^2}{p_1}+\frac{m_2^2}{p_2}+\ldots\right)-\frac{(\mu+a)}{2a^2}\left(\frac{z_1^2}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}+\ldots\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{m_1z_1}{p_1}+\frac{m_2z_2}{p_2}+\ldots\right)}dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}.$$

La plus grande probabilité a lieu pour

$$z_1=\frac{a(m_1-\mu p_1)}{a+\mu},\qquad z_2=\frac{a(m_2-\mu p_2)}{a+\mu},\qquad \ldots.$$

Désignons par P_1 la probabilité pour que, si l'on fait un tirage, il sorte de l'urne une boule blanche, par P_2 la probabilité correspondante pour une boule noire, etc. Si les écarts sont z_1, z_2, ..., les probabilités P_1, P_2, ... sont

$$P_1 = \frac{ap_1 + z_1}{a}, \qquad P_2 = \frac{ap_2 + z_2}{a}, \qquad \cdots.$$

32. La plus grande probabilité *a posteriori* a lieu quand

$$z_1 = \frac{a(m_1 - \mu p_1)}{a + \mu}, \qquad z_2 = \frac{a(m_2 - \mu p_2)}{a + \mu}, \qquad \cdots,$$

c'est-à-dire quand les quantités P_1, P_2, ... ont les valeurs

$$P'_1 = p_1 + \frac{m_1 - \mu p_1}{a + \mu}, \qquad P'_2 = p_2 + \frac{m_2 - \mu p_2}{a + \mu}, \qquad \cdots;$$

P_1, P_2, ... diffèrent peu de P'_1, P'_2, ... Posons

$$P_1 = P'_1 + \varepsilon_1, \qquad P_2 = P'_2 + \varepsilon_2, \qquad \cdots.$$

On en déduit

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu p_1 - m_1}{a + \mu} + \frac{z_1}{a}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\mu p_2 - m_2}{a + \mu} + \frac{z_2}{a}, \qquad \cdots.$$

Remplaçant alors dans l'expression de la probabilité *a posteriori* les z par les ε, on obtient

$$\frac{(\sqrt{a+\mu})^{n-1}\, e^{-\frac{(a+\mu)}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}.$$

Telle est la probabilité pour que P_1 ait la valeur $P'_1 + \varepsilon_1$, P'_2 la valeur $P'_2 + \varepsilon_2$, ...

33. Si l'on effectue μ' nouveaux tirages (toujours en remettant après chaque tirage la boule sortie), la probabilité pour obtenir $\mu' P'_1 + x_1$ boules blanches, $\mu' P'_2 + x_2$ boules noires, etc., c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, ..., x_n, a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu'\frac{a+\mu+\mu'}{a+\mu}}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \dots + \frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{\left(\sqrt{2\pi\mu'\frac{a+\mu+\mu'}{a+\mu}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}.$$

34. *En μ épreuves, l'événement A_1 s'est produit m_1 fois, l'événement A_2, m_2 fois, etc., l'événement A_n, m_n fois. μ' nouvelles épreuves devant avoir lieu, en désignant par m'_1, m'_2, ..., m'_n les nombres des arrivées des événements A_1, A_2, ..., A_n, quelle est la probabilité pour que*

$$\alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n$$

ait une valeur donnée s?

μ et μ' sont de très grands nombres; α_1, α_2, ..., α_n sont des coefficients donnés qui peuvent désigner, par exemple, les pertes possibles d'un joueur à chaque épreuve; s désigne alors la perte totale dans l'ensemble des μ' nouvelles épreuves.

Posons

$$\frac{m_1}{\mu} = p_1, \qquad \frac{m_2}{\mu} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{m_n}{\mu} = p_n.$$

Supposons que les événements A_1, A_2, ..., A_n aient pour probabilités $(p_1 + \varepsilon_1)$, $(p_2 + \varepsilon_2)$, ..., $(p_n + \varepsilon_n)$; la probabilité de cette éventualité est

$$\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1} e^{-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Ces valeurs $(p_1 + \varepsilon_1)$, ..., $(p_n + \varepsilon_n)$ donnent pour la probabilité de la quantité s

$$\frac{e^{\frac{\{s - \mu'[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]\}^2}{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2^2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2] - [(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2^2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2] - [(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1 + (p_2+\varepsilon_2)\alpha_2 + \ldots + (p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}},$$

d'après la formule relative à la probabilité d'une somme (consulter mon Mémoire sur les probabilités continues, n° **9**).

La probabilité des valeurs

$$(p_1 + \varepsilon_1), \quad \ldots, \quad (p_n + \varepsilon_n) \qquad \text{et} \qquad s$$

est, d'après le principe des probabilités composées, égale au produit des deux dernières expressions, et la probabilité cherchée est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sqrt{\mu})^{n-1}e^{\frac{\mu}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{p_1}+\frac{\varepsilon_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}$$

$$\times\frac{e^{-\frac{\{s-\mu'[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]\}^2}{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2]-[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'\{[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1^2+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n^2]-[(p_1+\varepsilon_1)\alpha_1+\ldots+(p_n+\varepsilon_n)\alpha_n]^2\}}}\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_{n-1}.$$

On doit, dans cette formule, remplacer ε_n par $-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1})$; on doit aussi ne conserver les ε que dans la première exponentielle et dans le numérateur de la seconde.

Lorsqu'il n'y a qu'une variable ε, l'expression se réduit à

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{\mu\varepsilon^2}{2p_1p_2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2p_1p_2}}\,\frac{e^{-\frac{\{s-\mu'[(p_1+\varepsilon)\alpha_1+(p_2-\varepsilon)\alpha_2]\}^2}{2\mu'p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}}\,d\varepsilon;$$

elle s'intègre facilement et devient

$$\frac{e^{-\frac{[s-\mu'(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)]^2}{2\mu'p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'p_1p_2(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}.$$

Dans le cas où le nombre des variables est quelconque, les intégrations sont pénibles; il est à la fois plus simple et plus élégant de résoudre le problème en faisant appel à la théorie des *probabilités connexes* que j'ai exposée dans mon Mémoire sur les probabilités continues (nº **17**).

Posons

$$s=\mu'p_1\alpha_1+\mu'p_2\alpha_2+\ldots+\mu'p_n\alpha_n+x;$$

x est l'*écart*. Le problème considéré revient à chercher la probabilité de cet écart.

Supposons qu'un joueur H perde une somme égale à l'écart; supposons que les μ' nouvelles épreuves soient effectuées et qu'elles aient donné $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ pour les nombres des arrivées des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

L'écart x est alors connu et il a pour valeur

$$x = \alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n - \mu'(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n).$$

Si une nouvelle épreuve a lieu, l'événement A_1 s'étant produit $m_1 + m'_1$ fois en $\mu + \mu'$ épreuves a probabilité $\frac{m_1 + m'_1}{\mu + \mu'}$ de se produire, et alors l'écart augmente de la quantité

$$\alpha_1 - (p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \ldots + p_n \alpha_n).$$

Il y a de même probabilité $\frac{m_2 + m'_2}{\mu + \mu'}$ pour que l'écart augmente de

$$\alpha_2 - (p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \ldots + p_n \alpha_n).$$

Etc. L'espérance mathématique du joueur H pour une nouvelle épreuve est donc

$$-\sum \frac{m_1 + m'_1}{\mu + \mu'} [\alpha_1 - (p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \ldots + p_n \alpha_n)]$$

ou

$$-\frac{\alpha_1 m'_1 + \alpha_2 m'_2 + \ldots + \alpha_n m'_n - \mu'(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)}{\mu + \mu'} = -\frac{x}{\mu + \mu'}.$$

L'espérance mathématique du joueur H pour une nouvelle épreuve est égale au produit de sa perte actuelle par une fonction de μ'.

La fonction d'instabilité du jeu de H pour une nouvelle épreuve se calcule de même, et elle a pour expression, après suppression des quantités négligeables,

$$2[(\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n) - (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)^2].$$

L'espérance du joueur H étant égale au produit de sa perte actuelle par une fonction de μ' et la fonction d'instabilité de son jeu étant constante, il suffit d'appliquer la formule démontrée au n° **24** du Mémoire précité.

La probabilité pour que le joueur H perde la somme x en μ' épreuves est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{F(\mu')}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{F(\mu')}}\,dx,$$

F étant l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial \mu'} - \frac{2F}{\mu+\mu'}$$
$$= 2[(\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n) - (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)^2],$$

d'où

$$F = 2\mu'[(\alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n)$$
$$- (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n)^2]\frac{\mu+\mu'}{\mu}.$$

La probabilité de l'écart de x est donc

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu'[(\alpha_1^2 p_1+\alpha_2^2 p_2+\ldots+\alpha_n^2 p_n)-(\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\ldots+\alpha_n p_n)^2]\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'[(\alpha_1^2 p_1+\alpha_2^2 p_2+\ldots+\alpha_n^2 p_n)-(\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\ldots+\alpha_n p_n)^2]\frac{\mu+\mu'}{\mu}}}\,dx.$$

Si les probabilités des événements A_1, A_2, ..., A_n avaient pour valeurs exactes p_1, p_2, ..., p_n, la probabilité de l'écart x serait

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu'[(\alpha_1^2 p_1+\alpha_2^2 p_2+\ldots+\alpha_n^2 p_n)-(\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\ldots+\alpha_n p_n)^2]}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu'[(\alpha_1^2 p_1+\alpha_2^2 p_2+\ldots+\alpha_n^2 p_n)-(a_1 p_1+a_2 p_2+\ldots+\alpha_n p_n)^2]}}\,dx.$$

L'ignorance où l'on est des valeurs exactes des probabilités augmente les écarts dans le rapport de $\sqrt{\mu+\mu'}$ à $\sqrt{\mu}$.