JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 3 (1907), p. 5-51.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1907_6_3__5_0>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉSEAUX DE FORMES BILINÉAIRES.

37. Soit

$$T_{lmn} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\alpha \mu_\beta x_\gamma$$

une forme trilinéaire par rapport aux l variables λ, aux m variables μ, aux n variables x.

Proposons-nous de la ramener à une forme canonique par des substitutions linéaires opérées sur chacun de ces systèmes de variables.

Cette question est analogue à celle que nous venons de traiter dans la première Partie de ce Mémoire; mais, quoique la méthode soit la même, les résultats qu'elle donne seront plus variés.

On peut écrire

$$T_{lmn} = \Sigma L_{\beta\gamma} \mu_\beta x_\gamma,$$

les L étant des fonctions linéaires des λ. S'il en existe seulement l' qui soient indépendantes, on pourra les prendre pour variables indépendantes à la place d'une partie des λ et réduire ainsi le nombre des variables du premier système qui figurent dans la forme trilinéaire.

On réduira de même, s'il y a lieu, le nombre des variables μ et celui des variables x.

Nous supposerons qu'aucune simplification de ce genre n'est possible. Nous dirons dans ce cas que T_{lmn} est *irréductible*.

On aura alors nécessairement $l \leqq mn$. Car, les fonctions $L_{\beta\gamma}$ étant en nombre mn, il ne peut y avoir plus de mn de distinctes; mais il y en a au moins l, par hypothèse.

On aura de même $m \leqq ln$, $n \leqq lm$.

Si donc l'un des nombres l, m, n, par exemple l, se réduit à l'unité, on aura $m = n$, et

$$T_{1nn} = \lambda \Sigma a_{\beta\gamma} \mu_\beta x_\gamma \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette expression peut s'écrire

$$T_{1nn} = \lambda \Sigma M_\gamma x_\gamma,$$

les M_γ étant des fonctions distinctes des μ. En les prenant pour variables indépendantes, on obtiendra l'expression canonique

$$T_{1nn} = \lambda \Sigma \mu_\gamma x_\gamma.$$

La solution du problème est beaucoup moins simple si l, m, n sont tous > 1. Nous nous bornerons à l'étude des deux cas suivants :

1° $l = 2$;

2° $l = m = n = 3$.

§ I. — Réduction de T_{2nn}.

38. On a

$$T_{2nn} = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2,$$

φ_1, φ_2 étant bilinéaires par rapport aux μ et aux x.

La réduction de ce faisceau est un problème semblable à celui de la réduction d'un faisceau de formes quadratiques (première Partie, § I). Mais, les Mémoires auxquels nous avons renvoyé (n° 3) ne contenant pas la solution de cette nouvelle question sous une forme absolument explicite, il conviendra d'entrer ici dans plus de détails qu'au paragraphe I.

Nous établirons que l'on peut, par des substitutions opérées uniquement sur les μ et les x, ramener simultanément φ_1 et φ_2 aux formes suivantes :

$$\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi''_1 + \ldots, \qquad \varphi_2 = \varphi'_2 + \varphi''_2 + \ldots;$$

les systèmes *simples* (φ'_1, φ'_2), $(\varphi''_1, \varphi''_2)$, ... n'ayant aucune variable commune, et les deux fonctions φ'_1, φ'_2 qui composent l'un de ces systèmes ayant l'une des quatre expressions suivantes :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi'_1 &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r, \\ \varphi'_2 &= \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \ldots + \mu_{r+1} x_r, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi'_1 &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r, \\ \varphi'_2 &= \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \ldots + \mu_r x_{r+1}, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi'_1 &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r, \\ \varphi'_2 &= \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \ldots + \mu_r x_{r-1} + s(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r), \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi'_1 &= \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \ldots + \mu_r x_{r-1}, \\ \varphi'_2 &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r. \end{aligned} \right.$$

(Le coefficient s qui figure dans le système (3) est un invariant. Le système (4) peut être considéré comme une dégénérescence de (3) correspondant au cas où $s = \infty$.)

39. *Démonstration.* — Supposons d'abord que l'une au moins des deux fonctions φ_1, φ_2, par exemple φ_2, puisse être ramenée à ne contenir qu'une partie des variables μ, x; il en sera ainsi : 1° si $m \gtrless n$; 2° si, m, n étant égaux, le déterminant de φ_2 est nul.

On peut en effet écrire

$$\varphi_2 = \mathrm{M}_1 x_1 + \ldots + \mathrm{M}_n x_n,$$

$M_1, \ldots, M_n$ étant des fonctions linéaires des μ. Soient $M_1, \ldots, M_k$ celles de ces fonctions qui sont linéairement distinctes : k sera au plus égal au plus petit des nombres m, n; il sera moindre, si, m, n étant égaux, le déterminant est nul. Remplaçant d'ailleurs $M_{k+1}, \ldots,$ par leurs valeurs en $M_1, \ldots, M_k$, il viendra

$$\varphi_2 = M_1 X_1 + \ldots + M_k X_k,$$

les X étant des fonctions des x, linéairement distinctes.

Prenons pour variables indépendantes les M et les X à la place d'un nombre égal des variables μ et x. On pourra, sans altérer la forme acquise par φ_2 :

1° Opérer une substitution linéaire quelconque sur l'un des deux systèmes de variables M, X, pourvu qu'elle soit accompagnée de la substitution inverse, effectuée sur les variables de l'autre système;

2° Altérer arbitrairement les autres variables qui par hypothèse ne figurent plus dans φ_2, et que nous désignerons par $x_1, x'_1, \ldots; m_1, m'_1, \ldots.$

Il n'existe pas nécessairement des variables de chacune des deux espèces x_1, m_1; mais il y en aura de l'une d'elles au moins. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y en ait de l'espèce x_1.

40. Les dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'_1}, \cdots$ sont des fonctions linéaires des variables M et m_1. Elles sont distinctes, car, si elles étaient liées par une relation

$$a \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + a' \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'_1} + \ldots = 0,$$

une substitution linéaire qui remplace $x_1, x'_1, \ldots$ par $ax_1 + \ldots$, $a'x_1 + \ldots, \ldots$ ferait disparaître x_1 de la fonction φ_1; le faisceau $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ ne serait donc pas irréductible.

41. Supposons d'abord que parmi ces dérivées il y en ait une, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ par exemple, qui contienne les variables $m_1, m'_1, \ldots.$ Prenons-la pour variable indépendante à la place de l'une de celles-ci et appelons-la μ_1; les termes de φ_1 qui contiennent x_1 et μ_1 seront de la forme $\mu_1(x_1 + \ldots)$;

par le changement de la variable x_1, ils se réduiront à un seul, $\mu_1 x_1$; on aura alors $\varphi_1 = \mu_1 x_1 + \varphi'_1$, φ'_1 ne contenant plus μ_1 ni x_1.

Nous avons ainsi ramené le système proposé (φ_1, φ_2) à la somme d'un système simple $(\mu_1 x_1, 0)$ [c'est un système de l'espèce (3), où $r = 1$, $s = 0$] et d'un autre système (φ'_1, φ_2) qui restera à réduire.

42. Supposons au contraire que les dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \cdots$ ne contiennent que les variables M. Prenons-les pour variables indépendantes à la place d'un nombre égal de celles-ci, et appelons-les $\mu_1, \mu'_1, \ldots$, en continuant d'appeler $M_1, M_2, \ldots$ les autres variables de l'espèce M, s'il en reste.

On aura à ce moment

$$\varphi_1 = \mu_1 x_1 + \mu'_1 x'_1 + \ldots + \varphi'_1,$$

φ'_1 ne contenant plus $x_1, x'_1, \ldots$. Si elle contient encore des termes en $\mu_1, \mu'_1, \ldots$, on les fera disparaître en changeant les variables x_1, $x'_1, \ldots$.

Quant à φ_2, elle est bilinéaire par rapport aux variables X d'une part, μ_1 et M d'autre part. Son déterminant n'étant pas nul, les dérivées

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu'_1}, \quad \ldots; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial M_1}, \quad \ldots$$

seront distinctes. Prenons-les pour variables indépendantes au lieu des X et appelons-les $x_2, x'_2, \ldots; X_1, \ldots$; l'expression de φ_2 sera devenue

$$\mu_1 x_2 + \mu'_1 x'_2 + \ldots + M_1 X_1 + \ldots = \mu_1 x_2 + \mu'_1 x'_2 + \ldots + \varphi'_2,$$

celle de φ_1 étant conservée.

43. On peut, sans altérer la forme des expressions obtenues :

1° Opérer sur les M une substitution quelconque accompagnée de la substitution inverse faite sur les X;

2° Opérer de même une substitution quelconque sur les $x_2, x'_2, \ldots$, pourvu qu'on soumette les x_1, x'_1, ... à la même substitution et les μ_1, μ'_1, ... à la substitution inverse;

3° Enfin accroître les x_2 de fonctions linéaires des X, à condition d'opérer des changements correspondants convenables sur les variables M, μ_1, x_1.

En effet, changeons, par exemple, x_2 en $x_2 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \ldots$. Nous aurons introduit dans φ_2 les nouveaux termes

$$\mu_1(\alpha X_1 + \beta X_2 + \ldots).$$

Mais on pourra les détruire en changeant M_1, M_2, ... en

$$M_1 - \alpha\mu_1, \quad M_2 - \beta\mu_1, \quad \ldots.$$

Cette nouvelle opération introduira dans φ_1 des termes de la forme

$$-\mu_1\left(\alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial M_1} + \beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial M_2} + \ldots\right)$$

qu'on détruira à leur tour en changeant x_1 en

$$x_1 + \alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial M_1} + \beta\frac{\partial\varphi_1}{\partial M_2} + \ldots.$$

Ces opérations vont nous permettre de réduire le système des deux fonctions partielles φ'_1, φ'_2.

44. Les dérivées $\frac{\partial\varphi'_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\varphi'_1}{\partial x'_2}$, ... sont des fonctions des variables m et M. Supposons d'abord qu'elles ne soient pas distinctes. On pourra, par une substitution linéaire opérée sur les x_2 (et accompagnée de changements convenables opérés sur les x_1 et les μ_1), faire disparaître une de ces variables, telle que x_2, de la fonction φ'_1. Si donc nous posons pour abréger

$$\mu'_1 x'_1 + \ldots + \varphi'_1 = \Phi_1, \qquad \mu'_1 x'_2 + \ldots + \varphi'_2 = \Phi_2,$$

le système (φ_1, φ_2) aura été réduit à la somme du système simple $(\mu_1 x_1, \mu_1 x_2)$ et du système (Φ_1, Φ_2) qui restera à réduire.

45. Supposons en second lieu que, ces dérivées étant distinctes, l'une d'elles, la première par exemple, contienne les variables m. Prenons-la comme variable indépendante à la place de l'une de celles-ci et désignons-la par μ_2. On aura pour φ'_1 une expression de la forme

$$\mu_2(x_2 + \alpha x'_2 + \ldots + \beta X_1 \ldots) + \varphi''_1,$$

φ''_1 étant indépendant de μ_2 et de x_2. Mais, en combinant les opérations (2°) et (3°), on peut changer

$$x_2 + \alpha x'_2 + \ldots + \beta X_1 + \ldots \text{ en } x_2,$$

de sorte que les variables x_1, x_2, μ_1, μ_2 ne paraîtront plus dans φ_1 et φ_2 que dans les termes $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ et $\mu_1 x_2$. Nous aurons donc ici encore isolé un système simple

$$(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \mu_1 x_2).$$

46. Enfin, si ces dérivées sont distinctes et ne contiennent que les M, prenons-les pour variables indépendantes à la place d'une partie de celles-ci; désignons-les par μ_2, μ'_2, ..., en continuant d'appeler M_1, M_2, ... les autres variables M, s'il en reste. La fonction φ'_1 aura la forme

$$\mu_2(x_2 + \alpha X_1 + \ldots) + \mu'_2(x'_2 + \alpha' X_1 + \ldots) + \varphi''_1,$$

φ''_1 étant indépendant de x_2, x'_2, ..., μ_2, μ'_2, ... Par des substitutions de l'espèce (3°), on la réduira à

$$\mu_2 x_2 + \mu'_2 x'_2 + \ldots + \varphi''_1,$$

de telle sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + (\mu'_1 x'_1 + \mu'_2 x'_2) + \ldots + \varphi''_1, \\ \varphi_2 &= \mu_1 x_2 + \mu'_1 x'_2 + \ldots + M_1 X_1 + \ldots. \end{aligned}$$

47. Par une suite de raisonnements toute semblable à la précédente, on pourra soit isoler un système simple de l'une des deux formes

$$(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \quad \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3),$$
$$(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3),$$

soit mettre φ_1 et φ_2 sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) + (\mu'_1 x'_1 + \mu'_2 x'_2 + \mu'_3 x'_3) + \ldots + \varphi'''_1,\\ \varphi_2 &= (\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3) \qquad\quad + (\mu'_1 x'_2 + \mu'_2 x'_3) \qquad\quad + \ldots\\ &\qquad + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots .\end{aligned}$$

Cette suite d'opérations ne pouvant se prolonger indéfiniment, on finira nécessairement par isoler un système simple.

48. Nous avons supposé, dans la démonstration qui précède, que l'une au moins des deux fonctions φ_1, φ_2 ne contienne pas toutes les variables. Cette hypothèse ne sera pas réalisée, si, m étant égal à n, φ_1 et φ_2 ont des déterminants différents de zéro.

Considérons dans ce cas, au lieu de φ_2, la fonction $\psi_2 = \varphi_2 - s\varphi_1$, la constante s étant choisie de telle sorte que le déterminant de ψ_2 soit nul. Cette condition fournit pour s une équation de degré n. Ayant pris pour s une racine de cette équation, on pourra, en appliquant à φ_1 et ψ_2 la méthode précédente, extraire du système (φ_1, ψ_2) un ou plusieurs systèmes simples. Puisque φ_1 contient par hypothèse toutes les variables, chacun de ces systèmes devra être de la forme

$$\varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_r x_r, \qquad \psi'_2 = \mu_2 x_1 + \ldots + \mu_r x_{r-1}.$$

On pourra donc, du système

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \psi_2 + s\varphi_1),$$

extraire le système simple

$$(\varphi'_1, \psi'_2 + s\varphi'_1),$$

lequel est de l'espèce (3).

49. L'expression réduite du système (φ_1, φ_2) à laquelle nous sommes arrivés en modifiant les seules variables μ et x, contient autant d'invariants que l'équation en s a de racines distinctes. Mais, si l'on soumet aussi les variables λ à des substitutions linéaires, on pourra donner des valeurs arbitrairement choisies à trois de ces invariants.

Soit en effet (φ'_1, φ'_2) un de nos systèmes simples. Le changement de λ_1, λ_2 en $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2$ changera $\lambda_1\varphi'_1 + \lambda_2\varphi'_2$ en

$$\lambda_1(\alpha\varphi'_1 + \gamma\varphi'_2) + \lambda_2(\beta\varphi'_1 + \delta\varphi'_2).$$

Supposons d'abord que le système simple considéré soit de l'espèce (1)

$$\varphi'_1 = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_r x_r, \qquad \varphi'_2 = \mu_2 x_1 + \ldots + \mu_{r+1} x_r.$$

L'effet de la substitution opérée sur les λ pourra être contrebalancé par d'autres substitutions opérées sur les μ et les x.

En effet, les substitutions qu'on peut faire subir aux λ dérivent des trois opérations élémentaires suivantes :

1° Multiplication de λ_1, λ_2 par une même constante. Divisons les x par cette même constante; $\lambda_1\varphi'_1 + \lambda_2\varphi'_2$ restera inaltéré.

2° Échange de λ_1 et de λ_2. On n'aura qu'à remplacer $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r+1}, x_1, \ldots, x_r$ par $\mu_{r+1}, \mu_r, \ldots, \mu_1, x_r, \ldots, x_1$.

3° Changement de λ_1 en $\lambda_1 + t\lambda_2$; φ'_1 ne sera pas altéré, et φ'_2 sera changé en

$$\varphi'_2 + t\varphi'_1 = (\mu_2 + t\mu_1)x_1 + (\mu_3 + t\mu_2)x_2 + \ldots + (\mu_{r+1} + t\mu_r)x_r.$$

Cette expression est un cas particulier de la suivante :

$$(\mu_2 + a\mu_1)x_1 + (\mu_3 + b\mu_2 + c\mu_1)x_2 + \ldots + (\mu_{r+1} + k\mu_r + \ldots + l\mu_1)x_r$$

qu'on ramène aisément à φ'_2 par des substitutions qui n'altèrent pas φ'_1. En effet, on fera disparaître d'abord le terme $a\mu_1 x_1$ en changeant μ_2, x_1 en $\mu_2 - a\mu_1, x_1 + ax_2$; puis, sans rétablir ce terme supprimé, on fera évanouir les termes $(b\mu_2 + c\mu_1)x_2$ en changeant μ_3, x_2, x_1 en $\mu_3 - b\mu_2 - c\mu_1, x_2 + bx_3, x_1 + cx_3$; etc. Enfin, en modifiant μ_{r+1}, on fera disparaître les derniers termes $(k\mu_r + \ldots + l\mu_1)x_r$.

Les mêmes considérations s'appliquent aux systèmes simples de la forme (2) qui ne diffèrent des précédents que par l'échange des μ avec les x.

50. Supposons enfin que le système simple considéré soit de la forme (3)

$$\varphi_1' = \mathrm{A}, \qquad \varphi_2' = \mathrm{B} + s\mathrm{A},$$

en posant pour abréger

$$\mathrm{A} = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_r x_r, \qquad \mathrm{B} = \mu_2 x_1 + \ldots + \mu_r x_{r-1}.$$

Soient a, b, c des constantes quelconques (a, c n'étant pas nuls). Il est aisé de vérifier que $a\mathrm{A} + b\mathrm{B}$, $c\mathrm{B}$ peuvent être transformés simultanément en A, B.

Posons en effet $a = \alpha c$, $b = \beta c$. Par le changement de μ_k, x_k en $\alpha^{-k+1}\mu_k$, $c^{-1}\alpha^k x_k$, on transformera tout d'abord $a\mathrm{A} + b\mathrm{B}$, $c\mathrm{B}$ en $\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}$, B. On peut ensuite, sans altérer B, transformer en A l'expression $\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}$, ou plus généralement l'expression

$$\begin{aligned}&\mu_1 x_1 + \mu_2(x_2 + a x_1)\\ &\qquad + \mu_3(x_3 + b x_2 + c x_1) + \ldots + \mu_r(x_r + k x_{r-1} + \ldots + l x_1)\end{aligned}$$

dont elle est un cas particulier.

En effet, on fera disparaître le terme ax_1 par le changement de x_2, μ_2 en $x_2 - ax_1$, $\mu_2 + a\mu_3$; puis les termes $bx_2 + cx_1$ en changeant x_3, μ_2, μ_1 en $x_3 - bx_2 - cx_1$, $\mu_2 + b\mu_4$, $\mu_1 + c\mu_4$, etc.; et enfin les termes $kx_{r-1} + \ldots + lx_1$ par le changement de x_r.

De ce résultat, semblable à celui trouvé au n° 5 (pour les fonctions A_x^n, B_x^n), on peut tirer la même conséquence, à savoir qu'un changement de variables λ_1, λ_2 (combiné à des substitutions convenables opérées sur les μ et sur les x) a pour effet d'opérer sur les invariants s une même transformation homographique, ce qui permettra d'assigner à trois d'entre eux des valeurs déterminées, telles que 0, ∞, 1.

En dressant, d'après ce qui précède, le Tableau des types canoniques pour chaque système de valeurs de m, n, on devra, pour éviter les doubles emplois, assigner, par des considérations toutes semblables à celles du n° **9**, un ordre de succession bien défini aux invariants s, s', ..., et réduire le premier à zéro, le second à ∞, le troisième à l'unité.

51. On obtient ainsi le Tableau suivant :

Pour $m=2$, $n=1$, un type

(A) $$\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_2x_1.$$

Pour $m=1$, $n=2$, un type

(B) $$\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_1x_2.$$

Pour $m=2$, $n=2$, deux types :

(C) $$\lambda_1\mu_1x_1 \qquad\qquad +\lambda_2\mu_2x_2,$$

(D) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2)+\lambda_2\mu_2x_1.$$

Pour $m=3$, $n=2$, deux types :

(E) $$\lambda_1\mu_1x_1 \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_2),$$

(F) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2)+\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_2).$$

Pour $m=2$, $n=3$, deux types (déduits des précédents par l'échange des μ avec les x) :

(G) $$\lambda_1\mu_1x_1 \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_1x_2+\mu_2x_3),$$

(H) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2)+\lambda_2(\mu_1x_2+\mu_2x_3).$$

Pour $m=3$, $n=3$, six types :

(I) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_3x_2) \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_3),$$

(J) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3)+\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_2),$$

(K) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3)+\lambda_2\mu_2x_1;$$

(L) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2) \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_2x_1+\mu_3x_3),$$

(M) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2) \qquad\qquad +\lambda_2\mu_3x_3,$$

(N) $$\lambda_1(\mu_1x_1+\mu_3x_3) \qquad\qquad +\lambda_2(\mu_2x_2+\mu_3x_3),$$

etc.

§ II. — Réduction de T_{333}.

52. L'expression

$$T_{333} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\alpha\mu_\beta x_\gamma = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3$$

représente un réseau de formes bilinéaires des variables μ et x, dérivé des trois formes génératrices $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Une substitution linéaire effectuée sur les paramètres λ revient à changer le choix de ces formes génératrices.

A chaque point $P = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$ du plan des λ correspond une forme du réseau (définie à un facteur près). Son déterminant Δ est homogène et du troisième degré en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Les formes de déterminant nul correspondent donc aux points d'une cubique, $\Delta = 0$. L'une quelconque d'entre elles pourra, par un choix convenable des variables μ et x, s'exprimer par une somme de deux termes

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2.$$

Si non seulement Δ, mais tous ses mineurs sont nuls, elle sera réductible à un monome

$$\mu_1 x_1.$$

Mais le réseau ne contiendra de telles formes que dans certains cas exceptionnels.

Soient P_1, P_2 deux points quelconques; ψ_1, ψ_2 les formes correspondantes. Aux divers points de la droite $\mathfrak{D} = P_1P_2$ correspondront les formes du faisceau

$$l_1\psi_1 + l_2\psi_2,$$

que nous appellerons le *faisceau de la droite* $\mathfrak{D}$.

Si parmi les six dérivées $\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}, \frac{\partial\psi_2}{\partial x_k}$ il y en a p linéairement distinctes; si, d'autre part, parmi les six dérivées $\frac{\partial\psi_1}{\partial\mu_k}, \frac{\partial\psi_2}{\partial\mu_k}$ il y en a q distinctes, on pourra choisir les variables de telle sorte que dans les expressions de ψ_1 et de ψ_2 figurent seulement p des variables μ, et q des variables x.

Si $p=q=3$, le faisceau sera irréductible, et pourra être ramené à l'une des six formes canoniques I, J, ..., N du n° **51**. Dans le cas contraire, il pourra se ramener à l'une des huit formes A, B, ..., H du même numéro.

Nous dirons que la droite considérée est de l'espèce (A), (B), etc., suivant que son faisceau a pour expression réduite A ou B, etc. Et nous considérerons l'espèce (A) comme plus simple que l'espèce (B); celle-ci sera plus simple que l'espèce (C), etc.

Aux points d'intersection de la droite $\mathfrak{D}$ avec la cubique Δ correspondent celles des formes du faisceau

$$l_1\psi_1 + l_2\psi_2$$

dont le déterminant est nul. Ce déterminant est homogène et du troisième degré en l_1, l_2.

Si $\mathfrak{D}$ est de l'espèce (N), ce déterminant se réduit à $l_1 l_2(l_1+l_2)$. Il y a trois points d'intersection distincts, et les formes correspondantes sont ψ_2, ψ_1, $\psi_1-\psi_2$.

Si $\mathfrak{D}$ est l'une des espèces (L) ou (M), ce déterminant se réduit à $l_1^2 l_2$. Deux intersections sont réunies au point dont la forme est ψ_2; le dernier point d'intersection a pour forme ψ_1.

Si $\mathfrak{D}$ est de l'une des espèces (J), (K), le déterminant étant égal à l_1^3, les trois intersections se confondent en un seul point.

Enfin, si $\mathfrak{D}$ est de l'une des espèces (A), (B), ..., (I), le déterminant étant identiquement nul, la droite $\mathfrak{D}$ appartiendra tout entière à la cubique Δ.

Ces préliminaires posés, pour opérer la réduction du réseau à sa forme canonique, nous choisirons les côtés λ_1, λ_2, λ_3 du triangle de référence de la même manière qu'au n° **13**, et nous aurons plusieurs cas à discuter successivement.

53. Premier cas : Δ *indécomposable, sans rebroussement.*

La droite λ_3 rencontrant Δ en trois points d'inflexion distincts, son faisceau F sera du type (N).

Changeons, pour plus de symétrie, les signes de x_3 et de λ_2, nous pourrons écrire

$$F = \lambda_1(\mu_1 x_1 - \mu_3 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_3 - \mu_2 x_2) = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2.$$

Ce faisceau contient trois formes de déterminant nul

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad -(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu_2 x_2 - \mu_1 x_1$$

correspondant aux trois points d'inflexion situés sur λ_3.

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} \mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice du réseau. On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{21}\lambda_3 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 & a_{22}\lambda_3 - \lambda_2 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Mais, λ_1, λ_2 étant des tangentes d'inflexion, Δ doit se réduire à la forme

$$A\lambda_3^3 + \lambda_1\lambda_2(B\lambda_1 + C\lambda_2 + D\lambda_3);$$

d'où les équations de condition

$$a_{11} = 0, \qquad a_{22} = 0,$$
$$a_{12}a_{21} = a_{23}a_{32} = a_{31}a_{13}.$$

Les deux produits $a_{12}a_{23}a_{31}$ et $a_{21}a_{32}a_{13}$ ne peuvent être nuls à la fois; car on aurait, en achevant l'identification, $A = 0$; Δ ne serait donc pas indécomposable.

D'ailleurs, ces deux produits s'échangent entre eux, si l'on permute les indices 1 et 2 en changeant en même temps le signe de λ_1, λ_2 (ce qui n'altère pas l'expression de F). Il est donc permis de supposer que $a_{12}a_{23}a_{31}$ n'est pas nul.

On peut encore, sans altérer F, multiplier μ_1, μ_2, μ_3, x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2 par des facteurs de proportionnalité t_1, t_2, t_3, u_1, u_2, u_3, v, v satisfaisant aux relations

$$t_1 u_1 = t_2 u_2 = t_3 u_3 = \frac{1}{v}$$

et du reste arbitraires. Par cette opération, a_{ik} sera multiplié par $t_i u_k$;

les produits $a_{12}a_{21}$, $a_{23}a_{32}$, $a_{31}a_{13}$ par $\frac{1}{v^2}$, a_{33} par $\frac{1}{v}$, et l'on pourra réduire a_{12}, a_{23}, a_{31} à l'unité. Nous devrons poser à cet effet les équations

$$a_{12}t_1u_2 = a_{23}t_2u_3 = a_{31}t_3u_1 = 1$$

ou, en tirant les u des équations précédentes,

$$a_{12}t_1 = vt_2, \qquad a_{23}t_2 = vt_3, \qquad a_{31}t_3 = vt_1.$$

Ces équations détermineront les rapports $t_1 : t_2 : t_3$, si v satisfait à la relation

$$v^3 = a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{a_{12}a_{21}}{v^2} = \rho, \qquad \frac{a_{33}}{v} = \sigma,$$

les coefficients a_{21}, a_{32}, a_{13} seront réduits à ρ et a_{33} à σ.

Nous obtenons ainsi pour φ_3 une expression canonique

$$\varphi_3 = \mu_1(x_2 + \rho x_3) + \mu_2(\rho x_1 + x_3) + \mu_3(x_1 + \rho x_2 + \sigma x_3)$$

aux deux invariants ρ, σ.

Remarquons, toutefois, que, v étant donné par une équation cubique, ρ et σ ne sont pas rigoureusement déterminés. On pourrait les remplacer par $\theta\rho$, $\theta^2\sigma$, θ étant une racine cubique de l'unité.

Il existe, d'ailleurs, autant de manières distinctes de réduire le réseau à une forme canonique de l'espèce précédente que Δ possède de couples de points d'inflexion, soit 36 dans le cas général et 3 si Δ a un point double. Ces divers modes de réduction donneront en général des valeurs différentes pour ρ et σ.

34. Voyons en particulier comment se modifient ces invariants lorsqu'on permute les trois points d'inflexion situés sur une même droite λ_3 et les tangentes correspondantes.

1° Échangeons d'abord λ_1 et λ_2. Le réseau

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3$$

sera changé en

$$\lambda_1\varphi_2+\lambda_2\varphi_1+\lambda_3\varphi_3.$$

Or, si nous changeons

$$\mu_1,\ \mu_2,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \lambda_3 \quad \text{en} \quad \mu_2,\ \mu_1,\ -x_2,\ -x_1,\ -x_3,\ -\frac{1}{\rho}\lambda_3$$

φ_2 s'échange avec φ_1, et $\lambda_3\varphi_3$ se transforme en $\lambda_3\varphi'_3$, φ'_3 étant la fonction qui se déduit de φ_3 par le changement de ρ, σ en $\frac{1}{\rho}$, $\frac{\sigma}{\rho}$.

2° On arrive au même résultat si l'on remplace la droite λ_1 par la tangente au troisième point d'inflexion.

Le déterminant Δ étant ici égal à

$$(\rho^3-\rho\sigma+1)\lambda_3^3+\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2-\sigma\lambda_3),$$

cette dernière tangente aura pour équation

$$\lambda_1-\lambda_2-\sigma\lambda_3=0.$$

A l'ancien triangle de référence $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ nous substituons celui formé par les trois droites

$$(\lambda_1-\lambda_2-\sigma\lambda_3,\ \lambda_2,\ \lambda_3).$$

Les formes correspondantes à ses sommets seront :

$$\begin{aligned}
\varphi'_1 &= \varphi_1 &&= \mu_1x_1-\mu_3x_3,\\
\varphi'_2 &= \varphi_1+\varphi_2 &&= \mu_1x_1-\mu_2x_2,\\
\varphi'_3 &= \varphi_3+\sigma\varphi_1 &&= \mu_1(\sigma x_1+x_2+\rho x_3)+\mu_2(\rho x_1+x_3)+\mu_3(x_1+\rho x_2).
\end{aligned}$$

Si nous changeons $x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_3$ en $-x_3,\ -x_2,\ -x_1,\ \mu_3,\ \mu_1$ les deux premières se transforment respectivement en φ_1, $-\varphi_2$ et la dernière devient le produit de la constante $-\rho$ par

$$\mu_1\left(x_2+\frac{1}{\rho}x_3\right)+\mu_2\left(\frac{1}{\rho}x_1+x_3\right)+\mu_3\left(x_1+\frac{1}{\rho}x_2+\frac{\sigma}{\rho}x_3\right).$$

C'est une expression analogue à φ_3, mais où ρ, σ sont remplacés par $\frac{1}{\rho}$, $\frac{\sigma}{\rho}$.

55. Quelques cas particuliers méritent d'être signalés :

1° Si $\sigma = 0$, les trois tangentes d'inflexion sont concourantes;

2° Δ aura un point double, si l'on a

$$27(\rho^3 - \rho\sigma + 1) + \sigma^3 = 0;$$

3° Le réseau contiendra une forme monome si l'on peut déterminer les λ de telle sorte que tous les mineurs du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \rho\lambda_3 \\ \rho\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \rho\lambda_3 & \sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix}$$

soient nuls.

Cela donne, entre autres équations de condition, celles-ci :

$$\lambda_3(\lambda_3 + \rho\lambda_2) = 0, \qquad \lambda_3(\rho^2\lambda_3 + \lambda_2) = 0.$$

Si λ_3 était nul, les autres équations donneraient

$$\lambda_1\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \qquad \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) = 0;$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ce qui est inadmissible.

On doit donc avoir

$$\lambda_3 + \rho\lambda_2 = 0, \qquad \rho^2\lambda_3 + \lambda_2 = 0;$$

d'où

$$\rho^3 = 1, \qquad \lambda_3 = -\rho\lambda_2.$$

Il viendra ensuite

$$0 = \lambda_1\lambda_2 + \rho\lambda_3^2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Mais $\lambda_2 = 0$ donnerait $\lambda_3 = 0$, solution rejetée. Donc $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Enfin, l'équation

$$\lambda_2(\sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2) + \rho\lambda_3^2 = 0$$

deviendra

$$0 = \lambda_2^2(-\rho\sigma + 2 + 1);$$

d'où

$$\sigma = 3\rho^2.$$

On vérifie aisément que ces valeurs de ρ et de σ et des rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ annulent bien tous les mineurs de Δ.

56. 4° Pour que Δ soit indécomposable, ainsi que nous l'avons supposé, il faut que le coefficient de λ_3^3

$$\rho^3 - \rho\sigma + 1$$

soit $\gtrless 0$. S'il était nul, Δ serait le produit des trois droites

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \sigma\lambda_3.$$

Les faisceaux de ces droites

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3, \quad \lambda_1\varphi_1 + \lambda_3\varphi_3, \quad \lambda_2(\varphi_2 + \varphi_1) + \lambda_3(\varphi_3 + \sigma\varphi_1)$$

sont irréductibles. Considérons, en effet, le premier. Les dérivées

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = -\mu_2, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} = \mu_3, \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = -\mu_1$$

sont linéairement distinctes. De même pour les dérivées

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu_2} = -x_2, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu_3} = x_3, \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = -x_1.$$

La même vérification peut se faire pour les deux autres faisceaux.

Réciproquement, tout réseau où Δ se décompose en trois droites D_1, D_2, D_3, dont les faisceaux soient irréductibles, pourra d'une infinité de manières être ramené à la forme réduite ci-dessus, les invariants étant liés par la relation $\rho^3 - \rho\sigma + 1 = 0$.

Soit, en effet, δ une droite arbitraire coupant D_1, D_2, D_3 en trois points distincts, qu'on peut considérer comme des points d'inflexion, où D_1, D_2, D_3 seront les tangentes. Si donc nous prenons D_1, D_2, δ pour les côtés λ_1, λ_2, λ_3 du triangle de référence, on pourra donner aux formes génératrices du réseau les expressions suivantes :

$$\varphi_1 = \mu_1 x_1 - \mu_3 x_3, \qquad \varphi_2 = \mu_3 x_3 - \mu_2 x_2, \qquad \varphi_3 = \Sigma a_{ik}\mu_i x_k$$

et, Δ devant se réduire à la forme

$$\lambda_1\lambda_2(B\lambda_1 + C\lambda_2 + D\lambda_3),$$

on aura les relations

$$a_{11} = a_{22} = 0, \qquad a_{12}a_{21} = a_{23}a_{32} = a_{31}a_{13},$$

et l'on pourra achever la réduction de φ_3 comme nous l'avons fait, à moins que les produits $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$ ne soient nuls tous les deux. Mais ce cas ne peut se présenter si les faisceaux

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3, \qquad \lambda_1\varphi_1 + \lambda_3\varphi_3$$

des droites λ_1, λ_2 sont irréductibles, ainsi que nous le supposons. Il faudra, en effet, que φ_3 contienne les variables μ_2, x_2 qui ne figurent pas dans φ_2, et aussi μ_1, x_1, qui ne figurent pas dans φ_1. On ne pourra donc avoir à la fois ni $a_{12} = a_{13} = 0$, ni $a_{21} = a_{23} = 0$, ni $a_{21} = a_{31} = 0$, ni $a_{12} = a_{32} = 0$.

Mais d'autre part, si l'un des produits $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$ est nul, les produits égaux $a_{12}a_{21}$, $a_{23}a_{32}$, $a_{31}a_{13}$ le seront aussi, et, comme on peut permuter les indices 1 et 2, il est permis d'admettre que $a_{21} = 0$.

Mais alors les conditions précédentes donneront successivement

$$a_{23} \gtrless 0,\ a_{31} \gtrless 0, \text{ puis } a_{32} = 0,\ a_{13} = 0 \text{ et enfin } a_{12} \gtrless 0, \text{ d'où } a_{12}a_{23}a_{31} \gtrless 0.$$

Il ne convient pas toutefois d'adopter comme type canonique des réseaux où Δ est formé de trois droites dont les faisceaux soient irréductibles l'expression réduite que nous venons de trouver. Car, la réduction pouvant se faire d'une infinité de manières, on ne saurait pas décider si deux réseaux sont équivalents ou non par la comparaison de leurs réduites (lesquelles contiennent une indéterminée). Il sera préférable d'employer un autre procédé de réduction exempt d'ambiguïté. Nous le donnerons plus loin, et il nous conduira à des expressions beaucoup plus simples que la précédente.

Nous maintiendrons donc l'inégalité

$$\rho^3 - \rho\sigma + 1 \gtrless 0$$

comme partie intégrante de la définition du premier type canonique

$$(\mathrm{I})\quad \lambda_1(\mu_1 x_1 - \mu_3 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_3 - \mu_2 x_2) + \lambda_3[\mu_1(x_2 + \rho x_3) + \mu_2(\rho x_1 + x_3) + \mu_3(x_1 + \rho x_2 + \sigma x_3)].$$

57. Deuxième cas : Δ *est indécomposable, mais possède un point de rebroussement* P *et un point d'inflexion* Q.

Prenons pour λ_1, λ_2 les tangentes à Δ aux points Q et P, pour λ_3 la droite PQ ; Δ sera de la forme

$$A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2 \qquad (A \text{ et } B \gtrless 0).$$

D'autre part, λ_3 rencontrant Δ en deux points confondus en $P = (\lambda_2\lambda_3)$, et au point $Q = (\lambda_1\lambda_3)$, son faisceau F appartiendra à l'un des deux types (L), (M), ou, en changeant x_1, x_2 en x_2, $-x_1$, à l'un des deux types

$$(\mathrm{L})' \qquad F = \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$(\mathrm{M})' \qquad F = \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2 \mu_3 x_3.$$

Discutons successivement ces deux hypothèses.

58. 1° Supposons F de la forme (L)'.

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik}\mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice correspondant au sommet $(\lambda_2\lambda_3)$ du triangle de référence : on aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 & a_{21}\lambda_3 - \lambda_1 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 + \lambda_2 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix},$$

expression à identifier avec $A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2$.

On en déduit d'abord

$$a_{11} = a_{33} = 0, \qquad a_{21} = a_{12},$$

puis, en tenant compte de ces premières relations,

$$a_{12}a_{21} + a_{31}a_{13} = 0,$$
$$a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23} = 0,$$
$$a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} = A \gtrless 0.$$

Donc a_{12}, a_{21}, $a_{31}a_{13}$ seront $\gtrless 0$. Car, si l'une de ces quantités était nulle, les deux autres le seraient aussi; donc A serait nul, et Δ décomposable.

Mais on peut supposer $a_{22} = 0$. Changeons en effet μ_1, x_1 en $\mu_1 + t\mu_2$, $x_1 + tx_2$, ce qui n'altère pas F; a_{22} sera changé en $a_{22} + t(a_{12} + a_{21})$, expression qui s'annulera pour une valeur convenable de la constante t.

Changeons enfin μ_1, μ_2, μ_3, x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2 en $t_1\mu_1$, $t_2\mu_2$, $t_3\mu_3$, u_1x_1, u_2x_2, u_3x_3, $\frac{\lambda_1}{t_1u_2}$, $\frac{\lambda_2}{t_2u_2}$, les indéterminées t, u étant liées par les relations

$$t_1u_2 = t_2u_1, \qquad t_2u_2 = t_3u_3.$$

F restera inaltéré, et a_{12}, a_{13}, a_{32} seront multipliés par les facteurs arbitraires

$$t_1u_2, \qquad t_1u_3 = \frac{t_1t_2}{t_3}u_2, \qquad t_3u_2.$$

On pourra donc les choisir de manière à réduire à l'unité a_{12}, a_{13} et aussi a_{32}, s'il n'est pas nul. Les équations de condition donneront les valeurs des autres coefficients.

$$a_{21} = a_{12} = 1, \qquad a_{31} = -a_{13} = -1, \qquad a_{23} = a_{32} = 1 \text{ ou } 0.$$

Nous obtenons ainsi les deux types réduits :

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_2 - \mu_2x_1) + \lambda_2(\mu_2x_2 + \mu_3x_3) \\ \quad + \lambda_3[\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2(x_1 + x_3) + \mu_3(-x_1 + x_2)], \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_2 - \mu_2x_1) + \lambda_2(\mu_2x_2 + \mu_3x_3) \\ \qquad\qquad + \lambda_3[\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2x_1 - \mu_3x_1]. \end{cases}$$

Ces deux types sont bien distincts : on peut d'ailleurs le confirmer comme il suit :

Changeons le rôle des λ et des μ en considérant $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3$ comme une forme bilinéaire des variables λ, x, dépendant des paramètres μ; son déterminant sera une cubique $\Delta'(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ analogue à Δ. Or on aura pour le type (II)

$$\Delta' = -\mu_1(\mu_2^2+\mu_3^2)+\mu_2(\mu_3^2-\mu_2^2),$$

cubique à un seul point double; et pour le type (III)

$$\Delta' = -\mu_1(\mu_2^2+\mu_3^2),$$

système de trois droites.

59. 2° Supposons F de la forme (M)'.

Son expression ne changera pas si l'on opère sur μ_1, μ_2 et sur x_1, x_2 une même substitution linéaire, en divisant λ_1 par le déterminant de cette substitution. Par cette opération on pourra, dans l'expression de la troisième forme génératrice

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik}\mu_i x_k,$$

rendre nul le coefficient a_{11}. En effet, par le changement de μ_2, x_2 en $\mu_2+t\mu_1$, x_2+tx_1 on le change en $a_{11}+t(a_{12}+a_{21})+t^2a_{22}$, expression qu'on pourra rendre nulle si $a_{22}\gtrless 0$. Si a_{22} était nul, on l'échangerait avec a_{11} en permutant μ_1, x_1 avec μ_2, x_2.

Soit donc $a_{11}=0$. On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{21}\lambda_3-\lambda_1 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3+\lambda_1 & a_{22}\lambda_3 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3+\lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Identifiant cette expression avec $A\lambda_3^3+B\lambda_1^2\lambda_2$, il viendra

$$a_{33}=0,\quad a_{12}=a_{21},\quad a_{12}a_{21}=0,\quad \text{d'où}\quad a_{12}=a_{21}=0;$$
$$a_{23}a_{31}-a_{32}a_{13}=0,\qquad a_{13}a_{22}a_{31}=A\gtrless 0.$$

Multiplions μ_1, μ_2, μ_3, x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2 par t_1, t_2, t_3, u_1, u_2, u_3,

$\frac{1}{t_1 u_2}$, $\frac{1}{t_3 x_3}$, les facteurs t, u étant liés par l'unique relation $t_1 u_2 = t_2 u_1$. On pourra les déterminer de manière à réduire à l'unité a_{13}, a_{22}, a_{31}, et aussi a_{32}, si ce dernier coefficient n'est pas nul. Les relations précédentes donneront enfin $a_{23} = a_{32}$.

Assignant successivement à a_{32} les valeurs 1 et 0, nous obtiendrons les deux types réduits :

$$\text{(IV)}\ \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2 \mu_3 x_3 + \lambda_3[\mu_1 x_3 + \mu_2(x_2 + x_3) + \mu_3(x_1 + x_2)],$$
$$\text{(V)}\ \lambda_1(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1) + \lambda_2 \mu_3 x_3 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1).$$

Chacun d'eux contient une droite monome λ_2; les réseaux des types (II) et (III) n'en contenaient aucune.

Formons, d'autre part, comme au numéro précédent, la cubique $\Delta'(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ analogue à Δ; on aura pour le type (IV)

$$\Delta' = \mu_3(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_2\mu_3) \qquad \text{(droite et conique)},$$

et pour le type (V)

$$\Delta' = \mu_3(\mu_1^2 + \mu_2^2) \qquad \text{(trois droites)}.$$

Ce caractère invariant distingue nettement ces deux types l'un de l'autre.

60. Passons à l'examen des cas où Δ est décomposable ou identiquement nul.

Troisième cas : Δ *admet en facteur une droite d'espèce* (A).

Prenons-la pour λ_3. Son faisceau F aura pour expression

$$F = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_1 = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2.$$

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} \mu_i x_k$$

la troisième forme génératrice. Nous pourrons la simplifier par les opérations suivantes qui n'altèrent pas F :

1° On peut remplacer φ_3 par une autre forme $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changer arbitrairement les variables μ_3, x_2, x_3 que F ne contient pas;

3° Opérer sur μ_1, μ_2 une substitution linéaire arbitraire (accompagnée de la substitution inverse effectuée sur λ_1 et λ_2).

61. Supposons d'abord $a_{33} \gtrless 0$. Par les opérations (2) on réduira a_{33} à l'unité, a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32} à zéro.

Par l'opération (1) on détruira ensuite a_{11}, a_{21}; on aura alors

$$\varphi_3 = (a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2)x_2 + \mu_3 x_3,$$

a_{12} et a_{22} ne peuvent être nuls à la fois, car φ_3 doit contenir x_2. Par une opération (3) on le réduira à $\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$.

Nous obtenons ainsi le type

$$\text{(VI)} \qquad \lambda_1\mu_1 x_1 + \lambda_2\mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3^2\lambda_1$$

est formé d'une droite double λ_3 d'espèce (A) et d'une droite simple λ_1, d'espèce (G).

Soit $a_{33} = 0$, mais $a_{32} \gtrless 0$. Ce cas se ramène au précédent par l'échange des variables x_2, x_3.

62. Soit enfin $a_{33} = a_{32} = 0$. Comme φ_3 doit contenir μ_3, a_{31} sera $\gtrless 0$; et, par le changement de μ_3, on pourra réduire a_{11}, a_{21}, a_{31} à 0, 0, 1.

D'autre part, φ_3 contiendra x_2, x_3, respectivement multipliés par $a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2$, $a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2$. Ces deux fonctions sont linéairement distinctes; car, si elles ne l'étaient pas, soit t leur rapport, x_2 et x_3 ne figureraient dans φ_3 que par la combinaison $x_2 + tx_3$, et le réseau ne serait pas irréductible.

On pourra donc par une substitution linéaire opérée sur μ_1, μ_2 (opération 3) réduire les termes en x_2, x_3 à la forme plus simple $\mu_2 x_2 + \mu_1 x_3$.

Nous obtenons ainsi le type

$$\text{(VII)}\qquad \lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_2x_1+\lambda_3(\mu_1x_3+\mu_2x_2+\mu_3x_1).$$

Ici

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ 0 & \lambda_3 & 0\\ \lambda_3 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\lambda_3^3$$

représente une droite triple, d'espèce (A).

Dans chacun des deux types (VI) et (VII) les mineurs de Δ s'annulent tous pour $\lambda_3=0$. Il existe donc dans le réseau une infinité de formes monomes.

63. Quatrième cas : Δ *admet en facteur une droite d'espèce* (B).

Ce cas ne diffère du précédent que par l'échange des deux systèmes de variables μ et x. Cet échange nous fournira deux nouveaux types :

$$\text{(VIII)}\qquad \lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_1x_2+\lambda_3(\mu_2x_2+\mu_3x_3),$$

$$\text{(IX)}\qquad \lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_1x_2+\lambda_3(\mu_1x_3+\mu_2x_2+\mu_3x_1).$$

Dans le premier, Δ sera formé d'une droite double d'espèce (B) et d'une droite simple d'espèce (E). Dans le dernier, Δ sera une droite triple.

Chacun de ces deux réseaux contiendra d'ailleurs une infinité de formes monomes.

64. Cinquième cas : Δ *est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est d'espèce* (C).

La droite λ_3 aura ici pour faisceau

$$F=\lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_2x_2=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2.$$

Soit

$$\varphi_3=\Sigma a_{ik}\mu_ix_k$$

la troisième forme génératrice du réseau. Pour la simplifier, nous disposons des opérations suivantes qui laissent F inaltéré :

1° Changement de φ_3 en $\varphi_3-t\varphi_1-u\varphi_2$;

2° Changement arbitraire des variables x_3, μ_3;

3° Échange des indices 1 et 2;

4° Remplacement de μ_i, x_i, λ_1, λ_2 par $t_i\mu_i$, $u_i x_i$, $\frac{\lambda_1}{t_1 u_1}$, $\frac{\lambda_2}{t_2 u_2}$; t_i, u_i étant des facteurs de proportionnalité arbitraires.

65. Supposons en premier lieu $a_{33} \gtrless 0$. On réduira a_{33} à l'unité, a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32} à zéro (opération 2), puis a_{11}, a_{22} à zéro (opération 1).

Enfin, par l'opération (4), on réduira à l'unité ceux des coefficients restants, a_{12}, a_{21}, qui ne sont pas nuls. Comme on peut d'ailleurs échanger a_{12} avec a_{21} (opération 3), on n'aura que trois cas à distinguer :

1° $a_{12} = a_{21} = 1$, d'où le type

$$\text{(X)} \qquad \lambda_1\mu_1 x_1 + \lambda_2\mu_2 x_2 + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3).$$

Ici

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2)$$

est formé d'une droite et d'une conique qui se coupent; λ_1, λ_2 sont les tangentes en leurs points d'intersection.

Le réseau contient deux formes monomes.

2° $a_{12} = 1$, $a_{21} = 0$. On a le type

$$\text{(XI)} \qquad \lambda_1\mu_1 x_1 + \lambda_2\mu_2 x_2 + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3);$$

$$\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

est formé de trois droites non concourantes λ_1, λ_2, λ_3, d'espèces (E), (G), (C) respectivement.

Il y a deux formes monomes.

3° $a_{12} = a_{21} = 0$. On a le type

$$\text{(XII)} \qquad \lambda_1\mu_1 x_1 + \lambda_2\mu_2 x_2 + \lambda_3\mu_3 x_3,$$

$$\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Les droites λ_1, λ_2, λ_3 sont toutes les trois de l'espèce (C).

Il y a trois formes monomes.

66. Supposons maintenant $a_{33}=0$; φ_3 devant contenir μ_3 et x_3, ni a_{31} et a_{32}, ni a_{13} et a_{23} ne peuvent être nuls à la fois. Donc l'un au moins des quatre produits $a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{32}$, $a_{31}a_{23}$, $a_{32}a_{23}$ sera $\gtrless 0$; et, comme on peut permuter les indices 1 et 2, il est permis d'admettre qu'on ait

$$a_{13}a_{31}\gtrless 0 \quad \text{ou} \quad a_{13}a_{32}\gtrless 0,$$

d'où $a_{13}\gtrless 0$ dans tous les cas, et a_{31} ou $a_{32}\gtrless 0$.

Si a_{13} et a_{31} sont tous deux $\gtrless 0$, on les réduira à l'unité, et a_{11}, a_{12}, a_{21} à zéro (opération 2); on annulera également a_{22} (opération 1). Enfin on réduira à l'unité ceux des deux coefficients restants a_{23}, a_{32} qui ne sont pas nuls (opération 4).

On obtient ainsi quatre types, représentés par la formule

$$\text{(XIII à XVI)} \quad \lambda_1\mu_1x_1+\lambda_2\mu_2x_2+\lambda_3[\mu_1x_3+a_{23}\mu_2x_3+\mu_3(x_1+a_{32}x_2)]$$

et correspondant aux quatre systèmes de valeurs $a_{23}=0,1$, $a_{32}=0,1$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & \lambda_3\\ 0 & \lambda_2 & a_{32}\lambda_3\\ \lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & 0\end{vmatrix}=-\lambda_3^2(\lambda_2+a_{23}a_{32}\lambda_1)$$

sera le produit de la droite double λ_3, d'espèce (C), et d'une droite simple. Celle-ci sera :

D'espèce (I), si...............	$a_{23}=a_{32}=1$	
» (G), si...............	$a_{23}=0$,	$a_{32}=1$
» (E), si...............	$a_{23}=1$,	$a_{32}=0$
» (D), si...............	$a_{23}=a_{32}=0$	

Chacun de ces quatre réseaux contient deux formes monomes.

Le cas où $a_{13}a_{31}$ serait nul, mais $a_{23}a_{32}\gtrless 0$, se ramènerait au précédent par l'échange des indices 1 et 2.

67. Reste à discuter le cas où $a_{13}a_{31}=a_{23}a_{32}=0$. L'un au moins des produits $a_{13}a_{32}$, $a_{23}a_{31}$ sera $\gtrless 0$; et, comme on peut échanger les indices 1 et 2, il est permis de supposer $a_{13}a_{32}\gtrless 0$.

On aura dès lors $a_{31}=a_{23}=0$. On pourra réduire a_{11}, a_{22} à zéro par l'opération 1, a_{12} également par le changement de la variable μ_3. Enfin, par l'opération 4, on réduira à l'unité les coefficients a_{13}, a_{32}, et aussi le coefficient a_{21}, si ce dernier n'est pas nul.

Si $a_{21} = 1$, on aura obtenu le type

$$\text{(XVII)} \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2),$$

où $\Delta = \lambda_3^3$ est une droite triple d'espèce (C).

Ce réseau contient deux formes monomes.

Si $a_{21} = 0$, on aura le type

$$\text{(XVIII)} \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2).$$

Ici Δ est identiquement nul.

68. Sixième cas : *Δ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (D).

Le faisceau de λ_3 sera

$$F = \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1.$$

On dispose, pour simplifier l'expression de

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} \mu_i x_k,$$

des opérations suivantes, qui laissent F inaltéré :

1° Changement de φ_3 en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changement arbitraire des variables μ_3, x_3;

3° Changement de μ_1, λ_2 en $\mu_1 - t\mu_2$, $\lambda_2 + t\lambda_1$;

4° Changement de x_2, λ_2 en $x_2 - t x_1$, $\lambda_2 + t\lambda_1$;

5° Changement de μ_i, x_k, λ_1, λ_3 en $t_i \mu_i$, $u_k x_k$, $\frac{\lambda_1}{t_1 u_1}$, $\frac{\lambda_2}{t_2 u_1}$, les facteurs t_i, u_i étant liés par la relation $t_1 u_1 = t_2 u_2$.

69. Supposons d'abord $a_{33} \gtrless 0$.

Par l'opération 2 on réduira a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} à 0, 0, 0, 0, 1; puis on annulera a_{11}, a_{21} par l'opération 1.

Cela posé, si a_{12} n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1 (opération 4), puis annuler a_{22} par l'opération 3. On aura ainsi le type réduit

$$(\text{XIX}) \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3),$$

où la cubique

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_2 \lambda_3)$$

est formée de la droite λ_3 et d'une conique tangente.

Si $a_{12} = 0$, mais $a_{22} \gtrless 0$, on pourra le rendre égal à l'unité, et l'on obtiendra le type

$$(\text{XX}) \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3).$$

Ici la cubique

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_1(\lambda_3 + \lambda_1)$$

est formée de trois droites concourantes

$$\begin{aligned} \lambda_3, &\text{ d'espèce (D)}, \\ \lambda_1, &\text{ d'espèce (G)}, \\ \lambda_3 + \lambda_1, &\text{ d'espèce (E)}. \end{aligned}$$

Resterait l'hypothèse $a_{12} = a_{22} = 0$; mais elle doit être rejetée ; car le réseau contiendrait la droite λ_1, dont le faisceau, se réduisant à $\lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3 \mu_3 x_3$, serait d'espèce (C); λ_3 ne serait donc pas le facteur le plus simple de Δ.

70. Passons au cas où $a_{33} = 0$.

Si $a_{13} \gtrless 0$, on pourra annuler a_{23} (opération 3); puis rendre a_{13} égal à 1, a_{12} égal à 0, et a_{11} égal à a_{22} (opération 2); faire disparaître ensuite a_{11}, a_{22}, a_{21} (opération 1).

Cela posé, si a_{32} n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1, puis annuler a_{31} (opérations 2 et 4). On obtient ainsi le type

$$(\text{XXI}) \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2),$$

où

$$\Delta = \lambda_3^2 \lambda_2$$

est formé d'une droite double λ_3 d'espèce (D) et d'une droite simple λ_2 d'espèce (I).

Si a_{32} est nul, a_{31} ne le sera pas, car φ_3 doit contenir μ_3. Par l'opération 5 on le rendra égal à 1, ce qui donne le type

$$\text{(XXII)} \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3).$$

Ici

$$\Delta = -\lambda_3^2 \lambda_1$$

est formé de la droite double λ_3, d'espèce (D), et de la droite simple λ_1, d'espèce (E).

71. Reste le cas où $a_{33} = a_{13} = 0$.

Comme φ_3 doit contenir x_3, a_{23} ne sera pas nul.

Si l'on a également $a_{32} \gtrless 0$, on pourra annuler a_{31} par l'opération 4; puis par le changement de μ_3 réduire a_{12} à zéro; par celui de x_3 réduire a_{21}, a_{22} à 0, a_{11}; puis par l'opération 1 faire disparaître les termes multipliés par a_{11}. Enfin, par l'opération 5 on réduira à l'unité les seuls coefficients restants a_{23}, a_{32}.

On aura ainsi le type

$$\text{(XXIII)} \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_2).$$

$$\Delta = -\lambda_3^2 \lambda_1$$

représentera ici une droite double, d'espèce (D), et une droite simple, d'espèce (G).

Enfin, si a_{32} est nul, a_{31} ne le sera pas, car φ_3 doit contenir μ_3. Par le changement de μ_3 et de x_3 on pourra annuler a_{11}, a_{21}, a_{22}. Par l'opération 5 on rendra a_{23}, a_{31} égaux à 1, ainsi que a_{12}, si ce dernier coefficient n'est pas nul.

On aura, pour $a_{12} = 1$, le type

$$\text{(XXIV)} \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1).$$

Ici

$$\Delta = \lambda_3^3$$

représente une droite triple, d'espèce D.

Enfin, pour $a_{12} = 0$, on a le type

$$\text{(XXV)} \qquad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2 \mu_2 x_1 + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1),$$

où Δ est identiquement nul.

72. *Remarque.* — On vérifie aisément que, pour les réseaux (XIX) à (XXV) que fournit l'étude du sixième cas, les mineurs de Δ ne peuvent s'annuler à la fois que pour $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Ils ne contiennent donc qu'une forme monome. Ce caractère invariant les sépare des réseaux (VI) à (XVIII), qui en contiennent au moins deux.

73. Septième cas : Δ *est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (E). — On a ici

$$F = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2).$$

On peut simplifier φ_3 par les opérations suivantes, qui n'altèrent pas F :

1° Changement de φ_3 en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;
2° Changement de la variable x_3;
3° Changement de μ_2, x_2 en $\mu_2 - t\mu_3$, $x_2 + tx_1$;
4° Changement de μ_2, λ_1 en $\mu_2 - t\mu_1$, $\lambda_1 + t\lambda_2$;
5° Changement de μ_i, x_i, λ_1, λ_2 en $t_i\mu_i$, $u_i x_i$, $\dfrac{\lambda_1}{t_1 u_1}$, $\dfrac{\lambda_2}{t_2 u_1}$,

les t, u étant liés par la seule relation $t_2 u_1 = t_3 u_2$.

Soit

$$\varphi_3 = \sum a_{ik} \mu_i x_k.$$

Toutes les opérations précédentes laissent le coefficient a_{23} invariable ou le multiplient par un facteur arbitraire autre que zéro. Nous aurons donc à discuter les deux hypothèses distinctes

$$a_{23} = 1, \qquad a_{23} = 0.$$

74. *Première hypothèse* : $a_{23} = 1$. — On pourra annuler a_{33} et a_{13} (opérations 3 et 4); puis annuler a_{22} et rendre a_{21} égal à a_{32} (opération 2); cela fait, l'opération 1 pourra faire disparaître a_{11}, a_{21}, a_{32}; enfin, par l'opération 5 on rendra égaux à 1 ceux des coefficients restants a_{12}, a_{31} qui ne sont pas nuls.

Ils ne peuvent être nuls à la fois; car, φ_3 se réduisant à $\mu_2\, x_3$, Δ contiendrait en facteur la droite λ_2, dont le faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3 \mu_2 x_3$$

est de l'espèce D; elle serait donc plus simple que λ_3.

Restent les trois solutions

$$a_{12} = a_{31} = 1; \qquad a_{12} = 0,\ a_{31} = 1; \qquad a_{12} = 1,\ a_{31} = 0.$$

La première donne le réseau

$$\text{(XXVI)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1),$$

où

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_3^2 - \lambda_1 \lambda_2)$$

représente une droite et une conique qui se coupent.

La deuxième, le réseau

$$\text{(XXVII)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1).$$

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

y représente trois droites non concourantes λ_1, λ_2, λ_3, respectivement d'espèces (H), (E), (E).

La dernière, le réseau

$$\text{(XXVIII)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3).$$

Ici encore

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

sera le produit de trois droites non concourantes; mais elles seront des espèces (I), (G), (E).

75. *Deuxième hypothèse :* $a_{23} = 0$. — I. Supposons d'abord

$$a_{13} \gtrless 0, \qquad a_{33} \gtrless 0.$$

On annulera a_{31} et l'on rendra a_{32} égal à a_{21} par le changement de la variable x_3; puis par l'opération 1 on fera disparaître a_{11}, a_{21}, a_{32}.

1° Si maintenant $a_{22} \gtrless 0$, on fera disparaître a_{12} par l'opération 4; enfin l'on rendra a_{13}, a_{33}, a_{22} égaux à 1 (opération 5). Et l'on aura le type réduit

$$\text{(XXIX)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

où

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2)$$

représente une droite et une conique tangentes.

2° Si a_{22} est nul, a_{12} ne pourra l'être; car la droite λ_2 aurait pour faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3(a_{13} \mu_1 x_3 + a_{33} \mu_3 x_3)$$

qui est évidemment réductible à l'espèce (C). Ce serait donc un diviseur de Δ, plus simple que λ_3.

Cela posé, on pourra réduire a_{13}, a_{33}, a_{12} à l'unité, ce qui donne le type

$$\text{(XXX)} \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_1 x_3 + \mu_3 x_3),$$

où

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_3)$$

représente trois droites concourantes, d'espèces (E), (G), (E).

(En effet, considérons la droite $\lambda_2 - \lambda_3$ par exemple. Son faisceau sera

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2[\mu_2 x_1 + (\mu_1 + \mu_3)(x_2 + x_3)]$$

et se ramène immédiatement à E en changeant μ_3, x_2 en $\mu_3 - \mu_1$, $x_2 - x_3$).

76. II. Supposons en second lieu $a_{13} \gtrless 0$, $a_{33} = 0$. On pourra, en changeant la variable x_3, réduire a_{11}, a_{12}, a_{13} à 0, 0, 1.

1° Cela posé, si $a_{22} \gtrless 0$, on rendra a_{21} égal à a_{32} (opération 3); puis on fera disparaître ces coefficients (opération 1). Enfin, par l'opération 5, on réduira à l'unité a_{22}, et aussi a_{31}, si ce dernier coefficient n'est pas nul.

Si $a_{31} = 1$, on aura le type

$$\text{(XXXI)} \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1).$$

$\Delta = \lambda_3(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)$ représente encore trois droites concourantes.

La première est de l'espèce (E) et les deux autres de l'espèce (G).

Considérons, en effet, l'une des deux autres, $\lambda_2 \pm \lambda_3$. Son faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2[\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 \mp (\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1)]$$

dépend seulement des cinq variables

$$\mu_1, \quad \mu_2 \mp \mu_3, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3.$$

D'ailleurs, il contient une forme monome $\mu_1 x_1$. Il est donc de l'espèce (G).

Si $a_{31} = 0$, on a le type

$$\text{(XXXII)} \qquad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2).$$

$\Delta = \lambda_2^2 \lambda_3$ est le produit de la droite simple λ_3 d'espèce (E) par la droite double λ_2. Celle-ci est d'espèce (G), car son faisceau dépend des cinq variables μ_1, μ_2, x_1, x_2, x_3 et contient la forme monome $\mu_1 x_1$.

2° Si a_{22} est nul (a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{23}, a_{33} étant déjà réduits à 1, 0, 0, 0, 0), on pourra, par l'opération 1, annuler a_{21}; puis, si a_{32} n'est pas nul, annuler a_{31} (opération 3); enfin, réduire a_{32} à l'unité (opération 5). On aurait alors le réseau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_3 + \mu_3 x_2)$$

où

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_2).$$

Mais ce cas est à rejeter, car la droite $\lambda_3 + \lambda_2$, dont le faisceau

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 - \mu_1 x_3)$$

ne dépend que de quatre variables, serait plus simple que la droite λ_3.

S a_{32} était nul, φ_3 se réduisant à $\mu_1 x_3 + a_{31}\mu_3 x_1$; le faisceau de λ_2

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3(\mu_1 x_3 + a_{31}\mu_3 x_1)$$

ne dépendant que de quatre variables au plus, Δ admettrait un facteur linéaire λ_2 plus simple que λ_3. Ce cas est donc encore à rejeter.

77. III. Supposons, enfin, $a_{13} = 0$ (avec $a_{23} = 0$). La forme φ_3 devant contenir x_3, a_{33} sera $\gtrless 0$. En changeant la variable x_3, on pourra le ramener à l'unité, annuler a_{31} et rendre a_{32} égal à a_{21}; puis, par l'opération 1, faire disparaître a_{11}, a_{21}, a_{32}; φ_3 sera ainsi ramené à la forme

$$a_{12}\mu_1 x_2 + a_{22}\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3.$$

Les coefficients a_{12}, a_{22} ne peuvent être nuls tous deux; car la droite λ_2, dont le faisceau se réduirait à

$$\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_3 \mu_3 x_3$$

et ne contiendrait que quatre variables, serait un facteur de Δ plus simple que λ_3.

D'autre part, si $a_{22} \gtrless 0$, l'opération 4 permet d'annuler a_{12}. Donc, un seul des deux coefficients a_{12}, a_{22} différera de zéro. L'opération 5 permettra de le rendre égal à l'unité. Faisant donc successivement $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$ et $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$, nous obtiendrons les deux types

$$(\text{XXXIII}) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),$$

$$(\text{XXXIV}) \quad \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3).$$

Dans le premier, $\Delta = -\lambda_1\lambda_3^2$. Le facteur double λ_3 est de l'espèce (E) et le facteur simple λ_1 de l'espèce (H).

Dans le second, $\Delta = -\lambda_2\lambda_3^2$; λ_3 sera encore de l'espèce (E); mais le facteur simple λ_2 sera de l'espèce (G).

78. Huitième cas : *Δ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (F). — Le faisceau F de λ_3 est ici de la forme

$$\lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2).$$

Il reste inaltéré par les opérations suivantes, dont on pourra se servir pour simplifier l'expression de φ_3 :

1° Changement de φ_3 en $\varphi_3 - t\varphi_1 - u\varphi_2$;

2° Changement de la variable x_3 ;

3° Échange de λ_1, μ_1, x_1 et de λ_2, μ_3, x_2 ;

4° Changement de λ_1, μ_2, x_1, μ_3 en $\lambda_1 + t\lambda_2$, $\mu_2 - t\mu_1$, $x_1 + tx_2$, $\mu_3 - 2t\mu_2 + t^2\mu_1$;

5° Changement de μ_i, x_i, λ_1, λ_2 en $t_i\mu_i$, $u_i x_i$, $\dfrac{\lambda_1}{t_1 u_1}$, $\dfrac{\lambda_2}{t_2 u_1}$, les facteurs t_i, u_i étant liés par les relations

$$t_1 u_1 = t_2 u_2, \qquad t_2 u_1 = t_3 u_2.$$

Les opérations 3 et 4, combinées entre elles, permettent d'effectuer sur λ_1, λ_2 une substitution linéaire quelconque (à condition d'en détruire l'effet par des substitutions correspondantes effectuées sur les variables μ et x). Cela revient à déplacer à volonté sur la droite λ_3 les sommets $(\lambda_1\lambda_3)$ et $(\lambda_2\lambda_3)$ du triangle de référence. Au lieu d'exécuter sur φ_3 ces substitutions assez complexes, il sera préférable de se donner *a priori* autant que possible la position de ces deux sommets, et de voir, d'après leur situation relativement à la cubique Δ, les conditions qui en résultent pour la fonction

$$\varphi_3 = \sum a_{ik}\mu_i x_k.$$

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{21}\lambda_3 + \lambda_2 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 & a_{22}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{32}\lambda_3 + \lambda_2 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(a_{33}\lambda_1^2 + a_{23}\lambda_1\lambda_2 + a_{13}\lambda_2^2 + \ldots).$$

Le facteur entre parenthèses représente une conique qui peut être décomposable, mais n'est pas identiquement nulle, et ne contient pas λ_3 en facteur; car, x_3 devant figurer dans φ_3, a_{13}, a_{23}, a_{33} ne sont pas tous nuls.

Cette conique rencontre λ_3 en deux points : s'ils sont séparés, on les choisira comme sommets du triangle de référence; on aura, dans ce cas, $a_{13} = a_{33} = 0$, et l'on pourra supposer $a_{23} = 1$.

S'ils se réunissent en un seul, on le prendra pour le sommet $(\lambda_1\lambda_3)$, laissant l'autre sommet indéterminé provisoirement. On aura, dans ce cas, $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$.

Discutons successivement ces deux hypothèses.

79. *Première hypothèse :* $a_{13} = a_{33} = 0$, $a_{23} = 1$. — Par le changement de x_3, on rendra a_{22} et a_{21} respectivement égaux à a_{11}, a_{32}; puis, par le changement de φ_3, on fera disparaître ces quatre coefficients. Enfin, par l'opération 5, on rendra a_{31}, a_{12} égaux à o ou à 1.

Pour $a_{31} = a_{12} = 1$, on aura le type

$$(\text{XXXV}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) \\ &\qquad + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1). \end{aligned} \right.$$

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2)$$

représentera une droite et une conique qui se coupent.

Pour $a_{31} = 0$; $a_{12} = 1$, on aura le réseau

$$(\text{XXXVI}) \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3).$$

$$\Delta = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

représentera trois droites non concourantes, d'espèces (I), (H), (F) respectivement.

Le cas où $a_{31} = 1$, $a_{12} = 0$ se ramène au précédent par l'opération 3.

Enfin, pour $a_{31} = a_{12} = 0$, on aura le type

$$(\text{XXXVII}) \quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 \mu_2 x_3,$$

où

$$\Delta = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

représente trois droites non concourantes et d'espèces (G), (G), (F).

80. *Deuxième hypothèse :* $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$. — Par le changement de x_3, on annulera a_{31} et l'on rendra a_{32} égal à a_{21}; puis, par le changement de φ_3, on fera disparaître a_{11}, a_{21}, a_{32}.

Si maintenant a_{22} n'est pas nul, on fera disparaître a_{12} par l'opération 4; enfin, on rendra a_{22} égal à 1 par l'opération 5, et l'on aura ainsi le réseau

$$(\mathrm{XXXVIII})\quad \left\{\begin{aligned}&\lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2)\\ &\qquad + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3),\end{aligned}\right.$$

où

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_3)$$

représente trois droites concourantes, d'espèces (F), (H), (I) respectivement.

Si $a_{22} = 0$, mais $a_{12} \gtrless 0$, on pourra le rendre égal à 1 par l'opération 5, et l'on aura

$$(\mathrm{XXXIX})\quad \left\{\begin{aligned}&\lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2)\\ &\qquad + \lambda_3(\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3).\end{aligned}\right.$$

$$\Delta = \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_2 \lambda_3)$$

représente une droite et une conique tangentes entre elles.

Enfin, si $a_{21} = a_{22} = 0$, on aura le type

$$(\mathrm{XL})\quad \lambda_1(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) + \lambda_2(\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2) + \lambda_3 \mu_3 x_3.$$

$$\Delta = \lambda_1^2 \lambda_3.$$

La droite double λ_1 est d'espèce (G); λ_3 est d'espèce (F).

81. Neuvième cas : *Δ est décomposable; son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (G) *ou de l'espèce* (H). — Les faisceaux G, H ne diffèrent des faisceaux E, F que par l'échange des deux systèmes de variables μ et x. Les types cherchés se déduiront donc immédiatement des types XXVI à XL par cette même opération.

On doit toutefois rejeter, parmi les nouveaux types obtenus, tous ceux où Δ contiendrait un facteur linéaire de l'une des espèces (E), (F) plus simples que (G) et (H). Ce sont ceux que l'on pourrait déduire de ceux des types XXVI à XL où Δ contient un facteur de l'une des espèces (G), (H).

Il ne restera ainsi que quatre types nouveaux, déduits respectivement des types XXVI, XXIX, XXXV, XXXIX. Ce sont les suivants :

$$\text{(XLI)} \quad \lambda_1\mu_1x_1 + \lambda_2(\mu_1x_2 + \mu_2x_3) + \lambda_3(\mu_2x_1 + \mu_3x_2 + \mu_1x_3),$$

$$\text{(XLII)} \quad \lambda_1\mu_1x_1 + \lambda_2(\mu_1x_2 + \mu_2x_3) + \lambda_3(\mu_3x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3),$$

$$\text{(XLIII)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2(\mu_1x_2 + \mu_2x_3) \\ \qquad + \lambda_3(\mu_2x_1 + \mu_3x_2 + \mu_1x_3), \end{cases}$$

$$\text{(XLIV)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_2x_2) + \lambda_2(\mu_1x_2 + \mu_2x_3) \\ \qquad + \lambda_3(\mu_2x_1 + \mu_3x_3). \end{cases}$$

La cubique Δ s'y décompose en une droite λ_3 et une conique.

La droite λ_3 est de l'espèce (G) dans les types XLI et XLII; de l'espèce (H) dans les deux autres.

Elle coupe la conique en deux points distincts dans les types XLI et XLIII; elle la touche dans les deux autres.

82. Dixième cas : Δ *est décomposable; mais tous ses facteurs linéaires sont de l'espèce* (I). — Soit λ_3 l'un de ces facteurs; son faisceau sera réductible à la forme

$$F = \lambda_1(\mu_1x_1 + \mu_3x_2) + \lambda_2(\mu_2x_1 + \mu_3x_3).$$

Mais la discussion sera plus claire si, en changeant x_1, x_2, x_3 en $-x_3$, x_1, x_2, nous lui donnons la forme équivalente

$$F = \lambda_1(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3).$$

Cette expression reste inaltérée :

1° Si l'on opère une même substitution linéaire sur les deux systèmes de variables μ_1, μ_2 et x_1, x_2, et sur λ_1, λ_2 la substitution inverse de celle-là;

2° Si l'on change μ_1, μ_2, x_1, x_2 en $\mu_1 + t\mu_3$, $\mu_2 + u\mu_3$, $x_1 + tx_3$, $x_2 + ux_3$.

Cela posé, considérons la fonction φ_3. Elle peut se mettre sous la forme

$$\varphi_3 = \mathcal{S} + \mathcal{A},$$

$\mathcal{S}$ étant symétrique et $\mathcal{A}$ alternée par rapport aux deux systèmes de variables μ et x.

$\mathcal{S}$ sera la polaire par rapport aux μ d'une forme Q quadratique en x_1, x_2, x_3.

Les substitutions 1 et 2 permettent, comme l'on sait, de réduire $2Q$ à l'une des huit expressions suivantes :

$$\begin{array}{cccc} 2x_1x_2+x_3^2, & 2x_1x_2, & x_2^2+2x_1x_3, & x_2^2+x_3^2, \\ x_2^2, & 2x_2x_3, & x_3^2, & 0; \end{array}$$

dont les polaires, divisées par 2, seront les expressions réduites de $\mathcal{S}$.

Quant à $\mathcal{A}$, elle sera de la forme

$$a(\mu_1x_2-\mu_2x_1)+b(\mu_3x_1-\mu_1x_3)+c(\mu_3x_2-\mu_2x_3)$$

et le changement de φ_3 en $\varphi_3-b\varphi_1-c\varphi_2$ la réduira à son premier terme

$$a(\mu_1x_2-\mu_2x_1).$$

Soient respectivement $\mathcal{S}'$, $\mathcal{A}'$ l'ensemble des termes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{A}$ qui contiennent les produits de μ_1, μ_2 par x_1, x_2; si le déterminant de $\mathcal{S}'$ n'est pas nul, a^2 représentera le rapport des déterminants de $\mathcal{A}'$ et de $\mathcal{S}'$. C'est donc un invariant du réseau. On pourra seulement changer le signe de a en permutant les indices 1 et 2.

Dans tous les autres cas, en multipliant les variables λ, μ, x par des facteurs de proportionnalité convenables, on pourra réduire a à l'unité, s'il n'est pas nul. Si, par exemple,

$$2Q=x_2^2+2x_1x_3,$$

d'où

$$\mathcal{S}=\mu_2x_2+\mu_1x_3+\mu_3x_1;$$

il suffira de changer μ_2, μ_3, x_2, x_3, λ_1, λ_2, λ_3 en $a\mu_2$, $a^2\mu_3$, ax_2, a^2x_3, $\frac{\lambda_1}{a^2}$, $\frac{\lambda_2}{a^3}$, $\frac{\lambda_3}{a^2}$. Si $2Q$ ne contient pas x_1 on changera μ_1, x_1, λ_1 en $\frac{\mu_1}{a}$, $\frac{x_1}{a}$, $a\lambda_1$.

83. Discutons les solutions trouvées ci-dessus :

Soit $2Q = 2x_1x_2 + x_3^2$: on obtiendra le type

$$(\text{XLV})\quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) \\ \quad + \lambda_3[(1+a)\mu_1x_2 + (1-a)\mu_2x_1 + \mu_3x_3]. \end{cases}$$

$$\Delta = \lambda_3[(a^2 - 1) - 2\lambda_1\lambda_2]$$

se composera en général d'une droite λ_3, d'espèce (I) et d'une conique qui la coupe.

Si $a = \pm 1$ (ces deux cas se ramènent l'un à l'autre), Δ dégénère dans le produit de trois droites non concourantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. La droite λ_3 est d'espèce (I), les deux autres d'espèces (F) et (H). Le réseau (XLV) doit donc, pour cette valeur de a^2, pouvoir se transformer dans le réseau (XXXVI) qui est le seul, parmi ceux précédemment trouvés, où Δ se décompose en trois droites non concourantes des espèces précitées.

Effectivement, soit, pour fixer les idées, $a = +1$. Le réseau XLV deviendra

$$\lambda_1(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) + \lambda_3(2\mu_1x_2 + \mu_3x_3),$$

expression qui se transforme en XXXVI, si l'on change

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3$$

en

$$-\lambda_3,\quad 2\lambda_2,\quad \lambda_1,\quad \mu_1,\quad -\tfrac{1}{2}\mu_3,\quad \mu_2,\quad -x_3,\quad \tfrac{1}{2}x_1,\quad x_2.$$

Il faudra donc, pour éviter un double emploi, soit introduire la condition $a^2 \gtrless 1$ dans la définition du type XLV, soit supprimer cette condition, mais en rayant du Tableau le type XXXVI, qui ne serait plus qu'un cas particulier de XLV.

84. Soit $2Q = 2x_1x_2$. On aura le réseau

$$(\text{XLVI})\quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3x_1 - \mu_1x_3) + \lambda_2(\mu_3x_2 - \mu_2x_3) \\ \quad + \lambda_3[(1+a)\mu_1x_2 + (1-a)\mu_2x_1]. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (1-a)\lambda_3 & \lambda_1 \\ (1+a)\lambda_3 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = -2\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

représentera trois droites non concourantes. Leurs faisceaux dépendant en général de toutes les variables seront de l'espèce (I).

Il y aura toutefois dégénérescence si $a^2 = 1$. Soit, pour fixer les idées, $a = +1$. Le réseau deviendra

$$\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3 . 2\mu_1 x_2.$$

Le faisceau de λ_1, ne dépendant que des cinq variables μ_1, μ_2, μ_3, x_2, x_3, et contenant une forme monome $2\mu_1 x_2$, sera de l'espèce (E).

Celui de λ_2, ne dépendant que de μ_1, μ_3, x_1, x_2, x_3 et contenant cette même forme monome, sera de l'espèce (G). Celui de λ_3 sera toujours de l'espèce (I).

Le réseau particulier que nous considérons doit donc être équivalent au type XXVIII qui, seul parmi les précédents, jouit des propriétés ci-dessus. Effectivement, si nous remplaçons

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3$$

par

$$\lambda_3,\quad \lambda_2,\quad \tfrac{1}{2}\lambda_1,\quad \mu_1,\quad \mu_3,\quad \mu_2,\quad x_3,\quad x_1,\quad -x_2$$

l'expression précédente se transforme dans l'expression XXVIII.

Il faudra donc introduire encore la condition $a^2 \gtrless 1$ dans la définition du type XLVI, ou, si l'on veut supprimer cette restriction, rayer du Tableau le type XXVIII, qui ne serait plus qu'un cas particulier de XLVI.

85. Revenons au cas général, où $a^2 \gtrless 1$. La cubique Δ se décomposant en trois droites de même espèce, on pourra choisir arbitrairement parmi elles celle que l'on prendra pour λ_3.

Dans quelle mesure la valeur de l'invariant dépend-elle de ce choix?

1° Nous avons vu que l'expression XLVI ne change pas si l'on permute les indices 1 et 2, en changeant le signe de a. Cet invariant ne fait donc que changer de signe si l'on permute les droites λ_1, λ_2.

2° Permutons maintenant λ_2 et λ_3. Le réseau deviendra

$$\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2[(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1]$$
$$+ \lambda_3(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3).$$

Changeons

$$\mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \lambda_3$$

en

$$\mu_3, \quad \frac{\mu_2}{a-1}, \quad -\mu_1, \quad x_3, \quad \frac{x_2}{a+1}, \quad -x_1, \quad (a^2-1)\lambda_3.$$

Cette expression sera changée en

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3)& \\ + \lambda_3[(1-a)\mu_1 x_2 + (1+a)\mu_2 x_1]&\end{aligned}$$

et l'on voit que l'invariant, ici encore, a simplement changé de signe.

86. Soit

$$2Q = x_2^2 + 2x_1 x_3;$$

on aura

$$\varphi_3 = \mu_2 x_2 + \mu_1 x_3 + \mu_3 x_1 + a(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1),$$

a étant égal à 1 ou à 0.

L'hypothèse $a = 0$ doit être rejetée, car la droite $\lambda_1 - \lambda_3$, ayant pour faisceau

$$\lambda_2\varphi_2 + \lambda_1(\varphi_1 + \varphi_3) = \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_1(\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_1)$$

qui ne contient pas la variable μ_1, serait un facteur de Δ, d'espèce plus simple que (I).

Posons donc $a = 1$; nous aurons le type

$$\text{(XLVII)} \quad \left\{\begin{aligned}&\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3)\\ &\quad + \lambda_3[\mu_1(x_2 + x_3) + \mu_2(x_2 - x_1) + \mu_3 x_1].\end{aligned}\right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 + \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 - \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3)$$

représente une droite et une conique tangentes entre elles.

87. Dans les cas qui nous restent à examiner, Q ne contient plus la variable x_1, et a doit être supposé égal à 0 ou à 1. Mais l'hypothèse $a = 0$ doit être rejetée.

En effet, les variables μ_1, x_1 ne figureraient pas dans la fonction φ_3, non plus que dans la fonction $\varphi_2 = \mu_3 x_2 - \mu_2 x_3$. Le faisceau de la droite λ_1 contenant au plus quatre variables, cette droite serait un facteur de Δ, d'espèce plus simple que (I).

88. Soit $2Q = x_2^2 + x_3^2$, et $a = 1$. Nous aurons le type

$$\text{(XLVIII)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ \qquad + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1). \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_3^2 + \lambda_1^2)$$

représente trois droites concourantes. Toutes trois sont de l'espèce (I).

89. Soit $2Q = x_2^2$, $a = 1$. Nous aurons le type

$$\text{(XLIX)} \quad \begin{cases} \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) \\ \qquad + \lambda_3(\mu_2 x_2 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1). \end{cases}$$

$$\Delta = \lambda_3 \lambda_1^2$$

se décompose en une droite double et une droite simple, toutes deux d'espèce (I).

90. Soit $2Q = x_2 x_3$, $a = 1$. Nous aurons le réseau

$$\lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3(\mu_2 x_3 + \mu_3 x_2 + \mu_2 x_1 - \mu_1 x_2).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_3 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda_1 \lambda_3^2$$

est encore le produit d'une droite double par une droite simple, toutes deux d'espèce (I).

Mais un réseau de ce genre est susceptible de deux formes réduites distinctes suivant qu'on prend pour λ_3 la droite simple, comme au numéro précédent, ou la droite double, comme ici. Une de ces expressions doit être rejetée, si l'on veut éviter un double emploi. Nous pouvons donc laisser de côté ce dernier type.

91. Soit $2Q = x_3^2$, $a = 1$. Nous aurons le type

$$\text{(L)} \quad \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3(\mu_3 x_3 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3^3$$

représentera une droite triple.

92. Soit enfin $Q = 0$, $a = 1$. On obtiendra un dernier type

$$\text{(LI)} \quad \lambda_1(\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3) + \lambda_2(\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3) + \lambda_3(\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1),$$

qui, par le changement de λ_1, λ_2 en λ_2, $-\lambda_1$, pourra s'écrire sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & x_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & x_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

Δ sera identiquement nul et contiendra toutes les droites du plan. Mais elles seront toutes de l'espèce (I). Car, si l'une d'elles était d'une espèce plus simple, le réseau actuel devrait être équivalent à l'un des types précédemment trouvés pour lesquels Δ est nul. Ce sont les types XVIII et XXV.

Mais le réseau XVIII contient deux formes monomes, le réseau XXV une seule, le réseau LI aucune. Ces trois types sont donc nettement distincts.

93. Nous donnons ci-après comme résumé le Tableau des 51 types que nous avons formés et des caractères invariants qui les distinguent.

La colonne intitulée : *Facteurs de* Δ demande quelques explications. Le symbole Δ représente une cubique indécomposable : Q désigne une conique indécomposable; A, B, ..., I des facteurs linéaires correspondant à des droites d'espèce A, B, ..., I.

Ainsi A^2G, mis dans cette colonne, signifie que Δ se décompose en une droite double d'espèce A et une droite simple d'espèce G; III que Δ est formé de trois droites distinctes d'espèce I; etc.

NUMÉROS des types.	FORMES GÉNÉRATRICES φ_1.	φ_2.	φ_3.	FACTEURS de Δ.	PROPRIÉTÉS INVARIANTES de ces facteurs.	NOMBRE des formes monomes.
I.........	$\mu_1 x_1 - \mu_3 x_3$	$\mu_3 x_3 - \mu_2 x_2$	$\mu_1(x_2+\rho x_3)+\mu_2(\rho x_1+x_3)$ $+\mu_3(x_1+\rho x_2+\sigma x_3)$, $(\rho^3-\rho\sigma+1 \gtrless 0)$ (1)	Δ	Cubique générale (un point double si $27(\rho^3-\rho\sigma+1)+\sigma^2=0$)	0 en général; 1 si $\rho^3=1$, $\sigma=3\rho^2$
II.........	$\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1$	$\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$	$\mu_1(x_2+x_3)+\mu_2(x_1+x_3)+\mu_3(-x_1+x_2)$	Δ	Cubique à rebroussement	0
III.......	Id.	Id.	$\mu_1(x_2+x_3)+\mu_2 x_1-\mu_3 x_1$	Δ	Id.	0
IV........	Id.	$\mu_3 x_3$	$\mu_1 x_3+\mu_2(x_2+x_3)+\mu_3(x_1+x_2)$	Δ'	Id.	1
V.........	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_2 x_2+\mu_3 x_1$	Δ	Id.	1
VI........	$\mu_1 x_1$	$\mu_2 x_1$	$\mu_2 x_2+\mu_3 x_3$	A^2G		∞
VII.......	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_2 x_2+\mu_3 x_1$	A^3		∞
VIII......	Id.	$\mu_1 x_2$	$\mu_2 x_2+\mu_3 x_3$	B^2E		∞
IX........	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_2 x_2+\mu_3 x_1$	B^3		∞
X.........	Id.	$\mu_2 x_2$	$\mu_1 x_2+\mu_2 x_1+\mu_3 x_3$	CQ		2
XI........	Id.	Id.	$\mu_1 x_2+\mu_3 x_3$	CEG		2
XII.......	Id.	Id.	$\mu_3 x_3$	CCC		3
XIII......	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_2 x_3+\mu_3(x_1+x_2)$	C^2I		2
XIV......	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_3(x_1+x_2)$	C^2G		2
XV......	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_2 x_3+\mu_3 x_1$	C^2D		2
XVI......	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_3 x_1$	C^2E		2
XVII.....	$\mu_1 x_1$	$\mu_2 x_2$	$\mu_1 x_3+\mu_2 x_1+\mu_3 x_2$	C^3		2
XVIII....	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_3 x_2$	$\Delta=0$		2
XIX......	$\mu_1 x_1+\mu_2 x_2$	$\mu_2 x_1$	$\mu_1 x_2+\mu_3 x_3$	DQ	Tangentes.	1
XX.......	Id.	Id.	$\mu_2 x_2+\mu_3 x_3$	DEG	Concourantes.	1
XXI......	Id.	Id.	$\mu_1 x_3+\mu_3 x_2$	D^2I		1
XXII.....	Id.	Id.	$\mu_3 x_1+\mu_1 x_3$	D^2E		1
XXIII....	Id.	Id.	$\mu_2 x_3+\mu_3 x_2$	D^2G		1
XXIV.....	Id.	Id	$\mu_1 x_2+\mu_2 x_3+\mu_3 x_1$	D^3		1

(1) *Observations.* — Si $\rho^3-\rho\sigma+1$ était nul, ce réseau serait équivalent à XLVI (ou à XLVIII si l'on avait aussi $\sigma=0$).

(2) Δ' est une cubique à un point double pour le type II ; elle se décompose en une droite et une conique pour le type IV ; en trois droites pour les types III et V.

NUMÉROS des types.	FORMES GÉNÉRATRICES			FACTEURS de Δ.	PROPRIÉTÉS INVARIANTES de ces facteurs.	NOMBRE des formes monomes.
	φ_1.	φ_2.	φ_3.			
XXV	$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$	$\mu_2 x_1$	$\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$	$\Delta = 0$		1
XXVI.....	$\mu_1 x_1$	$\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2$	$\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$	EQ		1
XXVII....	Id.	Id.	$\mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$	EEH		1
XXVIII...	Id.	Id.	$\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3$	EGI		1
XXIX.....	Id.	Id.	$\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$	EQ	Tangentes.	1
XXX	Id.	Id.	$\mu_1 (x_2 + x_3) + \mu_3 x_3$	EEG	Concourantes.	1
XXXI	Id.	Id.	$\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$	EGG	Concourantes.	1
XXXII....	Id.	Id.	$\mu_1 x_3 + \mu_2 x_2$	EG^2		1
XXXIII...	Id.	Id.	$\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$	E^2H		1
XXXIV...	Id.	Id.	$\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3$	E^2G		1
XXXV....	$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$	$\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2$	$\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$	FQ		1
XXXVI...	Id.	Id.	$\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3$	FHI		0
XXXVII ..	Id.	Id.	$\mu_2 x_3$	FGG		1
XXXVIII .	Id.	Id.	$\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$	FHI	Concourantes.	0
XXXIX...	Id.	Id.	$\mu_1 x_2 + \mu_3 x_3$	FQ	Tangentes.	0
XL.......	Id.	Id.	$\mu_3 x_3$	FG^2		1
XLI......	$\mu_1 x_1$	$\mu_1 x_2 + \mu_2 x_3$	$\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \mu_1 x_3$	GQ		1
XLII.....	Id.	Id.	$\mu_3 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$	GQ	Tangentes.	1
XLIII	$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$	Id.	$\mu_2 x_1 + \mu_3 x_2 + \mu_1 x_3$	HQ		0
XLIV.....	Id.	Id.	$\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3$	HQ	Tangentes.	0
XLV	$\mu_3 x_1 - \mu_1 x_3$	$\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3$	$(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1 + \mu_3 x_3,\quad a^2 \gtrless 1$ [1]	IQ		0
XLVI.....	Id.	Id.	$(1+a)\mu_1 x_2 + (1-a)\mu_2 x_1$	III		0
XLVII....	Id.	Id.	$\mu_1 (x_2 + x_3) + \mu_2 (x_2 - x_1) + \mu_3 x_1$	IQ	Tangentes.	0
XLVIII...	Id.	Id.	$\mu_1 x_2 + \mu_2 (x_2 - x_1) + \mu_3 x_3$	III	Concourantes.	0
XLIX.....	Id.	Id.	$\mu_1 x_2 + \mu_2 (x_2 - x_1)$	I^2I		0
L.........	Id.	Id.	$\mu_3 x_3 + \mu_1 x_2 - \mu_2 x_1$	I^3		0
LI........	Id.	Id.	$\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1$	$\Delta = 0$		0

[1] *Observations.* — Pour $a^2 = 1$, le type XLV serait équivalent à XXXVI et le type XLVI à XXVIII.