JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Notes sur les axes principaux du temps de parcours

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 4 (1908), p. 107-124.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__107_0>

Note sur les axes principaux du temps de parcours;

PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE,
Membre de l'Institut.

§ I.

1. J'ai donné dans les *Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto* (1906) une étude sur le *centre de gravité du temps de parcours*, c'est-à-dire du système matériel formé par l'émanation qu'abandonne un mobile sur les divers éléments de sa trajectoire proportionnellement au temps employé à les franchir.

J'ai su depuis lors que cette notion de dissémination (si naturellement suggérée aujourd'hui par les automobiles) s'était déjà, à l'occasion de la théorie de Pallas, présentée à Gauss et ultérieurement à Bour, pour l'évaluation du potentiel de la masse d'une planète répartie par la pensée le long de son orbite en raison du temps de la marche.

Je n'ai d'ailleurs pas connaissance qu'aucun géomètre ait envisagé sur ce terrain la recherche du centre de gravité. L'autonomie de mon Mémoire subsiste donc intégralement, d'autant plus que j'y ai, en outre, abordé la substitution au temps, pour constituer la densité de la trajectoire, de divers autres éléments de la Dynamique générale, tels que l'énergie, la force centrifuge, etc.

Le centre de gravité et le potentiel se trouvant ainsi introduits dans cet ordre de considérations, il m'a semblé qu'il y avait lieu d'y rattacher encore la troisième des théories fondamentales de la Géométrie des masses, à savoir celle des moments et des axes principaux d'inertie; et tel est l'objet de cette Note. Je m'occuperai en premier lieu de la recherche de ce système d'axes, et tout d'abord pour un mouvement plan.

2. Je le rapporte à deux axes rectangulaires Ox, Oy. Pour chercher en un point quelconque Ω, de coordonnées a, b, les axes principaux du temps réparti le long d'un arc M_0M de la trajectoire, je trace en ce point deux autres axes rectangulaires ΩX, ΩY respectivement inclinés sur les précédents sous un angle i. Il nous suffira de former relativement à ce système l'intégrale $\int_{t_0}^{t} XY\,dt$. La valeur de i qui sera capable de l'annuler fournira les axes cherchés.

Les formules de transformation des coordonnées nous donnent à cet égard

$$X = (x-a)\cos i + (y-b)\sin i,$$
$$Y = (y-b)\cos i - (x-a)\sin i.$$

On en déduit

$$XY = (x-a)(y-b)(\cos^2 i - \sin^2 i) - [(x-a)^2 - (y-b^2)]\sin i \cos i$$

et, par suite,

$$2XY = 2(x-a)(y-b)\cos 2i - [(x-a)^2 - (y-b)^2]\sin 2i,$$

d'où, en intégrant le long de l'arc M_0M, c'est-à-dire entre x_0, y_0, t_0 et x, y, t,

$$2\int XY\,dt = 2\cos 2i \int (x-a)(y-b)\,dt$$
$$- \sin 2i \int [(x-a)^2 - (y-b)^2]\,dt.$$

Il vient d'après cela, en égalant cette valeur à zéro,

$$(1) \qquad \tan 2i = \frac{2\int (x-a)(y-b)\,dt}{\int [(x-a)^2 - (y-b)^2]\,dt}.$$

Telle est la formule générale qui résoudra la question pour un point (a, b) du plan, après qu'on aura, au moyen des deux équations du mouvement, exprimé les trois variables x, y, t en fonction d'une seule d'entre elles et effectué les intégrations.

On sait d'ailleurs que la série des valeurs de i que fournit une relation de cette forme se réduit à quatre distinctes, correspondant aux diverses branches de l'angle droit $X\Omega Y$. Nous pourrons, par conséquent, nous en tenir à la plus petite d'entre elles en valeur absolue.

3. Considérons, comme exemple très simple, le mouvement parabolique des graves représenté par les équations

$$x = Vt, \qquad y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Nous aurons, en comptant les arcs à partir du sommet O,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\int_0^t (Vt-a)\left(\frac{gt^2}{2}-b\right)dt}{\int_0^t \left[(Vt-a)^2-\left(\frac{gt^2}{2}-b\right)^2\right]dt},$$

ou, en effectuant les intégrations et supprimant un facteur t aux deux termes de la fraction,

$$\operatorname{tang} 2i = 5\,\frac{3Vgt^3-4agt^2-12bVt+24ab}{-3g^2t^4+20(V^2+bg)t^2-60aVt+60(a^2-b^2)},$$

ce qui peut s'écrire, en fonction des coordonnées de l'extrémité de l'arc OM,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{5}{2}\,\frac{3xy-6bx-4ay+12ab}{5x^2-3y^2-15ax+10by+15(a^2-b^2)}.$$

Telle est la valeur cherchée.

Plaçons en particulier le point Ω en cette même extrémité M. Si nous faisons, à cet effet, $a = x$, $b = y$, il reste simplement

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{25xy}{10x^2-16y^2} = \frac{25}{10\cot\alpha - 16\operatorname{tang}\alpha},$$

en divisant les deux termes du rapport par xy et appelant α l'angle que fait la corde OM avec l'axe Ox.

Choisissons, en particulier, l'arc de parabole dont la corde est également inclinée sur l'axe et sur la tangente au sommet; il vient définitivement, pour $\operatorname{tang}\alpha = \cot\alpha = 1$,

$$\operatorname{tang} 2i = -\frac{25}{6}, \qquad i = -(38^\circ\, 15'\, 8'') = -0{,}425\,(90^\circ).$$

Si nous plaçons en second lieu le point Ω au centre de gravité du temps de parcours (¹) en faisant $a = \frac{x}{2}$, $b = \frac{y}{3}$, de manière à obtenir les *axes principaux centraux du temps*, nous aurons

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{30}{15\cot\alpha - 16\operatorname{tang}\alpha},$$

et pour la corde de 45°

$$\operatorname{tang} 2i = -30, \qquad i = -(44^\circ\, 2'\, 44'') = -0{,}489\,(90^\circ).$$

4. Envisageons comme seconde application le mouvement elliptique que fournit la projection sous l'inclinaison α d'un mouvement circulaire uniforme. Si nous prenons sa vitesse angulaire pour unité, nous aurons comme équations du mouvement elliptique

$$x = \cos t, \qquad y = \cos\alpha \sin t.$$

La formule (1) devient d'après cela, en comptant les arcs à partir du sommet du grand axe,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} 2i &= \frac{2\displaystyle\int_0^t (\cos t - a)(\cos\alpha \sin t - b)\,dt}{\displaystyle\int_0^t [(\cos t - a)^2 - (\cos\alpha \sin t - b)^2]\,dt} \\
&= \frac{2(\cos\alpha \sin^2 t + 2a\cos\alpha\cos t - 2b\sin t + 2abt - 2a\cos\alpha)}{(1+\cos^2\alpha)\sin t\cos t + 4b\cos\alpha\cos t - 2a\sin t + (2a^2 - 2b^2 + \sin^2\alpha)t - 2b\cos\alpha} \\
&= \frac{2(y^2 + ax\cos^2\alpha - by + ab\cos\alpha \arccos x - a\cos^2\alpha)}{(1+\cos^2\alpha)xy + 4bx\cos^2\alpha - 2ay + (2a^2 - 2b^2 + \sin^2\alpha)\cos\alpha \arccos x - 2b\cos^2\alpha}.
\end{aligned}$$

(¹) *Annaes*, 1906, p. 202.

Plaçons par exemple au centre le point Ω, nous aurons plus simplement

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2y^2}{(1+\cos^2\alpha)xy + \sin^2\alpha\cos\alpha \operatorname{arc}\cos x}.$$

Attachons-nous enfin au quart d'ellipse, en faisant $x = 0$, $y = \cos\alpha$,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{4}{\pi}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

et pour une inclinaison de 45° sur le plan de projection

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}, \qquad i = 30^\circ 28' 38'' = 0,339\,(90^\circ).$$

5. Si le problème, au lieu d'embrasser la totalité du plan, n'est posé que pour un point spécial, on pourra toujours adopter ce dernier comme origine. En supposant dès lors $a = b = 0$ dans l'équation générale (1), on la réduit à la forme plus simple

$$(2) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{2\int xy\,dt}{\int (x^2 - y^2)\,dt}.$$

On peut également, en passant aux coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

l'écrire de la manière suivante :

$$(3) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\int r^2 \sin 2\theta\,dt}{\int r^2 \cos 2\theta\,dt}.$$

6. La question précédente (n° 4) constitue un cas particulier de la force centrale, laquelle est ici proportionnelle à la distance. Il est aisé d'aborder la même recherche pour une courbe quelconque parcourue suivant la loi des aires; la loi d'attraction capable d'un tel mouvement étant alors fournie par la formule de Binet.

L'élément du temps se déduira du théorème des aires

$$\frac{1}{2}r^2\,d\theta = \mathrm{C}\,dt.$$

La relation (3) devient par là

$$(4)\qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\int r^4 \sin 2\theta\, d\theta}{\int r^4 \cos 2\theta\, d\theta},$$

et l'on n'aura qu'à y remplacer dans chaque cas r en fonction de θ d'après l'équation de la trajectoire.

7. Considérons comme exemple la spirale logarithmique, pour laquelle la force centrale s'exerce en raison inverse du cube de la distance. Je prendrai son équation sous la forme

$$r = e^{\mathrm{A}\theta}, \qquad \mathrm{A} = \cot\alpha,$$

en appelant α l'angle constant de la courbe avec ses divers rayons vecteurs.

La formule (4) nous donne pour l'arc compté à partir du pôle

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int_{-\infty}^{\theta} e^{4\mathrm{A}\theta} \sin 2\theta\, d\theta}{\int_{-\infty}^{\theta} e^{4\mathrm{A}\theta} \cos 2\theta\, d\theta}.$$

Ces deux intégrales ont pour valeurs

$$\frac{2\mathrm{A}\sin 2\theta - \cos 2\theta}{8\mathrm{A}^2 + 2}\,e^{4\mathrm{A}\theta}, \qquad \frac{2\mathrm{A}\cos 2\theta + \sin 2\theta}{8\mathrm{A}^2 + 2}\,e^{4\mathrm{A}\theta}.$$

L'exponentielle disparaît donc et il reste

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\mathrm{A}\sin 2\theta - \cos 2\theta}{2\mathrm{A}\cos 2\theta + \sin 2\theta} = \frac{\operatorname{tang} 2\theta - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\alpha}{1 + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} 2\theta}.$$

Déterminons un angle auxiliaire β par la condition

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\alpha,$$

nous pourrons écrire

$$\operatorname{tang}2i = \operatorname{tang}(2\theta - \beta),$$
$$i = \theta - \frac{\beta}{2} = \theta - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\alpha\right).$$

On voit par là que l'axe principal fait avec le rayon extrême l'angle constant, facile à construire, $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\alpha\right)$, en tournant de conserve avec ce dernier si on lui fait décrire la courbe.

Il vient en particulier pour la spirale de 45°, comme valeur de cet angle,

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2} = 13^\circ 16' 58'' = 0,146(90^\circ).$$

8. Soit comme seconde application l'équation [1]

$$r = \cos^n\theta.$$

---

[1] L'attraction pour cette famille de courbes est proportionnelle à la fonction de la distance

$$\frac{1-n}{r^3} + \frac{n}{r^{\frac{3n+2}{n}}}.$$

Le premier terme disparaît dans le cas du cercle ($n = 1$), et la force s'exerce alors simplement en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

Pour les autres valeurs, on sait, d'après un théorème de Newton, dont j'ai donné une démonstration rattachée à la théorie des mouvements relatifs (Mallet-Bachelier, 1857, page 3 de ma seconde thèse), que l'influence de l'addition d'un terme inverse au cube du rayon vecteur à une fonction quelconque $\left(\text{qui est ici } nr^{-\frac{3n+2}{n}}\right)$ n'a d'autre effet que de déterminer autour du pôle une rotation de la trajectoire qu'on obtiendrait sous l'influence isolée de la force exprimée par le second terme seul, avec une vitesse angulaire proportionnelle à celle de ce dernier mouvement.

Elle nous donne

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\int_0^\theta \cos^{4n+1}\theta \sin\theta\, d\theta}{\int_0^\theta \cos^{4n}\theta(2\cos^2\theta - 1)\, d\theta} = \frac{\frac{1}{2n+1}(1-\cos^{4n+2}\theta)}{2\int_0^\theta \cos^{4n+2}\theta\, d\theta - \int_0^\theta \cos^{4n}\theta\, d\theta}.$$

Mais la première de ces intégrales peut se ramener à la seconde à l'aide de l'intégration par parties, ce qui permet d'écrire plus simplement

$$(6) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{1-\cos^{4n+2}\theta}{\cos^{4n+1}\theta \sin\theta + 2n\int_0 \cos^{4n}\theta\, d\theta}.$$

Toutes les fois que $4n$ sera un nombre entier positif ou négatif, le même mode de réductions successives permettra d'effectuer le résultat au moyen de deux suites terminées bien connues, selon le signe de cet exposant ([1]).

9. Envisageons de même la famille de courbes qui dérive de la précédente en réduisant tous ses azimuts à moitié sans changer ses rayons vecteurs ([2])

$$r = \cos^n 2\theta.$$

([1]) On réussirait de même les intégrations par les procédés classiques pour les équations de la forme

$$r = \sum c \sin^m\theta \cos^n\theta,$$

avec des exposants entiers de signes quelconques, ainsi que pour les courbes

$$r = \sum c\,\theta^n e^{p\theta} \cos q\theta,$$

avec des valeurs de n entières et positives; notamment pour la famille des spirales algébriques

$$r = \theta^n.$$

([2]) Haton de la Goupillière, *Note sur la transformation la plus générale des engrenages de roulement* (*Annales des Mines*, 6e série, t. V, p. 333).

Nous aurons dans ce cas

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\displaystyle\int_0^\theta \cos^{4n} 2\theta \sin 2\theta \, d(2\theta)}{\displaystyle\int_0^\theta \cos^{4n+1} 2\theta \, d(2\theta)} = \frac{1 - \cos^{4n+1} 2\theta}{(4n+1)\displaystyle\int_0^\theta \cos^{4n+1} 2\theta \, d(2\theta)},$$

et cette intégrale s'obtient dans les mêmes conditions que pour la recherche précédente.

Si l'on prend, par exemple, $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire la lemniscate de Bernoulli, il vient

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{1 - \cos^3 2\theta}{\sin 2\theta(\cos^2 2\theta + 2)}.$$

Pour la demi-boucle de cette courbe, on obtient

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{1}{2},$$

d'où la valeur de i déjà rencontrée (5).

§ II.

10. Ainsi que je l'ai indiqué en commençant, on peut également matérialiser la trajectoire à l'aide de n'importe quel élément de la Dynamique générale autre que le temps. Il suffit, pour en trouver les axes principaux, de substituer à la différentielle dt dans les formules générales (1), (2), (3) l'élément en question quel qu'il soit. Je me bornerai d'ailleurs à un seul pour ne pas trop étendre cette Note, à savoir l'énergie recueillie ou perdue le long de la route.

Son accroissement infiniment petit est $v\,dv$, si l'on adopte comme unité de masse celle du mobile. La relation (2) se trouve donc remplacée par la suivante :

$$(7) \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{2\displaystyle\int xyv\,dv}{\displaystyle\int (x^2 - y^2)v\,dv}.$$

On déduira dans chaque cas de l'équation des forces vives la valeur de $v\,dv$ en fonction des coordonnées, on exprimera l'une d'elles en fonction de l'autre à l'aide des équations du mouvement ou de celle de la trajectoire, et l'on n'aura plus qu'à effectuer les intégrations.

11. Supposons comme application qu'une ligne donnée soit parcourue sous l'influence de la gravité. Le travail élémentaire $v\,dv$ aura pour valeur $g\,dy$ (en employant des ordonnées plongeantes), et la formule (7) nous donnera

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\int_{y_0}^{y} xy\,dy}{\int_{y_0}^{y} (x^2 - y^2)\,dy},$$

en remplaçant x en fonction de y d'après l'équation de la trajectoire.

Je prendrai comme exemple le pendule simple, c'est-à-dire l'équation du cercle

$$x = \sqrt{1 - y^2},$$

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int_{y_0}^{y} \sqrt{1-y^2}\, 2y\,dy}{\int_{y_0}^{y} (1 - 2y^2)\,dy} = \frac{-(1-y^2)^{\frac{3}{2}} + (1-y_0^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}y - y^3\right) - \left(\frac{3}{2}y_0 - y_0^3\right)}.$$

Si l'on fait partir l'oscillation du niveau du centre ($y_0 = 0$), en l'étendant jusqu'au point le plus bas ($y = 1$), on obtient la valeur

$$\operatorname{tang} 2i = 2, \qquad i = 31^\circ 43' 3'' = 0{,}352\,(90^\circ).$$

12. Supposons en second lieu qu'une courbe arbitraire soit parcourue suivant la loi des aires, sous l'empire d'une force centrale que nous désignerons par F pour l'unité de masse. Le travail élémentaire est $-\mathrm{F}\,dr$, et l'équation (3) devient

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int \mathrm{F} r^2 \sin 2\theta\,dr}{\int \mathrm{F} r^2 \cos 2\theta\,dr}, \tag{8}$$

ou d'après la formule de Binet

$$(9)\qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\displaystyle\int \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] \sin 2\theta\, dr}{\displaystyle\int \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] \cos 2\theta\, dr}.$$

On n'aura plus qu'à remplacer dans chaque cas θ en fonction de r d'après l'équation de la trajectoire et à effectuer les intégrations.

13. Reprenons dans ces nouvelles conditions l'exemple de la spirale logarithmique (n° **7**)

$$r = e^{A\theta}, \qquad dr = A\, e^{A\theta} d\theta, \qquad \frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = (1 + A^2) e^{-A\theta}.$$

L'exponentielle disparaît du produit de ces deux quantités, et la formule (9) se réduit à

$$(10)\qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\displaystyle\int \sin 2\theta\, d\theta}{\displaystyle\int \cos 2\theta\, d\theta}.$$

Quel que soit l'arc envisagé, l'on peut toujours faire passer par une de ses extrémités l'axe polaire [1], ce qui revient à intégrer à partir de zéro. Nous obtenons donc

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \operatorname{tang}\theta, \qquad i = \frac{\theta}{2}.$$

L'axe principal est, par conséquent, toujours la bissectrice des rayons extrêmes.

---

[1] Il faut toutefois faire exception pour le cas où l'on s'attacherait à l'arc fini qui s'étend jusqu'au pôle, en intégrant à partir de $-\infty$. Le résultat deviendrait alors indéterminé; et c'est tout naturel, car le mobile recueille alors une quantité infinie d'énergie, en tournoyant dans tous les sens d'une manière qui échappe à toute détermination.

14. Considérons comme seconde application la spirale sinusoïde

$$r^n = \cos n\theta,$$

d'ordre quelconque n, pour laquelle l'attraction s'exerce en raison inverse de la puissance $2n+3$ de la distance. On trouve à l'aide de calculs dont je supprime le détail

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = (n+1)\cos^{-\frac{2n+1}{n}} n\theta,$$

$$dr = -\cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta \sin n\theta \, d\theta.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (9), nous pouvons supprimer aux deux termes de la fraction le facteur $-(n+1)$, et il reste simplement

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\int \cos^{-3} n\theta \sin n\theta \sin 2\theta \, d\theta}{\int \cos^{-3} n\theta \sin n\theta \cos 2\theta \, d\theta}.$$

Nous devons toutefois excepter formellement à cet égard l'hypothèse $n = -1$ qui annulerait ce facteur commun. Mais ce cas est sans intérêt, car il correspond à la ligne droite avec une force nulle.

On remarquera que l'expression (11) est indépendante du signe de n. Les diverses solutions particulières du problème conviennent donc à des couples de spirales sinusoïdes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques.

15. Énumérons quelques cas spéciaux. On a pour le cercle passant au pôle ($n = 1$) [1], avec attraction en raison inverse de la cinquième puissance de la distance,

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{\int_0^\theta \cos^{-3}\theta \sin 2\theta \sin\theta \, d\theta}{\int_0^\theta \cos^{-3}\theta \cos 2\theta \, d\theta} = \frac{4\theta\cos^2\theta - 2\sin 2\theta}{1 + 4\cos^2\theta \operatorname{Log}\cos\theta}.$$

---

[1] Mais non la solution réciproque $n = -1$, qui vient d'être expressément exclue de cette analyse.

Pour l'hyperbole équilatère rapportée à son centre ($n=-2$) [1], avec attraction en raison directe de la distance,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int_0^\theta \cos^{-3}2\theta \sin^2 2\theta \, d\theta}{\int_0^\theta \cos^{-2}2\theta \sin 2\theta \, d\theta} = \frac{\sin 2\theta - \cos^2 2\theta \operatorname{Log} \operatorname{tang}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{4 \sin^2\theta \cos 2\theta}.$$

Pour la parabole $\left(n = -\frac{1}{2}\right)$ [2], avec attraction vers le foyer en raison inverse du carré de la distance, ce qui constitue le mouvement cométaire,

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int_0^\theta \cos^{-3}\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \sin 2\theta \, d\theta}{\int_0^\theta \cos^{-3}\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \cos 2\theta \, d\theta} = \frac{8\theta - 4\sin\theta - 8 \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{3 - 4\cos\theta + \cos^{-2}\frac{\theta}{2} + 16 \operatorname{Log} \cos\frac{\theta}{2}}.$$

16. Envisageons de même le mouvement planétaire, et déterminons pour le foyer les axes principaux de l'énergie recueillie le long d'un arc d'ellipse représenté par l'équation

$$r = \frac{1}{1 - e\cos\theta}.$$

D'après la loi de gravitation, le produit Fr^2 est constant, sort des intégrales de l'expression (8) et disparaît de leur rapport. Il reste seulement

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int \sin 2\theta \, dr}{\int \cos 2\theta \, dr} = \frac{2\int \cos\theta \sqrt{1-\cos^2\theta} \, dr}{\int (2\cos^2\theta - 1) \, dr},$$

---

[1] Ou la lemniscate ($n = 2$), avec attraction en raison inverse de la septième puissance de la distance.

[2] Ou la cardioïde $\left(n = \frac{1}{2}\right)$, avec une force en raison inverse de la quatrième puissance de la distance.

et comme on a, d'après l'équation de l'orbite,

$$\cos\theta = \frac{r-1}{r},$$

il vient

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2\int (r-1)\sqrt{[(e+1)r-1][(e-1)r+1]}\,\frac{dr}{r^2}}{\int [(\sqrt{2}-e)r-\sqrt{2}][(\sqrt{2}+e)r-\sqrt{2}]\,\frac{dr}{r^2}}.$$

On voit que le dénominateur nous présente à intégrer une fonction rationnelle, et le numérateur un radical carré affectant un trinome du second degré. Nous rentrons donc dans les procédés classiques, mais je ne m'arrêterai pas à en développer les calculs.

17. Supposons enfin que la trajectoire soit représentée par une équation de la forme

$$r = [f(\theta)]^n,$$

avec un exposant n entièrement quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable, positif ou négatif, et une fonction arbitraire f, qui dépend de θ mais nullement de n. Il s'ensuit

$$dr = nf^{n-1} f'\, d\theta,$$

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = f^{-n} + n(n+1)f^{-n-2}f'^2 - nf^{-n-1}f'',$$

et, par conséquent,

$$(13)\qquad \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] dr = n\frac{f'}{f}\left[1 - n\frac{f''}{f} + n(n+1)\frac{f'^2}{f^2}\right] d\theta.$$

Le facteur n sort des signes d'intégration et disparaît de la fraction (9) qui devient

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{\int \frac{f'}{f}\sin 2\theta\, d\theta - n\int \frac{f'f''}{f^2}\sin 2\theta\, d\theta + n(n+1)\int \frac{f'^3}{f^3}\sin 2\theta\, d\theta}{\int \frac{f'}{f}\cos 2\theta\, d\theta - n\int \frac{f'f''}{f^2}\cos 2\theta\, d\theta + n(n+1)\int \frac{f'^3}{f^3}\cos 2\theta\, d\theta}.$$

On voit que n a cessé de figurer en exposant, et que $\tang 2i$ n'en dépend plus que sous la forme

$$\frac{a + bn + cn^2}{A + Bn + Cn^2},$$

avec des coefficients uniquement fonctions de θ. Si donc on fait varier cet exposant *d'une manière continue*, en déformant ainsi progressivement l'arc de trajectoire compris entre deux azimuts déterminés, la rotation des axes principaux de l'énergie autour du pôle sera réglée par cette fraction rationnelle du second degré.

18. Il s'opère même encore une simplification lorsque l'on prend pour la fonction arbitraire $\cos\theta$ [1]. On a dans ce cas $f'' = -f$, et l'expression (13) peut s'écrire

$$\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] dr = n(n+1)\frac{f'}{f}\left(1 + n\frac{f'^2}{f^2}\right) d\theta.$$

Le facteur $n(n+1)$ disparaît [2] de la fraction (9) qui se réduit à la forme

$$\tang 2i = \frac{a + bn}{A + Bn}.$$

Il nous est d'ailleurs facile d'achever alors le calcul.

Prenons, à cet effet, l'équation

$$r = \cos^n\theta. \tag{14}$$

---

(1) La forme $M\cos(\theta + m)$ présente la même propriété, mais n'apporte pas au fond plus de généralité, puisque la constante m n'a d'autre effet que de déplacer l'axe polaire et M de modifier l'unité de longueur.

(2) A la condition d'exclure les deux hypothèses $n = -1$ (ligne droite) et $n = 0$ (cercle décrit autour de l'origine), pour lesquelles il n'y a plus aucune variation d'énergie.

Il nous vient [1]

$$\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right] dr = -n(n+1)\sin\theta\left(\frac{1-n}{\cos\theta} + \frac{n}{\cos^3\theta}\right) d\theta,$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} 2i &= \frac{\int\left(\frac{1-n}{\cos\theta} + \frac{n}{\cos^3\theta}\right)\sin\theta\sin 2\theta\, d\theta}{\int\left(\frac{1-n}{\cos\theta} + \frac{n}{\cos^3\theta}\right)\sin\theta\cos 2\theta\, d\theta} \\ &= \frac{(2\theta - \sin 2\theta)\cos^2\theta + n[(2+\cos^2\theta)\sin 2\theta - 6\theta\cos^2\theta]}{2(\cos 2\theta\sin^2\theta + \cos^2\theta \operatorname{Log}\cos\theta) - n(1 + 2\cos 2\theta\sin^2\theta + 6\cos^2\theta\operatorname{Log}\cos\theta)}.\end{aligned}\right.$$

§ III.

19. Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que de la recherche des axes principaux. Celle des moments d'inertie est aussi facile, et l'on y pourrait trouver quelques exemples méritant d'être remarqués pour leur simplicité. Mais je ne m'y attarderai pas, et me bornerai, pour ne pas trop m'étendre, à formuler pour des conditions quelconques l'expression du moment d'inertie I d'un élément ε de Dynamique générale, quelle qu'en soit la nature. Il nous suffit, à cet égard, d'envisager un axe mené par l'origine sous des angles α, β, γ, puisque la théorie classique permet d'y rattacher toutes les droites parallèles.

Quant à la recherche des axes principaux dans l'espace à trois dimensions, elle se réduit à l'application de la méthode de l'équation en S à l'ellipsoïde que l'on obtient en remplaçant dans l'expression suivante $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par X, Y, Z.

On sait que le moment d'inertie a pour valeur dans ces conditions

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = {} & \cos^2\alpha\int(y^2+z^2)\varepsilon + \cos^2\beta\int(x^2+z^2)\varepsilon + \cos^2\gamma\int(x^2+y^2)\varepsilon \\ & - 2\cos\beta\cos\gamma\int yz\varepsilon - 2\cos\alpha\cos\gamma\int xz\varepsilon - 2\cos\alpha\cos\beta\int xy\varepsilon. \end{aligned}$$

[1] On peut rapprocher l'une de l'autre les formules (6) et (15) qui représentent, pour la même famille de courbes (14), les axes principaux du temps ou de l'énergie.

On peut également vérifier, dans l'hypothèse $n = 1$, la concordance de cette dernière (15) avec (12).

20. Continuons, pour fixer les idées, à prendre, comme élément fondamental ε, l'énergie recueillie en cours de route.

Imaginons spécialement que le mouvement soit effectué sur une courbe quelconque, sous l'action de la gravité, par l'unité de poids. On aura alors, en employant des coordonnées plongeantes,

$$\varepsilon = dz.$$

Déterminons enfin cette trajectoire par les équations paraboliques

$$x = \mathrm{M}z^m, \qquad y = \mathrm{N}z^n,$$

avec des exposants complètement arbitraires ([1]).

Pour diminuer les écritures, je me bornerai à compter les arcs à partir de l'origine, en supposant, à cet effet, les exposants positifs; mais ils reprendraient toute leur généralité si nous intégrions entre des limites quelconques z_0 et z.

Il vient dans ces conditions

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = {} & \cos^2\alpha\int_0^z (\mathrm{N}^2 z^{2n} + z^2)\,dz + \cos^2\beta\int_0^z (\mathrm{M}^2 z^{2m} + z^2)\,dz \\
& + \cos^2\gamma\int_0^z (\mathrm{M}^2 z^{2m} + \mathrm{N}^2 z^{2n})\,dz - 2\mathrm{N}\cos\beta\cos\gamma\int_0^z z^{n+1}\,dz \\
& - 2\mathrm{M}\cos\alpha\cos\gamma\int_0^z z^{m+1}\,dz - 2\mathrm{MN}\cos\alpha\cos\beta\int_0^z z^{m+n}\,dz,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = {} & \cos^2\alpha\left(\frac{\mathrm{N}^2 z^{2n+1}}{2n+1} + \frac{z^3}{3}\right) + \cos^2\beta\left(\frac{\mathrm{M}^2 z^{2m+1}}{2m+1} + \frac{z^3}{3}\right) \\
& + \cos^2\gamma\left(\frac{\mathrm{M}^2 z^{2m+1}}{2m+1} + \frac{\mathrm{N}^2 z^{2n+1}}{2n+1}\right) - \frac{2\mathrm{N}}{n+2} z^{n+2}\cos\beta\cos\gamma \\
& - \frac{2\mathrm{M}}{m+2} z^{m+2}\cos\alpha\cos\gamma - \frac{2\mathrm{MN}}{m+n+1} z^{m+n+1}\cos\alpha\cos\beta,
\end{aligned}$$

([1]) En excluant seulement les valeurs qui conduiraient à des logarithmes dans l'intégration.

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{I}}{z} = \left(\frac{y^2}{2n+1} + \frac{z^2}{3}\right)\cos^2\alpha + \left(\frac{x^2}{2m+1} + \frac{z^2}{3}\right)\cos^2\beta$$
$$+ \left(\frac{x^2}{2m+1} + \frac{y^2}{2n+1}\right)\cos^2\gamma - \frac{2yz}{n+2}\cos\beta\cos\gamma$$
$$- \frac{2xz}{m+2}\cos\alpha\cos\gamma - \frac{2xy}{m+n+1}\cos\alpha\cos\beta.$$

Telle est la valeur du moment d'inertie ([1]). Nous en déduisons d'autre part cette équation en S pour servir de point de départ à la méthode classique de détermination des axes principaux de l'énergie :

$$\frac{(n+2)^2 x^2}{\mathrm{S} - z\left[\frac{z^2}{3} + \frac{y^2}{2n+1} + \frac{(n+2)x^2}{(m+2)(m+n+1)}\right]}$$
$$+ \frac{(m+2)^2 y^2}{\mathrm{S} - z\left[\frac{z^2}{3} + \frac{x^2}{2m+1} + \frac{(m+2)y^2}{(n+2)(m+n+1)}\right]}$$
$$+ \frac{(m+n+1)^2 z^2}{\mathrm{S} - z\left[\frac{x^2}{2m+1} + \frac{y^2}{2n+1} + \frac{(m+n+1)z^2}{(m+2)(n+2)}\right]} + \frac{(m+2)(n+2)(m+n+1)}{z} = 0.$$

([1]) Si l'on emploie par exemple la droite également inclinée sur les trois axes, en faisant

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

on aura simplement

$$\frac{3\mathrm{I}}{2z} = \frac{x^2}{2m+1} + \frac{y^2}{2n+1} + \frac{z^2}{3} - \frac{yz}{n+2} - \frac{xz}{m+2} - \frac{xy}{m+n+1}.$$