

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TRAJAN LALESCO

Sur l'équation de Volterra

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 4 (1908), p. 125-202.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__125_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur l'équation de Volterra;***PAR M. TRAJAN LALESCO.**

Licencié ès sciences.

INTRODUCTION.

Le présent travail a pour but de développer et compléter en certains points les belles recherches de M. Volterra ⁽¹⁾ sur l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \int_a^{x'} f(x, s) \varphi(s) ds = F(x)$$

et sur des équations analogues où l'une au moins des limites de l'intégrale est variable; $\varphi(s)$ désigne la fonction inconnue.

Ces recherches ont été le point de départ de la grande extension qu'a prise dans les derniers temps le calcul fonctionnel surtout avec l'introduction de l'équation fonctionnelle de Fredholm. Les beaux résultats de M. J. Fredholm ont été obtenus par un passage à la limite d'un problème d'Algèbre; or, cette idée fondamentale est exactement

⁽¹⁾ V. VOLTERRA, *Sulla inversione degli integrali definiti* (*Atti della reale Accademia delle Scienze di Torino*, 12 janvier, 8 mars, 26 avril 1896, p. 311, 400, 557, 693).

Voir aussi *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei* (1^{er} semestre 1896, p. 177, 289).

celle qui a conduit M. V. Volterra à ses résultats et elle se trouve indiquée dans la première de ses quatre Notes publiées dans les *Atti della reale Accademia del Torino*. C'est un point qu'il était utile de signaler.

L'équation (1) a une importance incontestable, grâce à ses nombreuses applications dans la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles et partant dans la Physique mathématique; d'autre part, c'est un instrument analytique nouveau, irréductible à ceux dont l'Analyse était déjà douée. En effet, si le noyau $f(x, s)$ est un polynôme en x de degré n , il est facile de montrer que la résolution de l'équation fonctionnelle (1) revient à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n avec des conditions initiales données; si l'on restait donc dans cette hypothèse, l'introduction de l'équation (1) ne serait justifiée que par certaines considérations de commodité. Mais on sait que M. V. Volterra a étudié le cas général où $f(x, s)$ est une fonction de deux variables réelles très générale; en prenant seulement le cas où la fonction $f(x, s)$ est une fonction analytique entière en x d'ordre plus petit que 1, nous montrerons que la résolution de l'équation (1) revient à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre *infini*, avec des conditions initiales données, et cette circonstance nous rend compte en quelque sorte de « l'équivalence », dans le domaine actuel de l'Analyse, de cette équation fonctionnelle.

C'est en raison de cette importance et des profondes recherches que M. V. Volterra a publiées à ce sujet que nous désignerons, dans ce travail (à l'exemple de notre maître, M. E. Picard), l'équation fonctionnelle (1) sous le nom de *l'équation de Volterra*.

La méthode suivie par M. V. Volterra a obligé l'auteur, une fois les résultats trouvés, de se contenter simplement d'une vérification, ce qui est d'ailleurs aussi le cas de M. J. Fredholm, et pour la même raison; en posant *a priori* les solutions et les conditions de possibilité du problème dans les divers cas qu'il examine, M. V. Volterra démontre qu'elles satisfont bien à l'équation fonctionnelle considérée. Cette méthode de vérification ne permet pas de voir dans la nature intime de la question et conduit parfois à des calculs fastidieux, surtout dans le cas général où le noyau $f(x, s)$ s'annule pour $x = s = 0$.

En examinant de plus près la solution de M. V. Volterra, on reconnaît qu'elle dépend d'un mécanisme d'approximations successives; c'est ce mécanisme que M. E. Picard a mis en évidence en montrant avec quelle élégante simplicité on retrouve les résultats de M. V. Volterra, si l'on applique franchement les approximations successives. M. E. Picard (1) a ainsi traité le cas où le noyau étant fini dans un intervalle réel donné ne s'annule pas identiquement pour $s = x$ et celui où le noyau pouvant devenir infini est de la forme

$$f(x, s) = \frac{G(x, s)}{(x-s)^\lambda} \quad (0 < \lambda < 1),$$

la fonction $G(x, s)$ n'étant pas identiquement nulle pour $x = 0$.

Dans ce travail nous appliquons directement la méthode des approximations successives au cas général où l'on a

$$f(x, s) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} s + \dots + A_0 s^n + f_1(x, s),$$

$f_1(x, s)$ étant une fonction dont tous les termes sont de degré supérieur à n en x et s . Par notre méthode, la solution de ce problème dépend de l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n et d'un mécanisme d'approximations successives. Si l'on fait l'hypothèse de $A_0 + A_1 + \dots + A_n \neq 0$ qui est implicitement admise dans les recherches de M. V. Volterra, cette équation différentielle linéaire d'ordre n est du type de Fuchs par rapport à $x = 0$, et c'est l'équation déterminante de l'origine qui joue naturellement le rôle essentiel dans le développement de la solution et qui s'introduit ainsi d'une façon toute naturelle; nous démontrons facilement qu'elle se réduit d'ailleurs à l'équation

$$\frac{A_0}{\lambda-1} + \dots + \frac{A_n}{\lambda-n+1} = 0,$$

qui a été donnée par M. Volterra.

Un théorème important, qui complète celui de M. V. Volterra, a été

(1) E. PICARD, *Sur une équation fonctionnelle* (*Comptes rendus*, t. CXXXIX, 1904, p. 245).

obtenu par M. E. Holmgren (1), par des calculs laborieux; nous l'établissons sans peine, en approfondissant davantage les conditions du problème et étudiant aussi le cas des racines nulles.

L'hypothèse de $A_0 + A_1 + \dots + A_n = 0$ n'a pas été examinée par M. V. Volterra; dans ce cas le problème devient beaucoup plus difficile, car il dépend de l'intégration d'une équation différentielle linéaire qui peut admettre des intégrales irrégulières. En examinant d'une façon complète le cas de $n = 1$, nous trouvons un résultat qui conduit, dans une hypothèse particulière, à un énoncé dû également à M. E. Holmgren.

Pour le cas d'un noyau de la forme $\frac{G(x, s)}{(x-s)^k}$ nous avons conservé le fameux artifice d'Abel employé par M. V. Volterra et nous avons examiné le cas général. Nous avons traité aussi les divers autres cas considérés par M. V. Volterra.

Ainsi l'équation

$$\int_{p.x}^{q.x} f(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

où p et q sont des constantes données telles que $\left| \frac{p}{q} \right| \neq 1$, est résolue en appliquant une méthode due à M. E. Picard (2), pour une équation fonctionnelle rencontrée dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et avec laquelle elle a beaucoup d'analogie. Il est vrai qu'on peut réduire cette équation à l'équation (1), par un artifice souvent employé dans ce genre de questions, en prenant un noyau égal à $f(x, s)$ pour s compris entre $p.x$ et $q.x$ ($p > q$) et à 0 pour $0 < s < p.x$. Mais l'équation (1) sur laquelle nous tombons n'entre dans aucune des catégories étudiées par M. Volterra et c'est pour cela qu'on doit l'étudier directement.

Les systèmes de n équations de Volterra simultanées à n fonctions inconnues et les équations de Volterra à n variables indépendantes peuvent être aussi traités avec une grande simplicité par la méthode

(1) E. HOLMGREN, *Sur un théorème de M. V. Volterra sur l'inversion des intégrales définies* (extrait d'une lettre adressée à M. V. Volterra) (*Atti della reale Accademia del Torino*, t. XXXV, 1900, p. 570).

(2) E. PICARD, *Comptes rendus*, 13 mai 1907, p. 1009.

des approximations successives, et nous l'avons indiqué en examinant avec quelque détail le cas de $n = 2$. Nous avons pris comme application l'étude du cas $\frac{p}{q} = -1$ qui n'avait pas été étudié et qui nous a conduit à un résultat intéressant.

Nous nous sommes aussi occupé d'une généralisation de l'équation de Volterra, due à M. E. Burgatti (¹). Il s'agit de l'équation

$$\int_0^x \left[f_0(x, s) \varphi(s) + f_1(x, s) \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s} + \dots + f_n(x, s) \frac{\partial^n \varphi(s)}{\partial s^n} \right] ds = F(x)$$

et nous avons montré qu'elle peut se réduire facilement à une équation de Volterra proprement dite, en donnant un résultat général à ce sujet.

Enfin, l'étude de l'équation de Volterra non linéaire est de beaucoup plus compliquée dans le cas général. Pour le type d'équations

$$\varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)] ds = F(x),$$

qui contient linéairement la fonction inconnue en dehors du signe d'intégration, la méthode des approximations réussit complètement et nous donne un résultat général contenant celui obtenu par M. E. Picard pour l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, qui en est un cas particulier.

Dans la seconde Partie, nous démontrerons qu'une équation de Volterra, à noyau fonction entière de x d'ordre plus petit que 1, équivaut à une équation différentielle linéaire d'ordre infini d'un type spécial, correspondant à un système déterminé d'équations différentielles linéaires d'ordre infini à une infinité de fonctions inconnues. Ce système a effectivement une infinité de solutions linéairement indépendantes et l'intégration d'une équation déterminée de Volterra revient à l'intégration d'un pareil système avec des conditions initiales qui déterminent complètement la solution; celle-ci sera donc, en général, une fonction multiforme à une infinité de branches. Nous avons vérifié ce résultat directement sur la solution donnée par M. Volterra,

(¹) E. BURGATTI, *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei*, 2^e semestre 1903, p. 443, 596.

en passant dans le domaine des variables complexes. La solution de l'équation de Volterra est dans ce cas une fonction multiforme, ayant en général une infinité de branches et dont les points critiques, en général transcendants et de première espèce (¹), sont les racines d'une certaine fonction entière. Cette fonction entière est justement le coefficient de la dérivée dont l'indice augmente indéfiniment dans l'équation différentielle linéaire d'ordre infini équivalente, ce qui nous semble être une circonstance remarquable mettant en évidence une analogie, au point de vue des singularités, entre les cas des ordres fini et infini.

Comme cas particulier du précédent, les équations différentielles linéaires d'ordre fini pourront être toujours transformées dans des équations de Volterra appartenant au type simple, de sorte que nous obtenons, par la méthode des approximations successives, un développement pour leurs intégrales, qui sera valable dans tout leur domaine d'existence. Cette méthode se rattache à celle dont l'origine est due à Cauchy et qui a été développée par MM. E. Picard, L. Fuchs, H. Poincaré, etc.

L'hypothèse que nous avons faite sur le noyau de l'équation de Volterra revient à une hypothèse analogue sur ce que nous avons appelé *la fonction génératrice de l'équation différentielle linéaire d'ordre infini*. Nous avons montré, en terminant, le rôle que semble devoir jouer cette hypothèse dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre infini; lorsqu'elle n'est pas remplie, ces équations peuvent admettre des solutions analytiques qui ne satisfont pas aux équations dans tout leur domaine d'existence. Un exemple bien simple de pareilles intégrales que nous avons appelées *impropres* est donné par la fonction $\Gamma(x)$ qui vérifie l'équation

$$(1-x)y + \frac{dy}{dx} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n y}{dx^n} + \dots = 0.$$

Cette équation est du type de Laplace; en lui appliquant la transformation de Laplace, on obtient directement ses solutions propres sous forme d'intégrales définies et aussi l'expression de la solution impropre $\Gamma(x)$ par l'intégrale définie bien connue.

(¹) Suivant une classification due à M. P. Boutroux.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Considérons l'équation de Volterra

$$(1) \quad \int_{\alpha}^x f(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

où $\varphi(s)$ désigne la fonction inconnue. Nous appellerons dans ce qui suit la fonction de deux variables $f(x, s)$ le *noyau* de l'équation (1), et nous supposons pour fixer les idées les fonctions $f(x, s)$ et $F(x)$ *analytiques* de leurs arguments; nous montrerons ensuite que les résultats obtenus restent vrais si les variables sont réelles, dans des conditions beaucoup plus larges qu'il sera facile de déterminer; α désigne une constante arbitraire.

Le type simple : $f(0, 0) \neq 0$.

2. Supposons d'abord la fonction analytique $f(x, s)$ régulière dans le domaine du point $x = \alpha$ et $s = \alpha$, et proposons-nous de déterminer une solution de (1) qui soit aussi régulière dans le domaine du point $s = \alpha$. Pour que le problème soit possible, il est évident que nous devons avoir $F(\alpha) = 0$; la fonction $F(x)$ doit donc être régulière et s'annuler au point $x = \alpha$. M. Volterra la met parfois sous la forme

$$F(x) - F(\alpha).$$

Soit

$$(2) \quad f(x, s) = a_0(s) + a_1(s) \frac{s-x}{1} + \dots + a_n(s) \frac{(s-x)^n}{n!} + \dots$$

le développement du noyau, où l'on a mis en évidence les factorielles dans chaque terme, seulement pour faciliter l'écriture dans ce qui va suivre.

de $a_0(x)$ et aux points singuliers de $F(x)$ et $f_1(x, s)$ les plus rapprochés du point α .

Tous les termes de la série (3) ont ainsi un sens parfaitement déterminé pour toute valeur de x située à l'intérieur du cercle C, et l'on peut démontrer avec facilité que, pour tout point x situé à l'intérieur du cercle C, la série (3) est une fonction entière de λ et qui, par conséquent, convergera absolument et uniformément dans tout intervalle fini de λ .

En effet, soit m le minimum de $a_0(x)$ à l'intérieur du cercle C; on a sûrement $m \neq 0$, d'après la définition même du cercle C. Soient, d'autre part, k et μ les modules maxima de $F(x)$ et $f_1(x, s)$ dans le même domaine C; on a évidemment les inégalités

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x)| &< \frac{k}{m}, \\ |\varphi_1(x)| &< \frac{k}{m} \frac{\mu}{m} (x - \alpha), \\ |\varphi_2(x)| &< \frac{k}{m} \frac{\mu^2}{m^2} \frac{(x - \alpha)^2}{1 \cdot 2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ |\varphi_n(x)| &< \frac{k}{m} \frac{\mu^n}{m^n} \frac{(x - \alpha)^n}{1 \cdot 2 \dots n}, \end{aligned}$$

ce qui nous montre bien que la série (3) est une série entière en λ d'ordre au plus égal à 1, pour toute valeur de x située à l'intérieur du cercle C. Nous avons ainsi obtenu une fonction de x parfaitement déterminée à l'intérieur du cercle C et qui satisfait formellement l'équation (2); mais d'autre part le développement (3) y est absolument convergent en λ , d'où il résulte que la fonction $\varphi(x)$ définie par le développement (3) est bien une solution de l'équation (2).

On peut montrer que cette solution est unique *si x est compris à l'intérieur du cercle C*. En effet, donnons-nous d'abord un chemin d'intégration bien déterminé, par exemple un rayon du cercle C; s'il y avait une seconde solution régulière au point a différente de $\varphi(x)$, l'équation (2), sans second membre,

$$(6) \quad a_0(x)\varphi(x) + \int_{\alpha}^x f_1(x, s)\varphi(s)ds = 0,$$

aurait une solution non identiquement nulle et il est facile de voir que cela est impossible. Pour cela, remarquons que des relations (5) et (6) on déduit

$$a_0(x)[\varphi(x) - \varphi_n(x)] = - \int_a^x f_1(x, s)[\varphi(s) - \varphi_n(s)] ds.$$

On obtient donc des relations identiques aux formules (4), où l'on doit seulement remplacer $\varphi_n(x)$ par

$$\varphi(x) - \varphi_n(x).$$

En vertu du raisonnement précédent, il en résulte que l'expression

$$\lambda^n[\varphi(x) - \varphi_n(x)]$$

est le terme général d'une série, fonction entière de λ , et par conséquent on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \varphi_n(x)] = 0,$$

d'où

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0.$$

L'équation (2), sans second membre, n'admet donc aucune autre solution régulière en α que la solution identiquement nulle. Prenons maintenant un autre chemin situé tout à l'intérieur du cercle C et aboutissant au point x ; il est évident que la solution donnée par la formule (3) n'a pas changé, car chacun de ses termes est une intégrale dont la valeur est restée inaltérée par la déformation du chemin d'intégration. La solution est bien unique (1) dans le cercle C .

On remonte ensuite de l'équation (2) à (1) par une intégration qui n'introduit pas de constante arbitraire, car $F(\alpha) = 0$. Nous avons ainsi démontré le premier théorème de M. Volterra :

Si $f(\alpha, \alpha) \neq 0$, l'équation de Volterra (1) admet une solution, et une seule, régulière au point α .

(1) Pour le cas des variables réelles la première partie est suffisante, car le chemin d'intégration reste toujours le même; dans le domaine complexe cela n'est pas suffisant, et nous verrons la portée de cette remarque dans la seconde Partie de notre travail.

Elle sera sûrement régulière dans le cercle de centre x ayant pour rayon la plus petite des distances du point x aux zéros de $a_0(x)$ et aux singularités de $F(x)$ et $f(x, s)$.

3. On peut retrouver sans aucune difficulté la formule même donnée par M. V. Volterra; il suffit de remplacer les approximations tirées tout au long des formules (4). Nous obtenons ainsi, en ayant soin d'appliquer la formule de Dirichlet où il y a lieu et posant, pour abréger,

$$\frac{f_1(x, s)}{a_0(x)} = \pi_1(x, s),$$

$$\varphi_1(x) = - \int_x^{x'} \pi_1(x, \sigma) \varphi_0(\sigma) d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= (-1)^2 \int_x^{x'} \pi_1(x, s) ds \int_x^{x'} \pi_1(s, \sigma) \varphi_0(\sigma) d\sigma \\ &= (-1)^2 \int_x^{x'} \varphi_0(\sigma) d\sigma \int_\sigma^{x'} \pi_1(x, s) \pi_1(s, \sigma) ds \\ &= (-1)^2 \int_x^{x'} \pi_2(x, \sigma) \varphi_0(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

et, en général,

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= (-1)^n \int_x^{x'} \pi_1(x, s) ds \int_x^{x'} \pi_{n-1}(s, \sigma) \varphi_0(\sigma) d\sigma \\ &= (-1)^n \int_x^{x'} \varphi_0(\sigma) d\sigma \int_\sigma^{x'} \pi_1(x, s) \pi_{n-1}(s, \sigma) ds \\ &= (-1)^n \int_x^{x'} \pi_n(x, \sigma) \varphi_0(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

où l'on a d'une façon générale

$$\pi_n(x, y) = \int_y^{x'} \pi_1(x, s) \pi_{n-1}(s, y) ds.$$

Donc, en posant

$$\pi(x, s) = -\pi_1(x, s) + \pi_2(x, s) + \dots + (-1)^n \pi_n(x, s) + \dots,$$

on voit que la solution de l'équation (1) est donnée par la formule

$$(7) \quad \varphi(x) = \frac{1}{a_0(x)} \left[F'(x) + \int_x^{x'} \frac{\pi(x, s) F'(s) ds}{a_0(s)} \right]$$

qui, aux notations près, est justement la formule de M. Volterra.

4. Un cas particulier présentant un intérêt à la fois pratique et historique est celui où le noyau est de la forme $f(x - s)$. Dans ce cas, $\alpha_0(s)$ se réduit à une constante qu'on peut supposer être égale à l'unité. On aura donc, dans ce cas,

$$\pi_1(x - s) = f_1(x - s),$$

$$\pi_2(x - s) = \int_s^x f_1(x - \sigma) f(\sigma - s) d\sigma$$

et, en général,

$$\pi_n(x - s) = \int_s^x f_1(x - \sigma) \pi_{n-1}(\sigma - s) d\sigma.$$

Si l'on fait la transformation de coordonnées $\sigma - s = t$, on obtient

$$\pi_n(x - s) = \int_0^{x-s} f_1(x - s - t) \pi_{n-1}(t) dt;$$

on a donc

$$\pi_n(u) = \int_0^u f_1(u - t) \pi_{n-1}(t) dt$$

et, par conséquent,

$$\pi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^u f_1(u - t) \pi_{n-1}(t) dt,$$

et l'on a, par conséquent, dans ce cas, la formule plus simple

$$(8) \quad \varphi(x) = F(x) + \int_0^x \pi(x - s) F'(s) ds.$$

Ce calcul s'applique évidemment si, plus généralement, on avait un noyau fonction de la combinaison $\lambda(x) - \lambda(s)$ (1).

Le cas de $f(0, 0) = 0$.

3. Jusqu'ici, l'hypothèse $\alpha_0(x) \neq 0$, pour $x = \alpha$, a été essentielle. Il faut maintenant nous affranchir de cette hypothèse et examiner le

(1) Voir V. VOLTERRA, *Annali di Matematica*, 1897, p. 154.

et

$$(10') \quad \begin{cases} |a_0(x)\varphi(x)|^{(n)} - |a_1(x)\varphi(x)|^{(n-1)} + \dots \\ + (-1)^n |a_n(x)\varphi(x)| = F^{(n+1)}(x). \end{cases}$$

Nous avons ainsi déduit de (1), par $n + 1$ dérivations successives, une équation différentielle linéaire d'ordre n qui est l'équation adjointe de

$$(10'') \quad \begin{cases} a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots \\ + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = F^{(n+1)}(x). \end{cases}$$

Réciproquement, supposons que $\varphi(x)$ soit une solution de l'équation (10') et qu'elle satisfasse aux n relations (10) où l'on fait $x = 0$; on pourra, par n intégrations successives, remonter de (10') à (1) et, par conséquent, la fonction $\varphi(x)$ sera bien, dans ces conditions, une solution de l'équation fonctionnelle (1). Or les relations (10), où l'on fait $x = 0$, sont n relations linéaires entre la valeur de $\varphi(x)$ et de ses $n - 1$ premières dérivées, pour $x = 0$. Si nous désignons par y_0, y_1, \dots, y_{n-1} ces valeurs, les relations (10) deviennent, pour $x = 0$,

$$(11) \quad \begin{cases} a_0 y_0 = F'(0), \\ a_0 y_1 + (a_0' - a_1) y_0 = F''(0), \\ \dots \\ a_0 y_k + (ka_0' - a_1) y_{k-1} + \dots \\ + (a_0^{(k)} - a_1^{(k-1)} + \dots + a_k) y_0 = F^{(k+1)}(0), \\ \dots \\ a_0 y_{n-1} + [(n-1)a_0' - a_1] y_{n-2} + \dots \\ + (a_0^{(n-1)} - a_1^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}) y_0 = F^{(n)}(0), \end{cases}$$

en posant

$$a_i^{(k)} = a_i^{(k)}(0).$$

Supposons $a_0 = a_0(0) \neq 0$; dans ce cas, les relations (11) nous déterminent successivement y_0, y_1, \dots, y_{n-1} et d'une façon unique. La fonction $\varphi(x)$, solution de (1), doit donc satisfaire à l'équation dif-

férentielle d'ordre n (10') et sa valeur ainsi que celles de ses $n - 1$ dérivées sont parfaitement déterminées pour $x = 0$; d'ailleurs, le coefficient de $\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$ en (10') est $\alpha_0(x)$. Il suit de là que l'équation de Volterra a dans ce cas une seule solution, régulière à l'origine; nous retrouvons ainsi, d'une autre manière, le premier théorème de Volterra pour l'équation particulière que nous avons considérée.

Soit, maintenant, $\alpha_0(0) = f(0, 0) = 0$ et considérons le cas où l'ensemble des termes de degré minimum de $f(x, s)$ en x et s est de degré n ; ceci nous sera suffisant pour arriver au théorème général de M. Volterra.

Si nous nous reportons au développement (9), nous voyons que dans ce cas les fonctions $\alpha_0(s)$, $\alpha_1(s)$, ..., $\alpha_{n-1}(s)$ devront admettre l'origine comme zéro au moins d'ordre n , $n - 1$, ..., 1 respectivement. Nous aurons donc

$$(12) \quad \alpha_i(s) = s^{n-i}(\alpha_i + \beta_i s + \dots),$$

toutes les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne pouvant pas être nulles à la fois. *Supposons avec M. Volterra que $\alpha_0 \neq 0$.* Les premiers membres des relations (11) sont identiquement nuls, en supposant $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ finis; il en résulte

$$F'(0) = F''(0) = \dots = F^{(n)}(0) = 0.$$

Par conséquent, pour que la solution de (1) soit finie à l'origine, ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées, il faut que

$$F(x) = x^{n+1} F_1(x).$$

Cela posé, toute solution de l'équation différentielle (10') régulière à l'origine sera une solution de l'équation fonctionnelle et inversement. Or, l'équation (10') est une équation du type de Fuchs pour l'origine, comme on le voit directement en tenant compte de (12) ou, encore plus facilement, en remarquant que son adjointe (10'') est visiblement de ce type. Pour trouver l'équation déterminante de l'origine, il suffit d'observer que celle de son adjointe est évidemment

$$\alpha_0 \rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + 1) + \alpha_1 \rho(\rho - 1) \dots (\rho - n + 2) + \dots + \alpha_n = 0.$$

Or, on passe de l'équation déterminante d'une équation pour un point à celle de son adjointe par la substitution (1)

$$r = -\rho - 1.$$

L'équation déterminante cherchée est donc

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0(r+1)(r+2)\dots(r+n) - \alpha_1(r+1)\dots(r+n-1) + \dots \\ + (-1)^n \alpha_n = 0. \end{array} \right.$$

Soient r_1, r_2, \dots, r_n ses racines, supposées différentes entre elles et telles que leurs différences mutuelles ne soient pas des nombres entiers; dans ce cas, l'intégrale générale de (10') est de la forme

$$(14) \quad C_1 x^{r_1} P_1(x) + C_2 x^{r_2} P_2(x) + \dots + C_n x^{r_n} P_n(x) + P(x),$$

$P(x)$ étant une solution particulière de l'équation (10') et $P_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) des fonctions holomorphes de x et non nulles pour $x = 0$.

Or, la condition essentielle que s'impose M. Volterra par la considération des variables réelles est que la solution de (1) soit *finie* pour $x = 0$. Cela explique pourquoi intervient dans ce problème la question du signe de la partie réelle des racines de l'équation (13) qui, nous le montrerons tout de suite, se réduit à l'équation qu'on trouve dans l'énoncé de M. Volterra.

Déterminons d'abord une solution particulière $P(x)$. La méthode de la variation des constantes nous donne immédiatement une solution de la forme

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{r_1} P_1(x) \int_0^x \frac{Q_1(x) dx}{x^{r_1+1}} + x^{r_2} P_2(x) \int_0^x \frac{Q_2(x) dx}{x^{r_2+1}} + \dots \\ \phantom{x^{r_1} P_1(x)} + x^{r_n} P_n(x) \int_0^x \frac{Q_n(x) dx}{x^{r_n+1}}, \end{array} \right.$$

où $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x)$ sont des fonctions de x , régulières à l'origine.

(1) L. FUCHS, *Journal de Crelle*, t. 76, 1875, p. 180, et THOMÉ, même Tome, p. 284.

Si donc nous voulons qu'elle ait une *seule* solution finie à l'origine, il faudra nécessairement que toutes les racines r_1, \dots, r_n aient leurs parties réelles négatives pour qu'on ait nécessairement

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0.$$

Dans ce cas, puisque

$$R(r_i) < 0,$$

on aura

$$R(r_i) + 1 < 1,$$

en désignant par le symbole $R(r_i)$ la partie réelle de r_i ; par conséquent, la solution particulière (15) sera finie à l'origine et ce sera, d'ailleurs, la seule jouissant de cette propriété.

C'est le résultat général de M. Volterra pour l'équation particulière que nous avons considérée. Pour retrouver l'équation algébrique de l'énoncé de M. Volterra changeons le signe de r en (13), ce qui nous donne

$$(13') \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0(r-1)(r-2)\dots(r-n) + \alpha_1(r-1)\dots(r-n+1) + \dots \\ + \alpha_p(r-1)(r-2)\dots(r-n+p) + \dots + \alpha_n = 0. \end{array} \right.$$

M. Volterra désigne, comme nous l'avons fait dans le n° 5, par

$$\sum_{i=0}^n A_i x^{n-i} s^i$$

l'ensemble des termes de degré n de $f(x, s)$; il est facile d'obtenir les relations entre A_i et α_i ($i = 1, \dots, n$) en faisant $s = x$ dans l'expression (9) du noyau et dans celles de ses n premières dérivées successives. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A_n + A_{n-1} + \dots + A_1 + A_0, \\ (-1)\alpha_1 &= A_{n-1} + 2A_{n-2} + \dots + nA_0, \\ (-1)^{n-2} \frac{\alpha_{n-2}}{(n-2)!} &= A_2 + \frac{n-1}{1} A_1 + \frac{(n-1)n}{2} A_0, \\ (-1)^{n-1} \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} &= A_1 + nA_0, \\ (-1)^n \frac{\alpha_n}{n!} &= A_0. \end{aligned}$$

Remplaçant ces valeurs en (13') nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} & (A_n + A_{n-1} + \dots + A_0)(r-1)(r-2)\dots(r-n) \\ & - (A_{n-1} + 2A_{n-2} + \dots + nA_0)(r-1)(r-2)\dots(r-n+1) \\ & + (-1)^p p! \left[A_{n-p} + \frac{p+1}{1} A_{n-p-1} + \dots + \frac{(p+1)\dots n}{(n-p)!} A_0 \right] \\ & \quad \times (r-1)\dots(r-n+p) + \dots + (-1)^n A_0 = 0 \end{aligned}$$

qui, ordonnée par rapport aux A_i , s'écrit

$$\begin{aligned} & A_n(r-1)\dots(r-n) + A_{n-1}(r-1)\dots(r-n+1)(r-n-1) + \dots \\ & + A_{n-p}(r-1)\dots(r-n+p)(r-n+p-2)\dots(r-n-1) + \dots \\ & + A_0(r-2)\dots(r-n)(r-n-1) = 0 \end{aligned}$$

ou, en divisant par le produit $(r-1)\dots(r-n-1)$,

$$(13'') \quad \frac{A_0}{r-1} + \frac{A_1}{r-2} + \dots + \frac{A_n}{r-n-1} = 0,$$

qui est justement l'équation qui figure dans l'énoncé de M. Volterra.

Nous avons changé le signe de r en (13); l'équation (13'') doit donc avoir toutes ses racines à parties réelles positives; dans ce cas, l'équation (1) aura une seule solution.

Pour arriver à ce résultat nous avons dû supposer

$$\alpha_0 = A_0 + A_1 + \dots + A_n \neq 0,$$

condition qui est fondamentale et implicitement supposée satisfaite dans la solution de M. Volterra. En outre, nous avons supposé que les racines r_1, r_2, \dots, r_n sont telles que leurs différences ne soient ni nulles ni entières; or, il est facile de voir que cette condition n'est qu'accessoire et que le théorème reste vrai même si elle n'est pas satisfaite. En effet, les termes logarithmiques qui s'introduisent dans l'intégrale particulière conduisent à des expressions de la forme

$$\int_0^{x'} \frac{Q(x) \log^k x \, dx}{x^{r_i+1}}$$

qui, pour être finies, conduisent aux mêmes conditions pour les racines r_i .

6. Nous sommes maintenant en état d'appliquer avec une grande facilité la méthode des approximations successives pour étudier le cas général. Soit

$$\int_0^x f(x, s) \varphi(s) ds = F(x)$$

l'équation de Volterra où le noyau est égal à

$$f(x, s) = a_0(s) + a_1(s) \frac{s-x}{1} + \dots + a_n(s) \frac{(s-x)^n}{n!} + \dots,$$

le développement précédent étant convergent si $|s| < a$ et $|s-x| < R$. Soit n le degré minimum de l'ensemble des termes homogènes en x et s de $f(x, s)$. Si nous dérivons l'équation de Volterra $n+1$ fois de suite, nous sommes conduits à l'équation

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} D[\varphi_0(x)] &= [a_0(x) \varphi_0(x)]^{(n)} \\ &\quad - [a_1(x) \varphi_0(x)]^{(n-1)} + \dots + (-1)^n [a_n(x) \varphi_0(x)] \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_0^x f_n(x, s) \varphi(s) ds = F^{(n+1)}(x), \end{aligned} \right.$$

où $f_n(x, s)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $f(x, s)$ par rapport à $s-x$. Introduisons un paramètre λ devant l'intégrale et appliquons la méthode des approximations successives; nous aurons d'abord à résoudre l'équation différentielle

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} D[\varphi_0(x)] &= [a_0(x) \varphi_0(x)]^{(n)} - [a_1(x) \varphi_0(x)]^{(n-1)} + \dots \\ &\quad + (-1)^n [a_n(x) \varphi_0(x)] = F^{(n+1)}(x) \end{aligned} \right.$$

étudiée dans le numéro précédent, et nous avons vu que, si l'équation (13^o) correspondante a toutes ses racines à parties réelles positives, l'équation (17) aura une seule solution finie à l'origine de la forme

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= x^{r_1} P_1(x) \int_0^x \frac{Q_1(x) F^{(n+1)}(x) dx}{x^{r_1+1}} + \dots \\ &\quad + x^{r_n} P_n(x) \int_0^x \frac{Q_n(x) F^{(n+1)}(x) dx}{x^{r_n+1}}, \end{aligned}$$

où les fonctions $Q_1(x), \dots, Q_n(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ sont des fonctions holomorphes à l'origine ne dépendant que de l'équation différentielle (17) sans second membre.

Les autres approximations successives sont données par des équations différentielles linéaires absolument analogues :

$$(17') \quad \left\{ \begin{array}{l} D[\varphi_1(x)] = (-1)^n \int_0^x f_n(x, s) \varphi_0(s) ds, \\ \dots\dots\dots \\ D[\varphi_n(x)] = (-1)^n \int_0^x f_n(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Rien n'est plus aisé maintenant que de démontrer la convergence uniforme et absolue de la série des approximations

$$(18) \quad \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots,$$

quel que soit λ , dans un cercle décrit de l'origine comme centre et dont le rayon sera tout de suite déterminé.

En effet, soit q le module maximum des fonctions $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x)$ dans le cercle ayant pour rayon la distance de l'origine au premier zéro de $a_0(x)$ le plus rapproché de l'origine; soient de même p celui des fonctions $P_1(x), \dots, P_n(x)$, et enfin M et N ceux de $F^{(n+1)}(x)$ et $f_n(x, s)$ dans leurs cercles de convergence. Le rayon du cercle où la série des approximations converge sera le plus petit de ces trois rayons.

Nous aurons d'abord

$$|\varphi_0(x)| < \frac{Mnpq}{\sigma} \frac{aM}{\sigma},$$

σ désignant la plus petite des quantités $|r_i| (i = 1, \dots, n)$, et de même successivement

$$\begin{array}{l} |\varphi_1(x)| < a^2 MN \frac{x}{\sigma(\sigma+1)}, \\ \dots\dots\dots \\ |\varphi_n(x)| < aM \frac{(aNx)^n}{\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+n)n!}, \end{array}$$

ce qui démontre bien la convergence absolue et uniforme du développement (18), quel que soit λ , dans le cercle précédemment défini.

Il est inutile de vérifier la solution ainsi obtenue; en effet, la série des approximations étant absolument convergente, nous sommes sûrs qu'elle est solution de l'équation (17), puisqu'elle la satisfait formellement.

On passe ensuite de (17) à l'équation de Volterra par $n + 1$ intégrations successives qui n'introduisent pas des constantes arbitraires, car

$$F(x) = x^{n+1} F_1(x).$$

La solution est *unique*; d'abord, pour un chemin déterminé d'intégration, car l'équation (17) sans second membre ne peut avoir aucune solution autre que la solution identiquement nulle, en vertu d'un raisonnement identique à celui qui a été fait au n° 1; comme les intégrales qui donnent les diverses approximations sont ensuite uniformes dans le cercle précédemment défini, on déduit que la solution est unique, quel que soit le chemin d'intégration situé à l'intérieur du cercle. Le problème est ainsi complètement résolu.

7. Qu'est-ce qu'il arrive si toutes les racines r_i n'ont pas leurs parties réelles négatives?

C'est une question qui a été traitée, dans le cas d'une seule racine négative, par M. V. Volterra (1) et, dans le cas général, par M. E. Holmgren (2); ces deux savants se sont occupés des fonctions finies à l'origine, les seules qui intéressent dans le champ des variables réelles. La méthode précédente nous permet de retrouver et compléter le résultat général obtenu par M. E. Holmgren.

Supposons que l'équation (13'') a k racines à parties réelles négatives ($k < n$); l'équation (13) ayant alors k racines à parties réelles positives, soient r_1, r_2, \dots, r_k ces racines, et considérons la solution

(1) V. VOLTERRA, *loc. cit.*, 4^e note, p. 707.

(2) E. HOLMGREN, *loc. cit.*, p. 570.

particulière

$$(19) \left\{ \begin{aligned} P(x) = & x^{r_1} P_1(x) \int_b^x \frac{Q_1(x) F^{(n+1)}(x) dx}{x^{r_1+1}} + \dots \\ & + x^{r_k} P_k(x) \int_b^x \frac{Q_k(x) F^{(n+1)}(x) dx}{x^{r_k+1}} \\ & + x^{r_{k+1}} P_{k+1}(x) \int_0^x \frac{Q_{k+1}(x) F^{(n+1)}(x) dx}{x^{r_{k+1}+1}} + \dots \\ & + x^{r_n} P_n(x) \int_0^x \frac{Q_n(x) F^{(n+1)}(x) dx}{x^{r_n+1}}, \end{aligned} \right.$$

où b désigne une constante arbitraire, différente de zéro. Il est inutile de faire la remarque que

$$Q_i(0) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

car ce sont les déterminants wronskiens des différents groupes de $n - 1$ des n intégrales linéairement indépendantes $x^i P_i(x)$.

La solution (19) est une fonction *finie* à l'origine à cause du choix convenable des limites inférieures dans les intégrales qui la composent; il n'y a qu'une exception quand une des racines r_i est nulle. Dans ce cas, si $F^{(n+1)}(0) \neq 0$, la fonction $P(x)$ a une singularité logarithmique à l'origine et par conséquent toute solution de (17) y devient infinie. Il faut donc que $F^{(n+1)}(0) = 0$; cette condition est nécessaire et suffisante.

Puisque $r_i > 0$ pour $i \leq k$, la solution *finie* à l'origine la plus générale de (17) sera

$$C_1 x^{r_1} P_1(x) + \dots + C_k x^{r_k} P_k(x) + P(x).$$

Par conséquent, l'équation (17) a une solution *finie* à l'origine indéterminée, dépendant linéairement de k constantes arbitraires, car les fonctions $x^i P_i(x)$ ($i \leq k$) sont évidemment linéairement indépendantes.

S'il y a une racine nulle, pour qu'il existe des solutions finies il faut et il suffit qu'on ait

$$F(x) = x^{n+2} F_{n+2}(x).$$

Si cette condition est remplie il y aura la même indétermination.

Le passage par les approximations successives à l'équation générale (16) exige quelques précautions sur lesquelles il est nécessaire d'attirer l'attention. Puisque $\varphi_0(x)$ est fini, on aura

$$|\varphi_0(x)| < A$$

pour tout système de valeurs déterminées d'ailleurs quelconques des constantes C_1, C_2, \dots, C_k . On aura donc, en conservant les notations précédentes,

$$|\Phi_1(x)| = \left| \int_0^x f_n(x, s) \varphi_0(s) ds \right| < ANx.$$

Pour déterminer $\varphi_1(x)$, nous nous servirons uniquement de la formule (19); remarquons que l'ordre d'infinitude au voisinage de l'origine des intégrales

$$\int_{\mu}^x \frac{Q_1(x) \Phi(x) dx}{x^{r_p+1}} \quad (p = 1, \dots, k),$$

qui était r_p quand $\Phi(x) = F^{(n+1)}(x)$, en supposant $F^{(n+1)}(0) \neq 0$, est à présent réduit d'une unité à cause de l'inégalité à laquelle satisfait $\Phi_1(x)$; par conséquent les termes

$$x^{r_p} \int_{\mu}^x \frac{Q_1(x) \Phi_1(x) dx}{x^{r_p+1}}$$

seront donc de l'ordre de x dans le voisinage de l'origine et par conséquent on aura, pour tout chemin d'intégration où les données $F(x)$ et $f(x, s)$ ont un sens,

$$|\varphi_1(x)| < \Lambda_1 x,$$

d'où l'on déduit

$$|\Phi_2(x)| < \Lambda_1 N \frac{x^2}{2}.$$

A chaque approximation, l'ordre d'infinitude de l'élément différentiel diminue d'une unité; par conséquent, au bout d'un nombre fini d'approximations dans tous les cas, on pourra réduire les ordres d'infinitude de façon qu'ils soient plus petits que l'unité dans toutes les

intégrales (19). A partir de ce moment, on n'a plus besoin d'introduire la constante $b \neq 0$; on n'a qu'à mettre partout zéro comme limite inférieure, et alors nous tombons exactement sur le même cas que le précédent.

Nous avons ainsi obtenu une solution qui, en mettant les constantes C_1, C_2, \dots, C_k en évidence, est de la forme

$$C_1 \chi_1(x) + C_2 \chi_2(x) + \dots + C_k \chi_k(x) + \chi(x).$$

Puisque $\chi(x)$ satisfait à l'équation de Volterra (elle correspond au cas de $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$), il résulte que les fonctions $\chi_1(x), \dots, \chi_k(x)$ seront les solutions de l'équation de Volterra sans second membre

$$\int_0^x \psi(x, s) \varphi(s) ds = 0.$$

Ces k fonctions sont linéairement indépendantes, car elles dérivent de k fonctions $x^r P_1(x), \dots, x^r P_k(x)$ qui sont linéairement indépendantes en appliquant le *même* mécanisme des approximations successives.

Nous trouvons ainsi le résultat de M. E. Holmgren, en y faisant entrer le cas des racines nulles. Si $F^{(n+1)}(0) \neq 0$, on devra les considérer comme racines négatives; au contraire, si $F^{(n+1)}(0) = 0$, elles compteront comme racines positives de l'équation (13).

Il est clair que le raisonnement précédent s'applique aussi aux intégrales qui deviennent infinies à l'origine; il y aura un certain nombre d'approximations qui sont infinies à l'origine, mais ce nombre sera fini.

Nous tirons donc d'ici cette conséquence que dans tous les cas, si l'ensemble des termes du plus petit degré d'un noyau en x et s est n , il y a une indétermination précisément égale à n , c'est-à-dire, d'une façon plus précise, la solution de l'équation de Volterra dépendra dans ce cas de n constantes arbitraires. Dans le cas général, il y aura toujours des solutions qui deviendront infinies à l'origine; il n'y a qu'un seul cas où il n'existe qu'une *seule* solution finie: c'est le cas étudié par M. V. Volterra. Ces résultats généraux s'appliquent à l'équation fonctionnelle (16).

8. L'hypothèse de

$$A_0 + A_1 + \dots + A_n \neq 0$$

a été aussi essentielle dans notre méthode, car c'est grâce à elle que l'équation différentielle linéaire

$$D(\varphi) = 0$$

a été du type de Fuchs, circonstance qui a dominé toute l'analyse précédente. Si $\alpha_0 = A_0 + A_1 + \dots + A_n = 0$, l'équation $D(\varphi) = 0$ n'est plus sûrement du type de Fuchs; elle aura donc des intégrales avec des singularités en général essentielles à l'origine et, comme on n'a pas encore de résultat général à ce sujet, il faudra analyser chaque cas séparément.

Nous examinerons le cas de $n = 1$, c'est-à-dire de l'équation fonctionnelle

$$(20) \quad \int_0^x [A_1 x + A_0 s + \psi(x, s)] \varphi(s) ds = F(x),$$

où $\psi(x, s)$ est une fonction s'annulant pour $x = s = 0$ et qui ne contient pas de termes linéaires en x et s . On a $A_0 + A_1 = 0$, d'où l'on tire nécessairement $A_1 \neq 0$.

Appliquons directement la méthode du n° 6 en dérivant deux fois successivement l'équation (20), ce qui nous donne

$$(21) \quad \begin{cases} \psi(x, x) \varphi'(x) + [A_1 + \psi'(x, x) + \psi'_x(x, x)] \varphi(x) \\ + \int_0^x \psi''_{xx}(x, s) \varphi(s) ds = F''(x), \end{cases}$$

$\psi'(x, x)$ désignant la dérivée par rapport à x de $\psi(x, x)$ et $\psi'_x(x, x)$ la dérivée par rapport à x de $\psi(x, s)$, où l'on a fait après $s = x$. Soit

$$\psi(x, x) = x^{\mu+1} \psi_1(x), \quad \psi_1(0) = B \neq 0;$$

nous savons que $\mu \geq 1$. Remarquons que les fonctions $\psi(x, x)$ et $\psi'_x(x, x)$ s'annulent pour $x = 0$; il en résulte que le coefficient de $\varphi(x)$ en (21) ne s'annule pas pour $x = 0$, y étant égal à A_1 . L'équa-

tion $D(\varphi) = 0$ est donc dans ce cas de la forme

$$x^{1+\mu}(B_1 + B_2x + \dots)\frac{dy}{dx} + (A_1 + A_2x + \dots)y = R^n(x).$$

Son intégrale générale est donc de la forme

$$(22) \quad y = Ce^{\frac{\rho p(x)}{x^\mu}} + \frac{1}{B_1} e^{\frac{\rho p(x)}{x^\mu}} \int_a^x R^n(x) e^{-\rho \frac{p(x)}{x^\mu}} \frac{dx}{x^{\mu+1}},$$

où l'on a posé pour abrégier

$$\rho = -\frac{A_1}{\mu B_1},$$

a désigne une constante déterminée $\neq 0$ d'ailleurs quelconque et C une constante arbitraire; on a de plus

$$p(0) = 1.$$

Pour discuter l'intégrale (22) au voisinage de l'origine dans le domaine complexe, remarquons d'abord que l'exponentielle

$$e^{\frac{\rho}{x^\mu}}$$

tend vers zéro ou vers l'infini suivant que x s'approche de l'origine par un chemin compris à l'intérieur des 2μ angles formés par les droites passant par l'origine et faisant avec l'axe Ox des angles égaux à

$$(2k+1)\frac{\pi}{2\mu} \quad (k = 0, \dots, 2\mu-1).$$

Plus précisément :

1° Si $\rho > 0$, $e^{\frac{\rho}{x^\mu}}$ tendra vers zéro si le chemin sur lequel x tend vers zéro est *compris* dans les angles d'indice impair (en assignant à l'angle qui contient le demi-axe positif l'indice 1) et vers ∞ dans les angles d'indice pair.

2° Si $\rho < 0$, l'inverse aura lieu.

On déduit de là que la seule intégrale qui aura un sens quel que soit le chemin sur lequel x tend vers zéro, sauf 2μ chemins exceptionnels,

est l'intégrale

$$\frac{1}{B_1} e^{\frac{\rho p(x)}{x^2}} \int_0^x K''(x) e^{-\frac{\rho p(x)}{x^2}} dx.$$

On passera au cas général en appliquant la méthode des approximations successives d'une façon identique à celle développée au n° 7.

Considérons le cas plus intéressant des variables réelles positives; on voit directement que si $\rho > 0$, pour avoir une solution finie, il faut nécessairement prendre $C = 0$, de sorte que dans ce cas, en utilisant les approximations successives, nous obtenons une solution unique.

Si $\rho < 0$, on pourra prendre C arbitraire et nous voyons ainsi apparaître une solution dépendant linéairement d'une constante arbitraire.

Prenons le cas d'un noyau de la forme

$$f(x, s) = A_1 x + A_0 s + \alpha x^2 + \beta x s + \gamma s^2 + \psi_3(x, s),$$

où $A_1 + A_0 = 0$, et supposons que

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0.$$

Dans ce cas il est évident que $\mu = 1$, $B_1 = \alpha + \beta + \gamma$ et, par conséquent,

$$\rho = \frac{A_0}{(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Par conséquent, si

$$\frac{A_0}{\alpha + \beta + \gamma} > 0,$$

il y aura une seule solution réelle, tandis que, si

$$\frac{A_0}{\alpha + \beta + \gamma} < 0,$$

on en aura une infinité, dépendant d'une constante arbitraire.

Ce dernier résultat a été énoncé par M. E. Holmgren à la fin de sa Note précédemment citée.

Le cas du noyau de la forme $\frac{G(x, s)}{(x-s)^\lambda}$.

9. Dans les numéros précédents, nous avons supposé le noyau régulier pour $x = s = a$. Nous allons maintenant examiner un cas où il n'en est pas ainsi qui se présente souvent dans les applications et ayant un intérêt historique, car il généralise le fameux problème d'Abel qui a été l'origine de toutes ces recherches. C'est le cas d'un noyau de la forme

$$\frac{G(x, s)}{(x-s)^\lambda} \quad (0 < \lambda < 1)$$

qui est infini sur toute la droite $x - s = 0$. On peut réduire ce cas au précédent de la manière suivante :

Multiplions les deux termes de l'équation donnée

$$(23) \quad \int_0^x \frac{G(z, s)}{(z-s)^\lambda} \varphi(s) ds - \psi(z) = 0$$

par $\frac{1}{(x-z)^{1-\lambda}}$ et intégrons de zéro à x , ce qui nous donne

$$(24) \quad \int_0^x \frac{dz}{(x-z)^{1-\lambda}} \int_0^z \frac{G(z, s) \varphi(s) ds}{(z-s)^\lambda} = \int_0^x \frac{\psi(z) dz}{(x-z)^{1-\lambda}},$$

et, appliquant la formule de Dirichlet,

$$\int_0^x \varphi(s) ds \int_s^x \frac{G(z, s) dz}{(x-z)^{1-\lambda} (z-s)^\lambda} = \int_0^x \frac{\psi(z) dz}{(z-x)^{1-\lambda}}.$$

Si nous posons

$$(25) \quad \int_s^x \frac{G(z, s) dz}{(x-z)^{1-\lambda} (z-s)^\lambda} = f(x, s)$$

et

$$(26) \quad \int_0^x \frac{\psi(z) dz}{(z-x)^{1-\lambda}} = F(x),$$

nous obtenons l'équation

$$(27) \quad \int_0^x f(x, s) \varphi(s) ds = F(x)$$

et nous disons que cette équation est justement du type simple de Volterra. Pour le voir simplement, faisons en (25) la transformation

$$z - s = t(x - s),$$

nous obtenons

$$f(x, s) = \int_0^1 \frac{G[s + t(x - s), s] dt}{(1 - t)^{1 - \lambda} t^\lambda}$$

qui montre que $f(x, s)$ est fini et analytique dans tout le domaine où $G(x, s)$ jouit des mêmes propriétés. En effet, si M désigne une quantité plus grande que le module de $G(x, s)$ dans le domaine considéré, nous avons

$$|f(x, s)| < M \int_0^1 \frac{dt}{(1 - t)^{1 - \lambda} t^\lambda} < M \frac{\pi}{\sin \lambda \pi}.$$

D'autre part, la propriété d'être analytique est évidente. Le procédé particulier employé pour passer de (23) à (27) nous oblige de démontrer que réciproquement toute solution de (27) satisfait aussi à (23); cela se fait très simplement en remarquant qu'on peut remonter de (27) à (24), qui peut s'écrire, en appelant $\chi(z)$ le premier membre,

$$\int_0^x \frac{\chi(z) dz}{(x - z)^{1 - \lambda}} = 0,$$

et il suffit de démontrer que cette équation n'est possible que si $\chi(z) \equiv 0$. Pour cela, substituons $z = xt$, ce qui nous donne

$$x^\lambda \int_0^1 \frac{\chi(xt) dt}{(1 - t)^{1 - \lambda}} = 0.$$

Quant t varie de zéro à x , $\chi(xt)$ varie de $\chi(0)$ à $\chi(x)$; si donc on prend x suffisamment petit, $\chi(xt)$ conservera un même signe dans tout l'intervalle d'intégration, et, par conséquent, pour que l'intégrale soit nulle, il est nécessaire que $\chi(z)$ soit nul de zéro à x , ce qui suffit pour démontrer que $\chi(z)$ est identiquement nul (1).

(1) Cette dernière conséquence suppose essentiellement la fonction $\chi(z)$ analytique, mais il est bon de remarquer que, dans le cas des variables réelles, le raisonnement précédent peut aussi s'appliquer, en montrant que $\chi(z)$ s'annule de proche en proche pour toutes les valeurs de z comprises dans l'intervalle considéré dans le problème.

Remarquons enfin que

$$F(x) = \int_0^x \frac{\psi(z) dz}{(z-x)^{1-\lambda}} = x^\lambda \int_0^1 \frac{\psi(xt) dt}{(1-t)^{1-\lambda}}.$$

$F(x)$ s'annule donc à l'origine comme x^λ si $\psi(0) \neq 0$; comme $\lambda < 1$, $F'(x)$ n'y serait plus régulier et, par conséquent, la formule (7) du cas simple ne serait pas applicable. Mais il est facile de voir qu'en reprenant les approximations (5), dans le cas de $G(0, 0) \neq 0$, elles ont un sens parfaitement déterminé aussi dans ce cas et que la série des approximations converge dans les mêmes conditions. La seule différence sera que la solution devient infinie à l'origine avec une partie principale de la forme

$$\frac{k}{x^{1-\lambda}}.$$

Si $\psi(0) = 0$, on a $F(x) = x^{1+\lambda} F_1(x)$ et, par conséquent, on est absolument dans le cas du premier numéro. On n'a aucune difficulté essentielle, en appliquant les formules (7) et (8) des nos 3 et 4, de retrouver celles qui ont été données par M. V. Volterra dans la seconde de ses Notes et d'en déduire les formules d'Abel et de Sonine. Nous montrerons ici seulement comment on peut obtenir la formule d'Abel.

Abel avait considéré l'équation

$$\int_0^z \frac{\varphi(s) ds}{(z-s)^\lambda} = \psi(z) \quad (0 < \lambda < 1),$$

qui est du type (23), dans le cas particulier de $G(x, s) = 1$. On a donc

$$f(x, s) = \frac{\pi}{\sin \lambda \pi},$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\psi(z) dz}{(z-x)^{1-\lambda}},$$

et par conséquent, puisque $f_1(x, s) = 0$, $\pi(x, s) = 0$,

$$\varphi(x) = \frac{\sin \lambda \pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin \lambda \pi}{\pi} \left[\frac{\psi(0)}{x^{1-\lambda}} + \int_0^x \frac{\psi'(s) ds}{(x-s)^{1-\lambda}} \right],$$

qui résout le problème d'Abel. Cette formule confirme une remarque

précédente pour le cas de $\psi(0) \neq 0$. Si $\psi(0) = 0$, on a

$$\psi(x) = \frac{\sin \lambda \pi}{\pi} \int_0^x \frac{\psi'(s) ds}{(x-s)^{1-\lambda}},$$

qui est la formule même qu'a donnée Abel.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède, avec M. Volterra, que $G(x, x)$ ne s'annule pas pour $x = 0$; dans le cas général où l'on a $G(x, x) = 0$ pour $x = 0$, on peut énoncer un résultat analogue à celui indiqué au n° 3.

Soit n le degré de l'ensemble des termes de degré minimum en x et s par qui commence $G(x, s)$ et écrivons

$$G(z, s) = g_0(s) + g_1(s) \frac{(z-s)}{1} + \dots + g_n(s) \frac{(z-s)^n}{n!} + \dots$$

On a donc

$$\begin{aligned} G[s + t(x-s), s] \\ = g_0(s) + t(x-s)g_1(s) + \dots + g_n(s) \frac{t^n(x-s)^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x, s) &= \int_0^1 \frac{G[s + t(x-s), s] dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}} \\ &= g_0(s) \int_0^1 \frac{dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}} + \frac{(x-s)}{1} g_1(s) \int_0^1 \frac{t dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}} + \dots \\ &\quad + \frac{(x-s)^n g_n(s)}{n!} \int_0^1 \frac{t^n dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}} + \dots \end{aligned}$$

Rappelons-nous maintenant les formules bien connues

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{n-\lambda}(1-t)^{1-\lambda} dt \\ = B(n-\lambda+1, \lambda) = \frac{\Gamma(n-\lambda+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+1)} \\ = \left(1 - \frac{\lambda}{1}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \frac{\pi}{\sin \lambda \pi}, \end{aligned}$$

et nous avons ainsi

$$f(x, s) = \frac{\pi}{\sin \lambda \pi} \left[g_0(s) + \left(1 - \frac{\lambda}{1}\right) g_1(s) \frac{(x-s)}{1!} + \dots \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\lambda}{1}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \frac{g_n(s) (x-s)^n}{n!} + \dots \right].$$

Il résulte de là que nous nous trouvons exactement dans les mêmes conditions que dans le cas général du n° 3.

La nature de la solution dépend du signe de la partie réelle d'une équation algébrique de degré n , dont la formation est immédiate :

Si

$$g_k(s) = s^{n-k} (g_k + h_k s + \dots) \quad (0 \leq k \leq n),$$

on obtient cette équation de l'équation (13) en y remplaçant x_k par

$$g_k \left(1 - \frac{\lambda}{1}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right).$$

Le cas des deux limites variables.

10. Un troisième type d'équation fonctionnelle étudié par M. Volterra (1) est le type

$$(28) \quad \int_{p,x}^{q,x} f(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

qui se rencontre aussi dans la théorie des équations aux dérivées partielles (2).

Dans le cas de $\left|\frac{p}{q}\right| \neq 1$, nous appliquerons une méthode à peu près identique à celle donnée par M. E. Picard pour une équation fonc-

(1) *Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti* (*Annali di Matematica*, 2^e série, t. XXV, 1896, p. 165).

(2) E. GOURSAT, *Sur un problème relatif à l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1904, p. 144).

tionnelle rencontrée dans l'étude des équations aux dérivées partielles du second ordre (1); nous supposons $f(0, 0) \neq 0$.

On peut se borner, dans ce cas, à l'étude de l'équation (2)

$$(29) \quad \int_{\beta x}^x f(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

où $\beta < 1$. Pour qu'il existe une solution $\varphi(x)$ finie, il est nécessaire que $F(0) = 0$. Dérivant, nous obtenons

$$f(x, x) \varphi(x) - \beta f(x, \beta x) \varphi(\beta x) + \int_{\beta x}^x \frac{\partial f(x, s)}{\partial x} \varphi(s) ds = F'(x).$$

Nous posons

$$\beta \frac{f(x, \beta x)}{f(x, x)} = P(x),$$

et

$$\frac{\partial f(x, s)}{\partial x} \frac{1}{f(x, x)} = \psi(x, s),$$

$$\frac{F'(x)}{f(x, x)} = \Phi_0(x).$$

Nous prendrons alors les équations des approximations successives :

$$\varphi_0(x) - P(x) \varphi_0(\beta x) = \Phi_0,$$

$$\varphi_1(x) - P(x) \varphi_1(\beta x) = - \int_{\beta x}^x \psi(x, s) \varphi_0(s) ds,$$

.....,

$$\varphi_n(x) - P(x) \varphi_n(\beta x) = - \int_{\beta x}^x \psi(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds.$$

L'équation type qu'il faut étudier est donc

$$\varphi(x) - P(x) \varphi(\beta x) = \Phi(x).$$

(1) E. PICARD, *Comptes rendus*, 13 mai 1907, p. 1009.

(2) En effet, il suffit de faire la substitution $qx = z$, où q est plus grand que β .

si l'on pose

$$\Phi_k(x) = - \int_{\beta x}^x \psi(x, s) \varphi_{k-1}(s) ds.$$

La série du second membre converge absolument et uniformément dans un cercle décrit de l'origine comme centre et ne contenant aucun zéro de $f(x, x)$ et aucune singularité de $F'(x)$, même pour $\varphi_0(x)$, pour laquelle on a

$$\Phi_0(0) \neq 0.$$

En effet, pour n suffisamment grand, on a

$$P(x) \dots P(\beta^{n-1}x) \Phi(\beta^n x) < M \gamma^n,$$

où $\beta < \gamma < 1$, ce qui démontre la convergence absolue et uniforme de la première approximation. Pour les autres, on a un résultat plus précis; en effet, on a

$$|\Phi_1(x)| < ak(1 - \beta)x$$

en posant

$$|\varphi_0(x)| < a \quad \text{et} \quad |\psi(x, s)| < k.$$

On aura donc

$$|\varphi_1(x)| < A ak(1 - \beta)x(1 + \beta + \beta^2 + \dots) < A akx,$$

en prenant pour A une quantité plus grande que les modules de tous les produits $\prod_1^n P(\beta^i x)$. Cette inégalité assure la convergence absolue et uniforme de la somme des approximations successives dans le domaine précédemment défini.

On aura

$$|\Phi_2(x)| < A ak^2 \frac{x^2}{2} (1 - \beta^2)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x)| &< A^2 ak^2 \frac{x^2}{2} (1 - \beta^2) (1 + \beta^2 + \beta^4 + \dots + \beta^{2k} + \dots) \\ &< a A^2 k^2 \frac{x^2}{1.2}, \end{aligned}$$

et la loi est évidemment générale,

$$|\varphi_n(x)| < a \frac{A^n k^n x^n}{1.2 \dots n},$$

ce qui démontre notre proposition.

Nous examinerons plus loin le cas $\frac{p}{q} = -1$, en le rattachant, suivant une remarque de M. V. Volterra, à la résolution d'un système de deux équations simultanées de Volterra.

La généralisation de M. Burgatti.

11. Nous allons nous occuper maintenant d'une généralisation de l'équation de Volterra, due à M. E. Burgatti. Dans deux Notes communiquées à l'Académie de Rome, M. Burgatti (1) a considéré l'équation fonctionnelle suivante,

$$(30) \quad \int_0^x \left[f_0(x, s) \varphi(s) + f_1(x, s) \frac{d\varphi}{ds} + \dots + f_n(x, s) \frac{d^n \varphi}{ds^n} \right] ds = F(x),$$

où figurent aussi les dérivées jusqu'à l'ordre n de la fonction inconnue; si $n = 0$, on retombe sur l'équation de Volterra. M. Burgatti examine d'une façon détaillée seulement le cas de l'équation plus simple

$$(31) \quad \int_0^x \left[f_1(x, s) \frac{d\varphi}{ds} + f_0(x, s) \varphi(s) \right] ds = F(x),$$

où l'on a $f_1(x, s) \equiv 1$. On peut remarquer que dans ce cas l'équation (31) se transforme immédiatement en une équation de Volterra, car elle peut s'écrire

$$\varphi(x) - \varphi(0) + \int_0^x f_0(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

et on lit ainsi, d'une façon évidente, le résultat de M. Burgatti suivant lequel l'équation (31), dans l'hypothèse $f_1(x, s) = 1$, admet une solution et une seule prenant à l'origine une valeur donnée quelconque.

(1) *Atti della reale Accademia dei Lincei*, t. XII, 1903, p. 596.

Nous allons montrer que dans le cas général de l'équation (30), si $f_n(x, x)$ n'est pas identiquement nul, il y aura une solution et une seule prenant à l'origine, *ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées*, des valeurs données à l'avance. Il y a une donnée de plus d'arbitraire de ce qu'on pourrait s'y attendre; cela tient à la forme particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre $n - 1$ dont dépend la solution du problème.

Nous transformerons d'abord l'équation (30) en éliminant de sous le signe d'intégration toutes les dérivées de la fonction inconnue. Pour cela il suffit d'appliquer la formule d'intégration par parties généralisées; posons

$$\begin{aligned} f_k(x, s) &= f_{k_0}(s) + f_{k_1}(s) \frac{s-x}{1} + \dots + f_{k_n}(s) \frac{(s-x)^n}{n!} + \dots \\ &= \chi_{k_0}(x) + s\chi_{k_1}(x) + \dots + \frac{s^n}{n!} \chi_{k_n}(x) + \dots, \end{aligned}$$

nous obtenons ainsi l'équation

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0(x)\varphi(x) + \dots + a_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(x) - b_0(x)\varphi(0) - \dots \\ - b_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(0) + \int_0^x \psi_n(x, s)\varphi(s)ds = F(x), \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$\left. \begin{aligned} a_p(x) &= f_{p+1,0}(x) - f_{p+2,1}(x) + \dots + (-1)^{n-p-1} f_{n, n-p-1}(x) \\ b_p(x) &= \chi_{p+1,0}(x) + \dots + (-1)^{n-p-1} \chi_{n, n-p-1}(x) \end{aligned} \right\} (p = 0, \dots, n-1)$$

et

$$\psi_n(x, s) = f_0(x, s) - \frac{df_1(x, s)}{ds} + \dots + (-1)^n \frac{d^n f_n(x, s)}{ds^n}.$$

L'équation (32) est du même type que l'équation (16) du n° 6, sauf la présence des termes qui contiennent les expressions

$$\varphi^{(k)}(0) \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Nous étudierons donc aussi par la méthode des approximations successives, en prenant, pour fixer les idées, le cas de $n = 2$; on a donc à

cette façon. Pour déterminer $\varphi_1(x)$ on se servira de l'équation

$$a_0(x)\varphi_1(x) - b_0(x)\varphi_1(0) + a_1(x)\varphi_1'(x) - b_1(x)\varphi_1'(0) \\ = -\int_0^x \psi_2(x,s)\varphi_0(s)ds = \Phi_1(x),$$

et l'on prendra l'intégrale qui s'annule ainsi que sa première dérivée à l'origine; on aura donc

$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = C = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi_1(x) = \gamma_1 \int_0^x Q(x)\Phi_1(x)dx.$$

Toutes les autres approximations seront déterminées par les mêmes conditions initiales; par conséquent,

$$\varphi_n(x) = \gamma_n \int_0^x Q(x)\Phi_n(x)dx,$$

et la convergence uniforme et absolue de la série d'approximations en résulte sans peine. Soient M le module maximum de $\varphi_0(x)$ dans son domaine de convergence; N celui de $\psi_2(x,s)$ dans la même région, par rapport aux deux variables x et s ; Q et K ceux de $Q(x)$ et de γ_1 .

Des inégalités évidentes

$$|\varphi_0(x)| < M, \\ |\Phi_1(x)| < NMx$$

et

$$|\varphi_1(x)| < aM \frac{x^2}{2}, \\ |\Phi_2(x)| < aNM \frac{x^3}{1.2.3}$$

et

$$|\varphi_2(x)| < Ma^2 \frac{x^4}{4!}, \\ \dots\dots\dots, \\ |\varphi_n(x)| < Ma^n \frac{x^{2n}}{2^n n!},$$

où $a = kQN$, on déduit la convergence absolue et uniforme dans tout domaine fini de λ , et cette circonstance rend la vérification inutile en vertu d'une remarque déjà faite.

La solution ainsi obtenue prend bien à l'origine, ainsi que sa dérivée première, les valeurs arbitraires qu'on a imposées à $\varphi_0(x)$, car les autres approximations et leurs dérivées s'annulent d'après la manière même dont elles ont été formées.

Il n'y a aucune difficulté à étendre le raisonnement précédent au cas général. La première approximation sera donnée par l'équation

$$(34) \quad \begin{cases} a_{n-1}(1) \varphi_0^{(n)}(x) - b_{n-1}(x) \varphi_0^{(n-1)}(0) + \dots \\ \quad \quad \quad + a_0(x) \varphi_0(x) - b_0(x) \varphi_0(0) = F(x). \end{cases}$$

On doit avoir $F(0) = 0$, de sorte qu'on peut se donner arbitrairement $\varphi(x)$ et ses $n - 1$ premières dérivées à l'origine. Nous prendrons pour $\varphi_0(x)$ une pareille solution, tandis que pour les autres, celles qui s'annulent ainsi que leurs $n - 1$ premières dérivées pour $x = 0$. On obtient ainsi pour $\varphi_n(x)$ une expression de la forme

$$(35) \quad \varphi_n(1) = y_1 \int_0^1 Q_1(x) \Phi_n(x) dx + \dots + y_{n-1} \int_0^1 Q_{n-1}(x) \Phi_n(x) dx,$$

y_1, y_2, \dots, y_n étant un système de solutions fondamental de l'équation différentielle

$$a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x)y = 0,$$

de sorte que la démonstration de la convergence des approximations est identique à celle donnée pour le cas de $n = 2$.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, $f_n(x, x)$ non nul pour $x = 0$. Des circonstances analogues à celles qui se sont présentées dans le cas général de l'équation de Volterra vont diminuer le degré d'arbitraire de la solution, et même des conditions auxiliaires peuvent survenir. Toute la question se réduit à l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre n avec second membre et à un mécanisme d'approximations successives; elle peut être traitée par les méthodes précédentes suivant les différents cas qui peuvent se présenter dans les applications.

Les équations de Volterra non linéaires.

12. Une généralisation de l'équation de Volterra est de ne plus la supposer linéaire par rapport à la fonction inconnue.

Le type

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^x [f_0(x, s)\varphi(s) + f_1(x, s)\varphi^2(s) + \dots \\ + f_n(x, s)\varphi^n(s)] ds = F(x), \end{aligned} \right.$$

ou même le type plus général

$$(37) \quad \varphi(x) + \int_0^x \Phi[x, s, \varphi(s)] ds = F(x),$$

où $\Phi(x, s, t)$ désigne une fonction bien déterminée des trois variables x, s et t , peut être traité par une méthode analogue à celle suivie par M. E. Picard dans sa démonstration classique du théorème d'existence relatif à l'équation différentielle

$$(38) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Remarquons d'ailleurs que cette dernière équation n'est qu'un cas particulier de l'équation (37); en effet, elle peut encore s'écrire sous la forme

$$y(x) - \int_0^x f[s, y(s)] ds = C,$$

où C désigne une constante arbitraire. Elle est donc du type (37), mais son noyau est indépendant de x et la fonction du second membre se réduit à une constante.

Montrons comment on peut étudier l'équation générale (37). Nous prenons comme première approximation

$$\varphi_0(x) = F(x)$$

et comme équation de récurrence pour les approximations

$$\varphi_n(x) = F(x) - \int_0^x \Phi[x, s, \varphi_{n-1}(s)] ds.$$

Les conditions d'existence de la fonction $\Phi[x, s, \varphi_{n-1}(s)]$ vont introduire un raisonnement analogue à celui qu'on fait pour l'équation (38). Supposons que la fonction $\Phi(x, s, t)$ est continue et parfaitement déterminée (¹) lorsque x est en valeur absolue $< a$ et lorsque $|t| < b$; nous aurons aussi, lorsque $|x| < a$,

$$F(x) - |F(s)| < kx.$$

La seconde approximation étant donnée par la relation

$$\varphi_1(x) = F(x) - \int_0^x \Phi[x, s, F(s)] ds,$$

il faut nécessairement que

$$|F(0)| < b.$$

L'expression précédente doit avoir un sens; soit a' un nombre tel que

$$|F(x)| < b,$$

lorsque

$$|x| < a'.$$

Dans l'intervalle égal au plus petit des nombres a et a' , l'expression de $\varphi_1(x)$ aura un sens parfaitement déterminé et l'on aura

$$|\varphi_1(x)| < (k + m)x,$$

en désignant par m le module maximum de $\Phi(x, s, t)$ lorsque x est compris dans cet intervalle et lorsque $|t| < b$.

(¹) Nous considérons le cas des variables réelles où les hypothèses à faire sont plus larges : le raisonnement s'applique *a fortiori* pour le cas des variables complexes et des fonctions analytiques.

Si nous désignons maintenant par h le plus petit des nombres a , a' et $\frac{b}{k+m}$, toutes les approximations auront un sens, pour $|x| < h$.

Comme dans le cas de l'équation (38) c'est la limite vers laquelle tend $\varphi_n(x)$ pour n infini qui donne ici la solution cherchée. Pour le voir, utilisons la relation

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = - \int_0^x \{ \Phi[x, s, \varphi_{n-1}(s)] - \Phi[x, s, \varphi_{n-2}(s)] \} ds.$$

Un raisonnement absolument identique à celui relatif à l'équation (38) nous montre que la série

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \dots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \dots$$

converge uniformément et absolument dans l'intervalle Oh , ce qui démontre, comme c'est bien connu, à la fois l'existence d'une solution et d'une seule.

Pour le cas de l'équation (38) on a $k = 0$, $a' = \infty$, puisque

$$F(x) \equiv F(0) = c;$$

donc h est le plus petit des deux nombres a et $\frac{b}{m}$, et nous retrouvons ainsi le résultat obtenu par M. E. Picard.

Pour l'équation (36) on a $b = \infty$, donc aussi $a' = \infty$; la solution sera donc valable dans tout l'intervalle où les fonctions $f_i(x, s)$ ($i = 1, \dots, n$) et $F(x)$ existent.

Le succès de la méthode des approximations successives pour ce type d'équations de Volterra non linéaires tient uniquement à la présence de $\varphi(x)$ en dehors du signe d'intégration.

Des difficultés d'une nature toute nouvelle se présentent lorsque cette circonstance n'a plus lieu. Prenons l'équation

$$\int_0^x [f_0(x, s) + f_1(x, s)\varphi(s) + \dots + f_n(x, s)\varphi^n(s)] ds = F(x).$$

Si nous la dérivons par rapport à x pour obtenir des termes conte-

nant $\varphi(x)$ en dehors du signe d'intégration, nous obtenons

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} & f_0(x, x) + f_1(x, x) \varphi(x) + \dots + f_n(x, x) \varphi^n(x) \\ & + \int_0^x \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x} \varphi^n(s) \right] ds = \Gamma'(x). \end{aligned} \right.$$

Dans ce cas, les approximations seront données par des équations algébriques de degré n , dont les termes contenant la fonction inconnue sont les mêmes pour toutes les approximations. Par conséquent, chaque approximation sera, en général, une fonction multiforme de x , la relation de récurrence est

$$\begin{aligned} & f_0(x, x) + f_1(x, x) \varphi_p(x) + \dots + f_n(x, x) \varphi_p^n(x) \\ & = \Gamma'(x) - \int_0^x \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x} \varphi_{p-1}^n(s) \right] ds \end{aligned}$$

avec

$$f_0(x, x) + f_1(x, x) \varphi_0(x) + \dots + f_n(x, x) \varphi_0^n(x) = \Gamma'(x)$$

comme équation initiale.

La ramification de ces approximations n'est pas la même, quoique le premier membre des équations algébriques dont on les déduit est le même pour toutes les approximations. Cela tient au second membre, différant avec chaque approximation, ce qui, contrairement au cas des équations différentielles linéaires, a son influence sur la ramification de la solution.

Par conséquent, en général, on ne peut pas même trouver une surface de Riemann sur laquelle toutes les approximations soient des fonctions uniformes, ce qui nous rend bien compte de la nature du problème.

Les équations de Volterra à plusieurs inconnues ou à plusieurs variables indépendantes.

15. Il nous reste maintenant à traiter des systèmes d'équations de Volterra (1) et de l'équation de Volterra à plusieurs variables indépendantes.

(1) V. VOLTERRA, *Atti della r. Acc. dei Lincei, loc. cit.*

Montrons rapidement comment la méthode des approximations successives permet de démontrer simplement l'existence unique d'une solution dans ce dernier cas. Nous prendrons deux variables réelles indépendantes et soit

$$\int_0^x \int_0^y f(x, y; s, t) \varphi(s, t) ds dt = F(x, y)$$

l'équation à étudier. Dérivons-la par rapport à x et y successivement, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} f(x, y; x, y) \varphi(x, y) + \int_0^x f'_x(x, y; s, y) \varphi(s, y) ds \\ + \int_0^y f'_y(x, y; x, t) \varphi(x, t) dt \\ + \int_0^x \int_0^y f''_{xy}(x, y; s, t) \varphi(s, t) ds dt = F''_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Divisant par $f(x, y; x, y)$ que nous supposons différent de zéro pour $x = y = 0$, nous pourrions écrire cette dernière équation sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) + \int_0^x f_1(x, y, s) \varphi(s, y) ds \\ + \int_0^y f_2(x, y, s) \varphi(x, s) ds \\ + \int_0^x \int_0^y f_3(x, y, s, t) \varphi(s, t) dt = \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Les équations des approximations sont

$$\varphi_0(x, y) = \Phi(x, y)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, y) = - \int_0^x f_1 \varphi_{n-1}(s, y) ds \\ - \int_0^y f_2 \varphi_{n-1}(x, s) ds - \int_0^x \int_0^y f_3 \varphi_{n-1}(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Soit (Oh, Ok) le rectangle où les fonctions $f_1(x, y, s)$, $f_2(x, y, s)$

et $f_s(x, y, s, t)$ sont finies et continues par rapport aux quatre variables x, y, s, t , et soient A, B et C les maxima respectifs de leurs valeurs absolues dans ce rectangle. Il est évident que, dans le rectangle $(O\alpha, O\beta)$, où $\alpha \leq h, \beta \leq k$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x, y)| &< k, \\ |\varphi_1(x, y)| &< k(A\alpha + B\beta + C\alpha\beta), \\ \dots\dots\dots \\ |\varphi_n(x, y)| &< k(A\alpha + B\beta + C\alpha\beta)^n. \end{aligned}$$

Si donc on prend α et β suffisamment petits de manière que

$$A\alpha + B\beta + C\alpha\beta < 1,$$

on est assuré de la convergence absolue et uniforme de la série des approximations. La solution est unique dans ce rectangle en vertu d'un raisonnement répété déjà plusieurs fois.

Si l'on veut étendre cette démonstration au rectangle (Oh, Ok) tout entier, on n'a qu'à considérer l'équation *majorante*

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) + A \int_0^x \varphi(s, y) ds \\ + B \int_0^y \varphi(x, s) ds + C \int_0^x \int_0^y \varphi(s, t) ds dt = \Phi(x, y), \end{aligned}$$

qui revient évidemment à l'intégration de l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial y} + Cz = \Phi_{xy}(x, y),$$

avec des valeurs données sur les caractéristiques Ox et Oy , ce qui rentre dans une catégorie de problèmes d'existence étudiés depuis longtemps par M. E. Picard ⁽¹⁾ et dont la solution est extrêmement simple à l'aide de la méthode des approximations successives.

⁽¹⁾ Voir, par exemple, G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. IV; dans l'Appendice, la Note de M. E. Picard.

14. Le principe de la méthode que nous avons employée jusqu'ici s'étend sans aucune difficulté aux systèmes linéaires d'équations de Volterra. Prenons toujours, pour fixer les idées, le cas de deux équations à deux fonctions inconnues

$$\int_0^x A_1(x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x A_2(x, s) \varphi_2(s) ds = F(x),$$

$$\int_0^x B_1(x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x B_2(x, s) \varphi_2(s) ds = \Phi(x).$$

Si nous dérivons une fois les deux équations, nous obtenons

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} A_1(x, x) \varphi_1(x) + A_2(x, x) \varphi_2(x) \\ \quad + \int_0^x \frac{\partial A_1}{\partial x}(x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x \frac{\partial A_2}{\partial x}(x, s) \varphi_2(s) ds = F'(x), \\ B_1(x, x) \varphi_1(x) + B_2(x, x) \varphi_2(x) \\ \quad + \int_0^x \frac{\partial B_1}{\partial x}(x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x \frac{\partial B_2}{\partial x}(x, s) \varphi_2(s) ds = \Phi'(x). \end{array} \right.$$

Si le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} A_1(x, x) & A_2(x, x) \\ B_1(x, x) & B_2(x, x) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro pour $x = 0$, il n'y a aucune difficulté à traiter le problème; on peut alors résoudre le système (40) par rapport à $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, ce qui nous donne

$$\varphi_1(x) + \int_0^x H_1(x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x H_2(x, s) \varphi_2(s) ds = M(x),$$

$$\varphi_2(x) + \int_0^x K_1(x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x K_2(x, s) \varphi_2(s) ds = N(x),$$

et l'application de la méthode des approximations successives est dès lors intuitive.

Si $D(0) = 0$, le raisonnement précédent n'est plus applicable; il faut alors pousser la dérivation du système (40) jusqu'à ce que nous

obtenions, en dehors du signe d'intégration, un système de deux équations différentielles du type de Fuchs. Esquissons la marche à suivre :

Si n est l'ordre du zéro $x = 0$ pour $D(x)$, il y a deux cas à distinguer suivant que n est pair ou impair :

1° Si $n = 2k + 1$, il faudra différentier k fois l'une des équations du système (40) et $k + 1$ fois l'autre ;

2° Si $n = 2k$, il faudra différentier k fois les deux équations.

On obtient ainsi dans les deux cas un système de deux équations à deux fonctions inconnues, qui peut se transformer dans un système de deux équations différentielles de Fuchs à une seule fonction inconnue d'ordre n . Nous aurons deux équations algébriques déterminantes qui s'introduisent dans la discussion du problème et la nature de la solution dépendra toujours du signe de la partie réelle de leurs racines ;

nous aurons aussi deux conditions analogues à $\sum_{i=1}^n A_i \neq 0$.

Nous allons appliquer cette méthode à l'étude d'un cas particulier que nous avons laissé de côté parce qu'il nécessitait une étude à part et qui, suivant une remarque de M. V. Volterra, peut se réduire à l'étude d'un système de deux équations de Volterra. Il s'agit de l'équation

$$(41) \quad \int_{-x}^{+x} f(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

qui est du type traité dans le n° 10, dans le cas $\frac{p}{q} = -1$.

Soit

$$(41') \quad f(x, s) = a + bx + cs + \alpha x^2 + \beta xs + \gamma s^2 + f_3(x, s) \quad (abc \neq 0)$$

le développement du noyau et posons

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \quad \text{et} \quad \varphi(-x) = \varphi_2(x).$$

On peut alors écrire l'équation précédente sous la forme

$$\int_0^x f(x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x f(x, -s) \varphi_2(s) ds = F(x),$$

et en changeant x en $-x$

$$\int_0^x f(-x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x f(-x, -s) \varphi_2(s) ds = -F(-x).$$

Nous obtenons ainsi deux équations qui, dans notre hypothèse, sont distinctes; on en déduit par dérivation

$$(42) \quad \begin{cases} f(x, x) \varphi_1(x) + f(x, -x) \varphi_2(x) \\ \quad + \int_0^x f'_x(x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x f'_x(x, -s) \varphi_2(s) ds = F'(x), \\ f(-x, x) \varphi_1(x) + f(-x, -x) \varphi_2(x) \\ \quad - \int_0^x f'_x(-x, s) \varphi_1(s) ds - \int_0^x f'_x(-x, -s) \varphi_2(s) ds = F'(-x). \end{cases}$$

Dans notre cas on a

$$D(x) = \begin{vmatrix} f(x, x) & f(x, -x) \\ f(-x, x) & f(-x, -x) \end{vmatrix} = -4bcx^2 + \dots$$

Par conséquent $D(0) = 0$ et $n = 2$; il faut donc différentier encore une fois les équations (42), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} f(x, x) \varphi_1'(x) + f(x, -x) \varphi_2'(x) + [f'(x, x) + f'_x(x, x)] \varphi_1(x) \\ + [f'(x, -x) + f'_x(x, -x)] \varphi_2(x) + \int_0^x f''_{x^2}(x, s) \varphi_1(s) ds \\ + \int_0^x f''_{x^2}(x, -s) \varphi_2(s) ds = F''(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(-x, x) \varphi_1'(x) + f(-x, -x) \varphi_2'(x) \\ + [f'(-x, x) - f'_x(-x, x)] \varphi_1(x) \\ + [f'(-x, -x) - f'_x(-x, -x)] \varphi_2(x) \\ + \int_0^x f''_{x^2}(-x, s) \varphi_1(s) ds + \int_0^x f''_{x^2}(-x, -s) \varphi_2(s) ds = -F''(-x). \end{aligned}$$

Dans ces formules $f'_x(u, v)$ et $f''_{,2}(u, v)$ désignent pour abrégier les deux premières dérivées partielles de f par rapport à u .

Si donc nous nous reportons au développement (41') de $f(x, s)$, nous voyons que les équations des approximations successives sont de la forme

$$(43) \quad \begin{cases} A(x)\varphi'_1(x) + B(x)\varphi'_2(x) \\ \quad + C(x)\varphi_1(x) + D(x)\varphi_2(x) & = H(x), \\ B(-x)\varphi'_1(x) + A(-x)\varphi'_2(x) \\ \quad - D(-x)\varphi_1(x) - C(-x)\varphi_2(x) & = K(x); \end{cases}$$

où l'on a

$$A(x) = a + (b + c)x + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + \dots,$$

$$B(x) = a + (b - c)x + (\alpha - \beta + \gamma)x^2 + \dots,$$

$$C(x) = 2b + c + (4\alpha + 3\beta + 2\gamma)x + \dots,$$

$$D(x) = 2b - c + (4\alpha - 3\beta + 2\gamma)x + \dots$$

Si nous considérons d'abord les équations (43) sans second membre, on en déduit par l'élimination de $\varphi_1(x)$, l'équation du second ordre

$$(44) \quad M(x)\varphi''_2(x) + N(x)\varphi'_2(x) + P(x)\varphi_2(x) = 0;$$

où l'on a

$$M(x) = \begin{vmatrix} A(x) & B(x) \\ B(-x) & A(-x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A(x) & C(x) \\ B(-x) & -D(-x) \end{vmatrix} = 16acb^2x^2 + \dots,$$

$$N(x) = \begin{vmatrix} A(x) & A'(x) + C(x) & C'(x) & B'(x) + D(x) \\ B(-x) & -B'(-x) - D(-x) & D'(-x) & -A'(-x) - C(-x) \\ 0 & A(x) & C(x) & B(x) \\ 0 & B(-x) & -D(-x) & A(-x) \end{vmatrix}$$

$$= 16ab(3bc - 5a\beta)x + \dots$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(x) &= \begin{vmatrix} \mathbf{A}(x) & \mathbf{A}'(x) + \mathbf{C}(x) & \mathbf{C}'(x) & \mathbf{D}'(x) \\ \mathbf{B}(-x) & -\mathbf{B}'(-x) - \mathbf{D}(-x) & \mathbf{D}'(-x) & \mathbf{C}'(-x) \\ 0 & \mathbf{A}(x) & \mathbf{C}(x) & \mathbf{B}(x) \\ 0 & \mathbf{B}(-x) & -\mathbf{D}(-x) & \mathbf{A}(-x) \end{vmatrix} \\
 &= 48ab(bc - a\beta) + \dots
 \end{aligned}$$

L'équation (44) est donc bien du type de Fuchs par rapport à l'origine et l'équation déterminante correspondante est

$$(45) \quad \rho(\rho - 1)cb + \rho(3cb - 5a\beta) + 3bc - 3a\beta = 0.$$

L'équation à laquelle satisfait $\varphi_1(x)$ s'en déduit immédiatement; elle est

$$(46) \quad \mathbf{M}(-x)\varphi_1''(x) - \mathbf{N}(-x)\varphi_1'(x) + \mathbf{P}(-x)\varphi_1(x) = 0;$$

d'où il résulte que l'équation déterminante *coïncide avec* (45). Dans ce problème particulier, il arrive donc que les deux équations algébriques qui doivent jouer le rôle essentiel se réduisent à une seule.

Passons maintenant aux équations (43) avec second membre, c'est-à-dire aux équations des approximations proprement dites; pour cela remarquons d'abord que si $y_1(x)$ et $z_1(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes pour l'équation (44), les fonctions $-y_1(-x)$, $-z_1(-x)$ en seront deux remplissant la même condition pour (46). Il en résulte que nous pouvons appliquer la méthode de la variation des constantes en partant des solutions

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= my_1(x) + nz_1(x), \\
 \varphi_2(x) &= -my_1(-x) - nz_1(-x)
 \end{aligned}$$

et nous obtenons immédiatement

$$(47) \quad \begin{cases} m = \int_0^x \frac{\lambda_1 H + \mu_1 K}{x^{r_1+2}} dx, \\ n = \int_0^x \frac{\lambda_2 H + \mu_2 K}{x^{r_2+2}} dx, \end{cases}$$

où λ_1 et μ_1 sont des fonctions qui en général ne s'annulent pas pour $x = 0$; elles ne s'annulent que si r_1 et r_2 sont des nombres entiers impairs. Il faudra donc, en général, pour que le problème admette une solution finie, que $F(x) = x^3 F_1(x)$, car alors, à partir de la première, toutes les approximations où m et n ont les valeurs (47) seront finies. Le raisonnement est absolument analogue à celui déjà fait pour le cas d'une seule équation de Volterra, et nous arrivons donc à cette conclusion :

Si l'équation (45) a ses deux racines à parties réelles négatives et si $F(x) = x^3 F_1(x)$, l'équation fonctionnelle (41) admet une seule solution finie dans un cercle où $D(x)$ n'a aucun autre zéro que l'origine et où toutes les autres données sont finies et continues.

La méthode que nous avons employée nous a donné à la fois $\varphi(x)$ et $\varphi(-x)$; si l'on se borne au domaine des variables réelles on a ainsi les valeurs de notre fonction inconnue sur l'axe positif et sur l'axe négatif et le problème est ainsi complètement résolu. Dans le cas des variables complexes, il faut encore voir que nous avons la même fonction; or cela résulte simplement des expressions (47) et ayant égard aux seconds membres des équations (43).

DEUXIÈME PARTIE.

1. Dans le n° 3 de la première Partie nous avons montré que, si le noyau est un polynome en x de degré n , la résolution de l'équation de Volterra revient à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n avec certaines conditions initiales données. Nous voulons maintenant montrer que le mécanisme des approximations successives n'a fait qu'éviter l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre infini, en examinant le cas d'un noyau $f(x, s)$ fonction entière en x d'ordre au plus égal à 1 pour toute valeur finie de s . Il existe un intime lien entre la théorie de l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre fini et infini et celle de la résolution d'une équation de Volterra. On peut facilement mettre toute équation différentielle linéaire d'ordre fini sous la forme d'une équation de Volterra, et cette transformation permet de trouver, pour les intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre fini, un développement donné par les approximations successives qui est valable dans tout le domaine d'existence de ces intégrales.

Ces résultats ont été déjà obtenus en appliquant *directement* la méthode des approximations successives; les développements obtenus sont valables *autour* de chaque point du plan, même s'il est une singularité essentielle pour les intégrales, ce qui, théoriquement, rend possible l'étude de la partie caractéristique de cette singularité à l'aide du développement même. Un développement valable dans toute l'étoile d'une intégrale nous est d'ailleurs donné aussi par la méthode de Cauchy-Lipschitz (¹).

On peut donc dire que l'équation de Volterra constitue une forme très avantageuse pour résoudre commodément un problème qui, dans

(¹) Voir, pour ces questions, le *Cours d'Analyse* de M. E. Picard, t. II, 2^e édition, p. 340 et 351.

le cas général et dans le domaine actuel de l'Analyse, correspondrait à quelque chose de très compliqué. Il nous reste donc maintenant à montrer effectivement cette équivalence.

Cette équivalence ne se laisse pas voir intimement si l'on se borne aux variables réelles ; c'est l'introduction de la variable complexe qui jette une vive lumière sur la question en montrant que la solution de l'équation de Volterra est dans le cas général une fonction *multiforme à une infinité de branches*. Ses singularités sont *fixes* en dehors de celles du second membre $F(x)$ et si le noyau est une fonction entière en x et s , ce sont les zéros de la fonction $f(x, x)$ qui sont les points critiques transcendants de la solution ; ils forment ainsi un ensemble dénombrable. On peut encore énoncer ce résultat en disant que l'équation de Volterra a une infinité de solutions dans le domaine complexe et cela nous explique pourquoi nous devons trouver derrière elle une équation différentielle linéaire d'ordre infini.

2. Plaçons-nous dans le cas simple de

$$a_0(0) \neq 0$$

et dérivons $n + 1$ fois l'équation

$$(1) \quad \int_0^x f(x, s) \varphi(s) ds = F(x).$$

Nous obtenons les relations

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & a_0(x) \varphi(x) - \int_0^x \left[a_1(s) + \dots \right. \\ & \quad \left. + a_n(s) \frac{(s-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right] \varphi(s) ds = F'(x), \\ & [a_0(x) \varphi(x)]' - [a_1(x) \varphi(x)] + \int_0^x [a_2(s) + \dots] \varphi(s) ds = F''(x), \\ & \dots\dots\dots \\ & [a_0(x) \varphi(x)]^{(n)} - [a_1(x) \varphi(x)]^{(n-1)} + \dots + (-1)^n [a_n(x) \varphi(x)] \\ & \quad + \int_0^x \left[a_{n+1}(s) + \dots + a_{n+p}(s) \frac{(s-x)^{p-1}}{(p-1)!} + \dots \right] \varphi(s) ds = F^{(n+1)}(x), \end{aligned} \right.$$

en conservant les notations du n° 3 (I^{re} Partie).

Posons

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \left[a_{n+1}(s) + \dots + a_{n+p}(s) \frac{(s-x)^{p-1}}{(p-1)!} + \dots \right] \varphi(s) ds.$$

Nous cherchons les solutions de (12) finies et continues à l'origine; soient m le module maximum de $\varphi(x)$ dans un cercle suffisamment petit de rayon R autour de l'origine et m_k le module maximum de $a_k(s)$ dans le même domaine.

On aura donc dans tout ce cercle

$$|R_n(x)| < k m m_{n+1},$$

où l'on a

$$k = e^n - 1.$$

Or, nous supposons le noyau $f(x, s)$ être, pour toute valeur finie de s , une fonction entière en x d'ordre plus petit que 1⁽¹⁾; elle sera du même ordre en $x - s = t$, pour toute valeur finie de s , car la croissance de la fonction $f(x, s)$ en x et celle de $f(s + t, s)$ en t sont évidemment les mêmes si s a une valeur finie quelconque.

Il en résulte

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = k m \lim_{n \rightarrow \infty} m_{n+1} = 0.$$

Remarquons d'autre part que

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n+1)}(x) = \Phi(x);$$

cette limite existant sûrement dans nos hypothèses, elle sera nulle si l'ordre de $F(x)$ est plus petit que 1.

Nous pouvons maintenant démontrer que toute solution de l'équation fonctionnelle (1) finie et continue à l'origine satisfait à l'équation

(1) Cet ordre ainsi que celui de $F(x)$ peuvent aussi être égaux à 1; mais dans ce cas la croissance de ces fonctions doit être au plus égale à celle de e^x .

différentielle linéaire d'ordre infini

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & |[a_0(x)\varphi(x)]^{(n)} - [a_1(x)\varphi(x)]^{(n-1)} + \dots \\ & \qquad \qquad \qquad + (-1)^n [a_n(x)\varphi(x)]^{(0)} = \Phi(x), \end{aligned} \right.$$

obtenue en faisant, dans la dernière des relations (2), croître n indéfiniment. L'équation (5) est d'une forme tout à fait spéciale : l'indice du rang de ses termes augmente indéfiniment dans *les deux sens*, et nous verrons qu'elle correspond à un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre en nombre infini, ce qui n'est pas identique, comme dans le cas de l'ordre fini, avec une équation différentielle linéaire d'ordre infini proprement dite, c'est-à-dire avec une relation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \dots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \dots = 0$$

entre toutes les dérivées d'une fonction et où l'indice du rang de ses termes augmente indéfiniment dans un *seul* sens.

Pour démontrer notre proposition, remarquons qu'en vertu des formules (3) et (4) on peut déterminer un nombre N suffisamment grand, de façon qu'on ait

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$|F^{(n+1)}(x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dans le cercle de rayon R pour toutes les valeurs de $n \geq N$, ε étant arbitrairement petit; nous aurons donc

$$\begin{aligned} & |[a_0(x)\varphi(x)]^{(n)} - [a_1(x)\varphi(x)]^{(n-1)} + \dots \\ & \qquad \qquad \qquad + (-1)^n [a_n(x)\varphi(x)] - \Phi(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

pour toutes les valeurs de n plus grandes qu'un nombre N ; mais ε est arbitrairement petit. Par conséquent le premier membre de l'équation tend vers $\Phi(x)$ pour $n = \infty$, ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, faisons dans les relations (2) $x = 0$; si n croît indé-

finiment nous obtenons une infinité de relations linéaires entre les valeurs à l'origine de φ et de ses dérivées successives. Si nous désignons par y_0, y_1, y_2, \dots ces valeurs, ces relations seront :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} a_0 y_0 = F'(0), \\ a_0 y_1 + (a'_0 - a_1) y_0 = F''(0), \\ \dots\dots\dots \\ a_0 y_{n-1} + [(n-1)a'_0 - a_1] y_{n-2} \\ \quad + \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} a''_0 - \frac{n-2}{1} a'_1 + a_2 \right] y_{n-3} + \dots \\ \quad + (a_n^{(n-1)} - a_1^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}) y_0 = F^{(n+1)}(0), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

en posant $a_i^{(k)} = a_i^{(k)}(0)$. Puisque $a_0(0) \neq 0$, ces relations vont nous déterminer successivement les valeurs de $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$

Le fait de se donner seulement la valeur d'une fonction et de toutes ses dérivées successives à l'origine ne détermine nullement la fonction, de sorte que l'équation (1) n'équivaut pas aux relations (6) seulement; nous devons adjoindre l'équation différentielle (5), et il nous reste à démontrer qu'une solution finie et continue de (5) satisfaisant aux relations (6) vérifie l'équation fonctionnelle (1).

Pour cela nous partirons de l'équation différentielle

$$(7) \quad [a_0(x)\varphi(x)]^{(n)} + \dots + (-1)^n [a_n(x)\varphi(x)] + S_n(x) = F_{(x)}^{(n+1)}.$$

Si l'on prend n suffisamment grand et si $\varphi(x)$ désigne une solution de l'équation différentielle (5), la fonction $S_n(x)$ sera, en tenant compte de (3) et (4), aussi petite que nous le voulons dans un cercle autour de l'origine où la solution $\varphi(x)$ est finie et continue. En intégrant $n+1$ fois de suite nous obtenons, eu égard aux $n+1$ premières relations (6),

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^x \left[a_0(s) + a_1(s) \frac{s-x}{1} + \dots + a_n(s) \frac{(s-x)^n}{n!} \right] \varphi(s) \\ \quad + \int_0^x \frac{(s-x)^n}{n!} S_n(s) ds = F(x), \end{array} \right.$$

ou en mettant $f(x, s)$ en évidence et posant

$$T_n(x, s) = a_{n+1}(s) \frac{s-x}{n+1} + \dots + a_{n+p}(s) \frac{(s-x)^p}{(n+1) \dots (n+p)} + \dots,$$

$$\int_0^x f(x, s) \varphi(s) ds + \int_0^x \frac{(s-x)^n}{n!} [S_n(s) - T_n(x, s)] \varphi(s) ds = F(x).$$

Or cela est vrai quel que soit n , car *toutes* les relations (6) sont supposées satisfaites; d'autre part la seconde intégrale du premier membre est évidemment infiniment petite avec $\frac{1}{n}$. Si donc n croît indéfiniment nous aurons

$$\int_0^x f(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

c'est-à-dire justement l'équation fonctionnelle cherchée.

3. L'équation différentielle linéaire d'ordre infini (5) ainsi obtenue peut être considérée comme l'adjointe de l'équation

$$(9) \quad \left[a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y \right]_{n \dots \infty} = \Phi(x),$$

qui est évidemment du même type qu'elle, car les indices de ses termes augmentent aussi indéfiniment dans les deux sens. Or l'équation (9) est celle qu'on obtient lorsqu'on veut remplacer par une seule équation différentielle linéaire d'ordre infini le système d'équations différentielles linéaires du premier ordre en nombre infini :

$$(10) \quad \begin{cases} a_0(x) \frac{dy_1}{dx} + a_1(x) y_1 + a_2(x) y_2 + \dots + a_n(x) y_n + \dots = 0, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2, \\ \dots \dots \dots, \\ \frac{dy_n}{dx} = y_{n-1}, \\ \dots \dots \dots, \end{cases}$$

qui est exactement celui qui se rencontre dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini, lorsqu'on veut transformer une pareille équation en un système d'équations différentielles du premier ordre.

Dans le cas de l'ordre infini il y a une certaine différence entre une équation différentielle linéaire d'ordre infini proprement dite et un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre en nombre infini. Appelons *système normal*, par analogie avec le cas de l'ordre fini, un système tel qu'il peut être résolu et d'une façon unique par rapport aux dérivées des fonctions inconnues. Prenons maintenant l'équation

$$(11) \quad a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \dots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \dots = 0$$

et le système (10) qui, par un choix convenable des notations, sont, dans le cas de l'ordre fini, réductibles l'une à l'autre. Si nous cherchons à transformer l'équation (11) dans un système tel que (10), nous obtenons un système de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{dy_n}{dx} &= y_{n+1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et en plus une relation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + \dots = 0.$$

On peut, il est vrai, transformer cette dernière relation aussi dans une équation différentielle en remplaçant l'une quelconque des fonctions inconnues par sa valeur; mais, de quelque manière qu'on procède, nous n'obtiendrons jamais ainsi un système normal, car il y aura toujours deux équations donnant la dérivée d'une *même* fonction.

Le système (10) est donc un système normal, tandis que le système équivalent à (11) ne l'est pas.

4. L'équation de Volterra nous donne aussi le moyen de signaler une autre différence. Nous avons en effet démontré que si la fonction

$$(12) \quad a_0(x) + a_1(x)t + \dots + a_n(x)t^n + \dots$$

est une fonction entière de t , d'ordre plus petit que 1, pour toute valeur finie de x , l'intégration de l'équation dont (9) est l'adjointe se réduit à la résolution d'une équation de Volterra.

Dans la démonstration que nous avons donnée au n° 5 nous devons tenir compte des relations (11), ce qui nous a ainsi conduit à une équation de Volterra, avec un second membre bien déterminé; maintenant on n'a plus à tenir compte d'aucune relation, ce qui nous conduira à un second membre représenté par une fonction arbitraire. Par conséquent, puisque nous ne voulons pas arriver à une équation de Volterra déterminée, la fonction $F(x)$ sera dans ce cas une fonction de la forme

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots,$$

les coefficients b_i étant arbitraires, de sorte que la solution de l'équation de Volterra donne ainsi la solution générale de l'équation (9) avec une infinité dénombrable de constantes arbitraires.

Si l'on applique la même méthode à une équation différentielle (11) proprement dite, il arrive que le noyau de l'équation de Volterra qu'on obtient dans une formule analogue à (8) est *nul*, car il est la limite vers laquelle tend le terme général d'une série qui résulte de la multiplication de deux séries uniformément et absolument convergentes dans tout le plan; on a fait toujours la même hypothèse sur la fonction (12). On n'obtient pas ainsi dans ce cas une équation de Volterra. Voici comment on peut développer les calculs :

Soit

$$(13) \quad a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \dots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \dots = 0$$

l'équation considérée. Par hypothèse la fonction

$$G(x, t) = a_0(x) + a_1(x)t + \dots + a_n(x)t^n + \dots$$

est une fonction entière en t d'ordre plus petit que 1 pour toute valeur finie de x (1).

Soit m_n le maximum de $|a_n(x)|$ sur la circonférence C décrite de l'origine comme centre et avec un rayon r de longueur arbitraire. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n t^n$$

est aussi une fonction entière de t d'ordre plus petit que 1; en effet, on a par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \nu \quad (\alpha > 1)$$

où α est une constante nécessairement et ν une fonction de x , indépendante de n , qui est partout finie à distance finie; on aura donc sur toute la circonférence C, quel que soit n ,

$$n^\alpha \sqrt[n]{|a_n(x)|} < M,$$

M étant une constante, ce qui démontre la proposition.

Si nous considérons donc l'équation (13) et une de ses solutions analytiques, elle pourra être intégrée terme à terme. Faisons cela et par l'application de la formule d'intégration par parties généralisée, ordonnons par rapport aux dérivées de y ; nous obtenons ainsi

$$\int_0^x F_1[a_0(s)] y(s) ds + F_1[a_1(x)] y + F_1(a_2) \frac{dy}{dx} + \dots + F_1(a_n) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots = 0,$$

où l'on a posé

$$F_1[a_n(x)] = a_n(x) - a'_{n+1}(x) + a''_{n+2}(x) + \dots + (-1)^k a^{(k)}_{n+k}(x) + \dots$$

On a bien le droit d'ordonner les termes ainsi obtenus à volonté, car

(1) Cette hypothèse que nous faisons constamment sur la nature du noyau ou sur la fonction $G(x, t)$ paraît être intimement liée à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre infini au point de vue de leurs solutions analytiques, comme nous le ferons voir un peu plus loin.

la série double de leurs modules est convergente. En effet, on a

$$|a_n(x)| + |a'_{n+1}(x)| + \dots + |a^{(k)}_{n+k}(x)| + \dots \\ < \frac{m_n}{1 - \frac{x}{r}} + \frac{m_{n+1}}{r \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2} + \dots + \frac{m_{n+k}}{r^k \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{k+1}} + \dots,$$

et, pour n suffisamment grand,

$$|a_n(x)| + |a'_{n+1}(x)| + \dots \\ < \frac{m_n}{1 - \frac{x}{r}} \left[1 + \frac{\varepsilon}{r \left(1 - \frac{x}{r}\right)} + \dots + \frac{\varepsilon^k}{r^k \left(1 - \frac{x}{r}\right)^k} + \dots \right],$$

ε étant arbitrairement petit.

Il en résulte

$$|a_k(x)| + \dots + |a^{(k)}_{n+k}(x)| + \dots < \frac{m_n}{r(r-x-\varepsilon)}.$$

On a donc en même temps *a fortiori*

$$|F_1[a_n(x)]| < \frac{m_n}{r(r-x-\varepsilon)}.$$

La série double formée par les modules des termes qui ont résulté de la première intégration converge donc comme

$$\sum_{n < 0}^{\infty} m_n r^n,$$

ce qui justifie notre remarque et nous montre en même temps que nous nous trouvons exactement dans les mêmes conditions qu'au commencement; par suite, nous pourrions continuer cette opération indéfiniment. Une seconde intégration nous donne

$$\int_0^x \{F_1[a_0(s)](x-s) + F_2[a_1(s)]\} ds + F_2(a_2)y(x) + \dots \\ + F_2(a_{n+2}) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots = b_1 x + b_2$$

en posant

$$F_2(a_n) = F_1 F_1(a_n) = F_1(a_n) - F_1'(a_{n+1}) + F_1''(a_{n+2}) + \dots \\ + (-1)^k F_1^{(k)}(a_{n+k}) + \dots,$$

et ainsi de suite. Après $n + 1$ intégrations, nous obtenons

$$\int_0^x \left\{ F_1[a_0(s)] \frac{(x-s)^n}{n!} + F_2[a_1(s)] \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + F_n[a_{n-1}(s)] \right\} y(s) ds \\ + F_n(a_n) y(x) + \dots + F_n(a_{n+k}) \frac{d^k y}{dx^k} + \dots = \frac{a_0 x^n}{n!} + \frac{a_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + a_n$$

en posant, d'une manière générale,

$$F_n(a_k) = F_1 F_{n-1}(a_k).$$

Il est maintenant facile de voir que le noyau de l'intégrale du premier membre tend uniformément vers zéro dans le cercle C lorsque n augmente indéfiniment; en effet, il est le terme général du produit des deux séries

$$1 + \frac{x-s}{1} + \frac{(x-s)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-s)^n}{n!} + \dots$$

et

$$F_1[a_0(s)] + F_2[a_1(s)] + \dots + F_n[a_{n-1}(s)] + \dots$$

qui sont toutes les deux uniformément et absolument convergentes si s se trouve à l'intérieur du cercle C ; sa limite pour $n = \infty$ est donc bien zéro. Nous n'obtenons donc pas par ce procédé une équation de Volterra, mais simplement une infinité de relations linéaires entre les valeurs *initiales* de toutes les dérivées d'une solution analytique quelconque que l'on peut démontrer aisément être de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} y_0^{(n)} = 0 \quad (i = 1, \dots, \infty),$$

les constantes b_{in} étant telles que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} t^n$$

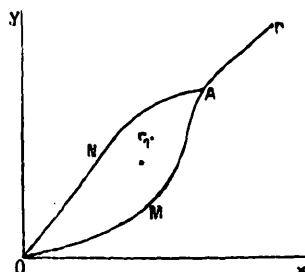
sont des fonctions entières de t d'ordre plus petit que un .

5. La solution de l'équation de Volterra avec un second membre bien déterminé est donc une fonction qui peut aussi être obtenue par l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre infini avec des conditions initiales qui la déterminent complètement. Une pareille fonction est évidemment une fonction multiforme à une infinité de branches dans le cas général, comme cela résulte d'une généralisation de la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini pour une équation différentielle linéaire d'ordre infini qui a *effectivement* une infinité de solutions linéairement indépendantes. On peut retrouver ce caractère par l'étude *directe* de l'équation de Volterra, mais pour cela il faut introduire les variables complexes et considérer dès lors le chemin d'intégration qui figure dans l'expression (7) de la solution comme absolument quelconque. En effet le raisonnement fait au n° 1 de la première Partie peut s'étendre à tout chemin d'intégration qui ne passe par aucun des zéros de la fonction $f(x, x)$, supposée pour simplifier différente de zéro à l'origine, et par aucune des singularités de $F(x)$. Car sur un pareil chemin, toutes les approximations (5) sont bien déterminées et la formule (7) donne donc d'une façon précise la valeur de la solution pour tout point de ce chemin. Pour chaque chemin ainsi choisi, nous aurons une solution parfaitement déterminée en chacun de ses points par la formule (7) où le chemin d'intégration des intégrales est justement le chemin considéré; la fonction $\Pi(x, s)$ dépend aussi d'une manière évidente de ce chemin d'intégration.

La solution ainsi obtenue est *attachée* au chemin d'intégration considéré; pour un chemin donné à l'avance, comme par exemple l'axe positif Ox , elle est unique et bien déterminée. Mais faisons varier ce chemin en ayant soin d'éviter les zéros de $f(x, x)$ et les singularités de $F(x)$; si nous considérons deux chemins allant de l'origine à un point x et ne contenant à leur intérieur aucun zéro de $f(x, x)$ et aucune singularité de $F(x)$, la formule (7) montre clairement que la valeur de $\varphi(x)$ au point x sera la même si l'on y parvient par un chemin ou par l'autre (1).

(1) Si $f(0, 0) = 0$, nous avons vu qu'il y a une indétermination à un nombre fini de constantes linéaires, ce qui ne change évidemment rien aux résultats que nous avons en vue.

Mais prenons maintenant deux chemins entourant, par exemple, un seul zéro r_1 de $f(x, x)$; la différence des valeurs de $\varphi(x)$ qu'on obtient



pour un point de AP suivant qu'on y parvient par le chemin OMAP ou ONAP est égale à

$$\Phi_1(x) = \int_{C_1} \frac{\Pi(x, s) F'(s)}{a_0(s)} ds,$$

C_1 étant un contour suffisamment petit pour entourer le seul zéro r_1 .

Nous pouvons, sans restreindre la portée du raisonnement, supposer la fonction $F(x)$ entière, car les singularités de $F(x)$ ne se rattachent pas intimement à l'équation fonctionnelle; elles sont analogues aux singularités du second membre d'une équation différentielle linéaire d'ordre fini et elles peuvent d'ailleurs être traitées de la même manière que les zéros de $f(x, x)$.

Pour arriver à un point x , nous suivrons d'abord un chemin déterminé que nous désignerons par \overline{Ox} ; tout autre chemin pouvant se réduire à \overline{Ox} suivi d'un nombre de lacets décrits autour des points $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, dans un ordre bien déterminé dépendant du chemin considéré, il résulte que la valeur de $\varphi(x)$ la plus générale sera égale à une valeur déterminée $\overline{\varphi(x)}$ augmentée d'un nombre quelconque de fonctions telles que

$$(13') \quad \Phi_n(x) = \int_{C_n} \frac{\Pi(x, s) F'(s) ds}{a_0(s)},$$

où C_n désigne un contour entourant le seul zéro r_n .

Il est à remarquer que, si l'on tourne autour du point r_n deux fois de suite, le résultat n'est pas égal à $2\Phi_n(x)$; cela tient à ce que la

fonction $\Pi(x, s)$ est elle-même une fonction multiforme admettant l'infinité dénombrable des zéros de $f(x, x) = a_0(x)$ comme points critiques transcendants, qui ne sont pas, par conséquent, de nature logarithmique.

Les fonctions (13') sont évidemment les solutions de l'équation fonctionnelle

$$(14) \quad \int_C f(x, s) \varphi(s) ds = 0,$$

où C désigne un contour quelconque indépendant de x .

Dans ses études sur les opérations distributives, M. Pincherle (1) désigne ces fonctions sous le nom de *racines de l'opération distributive* (14). Elles correspondent à ce que Liouville (2), dans son calcul des dérivées à indices fonctionnaires, appelait les *fonctions complémentaires*.

6. La théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini fournit une application intéressante de ces considérations. Prenons l'équation différentielle linéaire d'ordre n écrite, en divisant par le coefficient de la dérivée d'ordre n , sous la forme

$$(15) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = 0.$$

Elle peut aussi s'écrire, en désignant par $b_1(x), \dots, b_n(x)$ les coefficients de l'équation adjointe, de la façon suivante :

$$\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{d^{n-1} b_1 y}{dx^{n-1}} + \dots + (-1)^n b_n(x) y = 0.$$

Appliquons à cette dernière équation la marche suivie au n° 3 (II); nous obtenons immédiatement l'équation de Volterra équivalente

$$(16) \quad \varphi(x) + \int_0^x f(x, s) \varphi(s) ds = P_{n-1}(x),$$

(1) S. PINCHERLE et O. ANALDI, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, Bologna, 1901.

(2) J. LIOUVILLE, *Sur les fonctions complémentaires* (*Journal de Crelle*, t. 11, 1834, p. 1).

$P_{n-1}(x)$ désignant un polynome arbitraire de degré $n - 1$, et (1)

$$f(x, s) = b_1(\xi) - b_2(\xi) \frac{(x-\xi)}{1} + \dots + (-1)^{n-1} b_n(\xi) \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Remarquons qu'on peut écrire le noyau aussi sous la forme

$$(n-1)!f(x, s) = [a_1(\xi)(x-\xi)^{n-1}]^{(n)} - [a_2(\xi)(x-\xi)^{n-1}]^{(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} a_n(\xi)(x-\xi)^{n-1},$$

les dérivations étant faites par rapport à la variable ξ .

Nous avons ainsi une équation de Volterra d'un type bien déterminé, dont le noyau est un polynome de degré $n - 1$ par rapport à la variable x et dont le second membre est un polynome de degré $n - 1$ avec n coefficients arbitraires.

L'origine a été choisie comme limite inférieure d'intégration, mais il est clair que tout autre point peut être choisi à sa place. La formule [(7), I] donne la solution générale et nous avons ainsi un développement donné par les approximations successives qui est valable dans tout le domaine d'existence de la solution. Cette propriété remarquable de la méthode des approximations successives de fournir pour les équations différentielles linéaires un développement valable dans tout le plan a été donnée par Cauchy (2); une étude plus détaillée à ce point de vue, mais par une méthode différente à celle que nous venons d'indiquer, a été faite par MM. Picard (3), Fuchs (4) et Poincaré (5).

La formule (7) est un instrument commode pour l'étude théorique des équations différentielles linéaires. On peut retrouver les résultats classiques de la théorie des équations différentielles linéaires en se plaçant systématiquement à ce point de vue.

(1) On a, comme c'est bien connu,

$$b_k = a_{k+1} - c_{n-k}^1 a_k' + \dots + (-1)^k c_{n-1}^k a_1^{(k)}.$$

(2) *Œuvres complètes*, 1^{re} série, t. V, p. 394.

(3) E. PICARD, *Cours d'Analyse*, t. II.

(4) FUCHS, *Journal de Crelle*, t. 66, p. 125, 131, 140.

(5) POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. IV, 1884, p. 214.

Remarquons d'ailleurs que le cercle vicieux qui résulterait du fait que nous nous sommes servi dans ce travail justement de la théorie des équations différentielles linéaires pour établir certains résultats sur l'équation de Volterra n'est qu'apparent; l'équation de Volterra (16), à laquelle nous avons réduit l'étude d'une équation différentielle linéaire, est en effet du type simple qui peut être traité directement, sans aucun artifice, par la méthode des approximations successives.

7. Dans tout ce qui précède, nous avons considéré seulement le cas des fonctions analytiques, à cause des variables complexes. Mais il est évident que, dans un domaine plus restreint, par exemple sur l'axe des variables réelles, l'hypothèse sur l'analyticité des données n'est pas indispensable; il suffit d'admettre la continuité des données (noyau et second membre) seulement sur la portion d'axe qui est à considérer. Dans le cas traité au n  3, l'existence d'un certain nombre des dérivées est nécessaire; or cette hypothèse est identique à celle que M. Volterra fait en se donnant *a priori* la forme nécessaire du noyau et du second membre dans ce cas. Il résulte de là que la méthode que nous avons donnée a le même degré de généralité que celle de M. Volterra et qu'en général, dans le cas des variables réelles, pour tous les problèmes traités dans ce travail, on peut remplacer l'hypothèse de l'analyticité des fonctions données par celle de leur continuité et l'existence des dérivées qui interviennent dans les démonstrations.

8. L'hypothèse que nous avons faite relativement à l'ordre du noyau de l'équation de Volterra, et qui nous a permis d'arriver facilement à un type spécial d'équations différentielles linéaires d'ordre infini, paraître intimement liée à ces questions et devoir jouer un rôle important dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre infini.

C'est ce que nous voulons montrer dans ce numéro.

Prenons en effet une équation différentielle linéaire d'ordre infini proprement dite

$$(1) \quad F(y) = a_0(x)y + a_1(x) \frac{dy}{dx} + \dots + a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots = 0.$$

Nous appellerons la fonction

$$G(x, s) = a_0(x) + a_1(x)s + \dots + a_n(x)s^n + \dots$$

la fonction génératrice de l'équation différentielle précédente.

Cherchons les solutions analytiques de $F(y) = 0$; par hypothèse, les coefficients $a_i(x)$ sont des fonctions analytiques uniformes. Soit x_0 un point où une solution analytique de (1) est régulière et supposons que le rayon r_{x_0} du cercle de convergence en ce point est *fini*. La série (1) étant convergente, nous aurons

$$\sqrt[n]{|a_n(x_0)| |y^{(n)}(x_0)|} < k \quad (k > 1)$$

pour n suffisamment grand; on en tire

$$(2) \quad n \sqrt[n]{|a_n(x_0)|} \sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} < ke.$$

Si la limite de $\sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}}$ pour $n = \infty$ est unique et bien déterminée, on sait qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} = \frac{1}{r_{x_0}}.$$

Dans les autres cas $\frac{1}{r_{x_0}}$ est la plus grande des limites de l'expression précédente; par conséquent, il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles

$$(3) \quad \left| \sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} - \frac{1}{r_{x_0}} \right| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit et n suffisamment grand.

Dans le premier cas, on déduit de (2)

$$(4) \quad n \sqrt[n]{|a_n(x_0)|} < A \quad (A > ke r_{x_0}),$$

c'est-à-dire la fonction génératrice $G(s, t)$ est une fonction entière de t d'ordre ≤ 1 pour toutes les valeurs de x pour lesquelles y est holomorphe. Dans le second, l'inégalité (4) est vraie pour toutes les

valeurs de n telles que

$$\sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} > a \quad (a \neq 0),$$

a étant une constante positive. Dans ce cas la fonction $G(x, t)$ aura une infinité de termes dont la décroissance est analogue à ceux d'une fonction entière d'ordre plus petit ou égal à un, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles y est holomorphe. Si donc nous considérons l'ensemble E des points où cette condition n'est pas satisfaite, il sera formé en général par les singularités des solutions analytiques; mais si, en prenant une solution analytique déterminée, l'ensemble de ses singularités est une partie de E seulement, il faudra conclure que le reste constitue un ensemble de points où la solution analytique considérée ne satisfait plus à l'équation (1). Cette circonstance peut bien se présenter, comme le montre l'exemple suivant.

Prenons l'équation différentielle

$$(5) \quad (1-x)y + \frac{dy}{dx} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{dy^n}{dx^n} + \dots = 0.$$

La fonction $\Gamma(x)$ satisfait bien à cette équation dans toute la région du plan située à l'extérieur des cercles de rayon 1 décrits des points 0, -1, -2, ..., -n, ... comme centres. En effet, pour un pareil point, on a, en posant $y = f(x)$,

$$y + \frac{dy}{dx} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n y}{dx^n} + \dots = f(x+1),$$

et par conséquent l'équation différentielle (2) revient à l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) = xf(x).$$

Mais, dans un point situé à l'intérieur d'un des cercles précédents, le développement $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n y}{dx^n}$ est évidemment divergent, tandis que le produit $xf(x)$ est partout fini sauf aux centres. L'équation différentielle n'y est donc plus satisfaite.

Cette circonstance est nouvelle et caractéristique aux équations différentielles linéaires d'ordre infini. Il n'est donc pas suffisant de s'assurer qu'une fonction analytique non entière satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre infini dans un point pour en conclure qu'elle y satisfait dans tout son domaine d'existence. Il faudra analyser à part les points x du plan pour lesquels la fonction génératrice *est une fonction entière d'ordre* > 1 . S'il existe des pareils points qui soient réguliers pour une solution analytique, celle-ci n'y satisfera certainement plus à l'équation considérée.

Nous appellerons une pareille solution une solution *impropre*, car elle ne présente pas le caractère essentiel d'une solution analytique de satisfaire à l'équation différentielle dans tout son domaine d'existence.

Nous pouvons alors énoncer le résultat précédent sous la forme suivante :

Pour qu'une solution analytique non entière de l'équation (1) ne soit pas impropre, il faut que chaque point x pour lequel la fonction génératrice n'est pas une fonction entière de s d'ordre ≤ 1 soit nécessairement un point singulier de y .

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante. En effet, supposons que la fonction $G(x, s)$ est, quel que soit x , une fonction entière de s d'ordre ≤ 1 . Dans ce cas, les solutions analytiques de (1) ne sont pas nécessairement propres; dans l'exemple précédent, par exemple, on a

$$G(x, s) = e^s - x,$$

qui est bien d'ordre 1 en s pour toute valeur finie de x , et pourtant l'équation différentielle (2) a une solution impropre $\Gamma(x)$. Il est facile d'analyser cet exemple. En effet, la condition de convergence peut s'écrire

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{|y^{(n)}(x_0)|}} > k$$

pour n suffisamment grand, k étant un nombre positif plus grand mais aussi près qu'on veut de l'unité.

Or le premier membre de cette inégalité s'approche autant que nous le voulons du rayon de convergence au point x_0 . Si donc l'équation (5) a une solution non entière, elle ne pourra plus satisfaire à cette équation

pour les points dont la distance au point régulier est plus petite que 1; c'est ce qui arrive pour la fonction $\Gamma(x)$ et de même pour toute solution de (5) ayant au moins un point singulier. *Les solutions propres de (2) sont donc seulement les fonctions entières.*

Passons au cas général; nous avons trouvé

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \sqrt[n]{|a_n(x_0)|} \sqrt[n]{\frac{|y^{(n)}(x_0)|}{n!}} < k$$

qui peut s'écrire (1)

$$ker_{x_0} > \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|a_n(x_0)|}.$$

Si l'ordre de la fonction $G(x_0, s)$ est plus petit que 1, le second membre sera nul et la condition précédente est certainement satisfaite dans tout point non singulier. Nous pouvons donc dire :

Si une équation différentielle linéaire d'ordre infini a une fonction génératrice entière d'ordre plus petit que 1 en s pour toute valeur finie de x , toutes ses solutions analytiques seront propres.

Supposons maintenant l'ordre de $G(x_0, s)$ plus grand que l'unité. Dans ces conditions, le second membre de l'inégalité précédente sera infini; il est donc nécessaire que $r_{x_0} = \infty$. Par conséquent :

Si la fonction génératrice est une fonction entière de t d'ordre plus grand que 1 au moins pour une valeur x_0 de x , l'équation différentielle considérée ne peut avoir comme solutions analytiques propres que des fonctions entières.

Supposons enfin l'ordre égal à 1. Si l'ordre n'est pas bien défini, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x_0)|}$ sera égale à 0 ou à ∞ ; nous aurons donc l'un des deux cas précédemment étudiés. Supposons donc l'ordre bien défini; on aura alors

$$r_{x_0} > A.$$

La solution analytique est impropre si elle a comme point singulier le point x_0 . Donc :

(1) Au moins pour les valeurs de n pour lesquelles l'inégalité (3) a lieu.

Si l'ordre de la fonction génératrice est égal à 1 pour toute valeur de x , les seules solutions propres sont aussi les fonctions entières.

Analysons de plus près le cas où l'ordre est plus grand que l'unité; soit ν cet ordre bien défini. Nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\nu}} \sqrt[\nu]{|a_n(x)|} = k.$$

En général ν et k sont des fonctions analytiques de x ; prenons par exemple

$$a_n(x) = \frac{f(x)^n}{n^{nx}},$$

nous avons

$$\frac{1}{\nu} = x \quad \text{et} \quad k = f(x).$$

Si ν ou c restent finies, aussi grand que soit x , elles se réduiront à des constantes; si elles sont donc réellement variables avec x , elles croîtront indéfiniment autour d'un point au moins du plan x .

On a d'autre part

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\nu}} \sqrt[\nu]{|a_n(x)|} \sqrt{\frac{|y^{(n)}(x)|}{n!}} < ke$$

et, par conséquent,

$$n^{\frac{\nu-1}{\nu}} \sqrt[\nu]{\frac{|y^{(n)}(x)|}{n!}} < \frac{e}{k}.$$

Nous devons donc avoir

$$\mu \leq \frac{\nu}{\nu-1},$$

μ désignant l'ordre de la solution analytique $y(x)$ qui, nous le savons, doit être une fonction entière. On en déduit

$$\nu \leq \frac{\mu}{\mu-1}.$$

Or μ est un nombre fixe. La dernière inégalité ne peut être satisfaite que dans une partie du plan si ν n'est pas constant; le reste devrait donc contenir les singularités de la solution ou constituer une région dans laquelle la solution ne satisfait plus à l'équation. Comme

γ est une fonction entière, la dernière hypothèse est la seule vraie. Il résulte de là que, si ν dépend de x , toutes les solutions analytiques de l'équation différentielle sont impropres.

Enfin, si ν est constant, l'équation différentielle n'admet pour solutions analytiques (si elles existent) que des fonctions entières d'un ordre déterminé, au plus égal à $\frac{\nu}{\nu-1}$. Ces solutions sont propres.

En résumé, *le seul cas où la condition de convergence n'impose nulle condition aux solutions analytiques d'une équation différentielle linéaire d'ordre infini est celui où l'ordre de sa fonction génératrice est plus petit que 1* ; dans ce cas l'ordre est constant.

Si l'ordre est constant et plus grand ou égal à l'unité, pour qu'une solution analytique soit solution de l'équation, il faut qu'elle soit une fonction entière d'ordre déterminé.

Si l'ordre dépend de x , toutes les solutions analytiques seront impropres.

Ce résultat nous montre clairement le rôle important que joue l'ordre de la fonction génératrice, qui, dans le cas de l'équation de Volterra, correspond à l'ordre du noyau.

Relativement aux solutions impropres, nous ferons encore la remarque suivante :

Elles admettent, en général, des singularités *mobiles* qui ne peuvent pas être lues sur l'équation différentielle elle-même. Par exemple, la fonction $\Gamma(x)$ solution impropre de (2) admet comme singularités les pôles du premier ordre $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$. D'ailleurs, la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) = xf(x)$$

est évidemment

$$\Gamma(x)P(x),$$

$P(x)$ désignant une fonction quelconque admettant la période 1. Si donc nous prenons pour $P(x)$ une fonction analytique de période 1 étant singulière dans un point quelconque α , nous obtiendrons en $\Gamma(x)P(x)$ une solution impropre de l'équation (2) admettant la singularité arbitraire α .

Les solutions impropres s'éloignent donc complètement par leurs propriétés de celles des équations différentielles linéaires d'ordre fini.

9. On peut retrouver les résultats concernant l'équation (5) par une méthode directe, car l'équation (2) peut s'intégrer directement en lui appliquant la transformation bien connue de Laplace

$$y = \int_C e^{xt} z(t) dt.$$

Prenons l'équation plus générale

$$(3) \quad P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \dots + P_n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots = 0,$$

où P_i désignent des polynomes de x dont le degré est $\leq p$.

En posant

$$y = \int_C e^{xt} z(t) dt,$$

où C est un contour indépendant de la variable x , nous avons

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \int_C e^{xt} t^n z(t) dt.$$

Donc, si y est une solution, nous devons avoir

$$(4) \quad \int_C e^{xt} (P_0 + P_1 t + \dots + P_n t^n + \dots) z(t) dt = 0.$$

Soit

$$P_n(x) = a_{n0} + a_{n1}x + \dots + a_{np}x^p$$

et ordonnons la parenthèse suivant les puissances de x ; nous obtenons

$$(5) \quad Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \dots + Q_p x^p,$$

en posant

$$Q_i = a_{0i} + a_{1i}t + \dots + a_{ni}t^n + \dots$$

Supposons que les séries Q_i représentent des fonctions entières de t ;

on peut alors remplacer la parenthèse de (4) par le polynôme (5), ce qui nous donne

$$\int_C e^{xt} (Q_0 + Q_1 x + \dots + Q_p x^p) z(t) dt = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_C x^i Q_i e^{xt} z(t) dt &= \int_C Q_i z(t) \frac{d^i}{dt^i} e^{xt} dt \\ &= \left[\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \frac{d^k Q_i z}{dt^k} \frac{d^{i-k-1} e^{xt}}{dt^{i-k-1}} \right]_C + (-1)^i \int_C e^{xt} \frac{d^i Q_i z}{dt^i} dt. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_C e^{xt} (Q_0 + Q_1 x + \dots + Q_p x^p) z(t) dt \\ &= \left[\sum_{i=1}^p \sum_{k \leq i-1} (-1)^k \frac{d^k Q_i z}{dt^k} \frac{d^{i-k-1} e^{xt}}{dt^{i-k-1}} \right] \\ &\quad + \int_C e^{xt} \left[Q_0 z - \frac{dQ_1 z}{dt} + \dots + (-1)^p \frac{d^p Q_p z}{dt^p} \right] dt = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que l'intégrale $\int_C e^{xt} z(t) dt$ soit une solution de l'équation, il faut donc et il suffit que la fonction inconnue $z(t)$ satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{d^p Q_p z}{dt^p} - \frac{d^{p-1} Q_{p-1} z}{dt^{p-1}} + \dots + (-1)^p Q_0 z = 0,$$

et que le contour C soit choisi de manière que la parenthèse du second membre de (6) soit nulle quelle que soit x . Cette question demande un théorème relatif à la croissance des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre fini dont les coefficients sont des fonctions entières de x , analogue à celui qui domine les travaux de M. Poincaré dans le cas où les coefficients sont seulement des polynomes en x .

Dans le cas particulier de l'équation (2) on a immédiatement

$$Q_0 = e^t, \quad Q_1 = -1.$$

Pour que l'expression

$$\int_c e^{xt} z(t) dt$$

satisfasse à (2) il faut donc d'abord que z soit une solution de l'équation

$$\frac{dz}{dt} + e^t z = 0,$$

ce qui nous donne

$$z = C e^{-t}.$$

En faisant le changement de variables $e^t = u$, nous avons la solution

$$y = \int_c u^{x-1} e^{-u} du,$$

avec la condition

$$(7) \quad (u^x e^{-u})_c = 0.$$

La condition (7) nous montre immédiatement que le contour C ne peut être situé tout entier à distance finie. La seule racine en u indépendante de x de l'équation transcendante

$$(8) \quad u^x e^{-u} = 0$$

est $u = +\infty$. Nous prendrons le contour C , partant du point $+\infty$, retournant plusieurs fois autour de l'origine et revenant au point $+\infty$.

Nous obtenons ainsi, dans le cas d'un seul tour autour de l'origine, la solution

$$\int_c u^{x-1} e^{-u} du = (e^{2\pi i x} - 1) \Gamma(x),$$

et, en général, si l'on fait n tours autour de l'origine,

$$(e^{2\pi i n x} - 1) \Gamma(x).$$

Ce sont toutes des *fonctions entières*, ce qui concorde avec les

recherches précédentes. Nous obtenons ainsi une infinité dénombrable de solutions linéairement indépendantes et qui sont toutes propres.

En limitant le domaine de x , au domaine réel et positif, par exemple, $u = 0$ est une nouvelle racine de (8) et nous obtenons ainsi l'expression bien connue de $\Gamma(x)$

$$\int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du,$$

solution qui sera impropre.