JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BUHL

Sur la sommabilité des séries d'une variable réelle ou complexe

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 4 (1908), p. 367-377.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__367_0>

Sur la sommabilité des séries d'une variable réelle ou complexe;

PAR M. A. BUHL,

Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Objet du Mémoire. — Je reviens, dans ce travail, sur des points laissés en suspens vers la fin de mon Mémoire *Sur la généralisation des séries trigonométriques,* publié ici même. Mais ces nouvelles pages pourront être lues indépendamment dudit Mémoire, car les méthodes de sommabilité employées, vues d'une manière suffisamment générale, sont celles qui s'appliquent à bien d'autres séries, notamment à la série de Taylor.

J'ai même pu réindiquer brièvement, sans recourir à la théorie des intégrales curvilignes, tous les résultats que j'ai déjà donnés, en m'appuyant sur cette théorie, dans différentes Notes des *Comptes rendus* et du *Bulletin des Sciences mathématiques,* résultats qui me raissent apporter d'intéressants compléments à ceux dus surtout à MM. Mittag-Leffler et Borel.

I. — Généralités. Cas des séries trigonométriques.

1. Soient les deux séries

$$F(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots, \tag{1}$$

$$f(\xi) = c_0(\xi) + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \ldots, \tag{2}$$

qui sont supposées représenter les premiers membres dans des conditions connues, c'est-à-dire lorsque x et ξ sont dans de certains intervalles ou dans de certaines régions du plan s'il s'agit de variables complexes. Nous aurons à supposer de plus, dans ce qui suit, que $f(\xi)$ devient infinie pour de certaines valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de ξ, mais que la série (2) reste propre à représenter $f(\xi)$ dans le voisinage immédiat de tous ces α, ou tout au moins quand ξ tend vers un α d'une manière bien déterminée.

Si l'on forme le produit $F(x) f(\xi)$, on peut l'écrire

$$\begin{array}{l} c_0 u_0 + c_0 u_1 + c_0 u_2 + \ldots \\ + c_1 u_0 + c_1 u_1 + c_1 u_2 + \ldots \\ + c_2 u_0 + c_2 u_1 + c_2 u_2 + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Désignons par s_n la somme des $n+1$ premiers termes de (1). Dans le Tableau précédent, la diagonale principale et tous les termes placés au-dessous peuvent se représenter par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n.$$

En tenant compte des autres termes, on arrive facilement à la formule

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n+1} \frac{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}{f(\xi)}.$$

On démontrerait sans aucune peine que le second sigma tend vers zéro si ξ tend vers l'une des valeurs α précédemment définies, *à condition que la série* (1) *soit convergente*. On a donc à la fois

$$(3) \qquad F(x) = \lim_{n=\infty} s_n, \qquad F(x) = \lim_{\xi=\alpha} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)}.$$

2. Examinons immédiatement quelques cas où la *fonction sommatrice* $f(\xi)$ prend une forme particulière.

Pour

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2 + \ldots,$$

on a (formule de Cesàro)

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi s_1 + \xi^2 s_2 + \ldots}{1 + \xi + \xi^2 + \ldots} = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}.$$

Pour (p désignant un entier positif)

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi^p} = 1 + \xi^p + \xi^{2p} + \ldots,$$

on a

$$F(x) = \lim_{\xi=\alpha} \frac{s_0 + \xi^p s_p + \xi^{2p} s_{2p} + \ldots}{1 + \xi^p + \xi^{2p} + \ldots},$$

α désignant l'une quelconque des racines de l'équation binome

$$\xi^p - 1 = 0,$$

racine vers laquelle ξ doit tendre sans sortir du cercle $|\xi| = 1$. Si l'on prend simplement la racine 1, la formule précédente devient

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \ldots + s_{(n-1)p}}{n}.$$

Remarquons, *la série* (1) *étant toujours supposée convergente*, qu'on peut prendre p assez grand pour que les sommes $s_p, s_{2p}, \ldots, s_{(n-1)p}$ diffèrent les unes des autres d'aussi peu qu'on voudra. Cela permet d'écrire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{s_0}{n} + \frac{n-1}{n} s_{(n-1)p} \right) = \lim_{n=\infty} s_{(n-1)p}.$$

On passe ainsi *directement* de la seconde à la première des formules (3) et, par suite, on peut dire que la première est un cas particulier de la seconde.

3. Il est inutile d'augmenter le nombre des exemples. On voit qu'à toute fonction $f(\xi)$, possédant des infinis et développable de la manière indiquée, correspondent une ou plusieurs formules de sommabilité. Ces dernières, si l'on se borne à ce qui précède, n'ont évidemment qu'un intérêt de pure curiosité, car, si la série (1) converge, il sera plus simple d'utiliser cette formule même, pour le calcul de $F(x)$, que de passer par la seconde des formules (3).

On sait cependant que certaines séries *indéterminées* pour lesquelles la formule (3_1) n'offre aucun sens deviennent sommables au moyen de (3_2). C'est dans cet esprit que Cesàro a étudié sa formule. Et l'on verra plus loin comment une généralisation convenable permet d'arriver jusqu'au problème général du prolongement analytique tel qu'il a été envisagé par M. Mittag-Leffler.

Dans un autre ordre d'idées, on peut étudier directement comment les seconds membres de (3_1) et de (3_2) tendent vers $F(x)$, et il peut parfaitement arriver que ce soit la seconde expression dont l'étude soit la plus simple. C'est notamment ce qu'a montré M. L. Fejér en appliquant la formule de Cesàro à la série de Fourier (*Mathematische Annalen*, t. LVIII, 1904).

J'ai montré *directement* que le résultat de M. Fejér subsistait pour les *séries trigonométriques généralisées* (ce *Journal*, 1908). Prenant encore comme exemple la série de Fourier, les formules (3_1) et (3_2) peuvent être l'objet de nouvelles et intéressantes comparaisons.

4. Ayant à revenir sur des résultats déjà exposés par une méthode directe dans ma Note *Sur la sommabilité des séries de Fourier* (*Comptes rendus*, 13 janvier 1908), je reprends les notations de cette communication et considère les deux développements de Fourier

$$F(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\xi)\cos n(\xi - \theta)\,d\xi, \tag{4}$$

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\cos n(\zeta - \tau)\,d\zeta. \tag{5}$$

Il faut supposer que la fonction $f(\tau)$ présente dans l'intervalle $0, 2\pi$ au moins un infini $\tau = \alpha$ (il pourrait y en avoir plusieurs) au voisinage duquel la formule (5) reste valable. Alors, si l'on considère une suite de nombres α_k tendant vers α quand k croît indéfiniment, et si l'on pose

$$S_k = \frac{c_0(\alpha_k)s_0 + c_1(\alpha_k)s_1 + \ldots + c_k(\alpha_k)s_k}{f(\alpha_k)}, \tag{6}$$

on doit avoir

$$F(\theta) = S_0 + (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + \ldots. \tag{7}$$

Si l'on observe que

$$s_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,\frac{\sin(2k+1)\dfrac{\xi-\theta}{2}}{\sin\dfrac{\xi-\theta}{2}}\,d\xi,$$

et que c_k est le $(k+1)^{\text{ième}}$ terme de (5), on trouve facilement, bien que les calculs soient un peu encombrants, que S_k est la somme de deux intégrales doubles dont j'ai d'ailleurs indiqué la forme dans la Note précitée. *Une telle expression,* tendant vers $F(\theta)$ quand k croît indéfiniment, *généralise l'intégrale simple de Dirichlet.* Elle dépend *formellement* du choix de $f(\tau)$, c'est-à-dire prend des formes diverses si l'on attribue des formes diverses à $f(\tau)$; au fond, cette dernière fonction ne joue un rôle *qu'en ses infinis* tels que $\tau = \alpha$.

Cette remarque donne une première idée du rôle que les séries divergentes peuvent jouer en Analyse. Je ne fais ici aucune allusion à l'idée de M. Borel, qui consiste à attribuer un sens à une série divergente moyennant d'autres procédés de calcul que la sommation terme à terme; j'y viendrai tout à l'heure.

Pour l'instant, il s'agit d'une remarque beaucoup plus élémentaire, qui consiste en ce qu'une série, même irrémédiablement divergente [telle (5) pour $\tau = \alpha$], peut servir à quelque chose. *C'est un instrument de sommation vis-à-vis d'autres séries.*

C'est ainsi que

$$\frac{1}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2 + \ldots$$

conduit, pour $\xi = 1$, à la formule de Cesàro rappelée au n° **2**.

5. *Transformation des solutions des équations linéaires aux dérivées partielles.* — Soient maintenant les expressions

$$(8)\quad U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\xi)\,r^n\cos n(\xi-\theta)\,d\xi,$$

$$(9)\quad V(\rho,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\rho^n\cos n(\zeta-\tau)\,d\zeta,$$

qui sont respectivement des solutions des équations de Laplace

$$(10) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0.$$

Ces solutions prennent l'une la valeur $F(\theta)$ sur la circonférence $r = 1$, l'autre la valeur $f(\tau)$ sur $\rho = 1$. F et f sont supposées représentables par les séries de Fourier (4) et (5).

Soient toujours s_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de (8), c_n le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de (9).

Imaginons encore que $f(\tau)$ présente pour $\tau = \alpha$ un infini, tout comme au n° **4**.

Enfin, soit une suite de deux nombres associés ρ_k, τ_k telle que ρ_k tende vers 1 et τ_k vers α quand l'indice k croît indéfiniment. Formons l'expression

$$S_k = \frac{c_0(\rho_k, \tau_k)s_0 + c_1(\rho_k, \tau_k)s_1 + \ldots + c_k(\rho_k, \tau_k)s_k}{V(\rho_k, \tau_k)}.$$

Je dis que, pour k croissant indéfiniment, cette expression tend vers $F(\theta)$ sur la circonférence $r = 1$ et est, par suite, une solution analogue à (8) du problème de Dirichlet dans le cas du cercle. Cela résulte, d'une part, de ce que S_k est, de même que (8), une combinaison linéaire de solutions de la première équation (10); d'autre part, de ce que la limite de S_k, définie comme on vient de le faire, se réduit en outre à l'expression (6) pour $r = 1$.

Donc, quoiqu'il n'y ait, bien entendu, qu'une seule fonction harmonique prenant la valeur $F(\theta)$ sur $r = 1$ (principe de Dirichlet), nous n'en avons pas moins construit une infinité d'expressions, *dépendant d'une fonction arbitraire quant à leur forme*, pour représenter cette unique solution.

Il y a là une raison curieuse et que je crois nouvelle de montrer une fois de plus que la présence d'une fonction arbitraire dans une solution d'une équation aux dérivées partielles ne permet nullement de conclure quoi que ce soit quant à la généralité de cette solution. La solution peut être *invariante* par rapport à la fonction arbitraire qu'elle contient.

Dans cet ordre d'idées, M. Fejér paraît encore préparer des travaux importants. Dans sa Note *Sur le développement d'une fonction arbi-*

traire suivant les fonctions de Laplace (*Comptes rendus*, 3 février 1908), il envisage l'unique solution du problème de Dirichlet dans le cas de la sphère et construit diverses expressions de cette solution, lesquelles, coïncidant à la surface de la sphère, doivent coïncider partout.

II. — Prolongement analytique.

6. Les résultats obtenus jusqu'ici, s'ils permettent de remplacer une expression tendant vers une certaine limite par une infinité d'autres tendant vers la même limite, et même, dans certains cas, une limite *indéterminée* par une limite déterminée, ne permettent cependant pas, du moins sous la forme précédente, de construire une expression à limite déterminée en partant d'une autre croissant au delà de toute limite. C'est ainsi que la formule de Cesàro, appliquée à une série entière convergeant dans un cercle taylorien, ne convergeait que dans ce cercle même ou, tout au plus, sur la circonférence le limitant.

Je vais montrer qu'en modifiant convenablement le raisonnement du n° **1**, on peut arriver très simplement à un véritable prolongement analytique qui est celui de M. Mittag-Leffler préparé par les recherches de M. Borel.

Je ne considère, pour plus de simplicité, qu'une fonction méromorphe $F(x)$ dont les pôles $a_1, a_2, a_3, \ldots$, supposés d'abord simples, sont rangés par ordre de modules croissants.

Je suppose que l'origine O est un point régulier et qu'on connaît le développement taylorien valable dans le cercle C_0 décrit de l'origine comme centre avec un rayon au plus égal à $|a_1|$. Soit toujours s_n la somme des $n+1$ premiers termes de ce développement. Enfin soit C_k le cercle de centre O dont le rayon est compris entre $|a_k|$ et $|a_{k+1}|$.

Dans C_k, on a

$$(11) \qquad F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{x-a_i} + a_{k0} + ax_{k1} + a_{k2}x^2 + \ldots,$$

ce qu'on peut écrire

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \left[-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \ldots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} \right]$$
$$+ a_{k0} + a_{k1} + \ldots + a_{kn}x^n + a_{k(n+1)}x^{n+1} + \ldots$$

ou encore

$$F(x) = s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} + a_{k(n+1)} x^{n+1} + a_{k(n+2)} x^{n+2} + \ldots.$$

Soit maintenant

$$f(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \ldots$$

une fonction *entière;* je pose $c_n = \gamma_n \xi^n$ et, après avoir multiplié par c_n tous les termes de la formule en x obtenue en dernier lieu, je somme de $n = 0$ à $n = \infty$. Il vient

$$F(x) f(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n + \sum_{i=1}^{i=k} f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) \frac{A_i x}{a_i(x-a_i)}$$
$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{k(n+1)} x^{n+1} (\gamma_0 + \gamma_1 \xi + \ldots + \gamma_n \xi^n).$$

Finalement on arrive à la *formule fondamentale*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)} \frac{A_i x}{a_i(x-a_i)}$$
$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{k(n+1)} x^{n+1} \frac{\gamma_0 + \gamma_1 \xi + \ldots + \gamma_n \xi^n}{f(\xi)}.$$

7. *Cas où* $F(x)$ *présente des pôles multiples.* — Étudions ce cas avant de discuter la formule que nous venons d'obtenir. Si $F(x)$ présente des pôles d'ordre m, le sigma de la formule (11) ne porte pas seulement sur des quantités en $(x - a_i)$ à la puissance -1; c'est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants de $(x - a_i)^{-1}$ et des dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, m-1$ de cette même expression. En commençant à se représenter les choses de cette façon, on voit alors facilement comment se généralise le calcul précédent. Le sigma médian de la formule fondamentale, au lieu de contenir seulement le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$ à $f(\xi)$, contient de manière linéaire et homogène les m rapports

$$(12)\qquad \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},\quad \frac{f^{(1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},\quad \ldots,\quad \frac{f^{(m-1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},$$

qui, en général, sont distincts. Il n'y a même qu'un seul cas où ils sont rigoureusement confondus : c'est celui de $f(\xi) = e^{\xi}$.

8. J'ai déjà publié des démonstrations de la formule fondamentale du n° **6**, démonstrations fondées sur la considération préliminaire d'une intégrale curviligne double (*Bulletin des Sciences mathématiques*, juin 1907 et juillet 1908). On trouvera encore une autre démonstration de ladite formule dans un article de M. A. Costabel, où l'intégrale double est étudiée en renversant l'ordre des intégrations (*Enseignement mathématique,* septembre 1908). Mon but était ici de retrouver cette formule sans rien emprunter à la notion d'intégrale curviligne.

Il est facile de voir que cette formule fondamentale équivaut au théorème général de M. Mittag-Leffler sur la représentation des fonctions méromorphes. Elle doit être valable pour toutes les valeurs de x, car le cercle C_k peut être aussi grand qu'on veut.

Le premier sigma converge quels que soient ξ et x, ainsi que M. Mittag-Leffler l'a démontré très simplement, en observant que $\sqrt[n]{c_n s_n}$ se comporte comme $\sqrt[n]{c_n}$ pour n croissant indéfiniment (5e Note : *Acta mathematica,* t. XXIX, p. 167).

Le troisième sigma n'existe pas si $F(x)$ se réduit à une fraction rationnelle; dans le cas général, on peut toujours le faire disparaître en faisant croître indéfiniment $|\xi|$ dans une direction où $|f(\xi)|$ croît aussi indéfiniment.

Dans ces conditions, on a, pour représenter $F(x)$, une formule qui est une extension obtenue sans grande peine de la formule insuffisante (11) qui est celle de Cauchy. Mais j'abandonne ces remarques pour revenir au prolongement analytique proprement dit.

9. La formule fondamentale du n° **6** se réduit à

$$(13)\qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)},$$

si l'on s'arrange à annuler toujours le premier des rapports (12) [cas où $F(x)$ n'a que des pôles simples] ou tous ces rapports [cas des pôles d'ordre m]. Elle permet alors une représentation de $F(x)$ au moyen des *polynomes tayloriens* s_n, ainsi nommés parce qu'on peut les prendre immédiatement dans le développement taylorien de $F(x)$ valable au voisinage de l'origine. Quant aux valeurs de x pour lesquelles (13) est valable, elles sont déterminées par les conditions obtenues en annulant les rapports (12).

Je vais rappeler brièvement quelques résultats connus en y adjoignant des résultats nouveaux.

a. $f(\xi) = e^{\xi}$. — Ce cas est celui de M. Borel, x étant enfermé dans un certain *polygone de sommabilité*. J'ai redonné de ce fait une démonstration extrêmement brève (*Bulletin des Sciences mathématiques*, juin 1907). Cette méthode n'est pas de nature à donner, en général, un prolongement analytique bien considérable, car, comme le reconnaît M. Borel lui-même, le polygone de sommabilité peut être à peine plus étendu que le cercle taylorien; mais, d'autre part, elle jouit de propriétés simples qui ne paraissent pouvoir appartenir à aucune autre méthode, du moins *avec le même degré de simplicité*. Tout d'abord, les rapports (12) sont confondus et, par suite, tous sont nuls si le premier l'est. Donc la formule de M. Borel est aussi bien valable pour $F(x)$ possédant des pôles multiples quel que soit leur ordre. Il s'ensuit immédiatement que *la formule est dérivable indéfiniment*, les singularités polaires de $F(x)$ se reproduisant dans ses dérivées avec une simple augmentation d'ordre.

b. $f(\xi) = e^{\xi^p}$. — Ce cas a encore été étudié par M. Borel. La région de sommabilité est limitée par certaines courbes (*Leçons sur les séries divergentes*, p. 132). La méthode de ce Mémoire redonne, en quelques lignes, l'équation de ces courbes (A. Costabel, *Enseignement mathématique*, septembre 1908).

c. $f(\xi) = e^{e^{\xi}}$. — *Voir* A. Costabel, *loc. cit.*

d. $f(\xi)$ est une fonction entière construite tout spécialement pour que la formule (13) soit valable dans tout le plan. Le grand honneur d'avoir construit de telles fonctions appartient à M. Mittag-Leffler (5e Note, *loc. cit.*). Le grand géomètre a d'ailleurs insisté sur ce point dans sa très belle conférence sur la représentation des fonctions analytiques faite au dernier Congrès international de Mathématiques (Rome, avril 1908). La fonction $f(\xi)$ prend ici, dans un angle ayant son sommet à l'origine et aussi aigu qu'on le veut, des valeurs incomparablement plus grandes que partout ailleurs. Si l'ouverture de l'angle décroît indéfiniment et si ξ va à l'infini sans en sortir, le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$ à $f(\xi)$ tend vres zéro quand x et a_i sont d'arguments différents ou de même argument avec $|x| < a_i$. La formule (13) a donc lieu pour x dans tout le plan, sauf sur les rayons d'une étoile.

e. $f(\xi) = \sigma\xi$. — L'emploi de la fonction σ, que Weierstrass place à la base de sa théorie des fonctions elliptiques, m'a fourni des résultats très différents des précédents mais cependant fort intéressants (*Bulletin des Sciences mathématiques*, juillet 1908). On peut imaginer qu'on ne considère pour ξ et x que des valeurs en nombre infini *mais discontinues*, de telle sorte que $\frac{\xi x}{a_i}$ coïncide toujours avec un zéro de σ. Alors le premier rapport (12) est nul si $\sigma\xi$ ne l'est pas; ces rapports seront même tous nuls si l'on remplace σ, qui n'a que des zéros simples, par sa puissance $m^{\text{ième}}$ qui aura évidemment des zéros d'ordre m. On a ainsi de nouvelles formules valables, non pas lorsque x est dans l'ensemble continu de toutes les valeurs complexes, mais lorsque cette variable est dans de certains ensembles dénombrables dont les éléments peuvent pourtant être répandus dans tout le plan.

10. On voit, par cet exposé rapide, comment le prolongement analytique d'une fonction méromorphe est intimement lié à son développement en série de fractions rationnelles. C'est surtout ce point qui m'a semblé intéressant, la formule fondamentale du n° **6** étant, au fond, d'origine très élémentaire et à peine plus difficile à établir que celle du n° **1**.

Le problème du prolongement d'une branche d'une fonction *quelconque*, si l'on consent d'abord à sacrifier un peu sa généralité, paraît promettre en retour bien des cas particuliers simples et élégants; j'espère l'avoir montré pour les fonctions méromorphes.