JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BRYON HEYWOOD

Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 4 (1908), p. 283-330.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__283_0>

Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm;

PAR M. BRYON HEYWOOD.

CHAPITRE I.

THÉORIE DES FONCTIONS FONDAMENTALES RELATIVES A UNE ÉQUATION DE FREDHOLM.

§ 1. — Théorie de M. Fredholm (¹).

1. On appelle les deux équations suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(s) - \lambda \displaystyle\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s), \\ \psi(t) - \lambda \displaystyle\int_a^b K(s, t)\psi(s)\,ds = f(t), \end{cases}$$

les *équations fonctionnelles associées de Fredholm relatives au noyau* $K(s, t)$.

Dans ces équations les fonctions $K(s, t)$, $f(s)$ sont connues, et l'on cherche à déterminer $\varphi(s)$, $\psi(t)$.

Les limites d'intégration sont fixes : elles ne seront plus désignées explicitement. Il est supposé d'abord que les fonctions $K(s, t)$, $f(s)$ sont finies et intégrables.

M. Fredholm démontre que les solutions des équations (1) dépendent d'une certaine *fonction résolvante*, $K(s, t, \lambda)$, qui satisfait aux équa-

(¹) IVAR FREDHOLM, *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, Stockholm, 1900. — *Acta mathematica*, t. XXVII, 1903.

tions

$$(2)\qquad \begin{cases} -\mathrm{K}(s,t)+\mathrm{K}(s,t,\lambda)=\lambda\int \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t,\lambda)\,d\tau, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad =\lambda\int \mathrm{K}(s,\tau,\lambda)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier, par substitution directe et tout en supposant l'existence pour une valeur donnée de λ d'une fonction $\mathrm{K}(s, t, \lambda)$, finie et intégrable, que les deux expressions

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi(s)=f(s)+\lambda\int \mathrm{K}(s,t,\lambda)f(t)\,dt, \\ \psi(t)=f(t)+\lambda\int \mathrm{K}(s,t,\lambda)f(s)\,ds \end{cases}$$

sont des solutions des équations (1). On vérifie de même qu'elles sont les seules solutions, en substituant dans (3) les valeurs de $f(s)$ tirées de (1).

2. M. Fredholm trouve pour la résolvante une fonction unique, méromorphe en λ,

$$\mathrm{K}(s,t,\lambda)=\frac{\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\!\lambda}{\mathrm{D}(\lambda)},$$

où $\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\!\lambda$, $\mathrm{D}(\lambda)$ désignent respectivement les fonctions entières

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\!\lambda = \sum_{0} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int\int\cdots\int \mathrm{K}\begin{pmatrix} s, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \\ t, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \ldots ds_n,$$

$$\mathrm{D}(\lambda) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int\int\cdots\int \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \ldots ds_n,$$

$\mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix}$ étant le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mathrm{K}(s_1,t_1) & \mathrm{K}(s_1,t_2) & \ldots & \mathrm{K}(s_1,t_n) \\ \mathrm{K}(s_2,t_1) & \mathrm{K}(s_2,t_2) & \ldots & \mathrm{K}(s_2,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{K}(s_n,t_1) & \mathrm{K}(s_n,t_2) & \ldots & \mathrm{K}(s_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

On appelle $D(\lambda)$ *le déterminant relatif au noyau* $K(s,t)$. Tous les pôles de $K(s,t,\lambda)$, considérée comme fonction de λ, sont des zéros de $D(\lambda)$; ils sont par conséquent indépendants de s, t. On démontre facilement que tous les zéros de $D(\lambda)$ sont des pôles de $K(s,t,\lambda)$. On a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \int D\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}\lambda\Big)\, ds &= \int K(s,s)\,ds - \lambda\int\int K\begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_2 \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 + \ldots \\ &= -\frac{d}{d\lambda} D(\lambda). \end{aligned}\right.$$

Donc λ_1 étant un zéro d'ordre p de $D(\lambda)$, et un zéro d'ordre p_1 de $D\begin{pmatrix} s & \\ t & \lambda \end{pmatrix}$, il faut qu'on ait

$$p \geqq p_1 + 1.$$

D'où il résulte que λ_1 est un pôle de $K(s,t,\lambda)$.

Les zéros de $D(\lambda)$ ont la plus grande importance : on les appelle *constantes caractéristiques du noyau* $K(s,t)$. Nous les désignons par les symboles

$$(5)\qquad \lambda_1,\quad \lambda_2\quad \lambda_3,\quad \ldots,\quad \lambda_n,\quad \ldots.$$

Lorsque λ est inférieur en module à la première constante caractéristique λ_1, $K(s,t,\lambda)$ s'exprime par la série

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} K(s,t,\lambda) &= K_1(s,t) + \lambda K_2(s,t) \\ &\quad + \lambda^2 K_3(s,t) + \ldots + \lambda^n K_n(s,t) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients sont les *noyaux réitérés*. Ils sont déterminés par les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} K_1(s,t) &= K(s,t), \\ K_2(s,t) &= \int K(s,\tau)K(\tau,t)\,d\tau, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ K_n(s,t) &= \int K(s,\tau)K_{n-1}(\tau,t)\,d\tau \\ &= \int\ldots\int K(s,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)\ldots K(\tau_{n-1},t)\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_{n-1}. \end{aligned}\right.$$

Si la longueur du chemin d'intégration est l'unité, et que M désigne la limite supérieure de $|K(s, t)|$, on aura

$$|K_n(s, t)| \leqq M^n.$$

Le rayon de convergence de la série (6) est $|\lambda_1|$. On a, par conséquent,

$$|\lambda_1| \geqq \frac{1}{M}.$$

3. De ce qui précède il résulte que, dans le cas où λ n'est pas égal à une constante caractéristique, chacune des deux équations (1) a une solution finie, unique, et bien déterminée. Cette solution s'évanouit lorsque $f(s) = 0$ identiquement.

Lorsque λ est égal à une constante caractéristique λ_1, il n'y a pas en général de solutions finies des équations avec second membre. Pour qu'il y ait des solutions, il faut que la fonction $f(s)$ satisfasse à certaines conditions, comme nous le verrons plus tard. Mais, pour $\lambda = \lambda_1$, il y aura toujours des solutions des équations sans second membre

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(s) - \lambda_1 \int K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0, \\ &\psi(t) - \lambda_1 \int K(s, t)\psi(s)\,ds = 0. \end{aligned}\right.$$

M. Fredholm écrit

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &D_k\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_k \\ t_1, t_2, \ldots, t_k \end{pmatrix}\lambda\Big) \\ &\quad = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \cdots \int K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_k, s_{k+1}, \ldots, s_{k+n} \\ t_1, t_2, \ldots, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_{k+n} \end{pmatrix} ds_{k+1} \ldots ds_{k+n}. \end{aligned}\right.$$

La fonction D_k est entière en λ, les variables $s_1, s_2, \ldots, s_k$; $t_1, t_2, \ldots, t_k$ étant arbitraires.

Il démontre alors que si l'on a identiquement

$$D(\lambda_1) = 0, \qquad D\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}\ \lambda_1\right) = 0, \qquad \ldots, \qquad D_{q-1}\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_{q-1} \\ t_1, t_2, \ldots, t_{q-1} \end{matrix}\ \lambda_1\right) = 0,$$

mais que

$$D_q\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{matrix}\ \lambda_1\right) \neq 0,$$

il y a q solutions *indépendantes* de chacune des équations (8). Pour la première équation on a les q solutions

$$\Phi_k(s) = (-1)^{k-1} \frac{D_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s, s_{k+1}, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, s_{k+1}, \ldots, t_q \end{pmatrix}}{D_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k, t_{k+1}, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_q \end{pmatrix}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Pour la seconde équation, on a

$$\Psi_k(t) = (-1)^{k-1} \frac{D_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t, t_{k+1}, \ldots, t_q \end{pmatrix}}{D_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_q \end{pmatrix}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Il n'y a pas d'autres solutions indépendantes des équations (8). On appelle les $2q$ fonctions

$$\begin{array}{llll} \Phi_1(s), & \Phi_2(s), & \ldots, & \Phi_q(s), \\ \Psi_1(t), & \Psi_2(t), & \ldots, & \Psi_q(t) \end{array}$$

les *solutions fondamentales relatives à* λ_1.

Il y aura une solution de la première des équations avec second membre (1) pour $\lambda = \lambda_1$, pourvu que les q conditions

$$\int f(s)\Psi_1(s)\,ds = 0, \qquad \int f(s)\Psi_2(s)\,ds = 0, \qquad \ldots,$$
$$\int f(s)\Psi_q(s)\,ds = 0$$

soient remplies. Cette solution aura pour expression

$$(9_1) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int g(s,t) f(t)\,dt + \sum a_k \Phi_k(s),$$

où

$$g(s,t) = \frac{D_{q+1}\begin{pmatrix} s, s_1, s_2, \ldots, s_q \\ t, t_1, t_2, \ldots, t_q \end{pmatrix}}{D_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{pmatrix}}.$$

Les coefficients a_k étant arbitraires, cette solution a le degré q d'indétermination.

Il y aura une solution pareille de la seconde équation dans les conditions correspondantes.

Il a été supposé que le noyau $K(s, t)$ était fini. Des travaux de MM. Fredholm, Hilbert et Plemelj il résulte qu'on peut appliquer toute la théorie précédente lorsque $K(s, t)$ devient infini, pourvu que ses singularités soient d'un ordre plus petit que l'unité.

Enfin on peut supposer que $K(s, t)$ ou que le chemin d'intégration soient complexes.

§ 2. — Combinaison de deux noyaux orthogonaux [1].

4. Deux noyaux $K_1(s, t)$, $K_2(s, t)$ sont dits *orthogonaux* lorsqu'ils satisfont aux relations

$$(10) \qquad \int K_1(s,\tau)K_2(\tau,t)\,d\tau = \int K_2(s,\tau)K_1(\tau,t)\,d\tau = 0.$$

Nous allons démontrer que *la résolvante de*

$$K(s,t) = K_1(s,t) + K_2(s,t)$$

est la somme des résolvantes de $K_1(s,t)$ *et de* $K_2(s,t)$:

$$\mathrm{K}(s,t,\lambda) = \mathrm{K}_1(s,t,\lambda) + \mathrm{K}_2(s,t,\lambda).$$

Écrivons les deux formules

$$(11) \quad \begin{cases} -K_1(s,t) + \mathrm{K}_1(s,t,\lambda) = \lambda\displaystyle\int K_1(s,\tau)\,\mathrm{K}_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \lambda\displaystyle\int K_1(\tau,t)\,\mathrm{K}_1(s,\tau,\lambda)\,d\tau, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} -K_2(s,t) + \mathrm{K}_2(s,t,\lambda) = \lambda\displaystyle\int K_2(s,\tau)\,\mathrm{K}_2(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \lambda\displaystyle\int K_2(\tau,t)\,\mathrm{K}_2(s,\tau,\lambda)\,d\tau. \end{cases}$$

---

[1] M. Goursat a trouvé plusieurs des résultats démontrés dans cet article et dans le suivant. Il les a publiés dans les *Comptes rendus*, octobre et novembre 1907. J'avais, de mon côté, fait cette Communication à M. Picard à la fin du mois de juin 1907. (*Voir* la Note de M. Picard dans les *Comptes rendus*, au sujet de ma Communication, le 25 novembre, p. 909.)

De (11) et (12) dérivent les équations

$$\int K_2(s,\tau)K_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \int K_2(\tau,t)K_1(s,\tau,\lambda)\,d\tau = 0,$$

$$\int K_1(s,\tau)K_2(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \int K_1(\tau,t)K_2(s,\tau,\lambda)\,d\tau = 0,$$

d'où l'on obtient, en les combinant avec (11) et (12),

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} -K_1(s,t)+K_1(s,t,\lambda) &= \lambda\int K(s,\tau)K_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda\int K(\tau,t)K_1(s,\tau,\lambda)\,d\tau, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} -K_2(s,t)+K_2(s,t,\lambda) &= \lambda\int K(s,\tau)K_2(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda\int K(\tau,t)K_2(t,\tau,\lambda)\,d\tau. \end{aligned}\right.$$

L'addition de (13) et (14) nous donne

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &-[K_1(s,t)+K_2(s,t)]+[K_1(s,t,\lambda)+K_2(s,t,\lambda)] \\ &\quad = \lambda\int K(s,\tau)[K_1(\tau,t,\lambda)+K_2(\tau,t,\lambda)]\,d\tau \\ &\quad = \lambda\int K(\tau,t)[K_1(s,\tau,\lambda)+K_2(s,\tau,\lambda)]\,d\tau, \end{aligned}\right.$$

équations qui déterminent la somme $K_1(s,t,\lambda)+K_2(s,t,\lambda)$.

Or, $K(s,t,\lambda)$ est déterminé par les équations

$$\begin{aligned} -K(s,t)+K(s,t,\lambda) &= \lambda\int K(s,\tau)K(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda\int K(\tau,t)K(s,\tau,\lambda)\,d\tau, \end{aligned}$$

qui sont identiques à (15).

Puisque ces équations ont une solution unique, il faut que nous ayons

$$K(s,t,\lambda) = K_1(s,t,\lambda)+K_2(s,t,\lambda).$$

5. *Le déterminant de* $K(s,t)$ *est le produit des déterminants de* $K_1(s,t)$ *et de* $K_2(s,t)$.

Pour le démontrer, revenons à l'équation (4); elle nous donne

$$(16) \qquad \int K(s, s, \lambda)\, ds = -\frac{1}{D(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} D(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}[\log D(\lambda)].$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}[\log D(\lambda)] &= -\int K(s, s, \lambda)\, d\lambda \\ &= -\int |K_1(s, s, \lambda) + K_2(s, s, \lambda)|\, d\lambda \\ &= \frac{d}{d\lambda}[\log D_1(\lambda) + \log D_2(\lambda)] \\ &= \frac{d}{d\lambda}\{\log[D_1(\lambda) \times D_2 \lambda]\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$D(\lambda) = C \times D_1(\lambda) \times D_2(\lambda).$$

Pour achever, il faut démontrer que la constante C est égale à l'unité. Il suffit de faire $\lambda = 0$:

$$D(0) = 1 = D_1(0) \times D_2(0).$$

Donc

$$(17) \qquad D(\lambda) = D_1(\lambda) \times D_2(\lambda).$$

6. De la dernière proposition il résulte que, si λ_1 est une constante caractéristique de $K(s, t)$, elle sera aussi une constante caractéristique *ou* de $K_1(s, t)$ *ou* de $K_2(s, t)$, *ou* de $K_1(s, t)$ *et* de $K_2(s, t)$. Prenons la dernière hypothèse qui renferme les autres comme cas particuliers.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Les solutions de l'équation

$$(18) \qquad \varphi_1(s) - \lambda_1 \int K_1(s, t)\, \varphi_1(t)\, dt = 0$$

et les solutions de l'équation

$$(19) \qquad \varphi_2(s) - \lambda_1 \int K_2(s, t)\, \varphi_2(t)\, dt = 0$$

sont aussi des solutions de

$$\varphi(s) - \lambda_1 \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0. \tag{20}$$

Les solutions de (20) *sont des fonctions linéaires des solutions de* (18) *et de* (19).

Nous multiplions l'équation (18) par $K_2(r,s)$ et nous intégrons:

$$\int K_2(r,s)\,\varphi_1(s)\,ds = \lambda_1 \int\!\!\int K_2(r,s)\,K_1(s,t)\,\varphi_1(t)\,ds\,dt = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} &\varphi_1(s) - \lambda_1 \int K(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt \\ &\quad = \varphi_1(s) - \lambda_1 \int K_1(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt - \lambda_1 \int K_2(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\varphi_1(s)$ est une solution de l'équation (20). De même $\varphi_2(s)$ est aussi une solution de (20).

Maintenant, soit $\varphi(s)$ une solution quelconque de (20).

Mettons

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda_1 \int K_1(s,t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi'_1(s), \\ &\varphi(s) = \varphi'_1(s) + \varphi'_2(s). \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Je vais démontrer que $\varphi'_1(s)$, $\varphi'_2(s)$ sont des solutions de (18) et de (19) respectivement.

Des équations (20) et (21) on tire

$$\varphi'_2(s) = \lambda_1 \int K_2(s,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{22}$$

d'où il résulte

$$\int K_1(s,t)\,\varphi'_2(t)\,dt = \lambda_1 \int\!\!\int K_1(s,t)\,K_2(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,dt\,d\tau = 0,$$

et, d'après (21),

$$\varphi_1'(s) - \lambda_1 \int K_1(s, t)\,\varphi_1'(t)\,dt = \lambda_1 \int K_1(s, t)\,\varphi_2'(t)\,dt = 0,$$

c'est-à-dire que $\varphi_1'(s)$ est une solution de (18).

De la même manière, en nous servant de (22), nous pouvons démontrer que $\varphi_2'(s)$ est une solution de (19).

Il est facile de voir que les solutions des équations avec seconds membres

$$\varphi(s) - \lambda \int K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

$$\varphi_1(s) - \lambda \int K_1(s, t)\,\varphi_1(t)\,dt = f(s),$$

$$\varphi_2(s) - \lambda \int K_2(s, t)\,\varphi_2(t)\,dt = f(s)$$

satisfont à la relation

$$\varphi(s) + f(s) = \varphi_1(s) + \varphi_2(s).$$

§ 3. — Partie du noyau relative à une constante caractéristique.

7. Nous allons d'abord étudier *la continuité de la résolvante* $K(s, t, \lambda)$. Supposons que $K(s, t)$ soit une fonction finie et continue de s, t; $K(s, t, \lambda)$ sera aussi une fonction finie et continue de s, t pour toute valeur régulière de λ.

Nous remarquons que, si $K(s, t, \lambda)$ a des discontinuités autres que ses pôles en λ, ces discontinuités sont indépendantes de λ. Donc il suffira de démontrer que $K(s, t, \lambda)$ est continu en s, t lorsque $|\lambda| < \frac{1}{M}$, M étant la limite supérieure de $|K(s, t)|$. Nous avons vu (§ 1) que $\frac{1}{M}$ était au plus égal au module de la première constante caractéristique.

Donc la série

$$(23)\quad K(s, t, \lambda) = K_1(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(s, t) + r_n(s, t, \lambda)$$

est uniformément convergente. Nous pouvons toujours trouver le nombre entier n_0, tel que lorsque $n \geqq n_0$ nous aurons

$$|r_n(s, t, \lambda)| \leqq \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut, et indépendant de s, t.

Le noyau $K(s, t)$ étant continu, nous pouvons trouver h tel que

$$|K(s+h, t) - K(s, t)| < \varepsilon.$$

Le noyau réitéré $K_n(s, t)$ est continu aussi, et satisfait à l'inégalité

$$\begin{aligned} &|K_n(s+h, t) - K_n(s, t)| \\ &\quad = \left| \int [K(s+h, t) - K(s, t)]\, K_{n-1}(\tau, t)\, d\tau \right| \leqq M^{n-1}\varepsilon, \end{aligned}$$

puisque $|K_n| \leqq M^n$, d'après le § 1

Donc nous avons

$$\begin{aligned} &|K(s+h, t, \lambda) - K(s, t, \lambda)| \\ &\quad \leqq \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} [K_k(s+h, t) - K_k(s, t)] \right| + |r_n(s+h, t, \lambda) - r_n(s, t, \lambda)| \\ &\quad \leqq \sum_{k=1}^{n} |\lambda^{k-1}|\, M^{k-1}\varepsilon + 2\varepsilon \\ &\quad \leqq \varepsilon \left(2 + \frac{1}{1 - |\lambda| M} \right), \end{aligned}$$

puisque $|\lambda| M < 1$.

Il en résulte que $K(s, t, \lambda)$ est une fonction continue de s quelle que soit la valeur de t. On démontre de la même manière que $K(s, t, \lambda)$ est une fonction continue de t quelle que soit la valeur de s.

Les noyaux discontinus auxquels on a jusqu'ici appliqué la théorie de Fredholm sont tels qu'à partir d'un certain noyau réitéré $K(s, t)$ tous les noyaux réitérés sont finis. Dans ces conditions l'étude précédente nous permet d'affirmer que *la résolvante* $K(s, t, \lambda)$ *ne peut avoir de discontinuités que pour les valeurs de* s, t *qui rendent* $K(s, t)$ *discontinu,* où l'on suppose toujours que λ ait une valeur régulière. Ceci résulte de ce que les noyaux réitérés sont discontinus seulement pour les valeurs de s, t qui rendent $K(s, t)$ discontinu.

8. Soit λ_1 une constante caractéristique quelconque du noyau $K(s, t)$. Si les lettres p, q, r représentent respectivement la multiplicité du zéro λ_1, du déterminant $D(\lambda)$, le nombre de solutions fondamentales relatives à λ_1, et la multiplicité du pôle λ_1 de la résolvante $K(s, t, \lambda)$, je peux démontrer l'inégalité suivante:

$$r + q \leqq p + 1. \tag{24}$$

Les conditions du § 1 nous donnent

$$D_1\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}\lambda_1 = 0, \quad D_2\begin{pmatrix} s_1, s_2, \\ t_1, t_2, \end{pmatrix}\lambda_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_{q-1}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{q-1} \\ t_1, t_2, \ldots, t_{q-1} \end{pmatrix}\lambda_1 = 0,$$
$$D_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{q-1}, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_{q-1}, t_q \end{pmatrix}\lambda_1 \neq 0.$$

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_{q-1}, p_q (= 0)$ les degrés de multiplicité du zéro λ_1 pour ces fonctions $D_1, D_2, \ldots, D_{q-1}, D_q$ respectivement.

Nous avons $r = p - p_1$.

On obtient facilement les formules suivantes analogues à (4):

$$\int D_1\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}\lambda\, ds = -\frac{d}{d\lambda}D_0(\lambda),$$

$$\int D_2\begin{pmatrix} s, s_1 \\ s, t_1 \end{pmatrix}\lambda\, ds = -\frac{d}{d\lambda}D_1\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}\lambda,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int D_{q-1}\begin{pmatrix} s, s_1, \ldots, s_{q-2} \\ s, t_1, \ldots, t_{q-2} \end{pmatrix}\lambda\, ds = -\frac{d}{d\lambda}D_{q-2}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{q-2} \\ t_1, t_2, \ldots, t_{q-2} \end{pmatrix}\lambda.$$

De ces formules résultent les inégalités

$$p - 1 \geqq p_1, \qquad p_1 - 1 \geqq p_2, \qquad \ldots, \qquad p_{q-2} - 1 \geqq p_{q-1},$$

c'est-à-dire

$$p \geqq p_1 + 1 \geqq p_2 + 2 \geqq \ldots \geqq p_{q-2} + q - 2 \geqq p_{q-1} + q - 1 \geqq q.$$

Donc on a

$$p_1 + 1 \geqq q,$$

et, par conséquent,

$$r + q \leqq p + 1.$$

9. Dans le voisinage du pôle λ_1 nous pouvons écrire $K(s, t, \lambda)$ sous la forme

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} K(s,t,\lambda) &= \frac{\varphi_r(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^r} + \frac{\varphi_{r-1}(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^{r-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)} + \varphi_0(s,t,\lambda) \\ &= \chi(s,t,\lambda) + \varphi_0(s,t,\lambda). \end{aligned}\right.$$

Nous appelons $\chi(s, t, \lambda)$ *la partie de la résolvante relative à la constante caractéristique* λ_1; nous appelons la fonction

$$(27)\qquad \chi(s,t) = \chi(s,t,0) = \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^r} + \frac{\varphi_{r-1}(s,t)}{\lambda_1^{r-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1}$$

la partie du noyau $K(s, t)$ *relative à* λ_1.

Si $K(s, t)$ est continu, les fonctions $\varphi_1(s, t)$, $\varphi_2(s, t)$, $\ldots$, $\varphi_r(s, t)$ seront également continues. Pour le démontrer traçons dans le plan des λ un contour C, qui renferme λ_1, mais qui ne renferme pas d'autres constantes caractéristiques. Nous aurons

$$(28)\qquad \varphi_\nu(s,t) = \frac{-1}{2\pi i}\int_C (\lambda_1-\lambda)^{\nu-1} K(s,t,\lambda)\,d\lambda.$$

La résolvante $K(s, t, \lambda)$ étant continue sur le contour, il faut que $\varphi_\nu(s, t)$ soit continu. En général, lorsque $K(s, t)$ a des discontinuités, $\varphi_\nu(s, t)$ ne peut avoir de discontinuités que pour les mêmes valeurs de s, t.

10. Rappelons maintenant la formule (16) :

$$(16)\qquad \int K(s,s,\lambda)\,ds = -\frac{d}{d\lambda}[\log D(\lambda)].$$

Puisque λ_1 est un zéro de $D(\lambda)$ d'ordre p, nous avons

$$D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^p\, D'(\lambda),$$

où

$$D'(\lambda_1) \neq 0.$$

Donc

$$\frac{d}{d\lambda}[\log D(\lambda)] = -\frac{p}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{d}{d\lambda}[\log D'(\lambda)].$$

L'expression $\frac{d}{d\lambda}[\log D'(\lambda)]$ reste finie lorsque λ tend vers λ_1, et nous tirons de (16) l'équation

$$(29) \qquad \lim_{\lambda=\lambda_1} (\lambda_1 - \lambda) \int K(s, s, \lambda)\, ds = +p.$$

De (26) et (29) il résulte que

$$(30) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \int \varphi_r(s, s)\, ds = 0, & \int \varphi_{r-1}(s, s)\, ds = 0, & \ldots, \\ \int \varphi_2(s, s)\, ds = 0, & \int \varphi_1(s, s)\, ds = p. & \end{array} \right.$$

11. Nous écrivons maintenant les équations (2) sous la forme suivante :

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} -K(s, t) + K(s, t, \lambda) \\ \quad = (\lambda - \lambda_1) \int K(s, \tau) K(\tau, t, \lambda) d\tau + \lambda_1 \int K(s, \tau) K(\tau, t, \lambda)\, d\tau \\ \quad = (\lambda - \lambda_1) \int K(s, \tau, \lambda) K(\tau, t) d\tau + \lambda_1 \int K(s, \tau, \lambda) K(\tau, t)\, d\tau. \end{array} \right.$$

Si nous substituons ensuite l'expression de $K(s, t, \lambda)$ tirée de (26) dans les équations (31), nous aurons le droit d'égaler les coefficients de $(\lambda_1 - \lambda)^{-1}$, $(\lambda_1 - \lambda)^{-2}$, ..., $(\lambda_1 - \lambda)^{-r}$ dans les trois membres. Ceci nous donne

$$(32) \qquad \varphi_r(s, t) = \lambda_1 \int K(s, \tau) \varphi_r(\tau, t)\, d\tau = \lambda_1 \int K(\tau, t) \varphi_r(s, \tau)\, d\tau,$$

$$(33) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{r-1}(s, t) = \lambda_1 \int K(s, \tau) \varphi_{r-1}(\tau, t)\, d\tau - \int K(s, \tau) \varphi_r(\tau, t)\, d\tau \\ \qquad\qquad = \lambda_1 \int K(\tau, t) \varphi_{r-1}(s, \tau)\, d\tau - \int K(\tau, t) \varphi_r(s, \tau)\, d\tau, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

et

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_1(s,t) &= \lambda_1\int K(s,\tau)\varphi_1(\tau,t)\,d\tau - \int K(s,\tau)\varphi_2(\tau,t)\,d\tau \\ &= \lambda_1\int K(\tau,t)\varphi_1(s,\tau)\,d\tau - \int K(\tau,t)\varphi_2(s,\tau)\,d\tau, \end{aligned}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_0(s,t,\lambda) - K(s,t) \\ &\quad = \lambda\int K(s,\tau)\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau - \int K(s,\tau)\varphi_1(\tau,t)\,d\tau \\ &\quad = \lambda\int K(\tau,t)\varphi_0(s,\tau,\lambda)\,d\tau - \int K(\tau,t)\varphi_1(s,\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right.$$

On transforme ces équations aux formes suivantes :

$$(36)\quad \int K(s,\tau)\varphi_r(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t)\varphi_r(s,\tau)\,d\tau = \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1},$$

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\int K(s,\tau)\varphi_{r-1}(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t)\varphi_{r-1}(s,\tau)\,d\tau \\ &\qquad\qquad = \frac{\varphi_{r-1}(s,t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\int K(s,\tau)\varphi_1(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t)\varphi_1(s,\tau)\,d\tau \\ &\qquad\qquad = \frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s,t)}{\lambda_1^2} + \ldots + \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^r} \\ &\qquad\qquad = \chi(s,t), \end{aligned}\right.$$

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\int K(s,\tau)\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \lambda\int K(\tau,t)\varphi_0(s,t,\lambda)\,d\tau \\ &\qquad\qquad = -K(s,t) + \varphi_0(s,t,\lambda) \\ &\qquad\qquad\quad + \frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^r} \\ &\qquad\qquad = \varphi_0(s,t,\lambda) - \varphi_0(s,t,0). \end{aligned}\right.$$

On multiplie ensuite l'équation (2) du § 1 par $\varphi_r(t,r)$ et on l'intègre par rapport à t. En se servant de (36) on a, après un léger changement de notation,

$$(40)\quad \int K(s,\tau,\lambda)\varphi_r(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t,\lambda)\varphi_r(s,\tau)\,d\tau = \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1-\lambda}.$$

Et de la même manière on obtient les autres équations

$$(41)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int K(s,\tau,\lambda)\,\varphi_{r-1}(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t,\lambda)\,\varphi_{r-1}(s,\tau)\,d\tau \\ &\qquad = \frac{\varphi_{r-1}(s,t)}{\lambda_1-\lambda} + \frac{\varphi_r(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int K(s,\tau,\lambda)\,\varphi_1(\tau,t)\,d\tau = \int K(\tau,t,\lambda)\,\varphi_1(s,\tau)\,d\tau \\ &\qquad = \frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1-\lambda} + \frac{\varphi_2(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^2} + \ldots + \frac{\varphi_r(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^r} \\ &\qquad = \chi(s,t,\lambda). \end{aligned} \right.$$

On se sert de nouveau de l'équation (26) pour séparer dans les équations (40), (41), (42) les coefficients de $\frac{1}{\lambda_1-\lambda}, \frac{1}{(\lambda_1-\lambda)^2}, \ldots, \frac{1}{(\lambda_1-\lambda)^r}$, et l'on obtient ainsi une série d'équations qui se résument sous la forme suivante :

$$(43)\quad \begin{aligned} \int \varphi_m(s,\tau)\,\varphi_n(\tau,t)\,d\tau = \int \varphi_n(s,\tau)\,\varphi_m(\tau,t)\,d\tau &= 0 \\ \text{si } m+n &> r+1, \\ = \varphi_{m+n-1}(s,t), & \\ \text{si } m+n &\leq r+1, \end{aligned}$$

$$(44)\quad \int \varphi_m(s,\tau)\,\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \int \varphi_0(s,\tau,\lambda)\,\varphi_m(\tau,t)\,d\tau = 0, \quad \text{pour toute valeur de } m.$$

11. A l'aide de (11) on peut démontrer que les deux parties de

$$K(s,t) = \chi_0(s,t) + \varphi_0(s,t,0)$$

sont orthogonales. On a, pour toute valeur régulière de λ, μ,

$$(44_1)\quad \int \chi(s,\tau,\lambda)\,\varphi_0(\tau,t,\mu)\,d\tau = \int \varphi_0(s,\tau,\mu)\,\chi(\tau,t,\lambda)\,d\tau = 0.$$

Faisant $\lambda = 0$, $\mu = \lambda$, nous avons, d'après (39),

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} -\varphi_0(s,t,0) + \varphi_0(s,t,\lambda) &= \lambda \int \varphi_0(s,\tau,0)\,\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda \int \varphi_0(\tau,t,0)\,\varphi_0(s,t,\lambda)\,d\tau, \end{aligned} \right.$$

et, d'après (2),

$$(46)\quad \begin{cases} -\chi(s,t)+\chi(s,t,\lambda)=\lambda\int\chi(s,\tau)\chi(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ \qquad =\lambda\int\chi(\tau,t)\chi(s,\tau,\lambda)\,d\tau. \end{cases}$$

On peut donc dire que les fonctions $\varphi_0(s,t,0)$ et $\chi(s,t)$ sont orthogonales et ont respectivement pour résolvantes des fonctions $\varphi_0(s,t,\lambda)$, $\chi(s,t,\lambda)$. Il résulte que nous pouvons appliquer les considérations du § 2, et que *nous pouvons considérer à part la partie $\chi(s,t)$ du noyau $K(s,t)$ relative à λ_1.*

Le déterminant de $\chi(s,t)$ est donné par

$$\frac{d}{d\lambda}[\log D'(\lambda)]=-\int\chi(s,s,\lambda)\,ds=\frac{-p}{\lambda_1-\lambda}=\frac{p}{\lambda-\lambda_1}.$$

Par conséquent,

$$D'(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^p\times\text{const.}$$

Mais

$$D'(0)=1,$$

et l'on a

$$(47)\qquad D'(\lambda)=\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p.$$

C'est *le facteur du déterminant $D(\lambda)$ de $K(s,t)$ relatif à la partie $\chi(s,t)$.*

On peut démontrer que les parties du noyau relatives à deux constantes caractéristiques sont orthogonales.

Soient $\chi_1(s,t)$, $\chi_2(s,t)$ les parties du noyau $K(s,t)$ relatives à λ_1, λ_2; soient $\chi_1(s,t,\lambda)$, $\chi_2(s,t,\lambda)$ les parties correspondantes de la résolvante. On a

$$K(s,t,\lambda)=\chi_1(s,t,\lambda)+\chi_2(s,t,\lambda)+\varphi_0'(s,t,\lambda),$$

et, en appliquant les formules (44_1),

$$\int\chi_1(s,\tau)[\chi_2(\tau,t,\lambda)+\varphi_0'(\tau,t,\lambda)]\,dt$$
$$=\int\chi_1(\tau,t)[\chi_2(s,\tau,\lambda)+\varphi_0'(s,\tau,\lambda)]\,d\tau=0.$$

La fonction $\varphi'_0(s, t, \lambda)$ reste finie lorsque λ s'approche de λ_2; donc, en se souvenant de la forme de $\chi_2(s, t, \lambda)$, on aura

$$\int \chi_1(s, \tau)\chi_2(\tau, t, \lambda)\,d\tau = \int \chi_1(\tau, t)\chi_2(s, \tau, \lambda)\,d\tau = 0.$$

Faisant $\lambda = 0$,

$$(47_1) \qquad \int \chi_1(s, \tau)\chi_2(\tau, t)\,d\tau = \int \chi_1(\tau, t)\chi_2(s, \tau)\,d\tau = 0.$$

Nous avons donc démontré que $\chi_1(s, t)$, $\chi_2(s, t)$ sont orthogonales.

§ 4. — Fonctions fondamentales.

12. Envisageons maintenant la fonction $\varphi_r(s, t)$. L'équation (32) indique qu'elle est une solution de chacune des équations associées de Fredholm sans second membre pour $\lambda = \lambda_1$. Donc, considérée comme une fonction de s, $\varphi_r(s, t)$ est la somme de q fonctions indépendantes au plus. De même, considérée comme une fonction de t, $\varphi_r(s, t)$ est la somme de q fonctions indépendantes au plus. Nous pouvons écrire $\varphi_r(s, t)$ sous la forme

$$\varphi_r(s, t) = \sum_{k=1}^{q} \xi_k(s)\,\eta_k(t).$$

D'après l'équation (33) on voit que $\varphi_{r-1}(s, t)$ est une solution de chacune de deux équations associées de Fredholm, avec second membre, pour $\lambda = \lambda_1$. Les conditions du § I pour l'existence des solutions sont nécessairement remplies, d'après (48). La forme des équations (9_1) démontre que $\varphi_{r-1}(s, t)$ est aussi la somme d'un nombre fini de produits :

$$\varphi_{r-1}(s, t) = \sum_{k=1}^{2q} \xi'_k(s)\,\eta'_k(t).$$

Nous examinons de proche en proche toutes les fonctions $\varphi_{r-2}(s, t)$, $\varphi_{r-3}(s, t)$, ..., $\varphi_1(s, t)$, et nous trouvons enfin que $\varphi_1(s, t)$ est aussi la somme d'un nombre fini de produits :

$$\varphi_1(s, t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s) \psi_k(t).$$

Nous substituons cette expression dans une des équations (43) :

$$\int \varphi_1(s, \tau) \varphi_1(\tau, t) \, d\tau = \varphi_1(s, t).$$

Il en résulte

$$\sum_k \sum \varphi_k(s) \psi_j(t) \int \varphi_j(\tau) \psi_k(\tau) \, d\tau = \sum_k \varphi_k(s) \psi_k(t).$$

Nous supposons que les fonctions $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ sont indépendantes, et que les fonctions $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ sont aussi indépendantes. Dans ces conditions nous égalons les coefficients de $\varphi_k(s) \psi_j(t)$ dans les deux membres. Ceci nous donne les relations

$$(48) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int \varphi_k(s) \psi_j(s) \, ds = 0 & \text{si} \quad k \neq j, \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 1 & \text{si} \quad k = j, \\ \displaystyle\int \varphi_1(s, s) \, ds = n. \end{cases}$$

Rappelons une des équations (30),

$$\int \varphi_1(s, s) \, ds = p,$$

où p est le degré du zéro λ_1 de $D(\lambda)$.

Nous avons $n = p$,

$$(48_1) \qquad \varphi_1(s, t) = \sum_1^p \varphi_k(s) \psi_k(t);$$

nous appelons les $2p$ fonctions

$$(49) \qquad \begin{cases} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \ldots, & \varphi_p(s), \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \ldots, & \psi_p(t) \end{cases}$$

fonctions fondamentales relatives à λ_1.

Si un zéro de degré p de $D(\lambda)$ est considéré comme p zéros distincts, on peut dire qu'*une paire de fonctions fondamentales correspond à chaque zéro de* $D(\lambda)$.

Les fonctions fondamentales relatives à λ_1 satisfont aux équations (48). Elles constituent *un système biorthogonal.*

13. Considérons maintenant la fonction $\varphi_2(s, t)$; d'après (43), on a

$$(50) \qquad \int \varphi_2(s, \tau)\varphi_1(\tau, t)\,d\tau = \int \varphi_1(s, \tau)\varphi_2(\tau, t)\,d\tau = \varphi_2(s, t).$$

Il est clair que $\varphi_2(s, t)$ est une fonction linéaire homogène de $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_p(s)$ et aussi de $\psi_1(t), \ldots, \psi_p(t)$. On peut écrire

$$(51) \qquad \varphi_2(s, t) = \sum_{jk}^{p} a_{jk}\,\varphi_j(s)\,\psi_k(t).$$

Les équations (50) sont ainsi vérifiées. Et puisque, d'après (30), on a

$$\int \varphi_2(s, s)\,ds = 0,$$

il faut que l'on ait

$$(51_1) \qquad \sum a_{kk} = 0.$$

Les autres fonctions $\varphi_3(s, t), \ldots, \varphi_r(s, t)$ s'expriment maintenant à l'aide des équations (43) en fonctions de $\varphi_1(s), \ldots, \psi_1(t), \ldots, a_{11}, a_{12}, \ldots$. On a

$$(52) \qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_3(s, t) &= \sum_{ijk}^{1,p} a_{ij}\,a_{jk}\,\varphi_i(s)\,\psi_k(t), \\ \varphi_4(s, t) &= \sum_{ijkl}^{1,p} a_{ij}\,a_{jk}\,a_{kl}\,\varphi_i(s)\,\psi_l(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_r(s, t) &= \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1} i_r}^{1,p} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{r-1} i_r}\,\varphi_{i_1}(s)\,\psi_{i_r}(t). \end{aligned}\right.$$

Mais il faut en même temps, à cause des équations (30), que les coefficients $a_{11}, a_{12}, \ldots$ satisfassent à certaines conditions, à savoir :

$$(53)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{ik} a_{ik}a_{ki} = 0, \\ \sum\limits_{ijk} a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \sum\limits_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} a_{i_1 i_2}a_{i_2 i_3}\ldots a_{i_{r+1} i_1} = 0. \end{array}\right.$$

On aura aussi, dans les cas où $r < p$, à admettre que tous les coefficients de $\varphi_{r+1}(s, t)$ sont nuls.

14. D'autre part, si nous choisissons $2p$ fonctions $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_p(s)$, $\psi_1(t), \ldots, \psi_p(t)$ et p^2 coefficients $a_{11}, \ldots, a_{pp}$ qui satisfont aux conditions précédentes, nous pouvons construire un noyau auquel toute la théorie s'appliquera. Les coefficients ont un haut degré d'indétermination; en particulier, nous pouvons associer à chaque a_{jk} un même facteur indéterminé μ.

Écrivons $\chi(s, t)$ sous la forme

$$\chi(s, t) = \frac{1}{\lambda_1}\sum_{jk}^{1,p} \alpha_{jk}\,\varphi_j(s)\,\psi_k(t).$$

Je dis que les coefficients de $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_p(s)$ sont des fonctions de t linéairement indépendantes. S'il n'en était pas ainsi, il serait possible d'écrire

$$(54)\qquad \chi(s, t) = \sum_{k=1}^{p-1} \varphi'_k(s)\,\psi'_k(t)$$

en somme de $p - 1$ produits. Il est facile de voir que le déterminant du noyau (54) est de degré $p - 1$ au plus. En effet, le coefficient de λ^p dans $D(\lambda)$ est l'intégrale du déterminant

$$\chi\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_p \\ s_1, s_2, \ldots, s_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \chi(s_1, s_1) & \chi(s_1, s_2) & \ldots & \chi(s_1, s_p) \\ \chi(s_2, s_1) & \chi(s_2, s_2) & \ldots & \chi(s_2, s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \chi(s_p, s_1) & \chi(s_p, s_2) & \ldots & \chi(s_p, s_p) \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul. De même, les coefficients de λ^{p+1}, λ^{p+2}, ... s'évanouissent. Mais nous savons que le déterminant du noyau $\chi(s, t)$ est $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p$. Donc l'équation (54) est impossible.

Nous voyons donc que les fonctions

$$(55) \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}\psi_1(t) + \alpha_{12}\psi_2(t) + \ldots + \alpha_{1p}\psi_p(t), \\ a_{21}\psi_1(t) + \alpha_{22}\psi_2(t) + \ldots + \alpha_{2p}\psi_p(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{p1}\psi_1(t) + \alpha_{p2}\psi_2(t) + \ldots + a_{pp}\psi_p(t) \end{array}\right.$$

sont linéairement indépendantes. Par conséquent, le déterminant

$$\|\alpha_{mn}\|$$

ne peut pas s'évanouir.

Or, chacun des coefficients α_{mn} est un polynome de degré $r-1$ au plus en μ, qui est le facteur indéterminé. Donc le déterminant $\|\alpha_{mn}\|$ est un polynome en μ de degré $p(r-1)$ au plus, et dont le terme absolu est l'unité. Puisque le déterminant ne s'évanouit pas et que le polynome ne peut pas avoir de zéros, il faut que ce polynome se réduise à son terme absolu, c'est-à-dire

$$(56) \qquad \|\alpha_{jk}\| = 1.$$

Si l'on développe $\|\alpha_{mn}\|$ en fonction homogène des a_{jk},

$$\|\alpha_{jk}\| = 1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{p(r-1)},$$

on aura

$$(57) \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{p(r-1)} = 0.$$

Les conditions (57) (qui ne sont pas indépendantes) équivalent aux conditions (51_1) et (53).

15. Nous avons vu dans le § 1 que la fonction $\varphi_1(s, t)$ ne peut avoir que des discontinuités de la même nature que celles de $K(s, t)$. Si $\varphi_1(s, t)$ a une discontinuité au point (s_0, t_0), il faudra soit que l'une des fonctions $\varphi_1(s)$, ..., $\varphi_p(s)$ ait une discontinuité à $s = s_0$, soit que l'une des fonctions $\psi_1(t)$, ..., $\psi_p(t)$ ait une discontinuité à $t = t_0$, à cause de l'équation (48_1). Mais, si $\varphi_0(s)$ est discontinue pour $s = s_0$, la fonction $\varphi_1(s, t)$, et par conséquent le noyau $K(s, t)$, sera discontinue pour $s = s_0$, quel que soit t. Il en résulte le théorème suivant :

Toutes les fonctions fondamentales $\varphi_0(s)$ seront continues au point $s = s_0$, à moins que le noyau $K(s, t)$ ne soit discontinu pour $s = s_0$ indépendamment de t.

En particulier, l'ensemble des noyaux qui deviennent infinis de la même façon que $(s - t)^{-\alpha}$, où $\alpha < 1$, lorsque s tend vers t, mais qui sont ailleurs continus, ont toutes leurs fonctions fondamentales finies et continues.

16. Dans le cas où $K(s, t)$ et λ_1 sont réels, nous pouvons toujours supposer que les fonctions fondamentales sont réelles. En effet, si nous avions la paire complexe

$$\varphi_1(s) = \varphi'(s) + i\varphi''(s),$$
$$\psi_1(t) = \psi'(t) + i\psi'(t),$$

nous aurions la paire conjuguée

$$\varphi_2(s) = \varphi'(s) - i\varphi''(s),$$
$$\psi_2(t) = \psi'(t) - i\psi''(t),$$

et il est facile de voir que nous pourrions remplacer le système complexe

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), \\ \psi_1(t), & \psi_2(t) \end{array}$$

par le système réel

$$\begin{array}{ll} 2\varphi'(s), & -2\varphi''(s), \\ \psi'(t), & \psi''(t), \end{array}$$

qui remplit les conditions suffisantes.

17. Nous avons vu que les fonctions fondamentales relatives à une constante caractéristique formaient un système biorthogonal. Nous allons démontrer maintenant que *les fonctions fondamentales relatives à l'ensemble des constantes caractéristiques forment un même système biorthogonal.*

Soient λ_1, λ_2 deux constantes caractéristiques du noyau $K(s,t)$; $\chi_1(s,t)$, $\chi_2(s,t)$, les parties de $K(s,t)$ relatives à λ_1, λ_2, sont orthogonales. Il en résulte que

$$\int \chi_1(s,t,\lambda)\chi_2(\tau,t,\mu)\,d\tau = 0.$$

Séparons le coefficient de $(\lambda_1-\lambda)^{-1}(\lambda_2-\mu)^{-1}$ qui est identiquement nul :

$$\int\left[\sum_{k=1}^{p_1}\varphi_k^{(1)}(s)\psi_k^{(1)}(\tau)\right]\left[\sum_{j=1}^{p_2}\varphi_j^{(2)}(\tau)\psi_j^{(2)}(t)\right]d\tau.$$

A cause de l'indépendance des fonctions $\varphi^{(1)}(s)$ et des fonctions $\psi^{(2)}(t)$, on a

$$\int\psi_k^{(1)}(\tau)\varphi_j^{(2)}(\tau)\,d\tau = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,p_1);\ (j=1,2,\ldots,p_2).$$

De même on a

$$\int\psi_j^{(2)}(\tau)\varphi_k^{(1)}(\tau)\,d\tau = 0.$$

Donc les fonctions fondamentales relatives aux deux constantes caractéristiques λ_1, λ_2 forment un même système biorthogonal, et la généralisation énoncée ci-dessus en résulte immédiatement.

18. Nous considérons maintenant les solutions des équations sans seconds membres

$$\varphi(s)-\lambda_1\int K(s,t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

$$\psi(t)-\lambda_1\int K(s,t)\psi(s)\,ds = 0.$$

D'après ce qui a été démontré dans le § 2, on voit que les solutions seront les mêmes que celles de

$$\varphi(s) - \lambda_1 \int \chi(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0,$$

$$\psi(t) - \lambda_1 \int \chi(s, t)\, \psi(s)\, ds = 0.$$

Elles seront donc des fonctions linéaires homogènes des fonctions fondamentales

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \varphi_k(s),$$

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \psi_k(t).$$

Ces fonctions seront, en général, en plus petit nombre que les fonctions fondamentales; dans le cas seulement où $r = 1$, il y a coïncidence entre les fonctions fondamentales et les solutions fondamentales; cette catégorie renferme les noyaux symétriques (*voir* Chap. II, § 2).

19. Remarquons enfin que nous aurons plusieurs développements en série intéressants, *dans le cas où ces séries sont uniformément convergentes.*

Le noyau $K(s, t)$ et la résolvante se développent suivant leurs parties :

$$K(s, t) \quad = K_0(s, t) \quad + \chi_1(s, t) \quad + \chi_2(s, t) \quad + \ldots,$$
$$K(s, t, \lambda) = K_0(s, t, \lambda) + \chi_1(s, t, \lambda) + \chi_2(s, t, \lambda) + \ldots,$$

où $K_0(s, t)$ est un noyau sans constante fondamentale et $K_0(s, t, \lambda)$ est sa résolvante.

Les solutions des deux équations associées se développent suivant les fonctions fondamentales

$$\varphi(s) = f(s) + a_1 \varphi_1(s) + a_2 \varphi_2(s) + \ldots,$$
$$\psi(t) = f(t) + b_1 \psi_1(t) + b_2 \psi_2(t) + \ldots.$$

20. Pour compléter ce Chapitre nous allons donner un exemple d'un noyau dont la résolvante a un pôle double. Un noyau avec le système biorthogonal

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s),$$
$$\psi_1(t),\quad \psi_2(t)$$

et la seule constante caractéristique λ_1 aura la forme

$$\begin{aligned}\chi(s,t) &= \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(s,t)+\frac{1}{\lambda_1^2}\varphi_2(s,t)\\ &= \frac{1}{\lambda_1}[\varphi_1(s)\psi_1(t)+\varphi_2(s)\psi_2(t)]\\ &\quad+\frac{1}{\lambda_1^2}[\quad a_{11}\varphi_1(s)\psi_1(t)+a_{12}\varphi_1(s)\psi_2(t)\\ &\qquad+a_{21}\varphi_2(s)\psi_1(t)+a_{22}\varphi_2(s)\psi_2(t)]\end{aligned}$$

(où nous avons omis un terme qui représenterait une partie du noyau sans constante caractéristique). Pourvu que le second terme ne s'évanouisse pas identiquement, il y aura une seule solution de chacune des équations sans seconds membres, à cause de la relation

$$r+q\leqq p+1.$$

Les coefficients a doivent satisfaire aux conditions

$$a_{11}+a_{22}=0,$$
$$a_{11}^2+2a_{12}a_{21}+a_{22}^2=0.$$

Faisons

$$a_{11}=\alpha\beta,\qquad a_{12}=-\alpha,$$

on trouve

$$a_{22}=-\alpha\beta,\qquad a_{21}=\alpha\beta^2;$$

donc

$$\begin{aligned}\varphi_2(s,t) &= \quad\alpha\beta\ \varphi_1(s)\psi_1(t)-\alpha\ \varphi_1(s)\psi_2(t)\\ &\quad+\alpha\beta^2\varphi_2(s)\psi_1(t)-\alpha\beta\varphi_2(s)\psi_2(t)\\ &= \alpha[\varphi_1(s)+\beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t)-\psi_2(t)],\end{aligned}$$

les constantes α, β ayant des valeurs quelconques.

Nous pouvons dire maintenant que le noyau

$$\chi(s,t) = \frac{1}{\lambda_1}[\varphi_1(s)\psi_1(t) + \varphi_2(s)\psi_2(t)] \\ + \frac{\alpha}{\lambda_1^2}[\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t) - \psi_2(t)]$$

a la résolvante

$$\chi(s,t,\lambda) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda}[\varphi_1(s)\psi_1(t) + \varphi_2(s)\psi_2(t)] \\ + \frac{\alpha}{(\lambda_1 - \lambda)^2}[\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t) - \psi_2(t)]$$

et les solutions fondamentales

$$\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s), \quad \beta\psi_1(t) - \psi_2(t).$$

Si $\alpha = 0$, il y aura deux paires de solutions fondamentales coïncidant avec les fonctions fondamentales.

Nous donnons les deux exemples particuliers :

$$(0, 2\pi), \quad \chi(s,t) = \frac{1}{\pi\lambda_1}(\sin s \sin t + \cos s \cos t) \\ + \frac{\alpha}{\lambda_1^2}(\sin s + \beta \cos s)(\beta \sin t - \cos t),$$

$$(0, 1), \quad \chi(s,t) = \frac{1}{\lambda_1}[1 - (6s - s)(6t - s)] + \frac{\alpha}{\lambda_1^2}(3s - 2)(3t - 2).$$

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

§ 1. — Nombre de constantes caractéristiques.

1. Il est facile de construire des exemples à l'aide de la théorie exposée dans le Chapitre I. Étant donné un système biorthogonal quelconque, nous pouvons le diviser en groupes de fonctions et, avec chaque groupe, nous pouvons construire une partie fondamentale à laquelle nous attachons la constante caractéristique que nous voulons. La somme de ces parties, supposée uniformément convergente, est un noyau dont nous connaissons les constantes caractéristiques, les fonctions fondamentales et les solutions fondamentales.

Le problème inverse, consistant à déterminer le système biorthogonal d'un noyau donné, est résolu par la méthode de M. Fredholm. Si nous pouvons séparer le noyau en plusieurs parties orthogonales, chacune de ces parties peut être considérée à part et le problème sera simplifié. Si nous pouvons trouver toutes les parties fondamentales, le problème sera résolu sans avoir recours à la méthode de M. Fredholm.

2. Il y a des noyaux sans constante caractéristique, par exemple la fonction $\frac{\sin s \cos t}{\lambda_1}$ pour l'intervalle $(0, 2\pi)$, ou encore la série supposée convergente

$$\sum_0^\infty a_{mn} \cos ms \sin nt.$$

Les noyaux des équations de Volterra appartiennent aussi à cette classe, car ils satisfont à la relation

$$K(s, t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \geqq s.$$

Lorsque nous avons séparé les parties relatives à toutes les constantes caractéristiques, il peut rester une partie qui n'a pas de constante caractéristique que nous pouvons appeler la *partie relative à l'infini*.

Donc la forme la plus générale du noyau à n constantes caractéristiques distinctes est

$$(1)\quad K(s, t) = \chi_1(s, t) + \chi_2(s, t) + \chi_3(s, t) + \ldots + \chi_n(s, t) + \chi_\infty(s, t),$$

où $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ sont les parties relatives à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Nous allons examiner maintenant quelques cas où le nombre de constantes caractéristiques est infini.

3. M. Hilbert [1] définit le *noyau fermé* au cas symétrique par la condition qu'il n'existe pas une fonction continue $f(s)$ telle que

$$\int K(s, t) f(t)\, dt = 0. \tag{2}$$

Nous pouvons prendre la même condition pour définir le *noyau asymétrique fermé par rapport à t*.

Nous dirons que le *système biorthogonal*

$$\left\{\begin{array}{lllll} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \ldots, & \varphi_n(s), & \ldots, \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \ldots, & \psi_n(t), & \ldots \end{array}\right. \tag{3}$$

est *fermé par rapport à t* lorsqu'il n'existe pas de fonction continue $f(s)$ telle que

$$\int \psi_n(s) f(s)\, ds = 0$$

pour toute valeur de n.

Dans ces conditions, nous pouvons démontrer que, *si le système biorthogonal d'un noyau est fermé par rapport à t, le noyau est aussi fermé par rapport à t*.

Supposons, si c'est possible, qu'il existe une fonction $f(s)$ telle que

$$\int K(s, t) f(t)\, dt = 0.$$

Envisageons la constante caractéristique λ_1 à laquelle correspond la partie fondamentale

$$\chi(s, t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_1^p \alpha_{ij}\, \varphi_i(s)\, \psi_j(t). \tag{4}$$

Nous écrivons

$$\beta_j = \int \psi_j(t) f(t)\, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

---

(1) David Hilbert, *Nach. zu Göttingen*, 1904, Heft 1.

or on a l'équation

$$\int \mathrm{K}(s,t)\,\psi_j(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_1}\sum_k \alpha_{jk}\,\psi_k(t);$$

donc

$$(5)\quad \frac{1}{\lambda_1}\sum_k \alpha_{jk}\beta_k = \int\int \mathrm{K}(s,t)\,\psi_j(s)\,f(t)\,ds\,dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Ainsi les quantités β satisfont aux p équations linéaires sans seconds membres (5). Mais nous savons (Chap. I, § 3) que le déterminant $\big||\alpha_{jk}|\big|$ de ces équations est égal à l'unité $\left(\text{en omettant le facteur commun } \frac{1}{\lambda_1}\right)$. Donc il faut qu'on ait

$$\beta_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

De même on démontre que

$$\int \psi_j(t)\,f(t)\,dt = 0$$

pour toutes les fonctions fondamentales du noyau, ce qui est contre l'hypothèse exprimant que le système biorthogonal est fermé.

Avec cette définition il n'est possible de démontrer l'inverse de cette proposition que pour certains cas particuliers. M. Hilbert l'a fait pour le cas symétrique; nous y reviendrons dans le § 2.

4. Nous prenons maintenant une définition différente du *noyau fermé*.

Nous supposons que le noyau $\mathrm{K}(s,t)$ *et la fonction continue* $f(s)$ *sont telles que les quantités*

$$|\mathrm{K}(s,t)|, \quad |f(s)|,$$

$$\frac{1}{|\varepsilon|}|\mathrm{K}(s+\varepsilon,t) - \mathrm{K}(s,t)|, \quad \frac{1}{|\varepsilon|}|f(s+\varepsilon) - f(s)|,$$

$$\left|\int \mathrm{K}(s,t)\,f(t)\,dt\right|$$

ont respectivement les limites supérieures finies

$$1, \quad 1, \quad K, \quad J, \quad i.$$

Le noyau $K(s, t)$ *est fermé par rapport à* t *lorsqu'on a l'inégalité suivante :*

$$(J + K)\, i^{1+\eta} > m > 0, \tag{6}$$

où η, m *sont deux nombres positifs indépendants de* $f(s)$.

Avec cette définition je peux énoncer le théorème suivant :

Lorsque $K(s, t)$ *est un noyau fermé, ou que l'un de ses noyaux réitérés est fermé,* $K(s, t)$ *aura un nombre infini de constantes caractéristiques.*

3. Lemme I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau n'ait pas de constante caractéristique est la suivante :* N *étant un nombre positif aussi grand qu'on veut, on peut trouver un nombre entier* ν *tel que, lorsque* $n \geqq \nu$, *on a*

$$|K_n(s, t)| \leqq \frac{1}{N^n}.$$

En effet, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la résolvante

$$K(s, t, \lambda) = K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \ldots + \lambda^n K_n(s, t) + \ldots$$

soit une fonction entière de λ.

Lemme II. — *Si la suite de nombres positifs*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_n \ldots$$

représente la suite des modules des constantes caractéristiques du noyau $K(s, t)$, *la suite*

$$\alpha_1^\nu < \alpha_2^\nu < \alpha_3^\nu \ldots < \alpha_n^\nu \ldots$$

représentera la suite des modules des constantes caractéristiques du noyau réitéré $K_\nu(s, t)$.

Envisageons les deux résolvantes

$$(7)\quad \begin{cases} K(s, t, \lambda) = K(s, t) + \lambda K_2(s, t) \\ \qquad\qquad + \lambda^2 K_3(s, t) + \ldots + \lambda^n K_n(s, t) + \ldots, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} K_\nu(s, t, \lambda) = K_\nu(s, t) + \lambda K_{2\nu}(s, t) \\ \qquad\qquad + \lambda^2 K_{3\nu}(s, t) + \ldots + \lambda^n K_{n\nu}(s, t) + \ldots. \end{cases}$$

La condition pour que la fonction (7) ait un pôle dont le module soit plus petit qu'un nombre positif α est la suivante : n_0 étant un nombre entier aussi grand qu'on veut, on peut toujours trouver n tel que

$$|K_n(s, t)| > C\frac{1}{\alpha^n}.$$

La condition pour que $K_\nu(s, t, \lambda)$ ait un pôle dont le module soit plus petit que α^ν est qu'on peut trouver n tel que

$$|K_{n\nu}(s, t)| > C'\frac{1}{\alpha^{n\nu}}.$$

Ces deux conditions sont identiques.

Par conséquent, si $K(s, t)$ a une constante caractéristique dont le module est plus petit que α, $K_\nu(s, t)$ en a une dont le module est plus petit que α^ν.

Soit maintenant $\chi(s, t)$ la partie du noyau $K(s, t)$ relative aux constantes caractéristiques dont les modules sont plus petits que α. $\chi_\nu(s, t)$ sera la partie du noyau $K_\nu(s, t)$ relative aux constantes caractéristiques dont les modules sont plus petits que α^ν.

Nous appliquons maintenant le raisonnement précédent au noyau

$$K'(s, t) = K(s, t) - \chi(s, t)$$

et à sa réitération

$$K'_\nu(s, t) = K_\nu(s, t) - \chi_\nu(s, t),$$

et nous trouvons que, si $K'(s, t)$ a une constante caractéristique plus petite en module que $\beta > \alpha$, le noyau $K'_\nu(s, t)$ en aura une plus petite en module que α^ν.

Ainsi, si $K(s, t)$ a une constante caractéristique λ_1 telle que

$$\alpha \leqq |\lambda_1| < \beta,$$

le noyau réitéré $K_\nu(s, t)$ aura une constante caractéristique λ'_1 telle que

$$\alpha^\nu \leqq |\lambda'_1| < \beta^\nu.$$

Le lemme en résulte immédiatement.

6. En tenant compte du second lemme, il suffit, pour la proposition énoncée plus haut, de considérer le noyau $K(s, t)$ qui est lui-même fermé.

Nous supposons donc que $K(s, t)$ est fermé, et nous désignons par $M_1(t)$, $M_2(t)$, ..., $M_n(t)$, ... les limites supérieures de $|K(s, t)|$, $|K_2(s, t)|$, ..., $|K_n(s, t)|$, ... lorsque s varie, t étant fixe. Je vais démontrer d'abord les inégalités

$$1 \geqq M_1(t) \geqq M_2(t) \geqq \ldots \geqq M_n(t) > 0,$$

où il est supposé que t a une valeur telle que $K(s, t)$ ne soit pas nul identiquement. On a

$$K_n(s, t) = \int K(s, \tau) K_{n-1}(\tau, t)\, d\tau.$$

Puisque $|K(s, t)| \leqq 1$ (¹), on a

$$M_n(t) \leqq M_{n-1}(t).$$

En nous rapportant à la définition du noyau fermé, il est clair que nous pouvons prendre pour $f(s)$ la fonction $\frac{K_{n-1}(s, t)}{M_{n-1}(t)}$. Il en résulte que $M_n(t)$ ne peut pas s'évanouir, à moins que $M_{n-1}(t)$ ne s'évanouisse

(¹) *Voir* définition du n° 4.

aussi. L'application successive de ces considérations démontre les inégalités énoncées.

7. Nous prenons maintenant pour $f(s)$ la fonction $\frac{\mathrm{K}_n(s,t)}{\mathrm{M}_n(t)}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\varepsilon|}&|f(s+\varepsilon)-f(s)|\\ &=\frac{1}{|\varepsilon|}\left|\int|\mathrm{K}(s+\varepsilon,\tau)-\mathrm{K}(s,\tau)|\frac{\mathrm{K}_{n-1}(\tau,t)}{\mathrm{M}_n(t)}d\tau\right|\leqq \mathrm{K}\frac{\mathrm{M}_{n-1}(t)}{\mathrm{M}_n(t)}.\end{aligned}$$

Donc la limite supérieure J de $\frac{1}{|\varepsilon|}|f(s+\varepsilon)-f(\tau)|$ satisfait à l'inégalité

$$\mathrm{J}\leqq \mathrm{K}\frac{\mathrm{M}_{n-1}(t)}{\mathrm{M}_n(t)}.$$

La limite supérieure de

$$\left|\int \mathrm{K}(s,t)f(t)\,dt\right|=\frac{|\mathrm{K}_{n+1}(s,t)|}{\mathrm{M}_n(t)}$$

est

$$\frac{\mathrm{M}_{n+1}(t)}{\mathrm{M}_n(t)}=i.$$

En nous servant de l'inégalité (6), nous avons

$$\left(\mathrm{K}+\mathrm{K}\frac{\mathrm{M}_{n-1}}{\mathrm{M}_n}\right)\left(\frac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n}\right)^{1+\eta}\geqq(\mathrm{J}+\mathrm{K})i^{1+\eta}\geqq m,$$

où nous avons omis l'argument fixe t des fonctions M.

La dernière inégalité nous donne

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n}&\geqq\left(\frac{m}{\mathrm{K}}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}\left(1+\frac{\mathrm{M}_{n-1}}{\mathrm{M}_n}\right)^{\frac{-1}{1+\eta}}\\ &=\left(\frac{m}{\mathrm{K}}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}\left(\frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-1}}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}\left(\frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-1}}+1\right)^{\frac{-1}{1+\eta}}\geqq\left(\frac{m}{2\mathrm{K}}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}\left(\frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-1}}\right)^{\frac{1}{1+\eta}},\end{aligned}$$

puisque $\frac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-1}}\leqq 1$.

Par l'application successive de cette formule, nous avons

$$\frac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n}\geqq\left(\frac{m}{2\mathrm{K}}\right)^{\frac{1}{1+\eta}+\frac{1}{(1+\eta)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+\eta)^{n-1}}}\left(\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_1}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^{n-1}}}.$$

Or faisons

$$0 < c = \frac{M_2}{M_1} \leqq \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{(1+\eta)^{n-1}}} \leqq 1.$$

On peut ensuite supposer que m est choisi de manière que

$$\frac{m}{2K} \leqq 1,$$

pour qu'on ait

$$\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{1+\eta}+\frac{1}{(1+\eta)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+\eta)^n}} \geqq \left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{1+\eta}\,\frac{1}{1-\frac{1}{1+\eta}}} = \left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}}.$$

Donc

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \geqq \left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}} c$$

et, par conséquent,

$$M_{n+1} > \left[\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}} c\right]^n M_1.$$

Or la quantité $\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}} c$ est plus grande que zéro.

Donc par le premier lemme il est impossible que $K(s, t)$ n'ait pas de constante caractéristique. C'est-à-dire que $K(s, t)$ a au moins une constante caractéristique.

Pour compléter le théorème, il faut démontrer que, si l'on admet que $K(s, t)$ a un nombre fini de constantes caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$, il faut que $K(s, t)$ en ait aussi une autre $\lambda_{\nu+1}$.

Soit $\chi(s, t)$ la partie de $K(s, t)$ relative à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$.

Écrivons

$$K'(s, t) = K(s, t) - \chi(s, t).$$

Il faut démontrer que $K'(s, t)$ a une constante caractéristique.

Le noyau $K'(s, t)$ n'est pas fermé, mais toute fonction $f(s)$, telle que

$$\int \chi(s, t) f(t)\, dt = 0,$$

satisfait à la relation (6).

Les fonctions

$$\frac{K'_1(s,t)}{M'_1(t)},\quad \frac{K'_2(s,t)}{M'_2(t)},\quad \ldots,\quad \frac{K'_n(s,t)}{M'_n(t)},$$

$M'_1(t), M'_2(t), \ldots, M'_n(t), \ldots$ étant les limites supérieures de $K'_1(s,t)$, $K'_2(s,t), \ldots, K'_n(s,t), \ldots$, sont des fonctions appartenant à cette catégorie. Donc, en nous servant du procédé déjà employé, nous pouvons démontrer que

$$M'_1(t) \geqq M'_2(t) \geqq \ldots \geqq M'_n(t) \geqq 0$$

[à moins que $M'_1(t) = 0$]. Nous ne pouvons pas écrire $1 \geqq M'_1(t)$.

En prenant pour $f(s)$ maintenant la fonction $\frac{K'_n(s,t)}{M'_n(t)}$, nous pouvons démontrer, comme auparavant, qu'on a

$$M'_{n+1}(t) \leqq \left[c'\left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}}\right]^n M'_1(t).$$

Il en résulte que $K'(s,t)$ a au moins une constante caractéristique. Le théorème est maintenant établi.

8. Nous remarquons que, si $c'(t), c''(t), c'''(t), \ldots, c^{(\nu)}(t), \ldots$ représentent les valeurs de $\frac{M_2(t)}{M_1(t)}$ relatives aux noyaux qu'on obtient en retranchant successivement de $K(s,t)$ les parties relatives à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$, on a

$$|\lambda_1| \leqq \frac{1}{c'\alpha},\quad |\lambda_2| \leqq \frac{1}{c''\alpha},\quad \ldots,\quad |\lambda_\nu| \leqq \frac{1}{c^{(\nu)}\alpha},$$

où $\alpha = \left(\frac{m}{2K}\right)^{\frac{1}{\eta}}$, et où l'on peut toujours prendre la valeur maximum de $c^{(\nu)}(t)$. Puisque λ_ν tend vers l'infini, il faut que $c^{(\nu)}$ tende vers zéro.

§ 2. — Cas symétrique.

9. Le noyau symétrique a été étudié d'une manière très complète par MM. Hilbert (¹) et Erhard Schmidt (²). Ils ont démontré qu'un tel noyau avait toujours une constante caractéristique et que toutes ses constantes caractéristiques étaient des pôles simples de la résolvante. Le système biorthogonal devient un système orthogonal. M. Hilbert démontre qu'un noyau fermé d'après sa définition a un système orthogonal fermé et par conséquent infini.

Au moyen de la théorie développée dans le Chapitre I, nous pouvons retrouver plusieurs résultats de MM. Hilbert et Schmidt. Nous donnons quelques démonstrations à titre d'exemples.

10. Il est évident d'abord que *toutes les constantes caractéristiques d'un noyau symétrique réel* $K(s, t)$ *sont réelles.* Si

$$\lambda_1 = \lambda' + i\lambda''$$

était une constante caractéristique complexe de $K(s, t)$, et si

$$\varphi_1(s) = \varphi'(s) + i\varphi''(s),$$
$$\varphi_1(t) = \varphi'(t) + i\varphi''(t)$$

étaient une paire de fonctions fondamentales correspondantes, nous aurions aussi la constante conjuguée

$$\lambda_2 = \lambda' - i\lambda''$$

avec sa paire de fonctions

$$\varphi_2(s) = \varphi'(s) - i\varphi''(s),$$
$$\varphi_2(t) = \varphi'(t) - i\varphi''(t).$$

La condition d'orthogonalité est maintenant impossible, car

$$\int \varphi_1(s)\,\varphi_2(s)\,ds = \int \{[\varphi'(s)]^2 + [\varphi''(s)]^2\}\,ds > 0.$$

Donc toutes les constantes caractéristiques sont réelles.

(¹) David Hilbert, *Nach. zu Göttingen*, Heft. I, 1904.
(²) Erhard Schmidt, *Thèse*, Göttingen, 1905.

Les constantes caractéristiques sont des pôles simples de la résolvante. Soit

$$\chi(s,t,\lambda)=\frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1-\lambda}+\frac{\varphi_2(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^2}+\frac{\varphi_3(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^3}+\ldots+\frac{\varphi_n(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^n}$$

la partie de $K(s,t,\lambda)$ relative à λ_1. Je vais démontrer qu'on a identiquement

$$\varphi_2(s,t)=0.$$

Il en résultera qu'on a également

$$\varphi_3(s,t)=\ldots=\varphi_n(s,t)=0.$$

La fonction $\varphi_2(s,t)$ aura la forme

$$\varphi_2(s,t)=\sum_1^p a_{ij}\,\varphi_i(s)\varphi_j(t)$$

avec les conditions

$$\sum_1^p a_{ii}\quad=0,$$

$$\sum_1^p a_{ij}a_{ji}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, nous avons par symétrie

$$a_{ij}=a_{ji}.$$

Donc la seconde condition donne

$$\sum_1^p a_{ij}^2=0$$

et, par conséquent,

$$a_{ij}=0\qquad(i=1,2,\ldots,p;\ s=1,2,\ldots,p).$$

11. Nous pouvons voir facilement que le noyau fermé au sens de M. Hilbert a un nombre infini de constantes caractéristiques, en nous servant du fait que tout noyau symétrique a au moins *une* constante caractéristique (¹). En effet, si $K(s, t)$ avait un nombre fini de constantes caractéristiques, on pourrait écrire

$$K(s, t) = \frac{\varphi_1(s)\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s)\varphi_2(t)}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n} + \varphi_0(s, t),$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas nécessairement distinctes. La fonction $\varphi_0(s, t)$ sera un noyau sans constante caractéristique et, par conséquent, on a identiquement

$$\varphi_0(s, t) = 0.$$

Il est évident maintenant que le noyau

$$K(s, t) = \frac{\varphi_1(s)\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s)\varphi_2(t)}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

n'est pas fermé. Donc la proposition est démontrée.

Il faut remarquer que nous avons considéré seulement le cas *réel;* lorsqu'un noyau symétrique n'est pas réel, les propositions précédentes ne sont plus exactes.

12. Les noyaux de la forme $K(s, t)\,p(t)$, où $K(s, t)$ est symétrique, ont une très grande importance en Physique mathématique. M. Schmidt démontre qu'on peut les ramener au cas symétrique réel lorsque la fonction $p(t)$ garde toujours le même signe. Si nous écrivons

$$K'(s, t) = K(s, t)\sqrt{p(s)p(t)}, \qquad \varphi'(s) = \varphi(s)\sqrt{p(s)},$$

l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) - \lambda\int K(s, t)p(t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

devient

$$\varphi'(s) - \lambda\int K'(s, t)\,\varphi'(t)\,dt = f(s)\sqrt{p(s)},$$

(¹) ERHARD SCHMIDT, *loc. cit.* — ADOLF KNESER, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, juillet 1906.

et nous avons à considérer le noyau $K'(s, t)$ seulement. Lorsque la fonction $p(s)$ change de signe, le noyau $K'(s, t)$ est complexe et la transformation n'est pas utile. Il sera intéressant d'illustrer ces faits par un exemple. Cet exemple démontrera, en particulier, qu'un noyau de la forme $K(s, t)p(t)$ peut avoir une résolvante avec des pôles multiples lorsque $p(t)$ ne garde pas le même signe.

Nous allons prendre le noyau

$$\begin{aligned} K(s, t) = {} & \varphi_1(s)\psi_1(t) + \varphi_2(s)\psi_2(t) \\ & + \alpha[\varphi_1(s) - \beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t) + \psi_2(t)], \end{aligned}$$

dont la résolvante a un pôle double $\lambda_1 = 1$; nous nous demandons si ce noyau peut avoir la forme

$$K'(s, t)p(t),$$

où $K'(s, t)$ est symétrique. Pour cela, il faut que la fonction

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} p(s)K(s, t) = {} & (1 + \alpha\beta)\varphi_1(s)p(s)\psi_1(t) \\ & + (1 - \alpha\beta)\varphi_2(s)p(s)\psi_2(t) \\ & + \alpha\varphi_1(s)p(s)\psi_2(t) - \alpha\beta^2\varphi_2(s)p(s)\psi_1(t) \end{aligned} \right.$$

soit symétrique. Il existe donc deux relations comme

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(s)p(s) &= a\psi_1(s) + b\psi_2(s), \\ \varphi_2(s)p(s) &= b'\psi_1(s) + c\psi_2(s). \end{aligned} \right.$$

On obtient les valeurs des coefficients a, b, b', c en considérant les propriétés biorthogonales de $\varphi_1(s)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_2(s)$, $\psi_2(t)$; on a

$$\begin{aligned} a &= \int [\varphi_1(s)]^2 p(s)\,ds = k_1, \\ b = b' &= \int \varphi_1(s)\varphi_2(s)p(s)\,ds = k', \\ c &= \int [\varphi_2(s)]^2 p(s)\,ds = k_2, \end{aligned}$$

et nous sommes conduit aux relations

$$(9)\qquad \begin{cases} \psi_1(s) = \frac{1}{J^2} p(s)\left[k_2 \varphi_1(s) - k' \varphi_2(s)\right|, \\ \psi_2(s) = \frac{1}{J^2} p(s)\left[k' \varphi_1(s) - k_1 \varphi_2(s)\right|, \end{cases}$$

où

$$J = +\sqrt{k'^2 - k_1 k^2}.$$

Enfin, pour que (7) soit symétrique, il faut, en substituant (8) dans (7), que les coefficients de $\psi_1(s)\psi_2(t)$ et de $\psi_2(s)\psi_1(t)$ soient égaux.

C'est-à-dire

$$(1 - \alpha\beta)b + \alpha a = (1 + \alpha\beta)b - \alpha\beta^2 c,$$

$$a - 2\beta b + \beta^2 c = 0,$$

$$(10)\qquad k_2\beta^2 - 2k'\beta + k_1 = 0.$$

Donc β doit être une racine d'une équation quadratique si l'on suppose que $\alpha \neq 0$. On a

$$\beta = \frac{1}{k_2}\left(k' \pm \sqrt{k'^2 - k_1 k_2}\right) = \frac{1}{k_2}(k' \pm J).$$

Donc il est toujours possible d'avoir une valeur réelle de β, pourvu que

$$k'^2 \geqq k_1 k_2.$$

Mais, dans le cas où $p(t) \geqq 0$, il sera impossible d'avoir une valeur réelle de β; car considérons l'intégrale

$$\int \left| l\varphi_1(s) + m\varphi_2(s)\right|^2 p(s)\, ds > 0.$$

On a, quel que soit l, m,

$$l^2 k_1 + 2lmk' + m^2 k_2 > 0.$$

Donc

$$k'^2 < k_1 k_2.$$

§ 3. — Développements en séries de fonctions fondamentales.

13. Nous avons vu que les fonctions fondamentales d'un noyau quelconque formaient un système biorthogonal

$$(11)\qquad \begin{cases} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \ldots, & \varphi_n(s), & \ldots, \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \ldots, & \psi_n(t), & \ldots. \end{cases}$$

Il est facile de démontrer que les fonctions de la première ligne d'un système biorthogonal quelconque sont linéairement indépendantes. Admettons qu'il existe pour le système (11) une relation

$$a_1\varphi_1(s) + a_2\varphi_2(s) + \ldots + a_k\varphi_k(s) = 0.$$

Nous multiplions par $\psi_1(s)$ et nous intégrons. Nous aurons ainsi, à cause des relations

$$\begin{aligned} \int \varphi_m(s)\psi_n(s)\,ds &= 1 \qquad \text{si} \qquad m = n, \\ &= 0 \qquad \text{si} \qquad m \neq n, \end{aligned}$$

le résultat

$$a_1 = 0$$

et, de même,

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0.$$

Donc les fonctions

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \quad \ldots, \quad \varphi_k(s)$$

sont indépendantes. Les fonctions

$$\psi_1(t), \quad \psi_2(t), \quad \ldots, \quad \psi_k(t)$$

sont également indépendantes.

14. A la fin du premier Chapitre, nous avons indiqué plusieurs développements qui sont valables dans le cas de convergence uniforme. Si nous savons qu'une fonction est développable suivant une série uniformément convergente de fonctions continues indépendantes

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s),\quad \ldots,\quad \varphi_n(s),\quad \ldots,$$

nous pouvons déterminer les coefficients. Soit

$$f(s) = a_1\varphi_1(s) + a_2\varphi_2(s) + \ldots + a_n\varphi_n(s) + \ldots \tag{12}$$

le développement, et soit

$$\psi_1(t),\quad \psi_2(t),\quad \ldots,\quad \psi_n(t),\quad \ldots$$

une suite de fonctions continues biorthogonales à la suite de φ. On aura

$$a_n = \int f(t)\,\psi_n(s)\,ds.$$

Dans le cas où le système biorthogonal est fermé par rapport à t, c'est-à-dire dans le cas où il n'existe aucune fonction continue $g(s)$ telle que

$$\int g(s)\,\psi_n(s)\,ds = 0$$

pour toute valeur de n, nous voyons facilement que la série (12) représentera une fonction continue *arbitraire* $f(s)$, pourvu qu'elle soit uniformément convergente.

Écrivons

$$\varphi_0(s) = f(s) - \sum_1^\infty a_n\varphi_n(s).$$

Nous avons

$$\int \psi_m(s)\,\varphi_0(s)\,ds = \int \psi_m(s)\,f(s)\,ds - \sum_1^\infty a_n \int \varphi_n(s)\,\psi_m(s)\,ds = a_m - a_m = 0$$

pour toute valeur de m. Donc

$$\varphi_0(s) = 0.$$

Nous ne pouvons pas déterminer dans le cas général si la convergence uniforme a lieu; mais MM. Hilbert (1) et Erhard Schmidt (2) ont pu approfondir la question dans le cas symétrique.

Ils ont démontré que toute fonction $g(s)$ qui a pour expression

$$g(s) = \int K(s, t) h(t) dt,$$

$h(t)$ étant une fonction continue, se développe en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $K(s, t)$. Si $K(s, t)$ est un noyau tel qu'on peut faire tendre vers zéro l'expression

$$\int \left[g(s) - \int K(s, t) h(t) dt \right]^2 ds = \varepsilon,$$

en choisissant convenablement la fonction continue $h(t)$, où $g(s)$ est une fonction continue quelconque, il sera toujours possible de développer $g(s)$ en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $K(s, t)$.

M. Poincaré a démontré la convergence uniforme dans beaucoup de cas qui interviennent en Physique mathématique.

15. De ce qui précède, il est évident que la question du développement en série de fonctions fondamentales est étroitement liée avec la question de la solution de l'équation intégrale de première espèce

$$g(s) = \int K(s, t) \varphi(t) dt, \tag{13}$$

où $g(s)$ est une fonction connue, et il s'agit de déterminer $\varphi(t)$. M. Bateman (3) a démontré un théorème qui est l'inverse de celui de M. Hilbert : *Si $g(s)$ est développable en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $K(s, t)$, l'équation (13) aura la solution*

$$\varphi(t) = 2 \int^{\infty} F(t, x) dx,$$

(1) *Loc. cit.*
(2) *Loc. cit.*
(3) H. Bateman, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1906.

où $F(t, x)$ est la fonction entière de x, représentée par la série

$$\begin{aligned}F(t,x) = {} & x\int K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \\ & -\frac{x^3}{3!}\int\int\int K(t,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)K(\tau_2,\tau_3)f(\tau_3)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 \\ & +\frac{x^5}{5!}\int\int\int\int\int K(t,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)K(\tau_2,\tau_3)K(\tau_3,\tau_4)K(\tau_4,\tau_5) \\ & \times f(\tau_5)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3\,d\tau_4\,d\tau_5 - + \ldots.\end{aligned}$$

Lorsque le noyau $K(s, t)$ n'est pas symétrique, M. Bateman trouve une solution de l'équation (13) dans le cas où $g(s)$ est développable en série de fonctions fondamentales du noyau symétrique

$$g(s, t) = \int K(s, \tau)K(t, \tau)\,d\tau.$$

Mais la méthode de M. Bateman pour le noyau symétrique s'applique directement au noyau asymétrique lorsque les constantes caractéristiques sont réelles et qu'elles sont des pôles simples de la résolvante.

La solution de (13) est unique seulement lorsque $K(s, t)$ est fermé par rapport à t. Dans les autres cas, nous pouvons ajouter à la solution particulière $h_0(s)$, trouvée par la méthode de M. Bateman ou autrement, une fonction continue quelconque $h_1(s)$ qui satisfait à

$$\int K(s, t)h_1(t)\,dt = 0.$$

Ainsi nous aurons

$$h(s) = h_0(s) + h_1(s).$$

On peut en donner des exemples :

Soit

$$\begin{array}{lllll}\varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \ldots, & \varphi_n(s), & \ldots, \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \ldots, & \psi_n(t), & \ldots\end{array}$$

un système biorthogonal fermé par rapport à t.

Considérons le noyau

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{j=i_1}^{j=i_p} a_{ij} \varphi_i(s) \psi_j(t),$$

série que nous supposons aussi uniformément convergente.

Soit

$$g(s) = \sum_{i=1}^{i=\infty} b_i \varphi_i(s),$$

série que nous supposons aussi uniformément convergente.

Dans l'équation

$$g(s) = \int K(s, t) \varphi(t)\, dt,$$

nous égalons les coefficients de $\varphi_i(s)$ dans les deux membres

$$(14) \qquad b_i = \sum_{j=i_1}^{j=i_p} a_{ij} \int \psi_j(t) \varphi(t)\, dt.$$

Supposons qu'une solution continue $\varphi(t)$ existe; mettons

$$\varphi(t) = \alpha_i \varphi_i(t) + \alpha_{i_2} \varphi_{i_2}(t) + \ldots + \alpha_{i_p} \varphi_{i_p}(t) + \varphi_i'(t),$$

où $\varphi_i'(t)$ est orthogonale à $\psi_{i_1}(t)$, $\psi_{i_2}(t)$, $\ldots$, $\psi_{i_p}(t)$; c'est-à-dire qu'on a

$$\alpha_{i_1} = \int \varphi(t) \psi_{i_1}(t)\, dt,$$
$$\alpha_{i_2} = \int \varphi(t) \psi_{i_2}(t)\, dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\alpha_{i_p} = \int \varphi(t) \psi_{i_p}(t)\, dt.$$

Donc, en écrivant l'équation (14) pour $i = i_1, i_2, \ldots, i_p$, nous aurons les équations

$$b_{i_1} = a_{i_1 i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_1 i_2} \alpha_{i_2} + \ldots + a_{i_1 i_p} \alpha_{i_p},$$
$$b_{i_2} = a_{i_2 i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_2 i_2} \alpha_{i_2} + \ldots + a_{i_2 i_p} \alpha_{i_p},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$b_{i_p} = a_{i_p i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_p i_2} \alpha_{i_2} + \ldots + a_{i_p i_p} \alpha_{i_p}.$$

Or, nous savons que le déterminant (Chap. I, § 3)

$$\| a_{i_p i_p} \| = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Par conséquent, les coefficients $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_p}$ sont déterminés. Nous pouvons déterminer les autres coefficients analogues

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots,$$

et nous aurons

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(t) + \ldots + \varphi'(t),$$

où $\varphi'(t)$ est orthogonale à $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t), \ldots$, et, par conséquent,

$$\varphi'(t) = 0,$$

pourvu que cette série soit uniformément convergente. Nous aurons déterminé une solution de l'équation (13), et cette solution sera unique.

16. Dans le cas où les constantes caractéristiques de $K(s, t)$ sont des pôles simples de la résolvante, nous pourrons écrire

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(s) \psi_i(t),$$

et la solution sera

$$\varphi(t) = b_1 \lambda_1 \varphi_1(t) + b_2 \lambda_2 \varphi_2(t) + \ldots + b_n \lambda_n \varphi_n(t) + \ldots.$$

Prenons maintenant le noyau

$$K(s, t) = a \varphi_1(s) \psi_1(t) + b \varphi_2(s) \psi_2(t) + c \varphi_3(s) \psi_3(t),$$

dont les fonctions fondamentales sont

$$\begin{gathered} \varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \\ \psi_1(t), \quad \psi_2(t). \end{gathered}$$

Il y aura une solution de (13) pourvu que $g(s)$ ai la forme

$$g(s) = a'\varphi_1(s) + b'\varphi_2(s) + c'\varphi_3(s)$$

et dans ce cas seulement. La solution sera

$$\varphi(s) = \frac{a'}{a}\varphi_1(s) + \frac{b'}{b}\varphi_2(s) + \frac{c'}{c}\varphi_3(s).$$

Elle ne sera pas unique, puisque nous pouvons ajouter à cette expression une fonction linéaire quelconque de

$$\varphi_3(s), \quad \varphi_5(s), \quad \ldots, \quad \varphi_n(s), \quad \ldots,$$

qui sont les solutions de

$$\int K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0.$$

17 Remarquons enfin que l'équation intégrale de première espèce

$$\int K(s, t)\varphi(t)\,dt = g(s)$$

peut être regardée comme le cas limite de l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) + \lambda\int K(s, t)\varphi(t)\,dt = \lambda g(s),$$

lorsque λ tend vers l'infini. Si la solution de la dernière équation tend vers une fonction intégrable lorsque λ tend vers l'infini d'une manière convenable, la limite de $\varphi(s)$ sera une solution de la première équation. Les solutions de l'équation

$$\int K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

seront les solutions fondamentales relatives à $\lambda = \infty$.