

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

E. GOURSAT

Sur les invariants intégraux

*Journal de mathématiques pures et appliquées 6<sup>e</sup> série*, tome 4 (1908), p. 331-365.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1908\\_6\\_4\\_331\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4_331_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les invariants intégraux;*

PAR M. E. GOURSAT.

La théorie générale des invariants intégraux a été développée par M. Poincaré dans le Tome III de son Ouvrage sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Le but de ce Mémoire est d'apporter une contribution à l'étude de la question générale suivante : Connaisant un invariant intégral, absolu ou relatif, d'un ordre quelconque, d'un système d'équations différentielles, quel parti peut-on en tirer pour l'intégration de ce système? Je montre que de tout invariant intégral on peut déduire au moins un système d'équations différentielles dont toutes les intégrales appartiennent au système proposé, et dont l'intégration est en général un problème plus simple. Dans le cas où les deux systèmes sont équivalents, on peut déterminer un multiplicateur <sup>(1)</sup>.

## I.

1. Je rappellerai d'abord les principaux résultats de la théorie des intégrales multiples qui seront utilisés dans ce travail, ainsi que la signification précise des notations employées <sup>(2)</sup>.

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un système de  $n$  variables indépendantes, et un système de fonctions de ces  $n$  variables

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} \quad (p \leq n),$$

<sup>(1)</sup> Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 3 juin 1907).

<sup>(2)</sup> Outre l'Ouvrage cité de M. Poincaré, on pourra consulter les Mémoires suivants du même auteur : *Sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta mathematica*, t. IX); *Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1895); Complément à l'*Analysis situs* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*). On trouvera aussi des renseignements bibliographiques sur les invariants dans deux Mémoires de M. de Donder (*Rendiconti*, 1901 et 1902).

dont chacune est affectée de  $p$  indices différents  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , pris parmi les  $n$  premiers nombres. A chaque arrangement des  $n$  premiers nombres  $p$  à  $p$  correspond ainsi une fonction déterminée des  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Les fonctions dont quelques indices diffèrent sont complètement indépendantes, mais toutes les fonctions dont les indices ne diffèrent que par leur ordre *sont égales au signe près*. Ainsi, soit  $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p)$  une nouvelle permutation des indices  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ ; on a

$$(1) \quad A_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_p} = A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p},$$

si les deux permutations  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  et  $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p)$  sont de la même classe, et

$$(2) \quad A_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_p} = - A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p},$$

si les deux permutations sont de classes différentes. Lorsque deux indices sont égaux, la fonction est nécessairement nulle.

Nous observerons en passant que les deux permutations

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \quad \text{et} \quad (\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_1)$$

sont de même classe si  $p$  est impair et de classes différentes si  $p$  est pair. En effet, dans les deux cas, on passe de la première permutation à la seconde par  $p - 1$  échanges entre deux éléments consécutifs.

Supposons les  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  exprimées au moyen de  $p$  variables indépendantes  $u_1, u_2, \dots, u_p$ , et considérons l'intégrale multiple d'ordre  $p$

$$(I) \quad I_p = \int \int \dots \int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1 \dots du_p$$

étendue à un certain domaine  $(e_p)$  de l'espace  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ , la sommation indiquée par le signe  $\Sigma$  s'étendant à tous les arrangements des  $n$  premiers nombres  $p$  à  $p$ . Cette intégrale multiple peut encore s'écrire, d'après les formules (1) et (2),

$$(II) \quad I_p = \int \int \dots \int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_p})}{D(u_1, u_2, \dots, u_p)} du_1 du_2 \dots du_p,$$

le signe  $\Sigma$  étant étendu, dans cette nouvelle formule, à toutes les *com-*

*binaisons* des  $n$  premiers nombres  $p$  à  $p$ . Dans chaque combinaison, on peut prendre les indices dans un ordre arbitraire, mais il faut avoir soin de prendre, dans chaque déterminant fonctionnel, les variables  $x_i$  dans l'ordre qui est indiqué par l'ordre des indices du coefficient correspondant.

Lorsque le point de coordonnées  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  décrit dans l'espace à  $p$  dimensions le domaine  $(e_p)$ , le point de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  décrit dans l'espace à  $n$  dimensions un *continuum*  $(E_p)$  à  $p$  dimensions; la forme (II) de l'intégrale  $I_p$ , rapprochée de la formule du changement de variables dans une intégrale multiple, montre immédiatement que la valeur de  $I_p$  ne dépend pas du choix des variables auxiliaires  $u_1, u_2, \dots, u_p$ , mais seulement du domaine  $(E_p)$ . Il faut remarquer cependant que, lorsqu'on échange quelques-unes de ces variables, l'intégrale peut changer de signe; ce fait est analogue à ce qui se présente pour une intégrale de surface dans l'espace à trois dimensions, où le signe de l'intégrale change en même temps que le côté de la surface suivant lequel on prend l'intégrale.

Nous écrirons le plus souvent l'intégrale multiple  $I_p$  sous la forme abrégée

$$(III) \quad I_p = \int \int \dots \int \Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p},$$

le signe  $\Sigma$  étant étendu à toutes les combinaisons  $p$  à  $p$  des  $n$  premiers nombres. Mais, pour avoir la signification précise de ce symbole, il faut toujours se reporter aux expressions (I) ou (II).

*Remarque.* — L'ordre dans lequel on écrit les différentielles dans les produits tels que  $dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p}$  n'est pas indifférent, on le voit. Par exemple, s'il s'agit d'une intégrale de surface, les symboles

$$\begin{aligned} & \int \int A dy dz + B dz dx + C dx dy, \\ & \int \int A dy dz + B dz dx + C dy dx, \\ & \int \int A dy dz + B dx dz + C dx dy \end{aligned}$$

n'ont pas du tout la même signification. La notation (I) a l'avantage

de supprimer toute espèce d'ambiguïté. Une intégrale de surface s'écrira avec cette notation

$$I_2 = \iint \left[ A_{12} \frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)} + A_{23} \frac{D(x_2, x_3)}{D(u, v)} + A_{31} \frac{D(x_3, x_1)}{D(u, v)} \right] du dv,$$

$x_1, x_2, x_3$  étant supposées exprimées au moyen des deux variables auxiliaires  $u$  et  $v$ .

2. On trouvera dans le Mémoire cité de M. Poincaré (*Acta mathematica*) les démonstrations des théorèmes suivants; les fonctions qu'on considère sont supposées uniformes et continues, tout au moins dans les domaines d'intégration.

Toute intégrale  $I_p$  étendue à une multiplicité fermée ( $E_p$ ) de l'espace à  $n$  dimensions ( $p < n$ ) peut être remplacée par une intégrale  $I_{p+1}$  étendue à une multiplicité ( $E_{p+1}$ ) de l'espace à  $n$  dimensions, limitée par la première multiplicité à  $p$  dimensions,

$$(IV) \quad I_{p+1} = \iint \cdots \int \sum \epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_{p+1}},$$

le signe  $\Sigma$  étant étendu à toutes les combinaisons des  $n$  premiers nombres  $p+1$  à  $p+1$ .

L'expression du coefficient

$$\epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p+1}}}$$

a deux expressions différentes suivant la parité de  $p$ .

Si  $p$  est pair, on a

$$(3) \quad \epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p+1}}} = \frac{\partial \Lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{\partial \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \frac{\partial \Lambda_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \dots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_p}}$$

avec des signes  $+$  seulement dans le second membre; si  $p$  est impair, on a

$$(4) \quad \epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p+1}}} = \frac{\partial \Lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial \Lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots - \frac{\partial \Lambda_{\alpha_{p+1} \alpha_1 \dots \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_p}}$$

avec le signe  $+$  et le signe  $-$  alternativement.

Ces formules fournissent la réponse à la question suivante :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale  $I_p$ , étendue à une multiplicité à  $p$  dimensions, ne dépende que de la multiplicité à  $p - 1$  dimensions qui limite ce domaine?

Il faut et il suffit, pour cela, que l'intégrale  $I_p$ , étendue à une multiplicité *fermée* quelconque à  $p$  dimensions, soit nulle, ou que l'intégrale qui lui est égale  $I_{p+1}$ , étendue à une multiplicité quelconque à  $p + 1$  dimensions, soit nulle, c'est-à-dire qu'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices,

$$\mathfrak{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}} = 0.$$

Nous dirons alors, pour abréger, que l'expression

$$(5) \quad \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p}$$

est une *différentielle totale exacte*, et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Pour que l'expression (5) soit une *différentielle exacte*, il faut et il suffit qu'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices,

$$(6) \quad \frac{\partial A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \frac{\partial A_{\alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \frac{\partial A_{\alpha_{p+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} = 0,$$

si  $p$  est pair, et

$$(6)' \quad \frac{\partial A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - \frac{\partial A_{\alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots - \frac{\partial A_{\alpha_{p+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} = 0,$$

si  $p$  est impair. Le nombre total de ces conditions est égal au nombre des combinaisons de  $n$  objets  $p + 1$  à  $p + 1$ .

Si l'expression (5) n'est pas une différentielle totale exacte, l'expression analogue

$$(7) \quad \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}} \mathfrak{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_{p+1}},$$

où les coefficients  $\mathfrak{A}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}}$  sont donnés par les formules (3) ou (4), est une différentielle totale exacte. On déduit, en effet, très aisément de ces expressions des coefficients que les relations analogues à (6) et à (6)' sont identiquement vérifiées.

Il suit, de là, que toute intégrale multiple  $I_p$  d'ordre  $p$ , étendue à une multiplicité fermée  $(E_p)$ , peut être remplacée par une intégrale de différentielle totale exacte  $I_{p+1}$ , étendue à une multiplicité  $(E_{p+1})$ , limitée par la multiplicité  $(E_p)$  (théorème de Stokes généralisé).

Inversement, si l'expression (5) est une différentielle totale exacte, l'intégrale  $I_p$  étendue à une multiplicité non fermée  $(E_p)$  peut être remplacée par une intégrale  $I_{p-1}$ , étendue à la multiplicité fermée  $(E_{p-1})$  qui limite  $(E_p)$ . Il suffit pour cela de montrer qu'on peut former une intégrale  $I_{p-1}$ ,

$$I_{p-1} = \int \int \int \dots \int \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_{p-1}},$$

telle que  $I_p$  se déduise de  $I_{p-1}$  de la même façon que nous avons déduit  $I_{p+1}$  de  $I_p$ . On a ainsi un certain nombre d'équations aux dérivées partielles pour déterminer les coefficients  $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}}$ , et ces expressions sont compatibles, pourvu que les relations (6) ou (6') soient satisfaites.

### 3. Appliquons ces généralités aux cas les plus simples.

Si  $p = 1$ , on a l'intégrale simple analogue aux intégrales curvilignes,

$$(8) \quad I_1 = \int \Lambda_1 dx_1 + \Lambda_2 dx_2 + \dots + \Lambda_n dx_n;$$

cette intégrale  $I_1$ , étendue à une ligne fermée  $L$ , est égale à l'intégrale double

$$(9) \quad I_2 = \iint \sum_{i,k} \left( \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Lambda_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k,$$

étendue à une multiplicité à deux dimensions limitée par la ligne  $L$ . Pour que  $I_1$  soit une intégrale de différentielle exacte, il faut et il suffit que l'intégrale  $I_2$  soit identiquement nulle, ce qui donne les conditions bien connues

$$(10) \quad \frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Lambda_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Soit maintenant  $I_2$  une intégrale double quelconque,

$$(11) \quad I_2 = \iint \sum_{i,k} A_{i,k} dx_i dx_k;$$

cette intégrale double  $I_2$ , étendue à une multiplicité fermée  $(E_2)$ , est égale à une intégrale triple  $I_3$ , étendue à une multiplicité à trois dimensions  $(E_3)$ , limitée par  $(E_2)$ ,

$$(12) \quad I_3 = \iiint \sum_{i,k,l} \left( \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k dx_l.$$

Pour que  $I_2$  soit une intégrale de différentielle exacte, il faut qu'on ait, quels que soient les indices  $i, k, l$ ,

$$(13) \quad \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Si ces conditions sont satisfaites, on peut identifier les expressions (9) et (11); autrement dit, on peut déterminer  $n$  fonctions  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , satisfaisant aux relations

$$(14) \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = A_{i,k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

4. Rappelons encore la définition des invariants intégraux.

Soit

$$(15) \quad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt$$

un système d'équations différentielles; nous supposons que les fonctions  $X_i$  sont uniformes et continues, ainsi que leurs dérivées, et ne renferment pas  $t$ , et nous appellerons, pour abrégé, *caractéristique* toute multiplicité à une dimension  $\Gamma_1$ , représentée par les équations

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad x_n = f_n(t),$$

$f_1(t), \dots, f_n(t)$  formant un système de solutions des équations (15). De chaque point  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  de l'espace à  $n$  dimensions part une caractéristique  $\Gamma$  qui est décrite par le point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  lorsque  $t$  varie.



La valeur initiale de  $t$  étant supposée nulle, considérons dans l'espace à  $n$  dimensions une multiplicité quelconque à  $p$  dimensions ( $E_p^0$ ); de chaque point  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  de cette multiplicité part une caractéristique et, au bout du temps  $t$ , le point  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  est venu au point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Le lieu de ces différents points est une autre multiplicité à  $p$  dimensions ( $E_p$ ). Si l'intégrale multiple

$$(16) \quad I_p = \int \int \dots \int \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p}$$

a la même valeur pour les deux multiplicités ( $E_p^0$ ) et ( $E_p$ ), quel que soit  $t$ , on dit que  $I_p$  est un *invariant intégral absolu d'ordre  $p$*  du système (15).

Il peut se faire que cette propriété d'invariance n'ait lieu que pour les multiplicités *fermées*; on dit alors qu'on a un *invariant intégral relatif d'ordre  $p$* , et on le désigne par la lettre  $J_p$ .

En ce qui concerne les invariants absolus, nous ferons encore la distinction suivante : un invariant absolu peut être une intégrale de différentielle totale exacte; dans ce cas, nous le représenterons par  $I_p^d$ . Il n'y a pas lieu de faire cette distinction pour les invariants relatifs, puisque l'intégrale d'une différentielle totale exacte, étendue à une multiplicité fermée, est toujours nulle.

D'après ce qui précède, un invariant intégral  $J_p$  ou  $I_p$  donne immédiatement un invariant intégral  $I_{p+1}^d$ ; inversement, un invariant intégral  $I_p^d$  est équivalent à un invariant intégral relatif  $J_{p-1}$ .

5. Nous allons chercher, d'une manière générale, à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients  $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$  pour que  $I_p$  soit un invariant absolu. Il suffit, pour cela, de considérer  $I_p$  comme une fonction de  $t$  et d'écrire que sa dérivée est nulle :

$$\frac{dI_p}{dt} = 0.$$

Pour obtenir  $\frac{dI_p}{dt}$ , supposons qu'on donne à  $t$  un accroissement  $\delta t$  et calculons le coefficient de  $\delta t$  dans la différence  $I_p(t + \delta t) - I_p(t)$ .

Soient  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  les coordonnées d'un point quelconque de la multiplicité ( $E_p$ ) au temps  $t$ , et  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  les coordonnées du

point correspondant de la multiplicité au temps  $t + \delta t$ . On a

$$x'_i = x_i + \delta t X_i + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les termes non écrits étant infiniment petits du second ordre en  $\delta t$ . Nous écrivons les deux intégrales  $I_p(t)$  et  $I_p(t + \delta t)$  sous la forme explicite (I) :

$$I_p(t) = \int \int \dots \int \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1 du_2 \dots du_p,$$

$$I_p(t + \delta t) = \int \int \dots \int \sum A'_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} \frac{\partial x'_{\alpha_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x'_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1 du_2 \dots du_p;$$

$A'_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$  désigne ce que devient  $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$  quand on y remplace  $x_i$  par  $x'_i$ ; et les deux intégrales sont étendues au même domaine pour les variables auxiliaires  $u_1, u_2, \dots, u_p$ .

Soit  $A'_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p} \frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x'_{\beta_p}}{\partial u_p}$  un terme quelconque de la seconde intégrale; on a

$$A'_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p} = A_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p} + \delta t X(A_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p}) + \dots,$$

$$\frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial u_1} = \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial u_1} + \delta t \sum_h \frac{\partial X_{\beta_1}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial u_1} + \dots,$$

$$\frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial u_2} = \frac{\partial x_{\beta_2}}{\partial u_2} + \delta t \sum_h \frac{\partial X_{\beta_2}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial u_2} + \dots,$$

.....

$$\frac{\partial x'_{\beta_p}}{\partial u_p} = \frac{\partial x_{\beta_p}}{\partial u_p} + \delta t \sum_h \frac{\partial X_{\beta_p}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial u_p} + \dots$$

Cherchons le coefficient de  $\delta t \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}$  dans la nouvelle intégrale. Pour que le produit

$$A'_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p} \frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x'_{\beta_p}}{\partial u_p}$$

donne un terme de cette espèce, deux hypothèses sont possibles et deux seulement :

1° On peut avoir

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad \beta_p = \alpha_p,$$

ce qui donne le terme

$$\delta l X(A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}) \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p},$$

où l'on a posé

$$X(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

2° On obtient encore un produit de la forme voulue en supposant que les  $p$  égalités  $\beta_i = \alpha_i$  sont vérifiées sauf une seule. Si, par exemple, on a

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad \beta_{i-1} = \alpha_{i-1}, \quad \beta_{i+1} = \alpha_{i+1}, \quad \dots, \quad \beta_p = \alpha_p,$$

$\beta_i$  étant quelconque, on a le produit

$$\delta l A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p} \frac{\partial X_{\beta_i}}{\partial x_{\beta_i}} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p},$$

et la somme des termes ainsi obtenus en faisant varier  $\beta_i$  peut s'écrire

$$\delta l \sum_h A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, h, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_i}} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}.$$

Comme l'indice variable  $\beta_i$  peut remplacer l'un quelconque des indices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , on voit qu'en définitive le coefficient de  $\delta l \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p}$  dans la seconde intégrale a pour expression

$$(17) \quad B_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} = X(A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}) + \sum_h \left( A_{h, \alpha_2, \dots, \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1, h, \dots, \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \dots + A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, h} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}} \right)$$

et la dérivée  $\frac{dI_p}{dt}$  est représentée par une intégrale multiple de même forme que  $I_p$  :

$$(18) \quad \frac{dI_p}{dt} = \int \int \dots \int \sum B_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} du_1 du_2 \dots du_p,$$

cette intégrale étant étendue au même domaine que la première.

Pour que  $I_p$  soit un invariant intégral absolu, il faudra que  $\frac{dI_p}{dt}$  soit nul, quel que soit le domaine d'intégration, c'est-à-dire que tous les coefficients  $B_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$  soient nuls séparément. Donc, pour que  $I_p$  soit

un invariant intégral absolu, il faut et il suffit qu'on ait, pour toutes les combinaisons d'indices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ,

$$(19) \quad X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_h \left( A_{h \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 h \dots \alpha_p} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \dots + A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} h} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0.$$

Pour que  $I_p(t)$  soit un invariant intégral *relatif*, il suffira que l'intégrale multiple (18), qui exprime  $\frac{dI_p}{dt}$ , étendue à une multiplicité fermée quelconque, soit nulle, c'est-à-dire que l'expression

$$\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_p} B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p}$$

soit une différentielle totale exacte. On obtiendra les mêmes conditions en exprimant que l'intégrale multiple  $I_{p+1}^d$  d'ordre  $p+1$ , qu'on déduit de  $I_p$  ainsi qu'il a été expliqué plus haut, est un invariant intégral *absolu* d'ordre  $p+1$ , ce qui fournit les équations de même forme que les équations (19)

$$(20) \quad X(\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \alpha_{p+1}}) + \sum_h \left( \lambda_{h \alpha_2 \dots \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \lambda_{\alpha_1 h \alpha_3 \dots \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_2}} + \dots + \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p h} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} \right) = 0,$$

les  $\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p+1}}$  étant données par les équations (3) ou (4) suivant la parité de  $p$ .

## II.

6. M. Poincaré a aussi indiqué (*Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 33) un procédé permettant de déduire dans certains cas d'un invariant absolu  $I_p$  un invariant absolu d'ordre inférieur  $I_{p-1}$ .

Soit

$$I_p = \int \dots \int A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p}$$

un invariant absolu d'ordre  $p$  du système (15); si l'on pose

$$(21) \quad C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^n A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i} X_i$$

on a un nouvel invariant intégral d'ordre  $p - 1$  :

$$(22) \quad I_{p-1} = \int \int \cdots \int \sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_{p-1}}.$$

Telle est, sous sa forme générale, la proposition que M. Poincaré a déduite de la liaison qui existe entre les invariants intégraux et les équations aux variations. Il est facile de la vérifier au moyen des conditions (19). Il suffit, en effet, de montrer que les relations

$$(23) \quad X(C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}}) + \sum_{h=1}^n \left( C_{h, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-2}, h} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \right) = 0$$

sont les conséquences des équations (19). Or, on a

$$X(C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}}) = \sum_i X_i X(A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i}) + \sum_i \sum_h A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h}.$$

Remplaçons  $X(A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i})$  par sa valeur tirée des formules (19); il vient

$$\begin{aligned} X(C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}}) &= \sum_i \sum_h A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \\ &\quad - \sum_i X_i \sum_h \left( A_{h, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-2}, h, i} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} + A_{\alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, h} \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant de même les C par leurs valeurs, la relation à vérifier (22) devient

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_h A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \\ &\quad - \sum_i X_i \sum_h \left( A_{h, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i} \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, h} \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \sum_h \left( \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_1}} \sum_i A_{h, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i} X_i + \dots + \frac{\partial X_h}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \sum_i A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-2}, h, i} X_i \right) = 0, \end{aligned}$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent immédiatement,

$$\sum_i \sum_h A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, i} X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} = \sum_i \sum_h A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, h} X_i \frac{\partial X_h}{\partial x_i};$$

il suffit de permuter les indices  $i$  et  $h$  pour apercevoir l'identité des deux membres.

7. Pour énoncer plus facilement les résultats qui vont suivre, j'expliquerai d'abord un certain nombre d'expressions et de notations qui seront employées. J'appellerai l'opération par laquelle on passe d'un invariant absolu  $I_p$  ou d'un invariant relatif  $J_p$  à un invariant absolu  $I_{p+1}^d$  (§ 4) l'opération (D). Cette opération, appliquée à un invariant  $I_p^d$ , conduit à un invariant identiquement nul, comme on l'a déjà fait observer. L'opération définie au paragraphe précédent, par laquelle on déduit d'un invariant absolu  $I_p$  un invariant absolu  $I_{p-1}$ , d'ordre inférieur, sera appelée pour abrégé l'opération (E). Cette opération conduit à un invariant identiquement nul, si l'invariant  $I_p$  auquel on l'applique satisfait aux relations

$$(24) \quad \sum_{i=1}^n A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i} X_i = 0,$$

quels que soient les  $p - 1$  indices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$ . Nous dirons alors que l'invariant  $I_p$  est *exceptionnel*, et nous le représenterons par la notation  $I_p^e$ . Appliquée à un invariant non *exceptionnel*, l'opération (E) conduit à un invariant *exceptionnel*  $I_{p-1}^e$ . Nous avons, en effet,

$$\sum_{h=1}^n C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} h} X_h = \sum_h \sum_i A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} hi} X_i X_h,$$

et le coefficient de  $X_i X_h$  dans le second membre est

$$\sum_{i,h} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} hi} + \sum_{i,h} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} ih} = 0.$$

Cette propriété rapproche l'opération (E) de l'opération (D), et en définitive nous sommes conduits à considérer quatre espèces d'invariants absolus :

1° Les invariants qui ne sont ni  $I_p^d$  ni  $I_p^e$  ; nous les représenterons par la notation  $I_p^0$ , quand il y aura lieu de mettre cette propriété en évidence ;

2° Les invariants  $I_p^d$ , pour lesquels l'expression sous le signe intégral est une différentielle totale exacte ;

3° Les invariants exceptionnels qu'on vient de définir  $I_p^e$  ;

4° Un invariant  $I_p$  peut être à la fois  $I_p^d$  et  $I_p^e$  ; nous le représentons alors par  $I_p^{(d,e)}$ .

Les résultats acquis jusqu'ici peuvent se résumer ainsi :

1° L'opération (D) appliquée à un invariant  $I_p^0$  ou  $I_p^e$  conduit à un invariant  $I_p^d$  ou  $I_p^{(d,e)}$  ; appliquée à un invariant  $I_p^d$  ou  $I_p^{(d,e)}$ , elle conduit à un invariant identiquement nul.

2° L'opération (E) appliquée à un invariant  $I_p^0$  ou  $I_p^d$  conduit à un invariant  $I_p^e$  ou  $I_p^{(d,e)}$  ; appliquée à un invariant  $I_p^e$  ou  $I_p^{(d,e)}$ , elle conduit à un invariant identiquement nul.

Ces deux opérations se rapprochent donc par cette propriété commune ; si l'on applique l'une d'elles deux fois de suite, on aboutit toujours à un invariant identiquement nul.

8. Nous allons compléter les énoncés précédents.

A. L'opération (E) appliquée à un invariant  $I_p^d$  conduit à un invariant  $I_{p-1}^{(d,e)}$ .

Il suffit de démontrer que, si les fonctions  $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$  vérifient les relations (19) et les relations (6) ou (6)', les fonctions  $C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}}$  définies par les formules (21) satisfont aux relations analogues aux relations (6) ou (6)'.

Supposons, pour fixer les idées, que  $p$  soit impair ;  $p - 1$  est pair, et il faut prouver que l'équation

$$(25) \quad \frac{\partial C_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} + \frac{\partial C_{\alpha_2, \dots, \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}} + \frac{\partial C_{\alpha_3, \dots, \alpha_p, \alpha_1}}{\partial x_{\alpha_2}} + \dots + \frac{\partial C_{\alpha_p, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} = 0$$

est une conséquence des équations (6)' et (19).

Remplaçons les C par leurs valeurs ; la relation à vérifier devient

$$\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i} + \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} A_{\alpha_2, \dots, \alpha_p, i} + \dots + \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} A_{\alpha_p, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-2}, i} \\ + \sum_i X_i \left( \frac{\partial A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i}}{\partial x_{\alpha_p}} + \frac{\partial A_{\alpha_2, \dots, \alpha_p, i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \frac{\partial A_{\alpha_p, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-2}, i}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \right) = 0.$$

Mais,  $p$  étant impair, une permutation circulaire de  $p$  indices équi-

vaut à un nombre pair de dérangements, et la relation peut encore s'écrire

$$\sum_i \left( A_{i\alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} + A_{\alpha_1 i \alpha_3 \dots \alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_2}} + \dots + A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} \right) + \sum_i X_i \left( \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i}}{\partial x_{\alpha_p}} - \frac{\partial A_{\alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \frac{\partial A_{i \alpha_p \alpha_1 \dots \alpha_{p-2}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \right) = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation (6)',

$$X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_i \left( A_{i\alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0.$$

On retombe précisément sur les équations (19).

On aurait des calculs analogues pour le cas où  $p$  est pair <sup>(1)</sup>.

B. L'opération (D) appliquée à un invariant  $I_p^e$  conduit à un invariant  $I_{p+1}^{(d,e)}$ .

Soit  $I_p^e$  un invariant absolu d'ordre  $p$ ,

$$I_p^e = \int \int \dots \int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p},$$

les fonctions  $A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$  vérifiant les relations

$$(19) \quad X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_i \left( A_{i\alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0,$$

$$(21) \quad \sum_i A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i} X_i = 0.$$

L'invariant  $I_{p+1}^d$  correspondant a pour expression, en supposant par exemple que  $p$  soit pair,

$$I_{p+1}^d = \int \int \dots \int \sum A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_{p+1}},$$

<sup>(1)</sup> Il peut se faire que l'opération (E) appliquée à un invariant intégral  $I_p^e$  conduise aussi à un invariant  $I_p^{(d,e)}$ .



où l'on a posé

$$\Lambda_{x_2 \dots x_p} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{\alpha_2 \dots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \frac{\partial A_{i \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}}.$$

Il s'agit de montrer que les relations

$$\sum_{i=1}^n \Lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p i} X_i = 0$$

ou

$$\sum_i X_i \left( \frac{\partial A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{\alpha_2 \dots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \frac{\partial A_{i \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0$$

sont des conséquences des relations (19) et (24).

La relation à vérifier peut s'écrire

$$X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}) + \sum_i X_i \left( \frac{\partial A_{\alpha_2 \dots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \frac{\partial A_{i \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0,$$

ou, en remplaçant  $X(A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p})$  par sa valeur tirée de (19),

$$\begin{aligned} & \sum_i X_i \frac{\partial A_{\alpha_2 \dots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \sum_i X_i \frac{\partial A_{i \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} \\ & - \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} A_{i \alpha_2 \dots \alpha_p} - \dots - \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i}. \end{aligned}$$

Mais,  $p$  étant pair, on a

$$A_{i \alpha_2 \dots \alpha_p} = - A_{\alpha_2 \dots \alpha_p i}, \quad \dots, \quad A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i} = - A_{i \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}},$$

et il reste

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \left( \sum_i A_{\alpha_1 \dots \alpha_p i} X_i \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_p}} \left( \sum_i A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i} X_i \right) = 0;$$

sous cette forme, on voit immédiatement que la relation à laquelle on est conduit résulte des relations (24).

Le même calcul prouve qu'on sera conduit à un invariant  $I_{p+1}^{(d,e)}$  en appliquant l'opération (D) à un invariant  $I_p^0$  pour lequel toutes les

sommes

$$\sum_i A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i} X_i$$

sont des constantes.

C. *Les opérations (D) et (E) sont permutables.*

En appliquant successivement les opérations (E) et (D) à un invariant  $I_p$ , on est conduit à un invariant  $I_p^{(d,e)}$  (qui peut être identiquement nul). En appliquant les mêmes opérations dans l'ordre inverse au même invariant  $I_p$ , on obtient encore un invariant  $I_p^{(d,e)}$ . *Les deux invariants  $I_p^{(d,e)}$  et  $I_p^{(d,e)}$  sont identiques, au signe près.*

Soit

$$I_p = \int \int \dots \int \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p}$$

un invariant absolu quelconque d'ordre  $p$ . En lui appliquant l'opération (E), on obtient un invariant  $I_{p-1}^e$ ,

$$I_{p-1}^e = \int \int \dots \int \sum C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_{p-1}}$$

où

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_i A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i} X_i.$$

De  $I_{p-1}^e$  on déduit ensuite l'invariant  $I_p^{(d,e)}$ ,

$$I_p^{(d,e)} = \int \int \dots \int \sum \partial_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p},$$

où l'on a posé, en supposant, pour fixer les idées, que  $p$  soit *impair*,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= \frac{\partial C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}} + \frac{\partial C_{\alpha_2 \dots \alpha_{p-1} \alpha_p}}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \frac{\partial C_{\alpha_p \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_p}} (X_i A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} i}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} (X_i A_{\alpha_2 \dots \alpha_p i}) + \dots \\ &\quad + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_{p-1}}} (X_i A_{\alpha_p \alpha_2 \dots \alpha_{p-2} i}). \end{aligned}$$

D'autre part, en appliquant à  $I_p$  l'opération (D) la première, on

obtient un invariant  $I_{p+1}$ ,

$$I_{p+1}^d = \int \int \dots \int \sum \epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p+1}}} dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_{p+1}},$$

où l'on a posé, puisque  $p$  est *impair*,

$$\epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p i}} = \frac{\partial \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} + \frac{\partial \Lambda_{\alpha_3 \dots \alpha_p i \alpha_1}}{\partial x_{\alpha_2}} - \dots - \frac{\partial \Lambda_{i \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_p}},$$

ce qu'on peut encore écrire, d'après une remarque antérieure (§ 1),

$$\epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p i}} = \frac{\partial \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} - \frac{\partial \Lambda_{\alpha_3 \dots \alpha_p i \alpha_1}}{\partial x_{\alpha_2}} - \dots - \frac{\partial \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i}}{\partial x_{\alpha_p}}.$$

De  $I_{p+1}^d$  on déduit enfin, au moyen de l'opération (E), l'invariant  $I_p^{(d, \epsilon)}$ ,

$$I_p^{(d, \epsilon)} = \int \int \dots \int C_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_p},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= \sum_i \epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p i}} X_i \\ &= X(\Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) - \sum_i X_i \frac{\partial \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p i}}{\partial x_{\alpha_1}} - \dots - \sum_i X_i \frac{\partial \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i}}{\partial x_{\alpha_p}}. \end{aligned}$$

En ajoutant les expressions de  $\epsilon^{\lambda'_{\alpha_1 \dots \alpha_p}}$  et de  $C'_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ , il vient

$$\begin{aligned} \epsilon^{\lambda'_{\alpha_1 \dots \alpha_p}} + \epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p}} &= X(\Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) + \sum_i \left( \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} + \dots + \Lambda_{\alpha_2 \dots \alpha_p i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} \right), \end{aligned}$$

ou encore,  $p$  étant *impair*,

$$\begin{aligned} \epsilon^{\lambda'_{\alpha_1 \dots \alpha_p}} + \epsilon^{\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p}} &= X(\Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) + \sum_i \left( \Lambda_{i \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \Lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} i} \frac{\partial X_i}{\partial x_{\alpha_p}} \right) = 0. \end{aligned}$$

On a donc, en définitive,

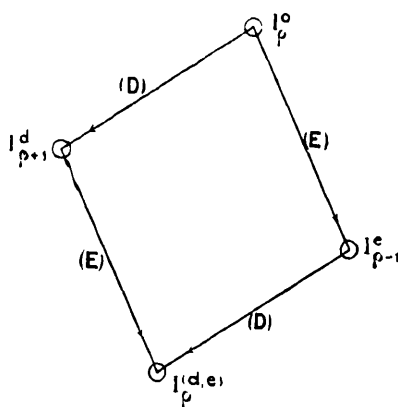
$$I_p^{(d, \epsilon)} = - I_p^{(d, \epsilon')}.$$

9. Ces propriétés étant établies, supposons qu'on connaisse un invariant intégral absolu  $I_p^0$  des équations (15) ( $p > 1$ ).

En lui appliquant l'opération (E), nous obtiendrons un invariant  $I_{p-1}^e$  qui, *en général*, ne sera pas un invariant  $I_{p-1}^{(d,e)}$ . Donc, en appliquant à  $I_{p-1}^e$  l'opération (D), on obtiendra un invariant  $I_p^{(d,e)}$  *non identiquement nul*.

Nous venons de voir qu'on obtiendrait le même résultat en procédant dans l'ordre inverse. La liaison entre les quatre invariants  $I_p^0$ ,  $I_{p-1}^e$ ,  $I_p^{(d,e)}$ ,  $I_{p+1}^d$  est représentée par le schéma suivant (fig. 1) :

Fig. 1.



Il peut arriver que le cycle soit incomplet. Partons toujours d'un invariant  $I_p^0$ ; si l'opération (E) conduit à un invariant  $I_{p-1}^{(d,e)}$ , l'invariant  $I_{p-1}^{(d,e)}$  sera identiquement nul, et l'invariant  $I_{p+1}^d$  déduit de  $I_p^0$  par l'opération (D) sera un invariant  $I_{p+1}^{(d,e)}$ . Si l'on part d'un invariant  $I_p^d$ , l'opération (E) conduit à un invariant  $I_{p-1}^{(d,e)}$ ; si l'on part d'un invariant  $I_p^e$ , l'opération (D) conduit à un invariant  $I_{p+1}^{(d,e)}$ .

Nous pouvons résumer tous les résultats qui précèdent dans l'énoncé suivant :

*De tout invariant absolu  $I_p$  ( $p > 1$ ) ou de tout invariant relatif  $J_p$ , on peut toujours déduire, par des additions, multiplications et différentiations, au moins un invariant  $I_r^{(d,e)}$ , non identiquement nul.*

La conclusion peut être en défaut pour un invariant absolu  $I_1$ ; ce cas sera traité à part.

## III.

10. Nous sommes maintenant amenés à examiner la question suivante :

*Connaissant un invariant intégral  $I_p^{(d, e)}$  des équations différentielles (15), quel parti peut-on tirer de la connaissance de cet invariant pour l'intégration du système?*

Soit  $I_p^{(d, e)}$  un invariant intégral d'ordre  $p$ ,

$$(26) \quad I_p^{(d, e)} = \int \int \dots \int \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p};$$

les coefficients  $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$  vérifiant les relations

$$\sum_{i=1}^n A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, i} X_i = 0,$$

quels que soient les indices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$ , les équations (15) entraînent les suivantes :

$$(27) \quad \sum_{i=1}^n A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i} dx_i = 0.$$

Les équations (27), linéaires et homogènes en  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ , se réduisent donc à  $m$  équations distinctes,  $m$  étant inférieur ou au plus égal à  $n - 1$ . Si  $m = n - 1$ , les deux systèmes (15) et (27) sont équivalents; mais, lorsque  $m$  est inférieur à  $n - 1$ , le système (27) est plus général que le système proposé (15) et toute intégrale du système (27)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

est aussi une intégrale première du système (15). Dans ce cas, la connaissance de l'invariant  $I_p^{(d, e)}$  permet de simplifier le problème de l'intégration. Nous allons montrer en effet que *les  $m$  équations distinctes auxquelles se réduit le système (27) forment un système complètement intégrable.*

Rappelons d'abord le résultat suivant de M. Frobenius (1). Étant données  $k$  équations

$$(28) \quad A_{\mu 1} dx_1 + \dots + A_{\mu n} dx_n = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k)$$

se réduisant à  $m$  équations distinctes ( $m < n$ ), pour que ces  $m$  équations forment un système complètement intégrable, il faut et il suffit que les relations

$$(29) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \left( \frac{\partial A_{\mu i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{\mu j}}{\partial x_i} \right) = 0$$

soient des conséquences des relations

$$(30) \quad \sum_{i=1}^n A_{\mu i} u_i = 0, \quad \sum_{j=1}^n A_{\mu j} v_j = 0.$$

Les coefficients  $A_{\mu i}$  des équations (28) sont, pour le système considéré ici, de la forme  $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i}$ , en désignant par  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$  une combinaison des  $n$  premiers nombres  $(p-1)$  à  $(p-1)$ . La différence

$$\frac{\partial A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, j}}{\partial x_i}$$

est une combinaison linéaire des dérivées

$$\frac{\partial A_{\alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, ij}}{\partial x_{\alpha_1}}, \quad \frac{\partial A_{\alpha_3, \dots, \alpha_{p-1}, ij\alpha_1}}{\partial x_{\alpha_2}}, \quad \dots,$$

d'après les équations de condition (6) ou (6'), qui expriment que

$$\Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_p}$$

est une différentielle exacte.

Il nous suffira donc de vérifier que les relations

$$(31) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \frac{\partial A_{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p-1}, ij}}{\partial x_{\alpha_1}} = 0$$

(1) FROBENIUS, *Journal de Crelle*, t. 82, 1877, p. 276. Voir aussi FORSYTH, *Theory of differential equations*, part I, p. 51. Frobenius suppose  $k < n$ ; mais on peut aussi supposer  $k > n$ , comme c'est le cas dans l'exemple traité ici.

sont des conséquences des relations (30). Nous pouvons écrire l'équation (31)

$$\sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{\alpha_1 \dots \alpha_p, ij}}{\partial x_{\alpha_1}} v_j = 0;$$

d'autre part, de la relation (30),

$$\sum_{j=1}^n A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, ij} v_j = 0,$$

on déduit

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, ij}}{\partial x_{\alpha_1}} v_j + \sum_{i=1}^n A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_{\alpha_1}} = 0,$$

et la relation à vérifier peut encore s'écrire

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_{\alpha_1}} u_i = 0$$

ou

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_{\alpha_1}} \sum_{i=1}^n A_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, ij} u_i = 0,$$

et cette dernière condition est évidemment une conséquence des relations (30).

Lorsque  $m = n - 1$ , il semble que la méthode ne donne aucune simplification. Mais on peut alors trouver un multiplicateur <sup>(1)</sup>, comme on le verra plus loin (n° 11) dans un cas particulier.

**11.** Nous allons traiter en détail les cas les plus simples,  $p = 1$  et  $p = 2$ .

Soit  $I_1^{(d, e)}$  un invariant du premier ordre du système (15),

$$I_1^{(d, e)} = \int A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_n dx_n;$$

<sup>(1)</sup> La démonstration dans le cas général sera donnée dans un autre travail, consacré plus spécialement à l'étude de ces systèmes (27).





d'ailleurs ce système est toujours compatible, puisqu'il admet toutes les solutions du système proposé (15). Il en résulte que le déterminant de Pfaff correspondant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

est toujours nul. Cela posé, deux cas sont à distinguer, suivant la parité de  $n$ .

Supposons en premier lieu  $n$  pair;  $\Delta$  étant nul, il en sera de même de tous ses mineurs du premier ordre, et les  $n$  équations (34) se réduisent en réalité à  $n-p-1$  équations distinctes ( $p > 0$ ). Ces équations, formant un système complètement intégrable, admettent  $(n-p-1)$  intégrales distinctes

$$\varphi_1 = C_1, \quad \varphi_2 = C_2, \quad \dots, \quad \varphi_{n-p-1} = C_{n-p-1},$$

qu'on obtiendra par l'intégration d'un système complet ou d'un système de  $n-p-1$  équations différentielles. Puisque ces intégrales  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-p-1}$  appartiennent aussi au système (15), on voit que le problème de l'intégration a été simplifié, puisqu'on peut obtenir  $(n-p-1)$  intégrales premières par l'intégration d'un système de  $(n-p-1)$  équations différentielles.

Si  $n$  est impair,  $\Delta$  est toujours nul. Si tous ses mineurs du premier ordre sont nuls aussi, le système (34) se réduit encore à  $(n-p-1)$  équations distinctes ( $p > 0$ ), et la conclusion est la même que tout à l'heure. Mais, si tous les mineurs du premier ordre de  $\Delta$  ne sont pas nuls, le système (34) comprend  $(n-1)$  équations distinctes et il est entièrement équivalent au système (15). Dans ce cas, *on peut trouver un multiplicateur du système proposé* (15).

Il suffit de rappeler les propriétés suivantes des déterminants symétriques gauches. Soit  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  un système de  $2r$  nombres entiers, choisis parmi les  $n$  premiers nombres. Les expressions  $(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda)$  se définissent de proche en proche au moyen de la relation de récurrence

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda) &= (\alpha, \beta)(\gamma, \delta, \dots, \lambda) \\ &+ (\alpha, \gamma)(\delta, \dots, \lambda, \beta) + \dots + (\alpha, \lambda)(\beta, \gamma, \dots, \lambda) \end{aligned}$$

jointe à la relation

$$(\alpha, \beta) = A_{\alpha\beta}.$$

Étant données deux permutations  $(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda)$  et  $(\alpha', \beta', \gamma', \dots, \lambda')$  qui ne diffèrent que par l'ordre des indices, on a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda) = \pm (\alpha', \beta', \gamma', \dots, \lambda'),$$

le signe + convenant au cas où les deux permutations sont de même classe, et le signe - au cas contraire.

Cela posé, soit  $n = 2p + 1$ , et supposons que tous les mineurs du premier ordre du déterminant  $\Delta$  ne soient pas nuls. On tire alors des relations (34) un système équivalent :

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{(2, 3, 4, \dots, 2p+1)} &= \frac{dx_2}{(3, 4, \dots, 2p+1, 1)} = \dots \\ &= \frac{dx_{2p+1}}{(1, 2, 3, 4, \dots, 2p)}. \end{aligned} \right.$$

Ce système (36) ne diffère pas du système (15). Mais *il admet le multiplicateur*  $M = 1$ . Il suffit, pour le montrer, de vérifier qu'on a bien

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(2, 3, 4, \dots, 2p+1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(3, 4, \dots, 2p+1, 1)}{\partial x_2} \\ + \frac{\partial(4, 5, \dots, 2p+1, 1, 2)}{\partial x_3} + \dots = 0. \end{aligned} \right.$$

Un terme quelconque du premier membre de cette relation est de la forme

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda),$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda)$  étant une permutation des  $(2p - 2)$  nombres entiers qui restent après la suppression des trois indices  $i, k, l$ . Or, les trois dérivées  $\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}, \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i}, \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k}$  ont, il est facile de le voir, le même multiplicateur. On a, par exemple, la somme

$$\left( \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} \right) (4, 5, \dots, 2p+1),$$

et tous les autres termes peuvent être groupés d'une façon analogue. La relation (37) est donc une conséquence des relations (32).

12. Soit  $I$ , un invariant intégral absolu quelconque du système (15),

$$I = \int A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_n dx_n;$$

l'opération (E), appliquée à cet invariant absolu, conduit à une intégrale première

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n = \text{const.},$$

théorème dû à M. Poincaré. Ce résultat peut être illusoire, si  $A_1 X_1 + \dots + A_n X_n$  se réduit à une constante. Nous allons examiner le cas plus général où l'on connaît un invariant relatif du système (15) :

$$(38) \quad J = \int A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n.$$

De cet invariant  $J$ , nous déduisons par l'opération (D) un invariant  $I_2^d$ ,

$$(39) \quad I_2^d = \iint \sum \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k,$$

et de l'invariant  $I_2^d$  nous déduisons ensuite par l'opération (E) un invariant  $I_1^{(d,e)}$ ,

$$(40) \quad I_1^{(d,e)} = \int \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \dots + \mu_n dx_n,$$

où l'on a posé

$$(41) \quad \begin{cases} \mu_i = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \dots + a_{in} X_n, \\ a_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Si tous les  $\mu_i$  ne sont pas nuls à la fois, on obtiendra donc par des quadratures une intégrale première du système (15) :

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \dots + \mu_n dx_n = \text{const.}$$

La proposition s'applique aussi à un invariant intégral absolu  $I_1$ ,

pourvu que tous les coefficients  $\mu_i$  ne soient pas nuls; mais l'intégrale première à laquelle on est conduit n'est autre que l'intégrale première donnée par le théorème de M. Poincaré.

Il suffit de vérifier les égalités

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (A_1 X_1 + \dots + A_n X_n) + X_1 a_{i1} + \dots + X_n a_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui deviennent, en remplaçant les  $a_{ik}$  par leurs expressions,

$$A_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} + \dots + A_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} + X(A_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On retrouve précisément les relations qui expriment que I, est un invariant intégral absolu. Mais, si l'on part d'un invariant intégral relatif, des quadratures sont en général nécessaires pour obtenir l'intégrale première U.

**13.** La proposition ne s'applique pas si l'invariant  $I_1^{(d, e)}$  représenté par la formule (40) est identiquement nul. L'invariant du second ordre (39) est alors un invariant  $I_2^{(d, e)}$ ; si cet invariant  $I_2^{(d, e)}$  n'est pas lui-même identiquement nul, on a vu plus haut comment la connaissance de cet invariant permet de simplifier le problème de l'intégration. L'invariant  $I_2^{(d, e)}$  ne peut être identiquement nul que s'il a été déduit par l'opération (D) d'un invariant absolu  $I_1^d$ .

Si cet invariant  $I_1^d$  est  $I_1^{(d, e)}$ , on a vu comment il donnait une intégrale première par des quadratures (n° 11). Le seul cas où la méthode paraît ne donner aucune simplification est celui d'un invariant absolu  $I_1^d$ , qui n'est pas en même temps  $I_1^{(d, e)}$ . Soit

$$I_1^d = \int A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

cet invariant; l'expression  $A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$  est une différentielle exacte  $dU$ . D'autre part, l'expression

$$A_1 X_1 + \dots + A_n X_n$$

ne peut être nulle, sans quoi  $I_1^d$  sera  $I_1^{(d, e)}$ ; d'ailleurs, les coefficients  $\mu_i$  étant tous nuls, cette expression se réduit à une constante K *différente*

de zéro. Des équations (15) on déduit alors

$$\frac{A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n}{K} = dt,$$

et l'on a, par des quadratures, une intégrale première qui contient  $t$  :

$$\int A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = Kt + C.$$

**14.** Le résultat général du n° 12 établit un lien entre la recherche des combinaisons intégrables du système (15) et les invariants relatifs du premier ordre de ce système. Il est facile de mettre directement cette liaison en évidence.

Trouver une combinaison intégrable des équations (15) revient à trouver un système de  $n$  fonctions  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  telles que  $\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \dots + \mu_n dx_n$  soit une différentielle exacte et qu'on ait en même temps

$$(42) \quad \mu_1 X_1 + \dots + \mu_n X_n = 0.$$

On satisfait à cette dernière relation en posant

$$(43) \quad \mu_i = \lambda_{i1} X_1 + \lambda_{i2} X_2 + \dots + \lambda_{in} X_n,$$

les  $\lambda_{ik}$  étant de nouvelles fonctions des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  satisfaisant aux conditions

$$\lambda_{ii} = 0, \quad \lambda_{ik} + \lambda_{ki} = 0.$$

La condition d'intégrabilité  $\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \mu_k}{\partial x_i}$  s'écrit alors

$$(44) \quad X(\lambda_{ik}) - \sum_{h=1}^n X_h \rho_{ihk} + \sum_{h=1}^n \left( \lambda_{hk} \frac{\partial X_h}{\partial x_i} + \lambda_{ih} \frac{\partial X_h}{\partial x_k} \right) = 0,$$

en posant

$$\rho_{ihk} = \frac{\partial \lambda_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial \lambda_{hk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial x_h}.$$

Si nous comparons ces conditions (44) aux conditions

$$(45) \quad X(a_{ik}) + \sum_{h=1}^n \left( a_{hk} \frac{\partial X_h}{\partial x_i} + a_{ih} \frac{\partial X_h}{\partial x_k} \right) = 0,$$

qui expriment que

$$I_2 = \iint \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

est un invariant intégral du second ordre, nous voyons qu'elles deviennent identiques en remplaçant  $\lambda_{ik}$  par  $a_{ik}$ , pourvu qu'on ait

$$\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_h} = 0,$$

c'est-à-dire toutes les fois que l'invariant  $I_2$  est  $I_2^d$ , ou a été déduit d'un invariant  $J_1$  ou  $I_1$  par l'opération (D).

**15.** La combinaison de calcul qui conduit à ce théorème peut se justifier *a priori* par une remarque qui a été le point de départ de ce travail et que je développerai seulement, pour plus de simplicité, dans le cas de trois variables.

Considérons un système de trois équations différentielles du premier ordre que j'écrirai, avec les notations ordinaires,

$$(46) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$

$X, Y, Z$  ne dépendant pas de  $t$ , et soit

$$J_1 = \int a dx + b dy + c dz$$

un invariant intégral relatif de ce système, que nous pouvons remplacer par un invariant intégral absolu du second ordre

$$I_2^d = \iint A dx dy + B dy dz + C dz dx,$$

où

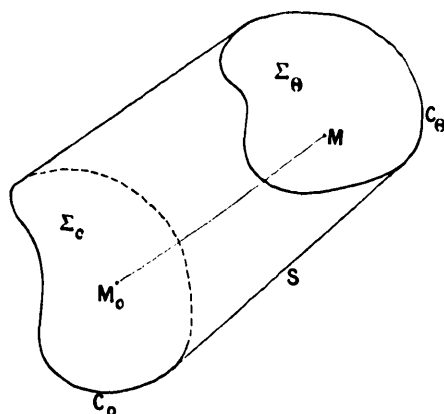
$$A = \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z},$$

l'expression sous le signe  $\iint$  étant une différentielle exacte.

Soit  $C_0$  une courbe fermée quelconque, qui n'est tangente en aucun de ses points à la caractéristique des équations (46) issue de ce point; prenons une surface  $\Sigma_0$  limitée par  $\Gamma_0$  et telle que la caractéristique issue d'un point quelconque ne soit pas tangente à la surface.

Soit  $M_0$  un point quelconque de  $\Sigma_0$  de coordonnées  $x_0, y_0, z_0$ ; si nous prenons pour valeur initiale de  $t$  la valeur zéro, les valeurs initiales de  $x, y, z$  étant  $x_0, y_0, z_0$  dans les équations (46), le point de coordonnées  $(x, y, z)$  décrit un segment de caractéristique  $M_0M$  lorsque  $t$

Fig. 2.



varie de zéro à  $\theta$ . Si  $\theta$  est suffisamment petit, le lieu de ces caractéristiques est un volume analogue à un cylindre, limité par deux surfaces  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_\theta$ , et par une surface  $S$  engendrée par les segments de caractéristiques issues des différents points de  $C_0$ , lorsque  $t$  varie de zéro à  $\theta$ .

L'intégrale  $I_2^d$  étendue à toute la surface extérieure qui limite ce volume est nulle; d'autre part, comme  $I_2^d$  est un invariant intégral, l'intégrale prise suivant le côté extérieur de  $\Sigma_0$  est égale à l'intégrale prise suivant le côté intérieur de  $\Sigma_0$ . Par conséquent, l'intégrale  $I_2^d$  étendue à toute la surface  $S$  est nulle. Si nous considérons cette intégrale comme une fonction  $F(\theta)$  de  $\theta$ , nous pouvons donc écrire qu'on a  $F'(\theta) = 0$ . Pour évaluer cette dérivée, supposons les coordonnées d'un point de  $C_0$  exprimées en fonction d'un paramètre variable  $u$  de telle façon qu'on obtienne tous les points de cette courbe en faisant varier  $u$  de zéro à  $U$ ; les coordonnées d'un point de la surface  $S$  sont alors des fonctions de deux variables  $u$  et  $t$ ,

$$(47) \quad x = f_1(t, u), \quad y = f_2(t, u), \quad z = f_3(t, u),$$

et l'on obtient tous les points de cette surface en faisant varier  $u$  de zéro

à  $U$  et  $t$  de 0 à  $\theta$ . La fonction  $F(\theta)$  a alors pour expression

$$F(\theta) = \int \int \left[ A \frac{D(x, y)}{D(t, u)} + B \frac{D(y, z)}{D(t, u)} + C \frac{D(z, x)}{D(t, u)} \right] dt du,$$

cette intégrale double étant étendue au domaine qu'on vient de définir, et  $x, y, z$  étant remplacées par les expressions (47) dans  $A, B, C$ . On peut encore écrire cette formule, en tenant compte des équations différentielles (46) elles-mêmes,

$$F(\theta) = \int_0^\theta dt \int_0^u \left[ A \left( X \frac{\partial y}{\partial u} - Y \frac{\partial x}{\partial u} \right) + B \left( Y \frac{\partial z}{\partial u} - Z \frac{\partial y}{\partial u} \right) + C \left( Z \frac{\partial x}{\partial u} - X \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right] du.$$

Pour  $\theta = 0$ , la dérivée  $F'(\theta)$  se réduit à

$$\int_0^u \left[ (CZ - AY) \frac{\partial x}{\partial u} + (AX - BZ) \frac{\partial y}{\partial u} + (BY - CX) \frac{\partial z}{\partial u} \right] du,$$

c'est-à-dire à l'intégrale curviligne

$$\int_{(C_0)} (CZ - AY) dx + (AX - BZ) dy + (BY - CX) dz,$$

prise le long de  $C_0$ . Cette intégrale étant nulle, quelle que soit la courbe fermée  $C_0$ , l'expression

$$(48) \quad (CZ - AY) dx + (AX - BZ) dy + (BY - CX) dz$$

est donc une différentielle exacte.

D'ailleurs, on a

$$X(CZ - AY) + Y(AX - BZ) + Z(BY - CX) = 0,$$

et, par suite, l'expression (48) est une combinaison intégrable des équations (46).

Si l'on a en même temps

$$CZ - AY = 0, \quad AX - BZ = 0, \quad BY - CX = 0,$$



on en déduit

$$\frac{X}{B} = \frac{Y}{C} = \frac{Z}{A},$$

et le système (46) est équivalent au système

$$(46)' \quad \frac{dx}{B} = \frac{dy}{C} = \frac{dz}{A};$$

ce nouveau système admet pour multiplicateur l'unité, car on tire des expressions de A, B, C la relation

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

**16.** Pour terminer, nous appliquerons encore le théorème général aux invariants d'ordre  $n$  et d'ordre  $n - 1$ . Soit  $I_n$  un invariant d'ordre  $n$ ,

$$(49) \quad I_n = \int \int \dots \int M dx_1 dx_2 \dots dx_n;$$

toute intégrale multiple d'ordre  $n$  pouvant être remplacée par une intégrale multiple d'ordre  $n - 1$  étendue à une multiplicité fermée, on peut considérer  $I_n$  comme un invariant  $I_n^d$ . L'opération (E) appliquée à cet invariant conduira donc à un invariant  $I_{n-1}^{(d,e)}$ .

Supposons  $n$  impair; nous prendrons

$$A_{12\dots n} = A_{23\dots n1} = A_{34\dots n12} = \dots = M,$$

et l'invariant  $I_{n-1}^{(d,e)}$  aura pour expression

$$(50) \quad I_{n-1}^{(d,e)} = \int \int \dots \int M [X_n dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} + X_1 dx_2 \dots dx_n + \dots].$$

L'expression sous les signes d'intégration doit être une différentielle exacte; comme  $n - 1$  est pair par hypothèse, on a donc la relation

$$(51) \quad \frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

ce qui montre que M est un multiplicateur, et nous retrouvons un théorème de M. Poincaré. Le système d'équations différentielles (27),

associé à l'invariant  $I_{n-1}^{(d,e)}$  est, dans le cas actuel, identique au système (15) lui-même.

La conclusion est la même si  $n$  est pair. Nous devons prendre

$$\Lambda_{12\dots n} = -\Lambda_{23\dots n1} = \Lambda_{34\dots n12} = \dots = M,$$

et l'invariant  $I_{n-1}^{(d,e)}$  a pour expression

$$(50)' \quad I_{n-1}^{(d,e)} = \int \dots \int M [X_n dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} - X_1 dx_2 \dots dx_n + \dots];$$

mais,  $n - 1$  étant impair, la condition (51) ne change pas.

Supposons enfin que nous connaissions un invariant  $I_{n-1}$ . Plusieurs cas sont à distinguer, suivant les hypothèses qu'on peut faire sur cet invariant. Si l'on a un invariant  $I_{n-1}^{(d,e)}$ , il est de la forme (50) ou (50)', suivant la parité de  $n$ , et la relation (51) est encore vérifiée, de sorte que  $M$  est un multiplicateur.

Un invariant  $I_{n-1}$ , qui n'est pas  $I_{n-1}^{(d,e)}$ , donne un invariant  $I_n$  par l'opération (D) et par suite un multiplicateur.

Mais, si l'on applique l'opération (E) à un invariant  $I_{n-1}^e$ , on obtient un invariant  $I_{n-2}^e$ , et il semble que l'opération (D) sera nécessaire pour arriver finalement à un invariant  $I_{n-1}^{(d,e)}$ , c'est-à-dire à un multiplicateur. Mais, dans ce cas, il se produit une simplification, ainsi qu'il résulte d'un théorème de M. Kœnigs (1); le système d'équations différentielles (27), associé à l'invariant  $I_{n-2}^e$ , est complètement intégrable, et l'on obtient ainsi une équation

$$A(f) = \sum_i \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

qui, jointe à l'équation  $X(f) = 0$ , forme avec celle-ci un système complètement intégrable.

Il est facile de comprendre la raison de cette simplification et de voir en même temps pourquoi elle ne se produit pas dans le cas général. Supposons que, par un changement de variables, on ait ramené le

(1) *Sur les invariants intégraux* (*Comptes rendus*, t. CXXII, 6 janv. 1906, p. 25-27).

système (15) à la forme

$$(52) \quad \frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_{n-1}}{0} = \frac{dx_n}{1} = dt,$$

et soit  $I_{n-1}$  un invariant intégral d'ordre  $n - 1$

$$I_{n-1} = \int \int \dots \int \mu_1 dx_2 \dots dx_n + \mu_2 dx_3 \dots dx_n dx_1 + \dots,$$

les coefficients  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  ne dépendant que des variables  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ .

L'opération (E) appliquée à cet invariant  $I_{n-1}$  conduit à un invariant  $I_{n-2}^e$ , où ne figurent ni  $x_n$  ni  $dx_n$  :

$$I_{n-2}^e = \int \int \dots \int \sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_{n-1}}.$$

Le système d'équations différentielles (27), associé à cet invariant  $I_{n-2}^e$ , est de la forme

$$\frac{dx_1}{\lambda_1} = \frac{dx_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{\lambda_{n-1}},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$  ne dépendant pas de  $x_n$ , et les deux équations

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

forment bien un système complet.

Prenons au contraire un invariant intégral du système (52) d'ordre inférieur à  $n - 1$ , par exemple un invariant  $I_2$

$$I_2 = \int \int \sum A_{ik} dx_i dx_k;$$

les coefficients  $A_{ik}$  sont indépendants de  $x_n$ , et l'invariant  $I_1^e$  qu'on en déduit par l'opération (E) est de la forme

$$I_1^e = \int C_1 dx_1 + C_2 dx_2 + \dots + C_{n-1} dx_{n-1},$$

$C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  étant des fonctions de  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  qui peuvent être quelconques. Le système (27), associé à cet invariant  $I_1^c$ , se réduit ici à l'équation unique

$$C_1 dx_1 + C_2 dx_2 + \dots + C_{n-1} dx_{n-1} = 0,$$

et il est clair que, en général, cette équation n'est pas complètement intégrable si  $n$  est supérieur à 3.

