JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉON AUTONNE

Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 3 (1907), p. 53-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1907_6_3__53_0>

Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité;

PAR M. LÉON AUTONNE.

Introduction.

Une quantité ou grandeur hypercomplexe x, appartenant à un groupe (ε) d'ordre n, est, comme on sait, une expression

$$x = \sum_{\beta} \varepsilon_\beta x_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Les x_β sont des nombres ordinaires, réels ou complexes. Les ε_β sont des symboles, choisis de façon que le produit de deux quantités quelconques prises dans le groupe (ε) appartienne encore au même groupe.

La théorie des quantités hypercomplexes est aujourd'hui bien connue, grâce aux recherches de Gauss, puis de MM. Poincaré, Dedekind, Study, etc., enfin, plus récemment, de MM. Molien, Cartan, Frobenius.

Ce dernier auteur, dans son Mémoire : *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin,* pour avril 1903) a adopté une méthode d'exposition, fondée sur la pure Algèbre, sans aucune intervention des groupes de Lie. Je suivrai la même méthode, me conformant à la terminologie et aux notations de M. Frobenius.

Prenons n fonctions $X_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ des n variables x_β,

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

La quantité hypercomplexe

$$X = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha X_\alpha$$

sera par définition une fonction de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta.$$

J'écrirai, avec M. Frobenius, $X = f((x))$, réservant la notation $f(x)$ aux fonctions des variables x_β.

Existe-t-il pour X quelque chose qui ressemble à la monogénéité des fonctions d'une variable complexe?

M. Scheffers (*Comptes rendus,* mai 1903) s'est posé la question. Il a reconnu que la monogénéité ne pouvait, dans ses traits principaux, être étendue qu'aux groupes (ε) à multiplication commutative.

Dans le présent travail je m'occupe des r^2 — ions (quaternions, pour $r = 2, \ldots$), c'est-à-dire du cas où (ε) est un groupe simple, par conséquent à multiplication non commutative, avec $n = r^2$.

J'ai cherché ce que devenait la monogénéité.

Pour les quantités complexes ordinaires, la monogénéité, comme on sait, consiste en ceci : la différentielle dX de la fonction est égale au produit $u\,dx$ de la différentielle dx de la variable par la quantité complexe u.

Pour les r^2 — ions, la multiplication n'est plus commutative. L'expression $u\,dx$ est à remplacer par l'expression $u\,dx\,v$. Ces expressions $u\,dx\,v$ ne se réduisent pas ensemble, au moins en général. Le problème se formule donc ainsi : mettre dX sous la forme

$$dX = \sum_i u_i\,dx\,v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N').$$

La décomposition est possible de plusieurs façons, mais le minimum des nombres N′ sera la *catégorie* N ou *indice de monogénéité*.

J'ai construit une matrice n — aire $W(x)$, dont les n^2 éléments sont de la forme

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta},$$

où les constantes $c_{\alpha\beta}$ dépendent seulement du groupe (ε) et sont les mêmes pour toutes les fonctions $f((x))$. *Le rang de cette matrice* $W(x)$ *est la catégorie*. Les u_i et v_i se déduisent de $W(x)$.

Vis-à-vis du changement de symboles ε, N se comporte comme un invariant. Plus généralement sont covariants les *Elementarteiler de Weierstrass* pour le faisceau de matrices n — aire

$$\rho W(x) + W'(x) \qquad \rho = \text{param. variable}.$$

Comment se comporte $W(x)$ vis-à-vis du changement de la variable hypercomplexe?

Soit d'abord $X = f((x))$. Posons

$$x_\beta = \varphi_\beta(y_1, \ldots, y_n), \qquad y = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma y_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, n);$$

on aura

$$x = \varphi((y))$$

et, par suite,

$$X = F((y)).$$

Nommons $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{q}$ respectivement les matrices W afférentes à $f((x))$ et à $\varphi((y))$, $\mathfrak{w}$ celle afférente à $F((y))$.

Il existe un groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ d'ordre n^2, simple comme (ε), connu sans ambiguïté dès que (ε) est donné. Si les n^2 éléments des matrices $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{w}$ sont les coordonnées des quantités hypercomplexes U, V, W dans $(\varepsilon\varepsilon)$ [comme les x_β sont les coordonnées de x dans (ε)], alors W *est le produit* UV *dans* $(\varepsilon\varepsilon)$ *des deux quantités* U *et* V.

Le nombre N peut donc être pris comme un élément de classification pour les fonctions

$$f((x)).$$

N ne peut dépasser n. Pour $N = 0$, X est une constante. Enfin j'ai construit toutes les fonctions $X = f((x))$, où l'indice N de monogénéité est *un*.

Les résultats de cette construction sont plus simples quand on fait usage, dans (ε), de coordonnées $x_{\alpha\beta}$ et de symboles $\varepsilon_{\alpha\beta}$ à double indice

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r; \quad n = r^2).$$

Alors, comme on sait, à trois quantités x, y, z de (ε) correspondent les trois matrices $r =$ aires :

$$(x) = \begin{pmatrix} x_{11} \ldots x_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{r1} \ldots x_{rr} \end{pmatrix}; \qquad (y) = \ldots; \qquad (z) = \ldots;$$

si $x = yz$, on a aussi

$$(x) = (y)(z).$$

Voici alors l'énumération des types auxquels peut être ramenée une fonction $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r)$, $X = f((x))$, ou

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(x_{11}, \ldots, x_{rr}),$$

de catégorie un.

Type I.

$X = KxL + M$, où K, L, M sont trois constantes hypercomplexes de (ε).

Type II.

$$X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha 1} X_{\alpha 1}(t_\alpha),$$

$$t_\alpha = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta} x_{\beta 1}, \qquad K_{\alpha\beta} = \text{const.},$$

la fonction $X_{\alpha 1}(t)$ d'une variable t est arbitraire.

Type III.

$$X = \sum_{\delta} \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta}(x_{11}, \ldots, x_{1r}),$$

$$X_{1\delta} = \text{fonction arbitraire.}$$

Type IV.

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(\omega); \qquad X_{\alpha\delta}(t) = \int \eta_\alpha(t) p_\delta(t)\, dt,$$

$$\omega = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_r)$$

$$q_\gamma = \sum_\beta h_\beta x_{\beta\gamma} \qquad (h_\beta = \text{const.}),$$

$$\eta_\alpha(t), \quad p_\delta(t), \qquad \psi = \text{fonctions arbitraires},$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r.$$

Un résumé des présentes recherches a paru aux *Comptes rendus* du 28 mai 1906. Une application des présentes théories a paru au *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1906, sous le titre : *Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes.*

PRÉLIMINAIRES.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. On fera, dans le présent Travail, un usage continuel des *matrices n — aires*

$$u = [u_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\alpha 1} & u_{\alpha\beta} & u_{\alpha n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix};$$

le premier indice de l'*élément* $u_{\alpha\beta}$ indique la ligne, le second indique la colonne. On écrira aussi, $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$,

$$u_{\alpha\beta} = [u]_{\alpha\beta}.$$

Notamment, dans le produit uv des deux matrices n-aires $[u_{\alpha\beta}]$ et

$[v_{\beta\gamma}]$, on a

$$[uv]_{\alpha\gamma} = \sum_\beta u_{\alpha\beta} v_{\beta\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n).$$

D'ailleurs, suivant l'usage, u a pour transposée $u' = [u_{\beta\alpha}]$. Je suppose aussi connue du lecteur la théorie des *Elementarteiler* de Weierstrass.

2. Si l'on a n fonctions X_α des n variables x_β, la matrice n-aire

$$J = [X_{\alpha\beta}], \qquad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}$$

sera la jacobienne des X par rapport aux variables x. On écrira

$$J = J\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} X_1 \ldots X_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix}; \qquad |J| = \frac{\partial(X_1, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

3. Dans la théorie des quantités hypercomplexes, je me conformerai rigoureusement à la terminologie de M. Frobenius dans sa *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin,* avril 1903), ainsi qu'aux notations de cet éminent géomètre.

Renvoyant au travail précité pour toutes explications générales et toutes démonstrations, je résume rapidement les résultats dont je me servirai le plus fréquemment dans la suite. Le renvoi (Fr., § 17), par exemple, indiquera le 17e paragraphe du Mémoire de M. Frobenius.

4. Prenons un groupe (ε) de quantités hypercomplexes. (ε) sera d'ordre n et *simple* par hypothèse; par conséquent n sera un carré parfait $n = r^2$. Pour $r = 2$, on a les quaternions.

(ε) comporte n nombres fondamentaux (*Grundzahl*), linéairement indépendants,

$$\varepsilon_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

qui se multiplient, par définition, suivant la règle suivante :

$$(1) \qquad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} \qquad (a_{\alpha\beta\gamma} = \text{const.}).$$

Une quantité hypercomplexe est une expression

$$x = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha,$$

où x_α est un nombre ordinaire (ou *scalaire*) réel ou complexe. Les x_α sont les n coordonnées de x.

5. Soit $F(\xi, y, z)$ la forme trilinéaire n — aire

$$F(\xi, y, z) = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \xi_\alpha y_\beta z_\gamma.$$

Posons

$$r_{\beta\gamma}(\xi) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_\beta \, \partial z_\gamma}, \qquad s_{\alpha\gamma}(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \, \partial z_\gamma},$$

$$t_{\alpha\beta}(z) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \, \partial y_\beta}.$$

Introduisons

La matrice du groupe..............	$S_y = S(y) = [s_{\alpha\gamma}(y)]$,
La matrice parastrophe............	$R_\xi = R(\xi) = [r_{\beta\gamma}(\xi)]$,
La matrice antistrophe	$T_z = T(z) = [t_{\alpha\beta}(z)]$.

Comme le groupe (ε) est simple, le déterminant

$$\Theta(y) = |S(y)|,$$

forme de degré n par rapport aux y, est la puissance $r^{\text{ième}}$ d'une forme irréductible $\Phi(y)$ de degré r. Les trois déterminants $|S(x)|$, $|T(x)|$ et $|R(x)|$ ne diffèrent que par un facteur constant et ont mêmes *Elementarteiler*.

Il existe une unité principale (*Haupteinheit*)

$$e = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha e_\alpha,$$

telle que $S(e) = T(e) = E$, E étant la matrice n — aire unité.

6. Le produit $x = yz$ de deux quantités hypercomplexes se calcule par la règle ordinaire, mais en tenant compte de la formule (o). Il vient

$$x_\alpha = \sum_{\beta\gamma} y_\beta z_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}. \tag{1}$$

La multiplication n'est pas commutative. Pour exprimer qu'elle est associative, on écrit que, pour y et z quelconques, $S(x)$ et $T(y)$ sont échangeables ou que

$$R_\xi S_x = T'_x R_\xi \qquad (\xi \text{ quelconque}). \tag{2}$$

On a, d'ailleurs,

$$S(yz) = S(y)S(z), \qquad T(yz) = T(z)T(y).$$

7. Prenons les quantités (Fr., § 7)

$$\sigma_\alpha = \tau_\alpha = \sum_\lambda a_{\lambda\alpha\lambda} = \sum_\lambda a_{\lambda\lambda\alpha} \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

La matrice $P = R(\sigma)$ est symétrique avec son déterminant $|P| \neq 0$ [ce qui, joint au non évanouissement identique de $|S(x)|$ fait de (ε) un groupe de Dedekind].

Une quantité invariante x (Fr., § 4) est, par définition, échangeable à toute quantité y de (ε), $xy = yx$. On a

$$S(x) = T(x).$$

Pour qu'un groupe de Dedekind soit simple (Fr., § 14), il faut et il suffit que l'unité principale e soit la seule quantité invariante.

8. Un changement de fondamentaux (Fr., § 9) consiste à poser

$$\varepsilon_\alpha = \sum_\beta \bar{\varepsilon}_\beta c_{\alpha\beta}, \qquad |c_{\alpha\beta}| \neq 0 \qquad c_{\alpha\beta} = \text{const.}$$

9. A côté des coordonnées *générales* x_α, dont on vient de se servir, on peut introduire (Fr., § 11) des coordonnées *spéciales*.

Au lieu d'un indice unique α variant de 1 à n, on prend deux indices α et β variant chacun de 1 à r; $n = r^2$. Il y a alors les n fondamentaux $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (fonctions linéaires, homogènes, à coefficients constants, des fondamentaux précédents) *spéciaux*, tels que

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} = 0 \qquad \text{pour } \beta \neq \gamma, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma},$$

forme spéciale de la formule (o). La quantité x a $n = r^2$ coordonnées spéciales $x_{\alpha\beta}$, qui définissent une matrice r — aire

$$(x) = [x_{\alpha\beta}].$$

Si $x = yz$, alors $(x) = (y)(z)$. C'est la forme spéciale de la formule (1).

Soit g une quantité hypercomplexe. Prenons $(g) = [g_{\alpha\beta}]$. Transformons toutes les matrices r — aires, telles que (x) par la r — aire (g). Cela équivaut à un changement de fondamentaux (8) et, comme on s'assure aisément, *les coordonnées restent spéciales,* pourvu, bien entendu, que le déterminant de (g) soit $\neq 0$.

Les coordonnées spéciales jouent dans les présentes recherches un rôle capital.

CHAPITRE I.

CATÉGORIE OU INDICE DE MONOGÉNÉITÉ.

1. Prenons n variables indépendantes scalaires x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ et la variable hypercomplexe

$$x = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha.$$

L'expression

$$c_0 x c_1 x \ldots c_{m-1} x c_m,$$

où le facteur x est répété m fois, sera dite un *monome de degré m.* Les $m+1$ constantes hypercomplexes $c_0, \ldots, c_m$ sont les *coefficients* du monome.

Une somme de monomes de degré m est un *polynome homogène* ou *forme* de degré m. Un polynome non homogène est évidemment une somme de formes.

Une forme X de degré m est une expression, telle que

$$\text{(1)} \qquad X = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha X_\alpha \binom{m}{x},$$

où $X_\alpha \binom{m}{x}$ est une forme scalaire de degré m.

Nous verrons dans la suite qu'une expression X donnée (1) peut se décomposer de plusieurs façons en une somme de monomes. Le nombre minimum des monomes, dans les diverses décompositions, se nommera *catégorie* de la forme X.

2. Le premier problème qui nous occupera sera celui-ci :

Trouver la catégorie, d'une expression X, *pour le premier degré*, $m=1$.

Considérons une somme de $\mathfrak{A}$ monomes :

$$\omega = \sum_i u_i x v_i \qquad (i=1, 2, \ldots, \mathfrak{A}).$$

On a

$$u_i = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{i\lambda}, \qquad v_i = \sum_\mu v_{i\mu}\varepsilon_\mu,$$

$$\omega = \sum_i \left(\sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{i\lambda}\right)\left(\sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta\right)\left(\sum_\mu \varepsilon_\mu v_{i\mu}\right)$$

$$= \sum_{i\lambda\mu\beta} u_{i\lambda} v_{i\mu} x_\beta \varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu.$$

Or

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu = \varepsilon_\lambda \sum_\rho \varepsilon_\rho a_{\rho\beta\mu} = \sum_{\alpha\rho} \varepsilon_\alpha a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} \qquad (\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho = 1, 2, \ldots, n).$$

Enfin

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \sum_{i\alpha\beta\lambda\mu\rho} \varepsilon_\alpha u_{i\lambda} v_{i\mu} x_\beta a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} \\ &= \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_\alpha x_\beta w_{\lambda\mu} \sum_\rho a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu}, \\ w_{\lambda\mu} &= \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}. \end{aligned} \right.$$

Identifions avec le polynome X du premier degré (1),

$$X = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha x_\beta X_{\alpha\beta}, \qquad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} = \text{const.}$$

Il viendra

$$(3) \qquad X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu}.$$

Si X est donné, les n^2 inconnues $w_{\lambda\mu}$ s'obtiennent par la résolution des n^2 équations linéaires (3).

On démontrera plus loin (5) que ces équations admettent toujours une et une seule solution; autrement dit : on obtient un déterminant n^2 — aire différent de zéro, en rangeant, parmi les expressions, au nombre de n^4,

$$(4) \qquad \Omega(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu};$$

dans une même ligne, celles où la combinaison $\alpha\beta$ d'indices est la même; dans une même colonne, celles où la combinaison $\lambda\mu$ est la même.

5. Considérons la matrice n — aire $W = [w_{\lambda\mu}]$, dont le rang est $\mathfrak{N}$.

THÉORÈME. — *Le rang* $\mathfrak{N}$ *de* W *est la catégorie* N *du polynome* X.

I. W ayant le rang $\mathfrak{N}$, la théorie des déterminants apprend qu'il existe $2n\mathfrak{N}$ quantités

$$u_{j\lambda}, \qquad v_{j\mu} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N};\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

telles que

$$w_{\lambda\mu} = \sum u_{j\lambda} v_{j\mu}.$$

Alors les formules (3) et (4) donnent

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{j\lambda\mu} u_{j\lambda} v_{j\mu} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu)$$

et, d'autre part (2),

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu) = \varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu.$$

Alors

$$(5)\quad \begin{cases} X = \sum_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha x_\beta = \sum_{j\lambda\mu} u_{j\lambda} v_{j\mu} x_\beta \varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu \\ \quad = \sum_j u_j x v_j, \end{cases}$$

u_j et v_j étant les quantités hypercomplexes

$$u_j = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{j\lambda}, \qquad v_j = \sum_\mu \varepsilon_\mu v_{j\mu}.$$

Ainsi X se décompose en une somme de $\mathfrak{N}$ monomes. En vertu de la définition de la catégorie (**1**), on a

$$(6)\qquad \mathfrak{N} \geqq \mathrm{N}.$$

II. La catégorie étant N, X est identique à une somme de N monomes,

$$X = \sum_l u_l x v_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}),$$

$$u_l = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{l\lambda}, \qquad v_l = \sum_\mu \varepsilon_\mu v_{\lambda\mu}.$$

L'identification donne, par le même calcul qu'au n° **2**,

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{l\lambda\mu} u_{l\lambda} v_{l\mu} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu).$$

Mais les équations de la formule (3) ont une solution unique et

$$w_{\lambda\mu} = \sum_l u_{l\lambda} v_{l\mu} \qquad (l = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}).$$

N ne peut être inférieur au rang $\mathfrak{N}$ de W et

$$(7)\qquad \mathfrak{N} \leqq \mathrm{N}.$$

III. La comparaison des formules (6) et (7) donne

$$\mathfrak{N} = \mathrm{N}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le problème relatif à la décomposition de la forme X en une somme de monomes se ramène ainsi à l'étude de la matrice n — aire W.

4. La matrice n — aire

$$J = [X_{\alpha\beta}], \qquad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}$$

est la jacobienne des n expressions X_α par rapport aux n variables x_β.

On s'assure aisément que

$$a_{\alpha\lambda\rho} = s_{\alpha\rho}(\varepsilon_\lambda), \qquad a_{\rho\beta\mu} = t_{\rho\beta}(\varepsilon_\mu)$$

(voir *Préliminaires*, **5**). Alors on a

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu) &= \sum_\rho a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} = \sum_\rho s_{\alpha\rho}(\varepsilon_\lambda)\, t_{\rho\beta}(\varepsilon_\mu) \\ &= [S(\varepsilon_\lambda)\, T(\varepsilon_\mu)]_{\alpha\beta} \qquad (\textit{Préliminaires}, \mathbf{1}).\end{aligned}$$

Alors la formule (3) s'écrit

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} [S(\varepsilon_\lambda)\, T(\varepsilon_\mu)]_{\alpha\beta} = \Big[\sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu}\, S(\varepsilon_\lambda)\, T(\varepsilon_\mu)\Big]_{\alpha\beta},$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad J = K(w) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

où $K_{\lambda\mu}$ désigne la matrice n — aire

$$S(\varepsilon_\lambda)\, T(\varepsilon_\mu) = T(\varepsilon_\mu)\, S(\varepsilon_\lambda).$$

En vertu de ce qui a été dit : *Les deux matrices n* — aires J *et* W *se correspondent, par la formule* (8), *sans ambiguïté.*

Notamment, pour que $W = 0$, il faut et il suffit que $J = 0$.

La règle pour décomposer une forme linéaire X en une somme de monomes est donc la suivante :

La matrice J *étant connue, calculer la matrice* W *par la formule* (8); *calculer ensuite, ce qui est possible d'une infinité de* *façons, les* $2n\mathfrak{N} = 2n\mathrm{N}$ *quantités*

$$u_{i\lambda}, \qquad v_{i\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

$$w_{\lambda\mu} = \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}$$

[$\mathrm{N} = \mathfrak{N}$ *étant le rang de* W *et la catégorie de* X]; *alors on a*

$$\mathrm{X} = \sum_i u_i x v_i,$$

u_i, v_i *étant les quantités hypercomplexes dont les* $u_{i\lambda}$ *et* $v_{i\mu}$ *sont les coordonnées.*

5. Voyons ce que deviennent les calculs précédents quand on fait usage des coordonnées *spéciales* (voir *Préliminaires*).

On a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r;\ n = r^2),$$

$$\mathrm{X} = \sum_{\alpha\delta} \mathrm{X}_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} = \sum_{\gamma\beta\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} x_{\beta\gamma} \frac{\partial \mathrm{X}_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}}, \tag{9}$$

l'analogue de la formule (1).

Prenons ensuite les 2 N quantités hypercomplexes ($i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$),

$$u_i = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{i\alpha\beta}, \qquad v_i = \sum_{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} v_{i\gamma\delta}.$$

On aura [(*Préliminaires*, **9**), par la multiplication des matrices (u_i), (x) et (v_i)],

$$\sum_i u_i x v_i = \sum_{i\beta\gamma\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} u_{i\alpha\beta} x_{\beta\gamma} v_{i\gamma\delta},$$

et, identifiant avec X,

$$\frac{\partial \mathrm{X}_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} = \sum_i u_{i\alpha\beta} v_{i\gamma\delta} = w_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{10}$$

formule analogue à (3).

Disposons les $n^2 = r^4$ quantités $w_{\alpha\beta\gamma\beta}$ comme les éléments d'une matrice n — aire W, les combinaisons $\alpha\beta$ d'indices donnant les lignes, tandis que les combinaisons $\gamma\delta$ donnent les colonnes. On retombe ainsi sur la matrice W de rang N.

On voit sur la formule (10) que les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sont connues sans ambiguïté dès qu'on possède les r^4 dérivées partielles

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}}.$$

Disposons ces dérivées suivant une matrice n — aire où les $\alpha\delta$ indiqueront les lignes et les $\beta\gamma$ les colonnes. On aura la jacobienne J (**4**). Les deux matrices J et W se définiront l'une l'autre sans ambiguïté.

La formule (10), analogue à la formule (3), justifie la résolubilité annoncée (**2**) des équations (3) par rapport aux n^2 inconnues w.

6. On verra, au Chapitre III, pourquoi, dans certains cas, la catégorie se nomme aussi *indice de monogénéité*.

CHAPITRE II.

GROUPE ($\varepsilon\varepsilon$) D'ORDRE n^2.

7. Prenons une matrice n — aire $W = [w_{\lambda\mu}]$ et considérons les n^2 quantités $w_{\lambda\mu}$ comme les n^2 coordonnées d'une grandeur hypercomplexe w dans un groupe ($\varepsilon\varepsilon$). La grandeur w et la matrice n — aire

$$K(w) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} \qquad (4)$$

se définissent l'une l'autre sans ambiguïté.

La multiplication dans le groupe ($\varepsilon\varepsilon$) sera donnée par la règle suivante :

Si, dans ($\varepsilon\varepsilon$), $w = uv$, *on a*

$$K(w) = K(u) K(v).$$

Il est utile pour la suite de construire et de discuter le groupe ($\varepsilon\varepsilon$).

Il est évident que les matrices n — aires $K(w)$ fournissent une représentation ou *Darstellung* du groupe ($\varepsilon\varepsilon$), lequel a l'ordre n^2 (Frobenius, § **16**).

8. On a (4) :

$$(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta' \beta'', \gamma, \gamma' \gamma'', \lambda, \lambda', \mu, \mu' = 1, 2 \dots n),$$

$$K_{\lambda\mu} = S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) = T(\varepsilon_\mu) S(\varepsilon_\lambda),$$

$$\begin{aligned} K_{\lambda\mu} K_{\lambda'\mu'} &= S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) S(\varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_{\mu'}) \\ &= S(\varepsilon_\lambda) S(\varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_\mu) T(\varepsilon_{\mu'}) = S(\varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda'}) T(\varepsilon_{\mu'} \varepsilon_\mu) \\ &= S\Big(\sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\lambda\lambda'}\Big) T\Big(\sum_{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'} a_{\alpha'\mu'\mu}\Big) \\ &= \Big[\sum_\alpha a_{\alpha\lambda\lambda'} S(\varepsilon_\alpha)\Big]\Big[\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\mu'\mu} T(\varepsilon_{\alpha'})\Big] \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} a_{\alpha\lambda\lambda'} a_{\alpha'\mu'\mu} K_{\alpha\alpha'} \end{aligned}$$

(voir *Préliminaires*).

D'où la formule, changeant un peu les notations,

$$K_{\beta'\beta''} K_{\gamma'\gamma''} = \sum_{\alpha'\alpha''} K_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''}. \tag{11}$$

Il vient alors, si $w = uv$ dans $(\varepsilon\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} K(w) = K(u) K(v) &= \Big(\sum_{\beta'\beta''} u_{\beta'\beta''} K_{\beta'\beta''}\Big)\Big(\sum_{\gamma'\gamma''} v_{\gamma'\gamma''} K_{\gamma'\gamma''}\Big) \\ &= \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''} K_{\beta'\beta''} K_{\gamma'\gamma''} \\ &= \sum_{\alpha'\alpha''} K_{\alpha'\alpha''} \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''}. \end{aligned}$$

La formule de multiplication dans $(\varepsilon\varepsilon)$ est ainsi

$$w_{\alpha'\alpha''} = \sum_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} u_{\beta'\beta''} v_{\gamma'\gamma''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''}. \tag{12}$$

9. Il est facile d'avoir des formules calquées sur celles du groupe (ε), rappelées dans les *Préliminaires*.

Prenons trois indices g, h, k variant de 1 à n^2 et faisons correspondre g à $\alpha'\alpha''$, h à $\beta'\beta''$, k à $\gamma'\gamma''$. On écrira

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} w_g &= \sum_{hk} u_h v_k \mathrm{A}_{ghk}, \\ \mathrm{A}_{ghk} &= a_{\alpha'\beta'\gamma'}\, a_{\alpha''\gamma''\beta''}. \end{aligned}\right.$$

Le groupe ($\varepsilon\varepsilon$) comportera n^2 fondamentaux ε_g ou $\varepsilon_{\alpha'\alpha''}$, dont la multiplication sera donnée par la formule (14), tirée de la formule (11),

$$(14)\qquad \varepsilon_h \varepsilon_k = \sum_g \varepsilon_g \mathrm{A}_{ghk}.$$

On désignera, pour le groupe ($\varepsilon\varepsilon$), par les lettres

$$\mathfrak{F},\quad \mathfrak{R},\quad \mathfrak{S},\quad \mathfrak{T},\quad \mathfrak{P},$$

ce qui, pour le groupe (ε), a été désigné aux *Préliminaires* par les lettres

$$\mathrm{F},\quad \mathrm{R},\quad \mathrm{S},\quad \mathrm{T},\quad \mathrm{P}.$$

On aura exactement les mêmes formules, sauf que les lettres a, α, β, γ sont remplacées par les lettres A, g, h, k.

Ainsi, pour la forme trilinéaire,

$$\mathfrak{F}(\xi, u, v) = \sum_{ghk} \mathrm{A}_{ghk} \xi_g u_h v_k;$$

pour la matrice parastrophe $\mathfrak{R}(\xi)$,

$$\mathfrak{R}_{hk}(\xi) = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial u_h\, \partial v_k};$$

pour la matrice du groupe ($\varepsilon\varepsilon$),

$$\mathfrak{S}_{gk}(u) = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \xi_g\, \partial v_k};$$

pour la matrice antistrophe,

$$\mathfrak{F}_{gh}(v) = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \xi_g\, \partial u_h},$$

. . . .

10. Montrons brièvement que les propriétés du groupe (ε) se conservent pour $(\varepsilon\varepsilon)$.

I. Aucun des trois déterminants n^2 — aires

$$|\mathfrak{R}(\xi)|, \quad |\mathfrak{s}(u)|, \quad |\mathfrak{C}(v)|$$

ne s'évanouit identiquement.

Soit, par exemple, le déterminant parastrophe $|\mathfrak{R}(\xi)|$. Montrons que ce déterminant ne s'évanouit pas pour ξ convenablement choisi. Prenons

$$\xi_{\alpha'\alpha''} = c_{\alpha'}\, d_{\alpha''},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''}(\xi) &= \sum_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'}\, a_{\alpha''\gamma''\beta''}\, c_{\alpha'}\, d_{\alpha''} \\ &= \Big(\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\gamma'}\, c_{\alpha'}\Big)\Big(\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\gamma''\beta''}\, d_{\alpha''}\Big) \\ &= r_{\beta'\gamma'}(c)\, r'_{\gamma''\beta''}(d) \qquad (\textit{Préliminaires, } \mathbf{5});\end{aligned}$$

le déterminant parastrophe est

$$|\, r_{\beta'\gamma'}(c)\, r'_{\gamma''\beta''}(d)\,|.$$

Dans ce déterminant n^2 — aire, les lignes correspondent aux combinaisons $\beta'\beta''$, les colonnes aux combinaisons $\gamma'\gamma''$. Donc, en vertu d'un théorème de Kronecker (Pascal, *Die Determinanten*, p. 107), ce déterminant est

$$|\, r_{\beta'\gamma'}(c)\,|^n\, |\, r'_{\beta''\gamma''}(d)\,|^n = |\, \mathrm{R}(c)\,|^n\, |\, \mathrm{R}(d)\,|^n \neq 0,$$

pour c et d quelconques.

Le raisonnement est analogue pour $|\mathfrak{s}(u)|$ et $|\mathfrak{C}(v)|$.

Un corollaire est que l'on ne peut avoir, *pour v quelconque*, $uv = 0$ sans avoir aussi $u = 0$.

En effet, la formule (13) donnerait

$$0 = \sum_{hk} \mathrm{A}_{ghk}\, u_h v_k = \sum_h u_h \sum_k \mathrm{A}_{ghk}\, v_k = \sum_h u_h \mathfrak{C}_{gh}(v)$$

pour $g, h, k = 1, 2, \ldots, n^2$.

Comme, pour v quelconque, $|\mathfrak{C}(v)| \neq 0$, $u_h = 0$. C. Q. F. D.

11. II. Dans $(\varepsilon\varepsilon)$ la multiplication est associative, puisqu'elle est fondée sur la multiplication des matrices n — aires (**7**), laquelle est associative.

III. Les n^2 fondamentaux ε_g ou $\varepsilon_{\alpha'\alpha''}$ sont linéairement indépendants. Supposons, en effet, pour n^2 constantes $\eta_{\alpha'\alpha''}$ convenablement choisies,

$$\sum_{\alpha'\alpha''} \eta_{\alpha'\alpha''}\varepsilon_{\alpha'\alpha''} = 0.$$

La quantité η, dont les coordonnées sont les $\eta_{\alpha'\alpha''}$, est nulle; donc $\eta v = 0$ pour v quelconque, donc (I ci-dessus) $0 = \eta = \eta_{\alpha'\alpha''}$.

C. Q. F. D.

IV. Pour le groupe (ε), les quantités (Frobenius, § 7 et *Préliminaires*, **7**) σ_μ et $\sigma_{\mu'}$ qui figurent dans la trace de $|\,S(x)\,|$ sont

$$(\lambda, \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sigma_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda\mu\lambda}, \qquad \sigma_{\mu'} = \sum_\lambda a_{\lambda\mu\lambda}.$$

La quantité analogue est pour $(\varepsilon\varepsilon)$

$$\upsilon_h = \sum_g A_{ghg} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n^2),$$

g, h, k correspondant respectivement à $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$. D'ailleurs

$$A_{ghk} = a_{\alpha'\beta'\gamma'}a_{\alpha''\gamma''\beta''}$$

et A_{ghg} s'obtient en faisant $\gamma' = \alpha'$, $\gamma'' = \alpha''$,

$$\upsilon_h = \sum_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\alpha'}a_{\alpha''\alpha''\beta''} = \left(\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\alpha'}\right)\left(\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\alpha''\beta''}\right),$$

$\sum_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\alpha'}$, c'est $\sigma_{\beta'}$. Quant à $\sum_{\alpha''} a_{\alpha''\alpha''\beta''}$, c'est (Frobenius, *loc. cit.*),

$$\tau_{\beta''} = \sigma_{\beta''},$$

$\sum_{\beta''} \tau_{\beta''}x_{\beta''}$ étant la trace de $|\,T(x)\,|$.

Bref

$$\upsilon_h = \upsilon_{\beta'\beta''} = \sigma_{\beta'}\sigma_{\beta''}.$$

Le groupe (ε) est un groupe de Dedekind (Frobenius, § 7) parce que le déterminant de la matrice symétrique n — aire $\mathrm{P} = \mathrm{R}(\sigma)$ est $\neq 0$. Formons de même, pour le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$, la matrice n^2 — aire $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}(\upsilon)$, telle que

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{\beta'\beta''\gamma'\gamma''} &= \sum_{\alpha'\alpha''} \upsilon_{\alpha'\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} = \sum_{\alpha'\alpha''} \sigma_{\alpha'}\sigma_{\alpha''} a_{\alpha'\beta'\gamma'} a_{\alpha''\gamma''\beta''} \\ &= \left(\sum_{\alpha'} \sigma_{\alpha'} a_{\alpha'\beta'\gamma'}\right)\left(\sum_{\alpha''} \sigma_{\alpha''} a_{\alpha''\gamma''\beta''}\right) \\ &= r_{\beta'\gamma'}(\sigma)\, r'_{\beta''\gamma''}(\sigma) = p_{\beta'\gamma'} p_{\beta''\gamma''}\end{aligned}$$

(*Préliminaires*, **7**), où

$$\mathrm{P} = [p_{\beta'\gamma'}] = \mathrm{P}' = [p_{\gamma'\beta'}].$$

Alors $|\mathfrak{P}| = |p_{\beta'\gamma'} p_{\beta''\gamma''}|$ et dans la matrice n^2 — aire $\mathfrak{P}$ les lignes sont indiquées par les indices $\beta'\beta''$ ou h, les colonnes par les indices $\gamma'\gamma''$ ou k. Le théorème de Kronecker, déjà invoqué, donne

$$|\mathfrak{P}| = |p_{\beta'\gamma'}|^n |p_{\beta''\gamma''}|^n = |\mathrm{P}|^{2n} \neq 0.$$

D'ailleurs $\mathfrak{P}$ est symétrique.

Donc $(\varepsilon\varepsilon)$ *est un groupe de Dedekind.*

12. V. Cherchons l'unité principale de $(\varepsilon\varepsilon)$, que je nomme $\mathcal{E}$, de coordonnées $\mathcal{E}_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$. Sa matrice n — aire $\mathrm{K}(\mathcal{E})$ étant telle que $\mathrm{K}(\mathcal{E})\mathrm{K}(u) = \mathrm{K}(u)$ pour u quelconque, on a $\mathrm{K}(\mathcal{E}) = \mathrm{E} =$ la n — aire unité. Posons $\mathcal{E}_{\lambda\mu} = e_\lambda e_\mu$, e étant l'unité principale de (ε). On a (**8**)

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(\mathcal{E}) &= \sum_{\lambda\mu} e_\lambda e_\mu \mathrm{K}_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\mu} e_\lambda e_\mu \mathrm{S}(\varepsilon_\lambda)\mathrm{T}(\varepsilon_\mu) \\ &= \left[\sum_\lambda e_\lambda \mathrm{S}(\varepsilon_\lambda)\right]\left[\sum_\mu e_\mu \mathrm{T}(\varepsilon_\mu)\right] = \mathrm{S}(e)\mathrm{T}(e) = \mathrm{E}.\end{aligned}$$

Comme les quantités u de $(\varepsilon\varepsilon)$ et les matrices $\mathrm{K}(u)$ se définissent mutuellement sans ambiguïté; $\mathcal{E}$, ainsi introduite, est la seule unité principale de $(\varepsilon\varepsilon)$.

13. VI. On a rappelé (*Préliminaires*, **7**) la définition de la grandeur invariante dans un groupe, ainsi que la proposition suivante :

Pour qu'un groupe de Dedekind soit simple, il faut et il suffit que la seule grandeur invariante soit l'unité principale.

Ce criterium permettra de voir que $(\varepsilon\varepsilon)$, déjà, en vertu de IV, groupe de Dedekind, est simple.

Soit υ, $\upsilon \neq \mathcal{E}$ et $\neq 0$, une grandeur invariante de $(\varepsilon\varepsilon)$; on a, par définition, pour *u quelconque* dans $(\varepsilon\varepsilon)$,

$$u_\upsilon = \upsilon u, \qquad \mathrm{K}(u)\,\mathrm{K}(\upsilon) = \mathrm{K}(\upsilon)\,\mathrm{K}(u).$$

Faisons, en particulier, successivement

$$u_{\lambda\mu} = e_\lambda \eta_\mu \qquad \text{et} \qquad u_{\lambda\mu} = e_\mu \zeta_\lambda;$$

il viendra

$$\mathrm{K}(u) = \sum_{\lambda\mu} e_\lambda \eta_\mu \,\mathrm{S}(\varepsilon_\lambda)\,\mathrm{T}(\varepsilon_\mu) = \mathrm{S}(e)\,\mathrm{T}(\eta) = \mathrm{T}(\eta),$$

$$\mathrm{K}(u) = \sum_{\lambda\mu} e_\mu \zeta_\lambda \,\mathrm{S}(\varepsilon_\lambda)\,\mathrm{T}(\varepsilon_\mu) = \mathrm{S}(\zeta)\,\mathrm{T}(e) = \mathrm{S}(\zeta).$$

$\mathrm{K}(\upsilon)$ est donc échangeable à $\mathrm{T}(\eta)$ et à $\mathrm{S}(\zeta)$. Frobenius (§ 1, *in fine*) montre qu'il y a dans (ε) deux grandeurs $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, telles que

$$\mathrm{K}(\upsilon) = \mathrm{S}(\mathfrak{x}) = \mathrm{T}(\mathfrak{y}).$$

On en déduit (Frobenius, § 14, théorème IV)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = e.$$

De là

$$\mathrm{K}(\upsilon) = \mathrm{E}.$$

υ est donc l'unité principale forcément, puisque les grandeurs de $(\varepsilon\varepsilon)$ et les matrices K se définissent mutuellement sans ambiguïté.

C. Q. F. D.

14. Ainsi *le groupe* $(\varepsilon\varepsilon)$ *d'ordre* n^2 *est simple,* tout comme le groupe (ε) d'ordre n.

La forme $|\mathfrak{s}(w)|$ de degré n^2, aux n^2 variables $w_{\lambda\mu}$, est, d'après les théories connues,

$$|\mathfrak{s}(w)| = [\Phi(w)]^n,$$

où Φ est une forme indécomposable de degré n.

Les n — aires $K(w)$ fournissent une *Darstellung* de $(\varepsilon\varepsilon)$. Si

$$|K(w)| = \Theta(w),$$

on a

$$\Theta(uv) = \Theta(u)\Theta(v)$$

(Frobenius, dernier paragraphe) et $\Theta(w)$ est une puissance de $\Phi(w)$. Ils sont du même degré n et l'on a, à un facteur constant près, $\Phi = \Theta$.

On a, pour le groupe (ε) d'ordre $n = r^2$,

$$|S(z)| = [\varphi(z)]^r,$$

$\varphi(z) =$ forme de degré r par rapport aux n variables z.

Si l'on pose, en particulier, $w_{\lambda\mu} = \eta_\lambda \zeta_\mu$, η et ζ quelconques,

$$K(w) = \sum_{\lambda\mu} \eta_\lambda \zeta_\mu T(\varepsilon_\mu) S(\varepsilon_\lambda) = S(\eta) T(\zeta),$$

$$|K(w)| = \Theta(w) = |S(\eta)|\,|T(\zeta)| = [\varphi(\eta)\varphi(\zeta)]^r = |\mathfrak{s}(w)|^{\frac{1}{n}}.$$

15. Reprenons les formules (3) et (4), qu'on écrira

$$(3) \qquad [b_{\alpha\beta}] = K(w) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

$$(4) \qquad b_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} \Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu).$$

Les w sont les coordonnées dans $(\varepsilon\varepsilon)$ de la quantité hypercomplexe w. D'autre part, le déterminant des n^4 quantités Ω est $\neq 0$. La formule (4) fournit donc, dans $(\varepsilon\varepsilon)$, un changement de fondamentaux (*Préliminaires,* **8**) et de coordonnées.

Dans ($\varepsilon\varepsilon$), pour $w = uv$, on a

$$\mathrm{K}(w) = \mathrm{K}(u)\,\mathrm{K}(v).$$

Alors les $b_{\alpha\beta}$ peuvent être considérées comme des coordonnées *spéciales* dans ($\varepsilon\varepsilon$) (*Préliminaires,* **9**) et l'on peut écrire

$$\mathrm{K}(w) = (w).$$

On verra plus bas (**32**) pourquoi nous avons dû étudier le groupe ($\varepsilon\varepsilon$).

CHAPITRE III.

MATRICE $\mathrm{W}(x)$; SES PROPRIÉTÉS.

16. Soient

$$\mathrm{X}_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

n fonctions des n variables scalaires $x_1, \ldots, x_n$. La grandeur hypercomplexe dans le groupe (ε),

$$\mathrm{X} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \mathrm{X}_\alpha,$$

sera, *par définition,* fonction de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta.$$

X possède-t-elle quelques propriétés analogues à la monogénéité dans les fonctions d'une variable complexe?

M. Scheffers (*Comptes rendus,* mai 1893) a reconnu que la monogénéité ne pouvait être étendue qu'aux quantités hypercomplexes à multiplication commutative.

Je me propose de voir ce qui se passe pour un groupe (ε) simple, d'ordre $n = r^2$ et, par conséquent, à multiplication non commutative.

17. Prenons deux nombres réels, x_1 et x_2, la variable complexe

$$x = x_1 + ix_2 \qquad (i^2 + 1 = 0)$$

et la fonction

$$y = f(x) = X_1(x_1, x_2) + i X_2(x_1, x_2).$$

La monogénéité consiste en ce que dy est égal au produit de la différentielle dx par une certaine quantité complexe finie

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Avec la terminologie, introduite au Chapitre I, on peut dire : *la monogénéité consiste en ce que la différentielle de la fonction est, vis-à-vis la différentielle de la variable, un monome linéaire.*

Revenons aux fonctions d'une variable hypercomplexe. La différentielle

$$dX = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha\, dX_\alpha = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha\, dx_\beta\, X_{\alpha\beta}, \qquad X_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}$$

est, par rapport à dx, une *forme* (**1**) du premier degré.

Elle peut donc être mise (Chap. I) sous forme d'une somme de monomes en dx, c'est-à-dire d'un polynome linéaire en dx; la catégorie de ce polynome, qu'on peut nommer aussi *indice de monogénéité*, sera pour nous l'élément de classification pour les fonctions X. Les fonctions à indice *un* de monogénéité, telles que $dX = u\,dx\,v$, rappelleront les fonctions monogènes ordinaires.

18. Introduisons, comme au Chapitre I, la matrice n — aire,

$$W = W(x) = [w_{\lambda\mu}(x)],$$

telle que (form. 3),

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu}(x)\,\Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu),$$

$$\Omega(\alpha, \beta; \lambda, \mu) = \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho}\, a_{\rho\beta\mu},$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho = 1, 2, \ldots, n.$$

Lorsqu'on fait usage des coordonnées spéciales,

$$x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma}\, x_{\beta\gamma}, \qquad X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta}\, X_{\alpha\delta}(x),$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r; \qquad n = r^2$$

et

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} \qquad \text{(form. 10)};$$

dans la matrice W, l'élément $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ occupe la ligne d'indices $\alpha\beta$ et la colonne d'indices $\gamma\delta$.

Nous allons donc étudier de plus près la matrice W et notamment le rang de W, ainsi que la façon dont W provient de la jacobienne des fonctions X par rapport aux variables x.

19. Reprenons les coordonnées générales et voyons quelles modifications éprouve W, quand on effectue un changement de fondamentaux (Frobenius, § 9).

Rappelons quelques formules du Chapitre I,

$$J = [X_{\alpha\beta}] = \left[\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}\right] = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

$$K_{\lambda\mu} = S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu),$$

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha [K_{\lambda\mu}]_{\alpha\beta}.$$

Prenons maintenant une matrice de constantes

$$B = [b_{\alpha\beta}], \qquad |B| = 1, \qquad B_{\alpha\beta} = \frac{\partial |B|}{\partial b_{\alpha\beta}}, \qquad B^{-1} = [B_{\beta\alpha}],$$

et posons (Frobenius, § 9), pour changer de fondamentaux,

$$\varepsilon = B[\bar{\varepsilon}], \qquad \varepsilon_l = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha b_{l\alpha},$$

$$\bar{\varepsilon} = B^{-1}[\varepsilon], \qquad \bar{\varepsilon}_l = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha B_{\alpha l}.$$

Le groupe (ε) se change en le groupe $(\bar{\varepsilon})$. Je désignerai toutes les grandeurs et formations, afférentes à $(\bar{\varepsilon})$, par les mêmes lettres que les grandeurs et formations afférentes à (ε). Seulement ces lettres seront surmontées d'un petit trait horizontal.

20. On aura

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \bar{x}_\alpha \quad \text{et} \quad x = \mathrm{B}'^{-1}[\bar{x}],$$

$$x_\gamma = \sum_\gamma \mathrm{B}_{\gamma\beta} \bar{x}_\beta, \qquad \bar{x} = \mathrm{B}'[x],$$

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \mathrm{X}_\alpha = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \bar{\mathrm{X}}_\alpha,$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}'^{-1}[\bar{\mathrm{X}}], \qquad \bar{\mathrm{X}} = \mathrm{B}'[\mathrm{X}],$$

$$\bar{\mathrm{X}}_\alpha = \sum_\delta b_{\delta\alpha} \mathrm{X}_\delta.$$

21. Calculons la matrice $\bar{\mathrm{J}} = [\bar{\mathrm{X}}_{\alpha\beta}]$,

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{X}}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial \bar{\mathrm{X}}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\beta} \sum_\delta b_{\delta\alpha} \mathrm{X}_\delta \\ &= \sum_{\gamma\delta} b_{\delta\alpha} \frac{\partial \mathrm{X}_\delta}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\gamma}{\partial \bar{x}_\beta} = \sum_{\gamma\delta} b_{\delta\alpha} \mathrm{X}_{\delta\gamma} \mathrm{B}_{\gamma\beta},\end{aligned}$$

sous le bénéfice des formules du n° **20**. Autrement dit :

$$\bar{\mathrm{X}}_{\alpha\beta} = [\mathrm{B}'\mathrm{J}\,\mathrm{B}'^{-1}]_{\alpha\beta};$$

$$\bar{\mathrm{J}} = \mathrm{B}'\mathrm{J}\mathrm{B}'^{-1}.$$

22. D'autre part (**19** et **4**), on a

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_\lambda \bar{\varepsilon}_\beta \bar{\varepsilon}_\mu &= \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha [\bar{\mathrm{K}}_{\lambda\mu}]_{\alpha\beta} = \Big(\sum_g \mathrm{B}_{g\lambda} \varepsilon_g\Big)\Big(\sum_h \mathrm{B}_{h\beta} \varepsilon_h\Big)\Big(\sum_k \mathrm{B}_{k\mu} \varepsilon_k\Big) \\ &= \sum_{ghk} \mathrm{B}_{g\lambda} \mathrm{B}_{h\beta} \mathrm{B}_{k\mu} \varepsilon_g \varepsilon_h \varepsilon_k \\ &= \sum_{ghkl} \mathrm{B}_{g\lambda} \mathrm{B}_{h\beta} \mathrm{B}_{k\mu} \varepsilon_l [\mathrm{K}_{gk}]_{lh} \\ &= \sum_{\alpha ghkl} \bar{\varepsilon}_\alpha \mathrm{B}_{g\lambda} \mathrm{B}_{h\beta} \mathrm{B}_{k\mu} b_{l\alpha} [\mathrm{K}_{gk}]_{lh}\end{aligned}$$

$$(\alpha, \beta, \lambda, \mu, g, h, k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

grâce aux formules du n° **19**.

Identifiant les coefficients de $\bar{\varepsilon}_\alpha$ dans les deux expressions du produit $\bar{\varepsilon}_\lambda\,\bar{\varepsilon}_\beta\,\bar{\varepsilon}_\mu$, on a

$$[\overline{\mathrm{K}}_{\lambda\mu}]_{\alpha\beta}=\sum_{gk}\mathrm{B}_{g\lambda}\mathrm{B}_{k\mu}\sum_{hl}b_{l\alpha}[\mathrm{K}_{gk}]_{lh}\,\mathrm{B}_{h\beta}=\sum_{gk}\mathrm{B}_{gl}\,\mathrm{B}_{k\mu}[\mathrm{B}'\,\mathrm{K}_{gh}\,\mathrm{B}'^{-1}]_{\alpha\beta},$$

et, finalement,

$$\overline{\mathrm{K}}_{\lambda\mu}=\mathrm{B}'\Big(\sum_{gk}\mathrm{B}_{g\lambda}\mathrm{B}_{k\mu}\mathrm{K}_{gk}\Big)\mathrm{B}'^{-1}.$$

23. Ensuite, sous le bénéfice de cette formule et de celle du nº **21** et du nº **4**,

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{J}}&=\sum_{\lambda\mu}\bar{\varpi}_{\lambda\mu}(\bar{x})\,\overline{\mathrm{K}}_{\lambda\mu}=\mathrm{B}'\Big(\sum_{\lambda\mu gk}\mathrm{B}_{g\lambda}\mathrm{B}_{k\mu}\bar{\varpi}_{\lambda\mu}\mathrm{K}_{gk}\Big)\mathrm{B}'^{-1}\\&=\mathrm{B}'\mathrm{J}\,\mathrm{B}'^{-1}=\mathrm{B}'\Big(\sum_{gk}\varpi_{gk}\mathrm{K}_{gk}\Big)\mathrm{B}'^{-1}.\end{aligned}$$

Puis

$$0=\sum_{gk}\mathrm{K}_{gk}\Big(\varpi_{gk}-\sum_{\lambda\mu}\mathrm{B}_{g\lambda}\mathrm{B}_{k\mu}\bar{\varpi}_{\lambda\mu}\Big)=\sum_{\lambda\mu}\mathrm{K}_{gk}\eta_{gk}=\mathrm{K}(\eta)$$

avec les notations du nº **7**, et en posant

$$\eta_{gk}=\varpi_{gk}-\sum_{\lambda\mu}\mathrm{B}_{g\lambda}\mathrm{B}_{k\mu}\bar{\varpi}_{\lambda\mu}.$$

La matrice n — aire $\mathrm{K}(\eta)$ ne peut s'évanouir que si tous les η_{gk} sont nuls. Donc

$$\varpi_{gk}=\sum_{\lambda\mu}\bar{\varpi}_{\lambda\mu}\mathrm{B}_{g\lambda}\mathrm{B}_{k\mu}=[\mathrm{B}'^{-1}\,\overline{\mathrm{W}}\,\mathrm{B}^{-1}]_{gk},$$

$$\mathrm{W}=\mathrm{B}'^{-1}\,\overline{\mathrm{W}}(\bar{x})\,\mathrm{B}^{-1},$$

$$\overline{\mathrm{W}}(\bar{x})=\mathrm{B}'\,\mathrm{W}(x)\,\mathrm{B}. \tag{15}$$

24. D'après les théories bien connues de Weierstrass et en vertu de la formule (15), les *Elementarteiler* du faisceau

$$\rho W + W'$$

de matrices n — aires sont des covariants.

Autrement dit, décomposons les déterminants

$$|\rho W(x) + W'(x)| \quad \text{et} \quad |\rho \overline{W}(\overline{x}) + \overline{W}'(\overline{x})|$$

considérés comme polynomes en ρ en leurs *Elementarteiler*,

$$|\rho W(x) + W'(x)| = |W(x)|^{\varpi} \Pi[\rho - a(x)]^{m},$$
$$|\rho \overline{W}(\overline{x}) + \overline{W}'(\overline{x})| = |\overline{W}(\overline{x})|^{\overline{\varpi}} \Pi[\rho - \overline{a}(\overline{x})]^{\overline{m}}.$$

Il viendra

$$|\overline{W}(\overline{x})| = |W(x)|; \qquad \overline{a}(\overline{x}) = a(x); \qquad \overline{\varpi} = \varpi; \qquad \overline{m} = m.$$

Les exposants m et ϖ, les fonctions $|W|$ et a ont leurs valeurs indépendantes du choix des fondamentaux ε et sont invariants vis-à-vis de toute transformation par la substitution B.

En particulier et comme il fallait s'y attendre, *le rang de* W, *indice de monogénéité pour la fonction* X (**17**) *de la variable hypercomplexe* x, *ne dépend pas du choix des nombres fondamentaux dans le groupe* (ε).

25. Les relations étroites qui existent entre la matrice W et la matrice jacobienne J s'expliquent, puisque les éléments $X_{\alpha\beta}$ de J sont les coordonnées spéciales dans le groupe ($\varepsilon\varepsilon$) de la quantité w qui a déjà, dans ($\varepsilon\varepsilon$), les éléments de W pour coordonnées (**15**).

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION DE LA MATRICE $W(x)$.

26. Reprenant les coordonnées spéciales, je vais chercher comment la matrice n — aire W se déduit de la jacobienne J des fonctions X par rapport aux variables x.

27. Prenons $r^4 = n^2$ quantités

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r).$$

Disposons-les en éléments d'une matrice n — aire W en plaçant :

Dans une même ligne, les w où la combinaison $\alpha\beta$ d'indices est la même;

Dans une même colonne, les w où la combinaison $\gamma\delta$ est la même.

On range, d'ailleurs, les $\alpha\beta$ ou les $\gamma\delta$ dans l'ordre suivant :

$$11, \quad 12, \quad \ldots, \quad 1r; \quad 21, \quad 22, \quad \ldots, \quad 2r; \quad \ldots; \quad r1, r2, \ldots, rr.$$

La matrice W est ainsi répartie en r bandes horizontales, numérotées $1, 2, \ldots, \alpha, \ldots, r$, comprenant chacune les r lignes $\alpha\beta$, où le premier indice est α.

Il y a de même, dans W, r bandes verticales, numérotées $1, 2, \ldots, \gamma, \ldots, r$, comprenant chacune les r colonnes $\gamma\delta$, où le premier indice est γ.

Les intersections des bandes horizontales et verticales, d'indices α et γ respectivement, décomposent W en $r^2 = n$ matrices partielles r — aires qu'on peut appeler $\theta_{\alpha\gamma}$.

On posera

$$W = \{\theta_{\alpha\gamma}\} \qquad w_{\alpha\beta\gamma\delta} = [\theta_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta}$$

pour indiquer que, dans la matrice r — aire, $\theta_{\alpha\gamma}$, $w_{\alpha\delta\gamma\delta}$ est l'élément de la $\beta^{\text{ième}}$ ligne et de la $\delta^{\text{ième}}$ colonne.

Les matrices $\theta_{\alpha\gamma}$, assimilées à des lettres à deux indices, donnent une matrice r — aire

$$\Theta = [\theta_{\alpha\gamma}],$$

canevas de la matrice W.

28. Transposons le canevas. On aura la matrice n — aire

$$W_1 = \{\theta_{\gamma\alpha}\}.$$

Si je transpose chaque matrice partielle, j'obtiens la matrice n — aire

$$W_2 = \{\theta'_{\alpha\gamma}\}.$$

La transposition de la matrice n — aire W elle-même est le produit des transpositions précédentes. On a

$$W' = \{ \theta'_{\gamma\alpha} \}.$$

On vérifie sans peine que

$$\begin{aligned} W &= (W_1)_1 = (W_2)_2; & W'_1 &= W_2; & W'_2 &= W_1, \\ W' &= (W_1)_2 = (W_2)_1; & (W_1)' &= W_2; & (W_2)' &= W_1. \end{aligned}$$

29. Soient deux matrices n — aires, telles que W, A et B, décomposées en matrices partielles r — aires,

$$A = \{ g_{\alpha\delta} \}, \qquad B = \{ h_{\alpha\delta} \},$$

et les substitutions n — aires,

$$\left.\begin{aligned} A &= \left| x_{\alpha\beta} \quad \sum_{\gamma\delta} [g_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta} x_{\gamma\delta} \right| \\ B &= \left| x_{\gamma\delta} \quad \sum_{\lambda\mu} [h_{\gamma\lambda}]_{\delta\mu} x_{\lambda\mu} \right| \end{aligned}\right. \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, r),$$

$$AB = \left| x_{\alpha\beta} \quad \sum_{\lambda\mu} x_{\lambda\mu} [K_{\alpha\lambda}]_{\beta\mu} \right|,$$

$$[K_{\alpha\lambda}]_{\beta\mu} = \sum_{\gamma\delta} [g_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta} [h_{\gamma\lambda}]_{\delta\mu} = \sum_{\gamma} [g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}]_{\beta\mu},$$

$$K_{\alpha\lambda} = \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}.$$

On voit que le canevas du produit AB est constitué par les matrices r — aires,

$$K_{\alpha\lambda} = \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} h_{\gamma\lambda}; \qquad AB = \{ K_{\alpha\lambda} \};$$

$K_{\alpha\lambda}$ est symboliquement l'élément de ligne α et de colonne λ dans la matrice r — aire $K = gh$, produit des deux matrices r — aires

$$g = [g_{\alpha\gamma}], \qquad h = [h_{\gamma\lambda}].$$

On peut donc dire que symboliquement *le canevas d'un produit est le produit des canevas des facteurs.*

30. Reprenons la fonction

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta},$$

la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} x_{\beta\gamma},$$

et posons [**18**, form. (10)],

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}, \qquad z_{\gamma\beta} = x_{\beta\gamma}.$$

Si nous rangeons les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ suivant les lignes $\alpha\beta$ et les colonnes $\gamma\delta$, nous obtenons la matrice W. Si nous rangeons les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ suivant les lignes $\alpha\delta$ et les colonnes $\gamma\beta$, nous obtenons la matrice H, jacobienne des X par rapport aux variables z.

On passe donc de W à H, ou réciproquement, en permutant dans les $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ les indices β et δ, tandis que les indices α et γ restent fixes.

Considérons les canevas (**29**)

$$W = |\,\theta_{\alpha\gamma}\,|, \qquad H = |\,\upsilon_{\alpha\gamma}\,|.$$

On a

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = [\theta_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta} = [\upsilon_{\alpha\gamma}]_{\delta\beta},$$

c'est-à-dire

$$\upsilon_{\alpha\gamma} = \theta'_{\alpha\gamma}.$$

Nous reportant au n° **27**, nous dirons que $H = W_2$ *ou* $W = H_2$, ou bien que, *pour passer de* H *à* W, *ou réciproquement, il suffit de transposer des matrices* r — aires *partielles*.

31. Comment se modifie la matrice W, lorsqu'on effectue un changement des variables scalaires?

Nommons, pour abréger le langage, $J\left(\frac{y}{x}\right)$ la matrice jacobienne des n fonctions y par rapport aux n variables x, de façon que

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \left| J\left(\frac{y}{x}\right) \right|.$$

On écrira donc

$$J = J\binom{X}{x}, \qquad H = J\binom{X}{z}.$$

Posons $z_\alpha = f_\alpha(t_1, \ldots, t_n)$. Il viendra

$$J\binom{X}{t} = J\binom{X}{z} J\binom{z}{t}.$$

Avec les variables t, la matrice W devient (**30**)

$$\left[J\binom{X}{t}\right]_2 = \left[J\binom{X}{z} J\binom{z}{t}\right]_2.$$

32. Traitons la même question en coordonnées générales.

On a (**4** et **7**)

$$J = J\binom{X}{x} = K(u) = \sum_{\lambda\mu} u_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu}.$$

Pour changer de variables scalaires, posons

$$x_\alpha = f_\alpha(y_1, \ldots, y_n).$$

On aura

$$J\binom{x}{y} = K(v) = \sum_{\lambda\mu} v_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu},$$

$$J\binom{X}{y} = J\binom{X}{x} J\binom{x}{y} = K(u) K(v) = K(w).$$

Par conséquent on peut énoncer le théorème suivant, en nous reportant aux considérations du Chapitre II.

Théorème. — *Considérons la fonction* X *de la variable hypercomplexe* x *et la fonction* x *de la variable hypercomplexe* y, *enfin la fonction* X *de la variable hypercomplexe* y. *Nommons respectivement* u, v, w *les quantités hypercomplexes du groupe* $(\varepsilon\varepsilon)$ *du Chapitre II qui correspondent respectivement à la matrice* W :

Pour la fonction X *de* x,

Pour la fonction x *de* y,

Pour la fonction X *de* y.

La grandeur w sera le produit dans le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ des deux grandeurs u et v.

Voilà comment s'introduit utilement le groupe $(\varepsilon\varepsilon)$ dans la présente théorie des fonctions d'une variable hypercomplexe.

33. Démontrons maintenant quelques théorèmes utiles pour la suite.

CHAPITRE V.

PROPOSITIONS DIVERSES.

34. Reprenons, avec nos notations ordinaires, la jacobienne J des fonctions X_α par rapport aux variables x_β, dans

$$X = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha X_\alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

On a (7)

$$J = K(w) = K(W) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} S(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu).$$

Considérons, avec M. Frobenius, la matrice symétrique $P = R(\sigma)$, $\sum_\alpha \sigma_\alpha x_\alpha$ étant la *trace* de $|S(x)|$ (voir *Préliminaires*). On aura [Frobenius, form. (11), § 1, en faisant $\xi = \sigma$], pour tout x,

$$PS(x) = T'(x) P.$$

De là

$$PJ = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} PS(\varepsilon_\lambda) T(\varepsilon_\mu) = \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} T'(\varepsilon_\lambda) PT(\varepsilon_\mu).$$

Puis

$$\begin{aligned}(PJ)' = J'P &= \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} T'(\varepsilon_\mu) PT(\varepsilon_\lambda) \\ &= P \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} S(\varepsilon_\mu) T(\varepsilon_\lambda) = PK(W').\end{aligned}$$

Finalement, ρ étant un paramètre variable,

$$(16)\qquad \begin{cases} J = K(W), \qquad P^{-1}J'P = K(W'), \\ \rho J + P^{-1}J'P = K(\rho W + W'). \end{cases}$$

En particulier, faisant $\rho = -1$,

$$P^{-1}J'P - J = K(W' - W).$$

Chacune des relations

$$W' = W, \qquad P^{-1}J'P = J$$

entraîne l'autre.

De la seconde on tire

$$(PJ)' = PJ, \qquad PJ = \text{symétrique}.$$

Or $P = [p_{\alpha\beta}]$; PJ est la jacobienne des n expressions $Y_\alpha = \sum_\delta p_{\alpha\delta} X_\delta$ par rapport aux x_β. La symétrie de la jacobienne indique que l'expression

$$\begin{aligned} \sum_\alpha Y_\alpha \, dx_\alpha &= \sum_{\alpha\delta} p_{\alpha\delta} X_\delta \, dx_\alpha \\ &= \sum_\delta X_\delta \, d \sum_\alpha p_{\delta\alpha} x_\alpha = \sum_\delta X_\delta \, dt_\delta \end{aligned}$$

est une différentielle exacte et

$$X_\delta = \frac{\partial \mathfrak{X}(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_\delta}.$$

Ainsi : *pour que la matrice* W *soit symétrique, il faut et il suffit que l'expression*

$$\sum_\alpha X_\alpha(t) \, dt_\alpha, \qquad t_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta} x_\beta$$

soit une différentielle exacte.

35. On a vu, au Chapitre I, que, si, $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$,

$$dX = \sum_i u_i\, dx\, v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

$$u_i = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{i\lambda}, \qquad v_i = \sum_\mu \varepsilon_\mu v_{i\mu},$$

on a

$$w_{\lambda\mu} = \sum_i u_{i\lambda} v_{i\mu}.$$

Transposer la matrice W, c'est donc transposer les grandeurs u_i et v_i.

36. Je vais étudier maintenant le rang N de la matrice W, c'est-à-dire l'indice de monogénéité (**17**) de la fonction X.

Soit

$$dX = \sum_i u_i\, dx\, v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Multiplions X, devant ou derrière, par une constante hypercomplexe quelconque M. On aura encore

$$d(MX) = M\, dX = \sum_i M u_i\, dx\, v_i,$$

$$d(XM) = dX\, M = \sum_i u_i\, dx\, v_i M,$$

et *la multiplication, devant ou derrière, par une constante quelconque ne peut augmenter l'indice de monogénéité.*

Employons les coordonnées spéciales et prenons la fonction $n = r^2$),

$$X = \sum_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}\, \varepsilon_{\alpha\delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r)$$

avec l'indice N de monogénéité. La fonction

$$\mathfrak{X} = \varepsilon_{\lambda\mu} X \varepsilon_{\rho\sigma} = \sum_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}\, \varepsilon_{\lambda\mu}\, \varepsilon_{\alpha\delta}\, \varepsilon_{\rho\sigma}$$

a l'indice de monogénéité $\mathfrak{N} \leqq \mathrm{N}$. Mais

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_{\lambda\mu}\,\varepsilon_{\alpha\delta} = 0 & \text{pour} \quad \alpha \neq \mu & \text{et} & \varepsilon_{\lambda\mu}\,\varepsilon_{\mu\delta} = \varepsilon_{\lambda\delta}, \\ \varepsilon_{\lambda\delta}\,\varepsilon_{\rho\sigma} = 0 & \text{pour} \quad \delta \neq \rho & \text{et} & \varepsilon_{\lambda\rho}\,\varepsilon_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\lambda\sigma}; \end{array}$$

$$\mathfrak{X} = \varepsilon_{\lambda\sigma}\,\mathrm{X}_{\mu\rho}.$$

Donc *la fonction hypercomplexe obtenue en multipliant* $\mathrm{X}_{\alpha\delta}$ *par un fondamental quelconque a un indice de monogénéité qui ne dépasse pas* N.

37. Soit, pour fixer les idées, $\mathfrak{X} = \varepsilon_{11}\mathrm{X}_{11}$. Dans la jacobienne H, du n° **30**, toutes les lignes sont composées de zéros, sauf la première. Si l'on pose, pour introduire le canevas (**27**),

$$\mathrm{H} = |\,\theta_{\alpha\gamma}\,| \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, r),$$

il viendra $\theta_{\alpha\gamma} = 0$ pour $\alpha \neq 1$. Dans la matrice r — aire $\theta_{1\gamma}$, la première ligne contient les r dérivées

$$\frac{\partial \mathrm{X}_{11}}{\partial z_{\gamma\delta}} \qquad (\delta = 1, 2, \ldots, r);$$

les $r - 1$ autres lignes sont formées de zéros. Dans la matrice W, obtenue en transposant les matrices partielles r — aires de H,

$$\mathrm{W} = |\,\theta'_{\alpha\gamma}\,|,$$

on a

$$\theta'_{\alpha\gamma} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \alpha \neq 1.$$

Dans $\theta'_{1\gamma}$, toutes les colonnes, sauf la première, sont composées de zéros. W contient le mineur r — aire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{X}_{11}}{\partial z_{11}} & \cdots & \dfrac{\partial \mathrm{X}_{11}}{\partial z_{1r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_{11}}{\partial z_{r1}} & \cdots & \dfrac{\partial \mathrm{X}_{11}}{\partial z_{rr}} \end{vmatrix} = |\,\mathrm{U}(\mathrm{X}_{11})\,|.$$

Ainsi *toute fonction* $\mathrm{X}_{\alpha\delta}$ *doit être choisie parmi les solutions* Ω *du* *système d'équations aux dérivées partielles obtenu en écrivant que la matrice* $U(\Omega)$ *a le rang* N *au plus.*

Cette remarque n'a d'intérêt que si $N < r$.

38. Plus généralement, les n fonctions $X_{\alpha\delta}$, pour une fonction X à indice donné N de monogénéité, doivent satisfaire à un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, obtenu en annulant, dans la matrice W, tous les mineurs $(N+1)$ — aires.

C'est la méthode qu'on appliquera au Chapitre suivant pour le cas $N = 1$.

Je terminerai le présent Chapitre en résolvant deux problèmes auxiliaires, d'ailleurs assez élémentaires, mais utiles par la suite. Ils sont relatifs tous deux à la matrice r — aire

$$K = [K_{\alpha\beta}], \qquad K_{\alpha\beta} = \text{const.} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$$

de rang $\mathfrak{K}$.

39. Faisons d'abord $\mathfrak{K} = 1$, $K_{\alpha\beta} = g_\alpha h_\beta$. E étant la r — aire unité, considérons le déterminant caractéristique $\Delta = |\rho E - K|$. Comme $\mathfrak{K} = 1$, ρ divise Δ, ainsi que les premiers, seconds, ... $(r - l)$ — ièmes mineurs, déterminants l — aires pour $l = 2, 3, \ldots, r$. Δ comporte donc $r - 1$ *Elementarteiler* divisibles par ρ et

$$\Delta = \rho^{m_0} \ldots \rho^{m_{r-2}} f(\rho),$$

$m_0 \geqq m_1 \geqq \ldots \geqq m_{r-2}$, $f(\rho)$ ayant le degré σ,

$$r = \sigma + m_0 + \ldots + m_{r-2}.$$

Posons $m_0 = 1 + \delta_0$, ..., les δ étant positifs ou nuls. Il viendra

$$r = \sigma + r - 1 + \delta_0 + \ldots + \delta_{r-2},$$

$$\delta_0 + \ldots + \delta_{r-2} = 1 - \sigma.$$

Si

$$\sigma = 1, \qquad \delta_0 = \ldots = \delta_{r-2} = 0.$$

Tous les *Elementarteiler* sont linéaires et la matrice K est canonisable. Transformant K par une r — aire convenable, on peut faire $K_{11} \neq 0$ tous les autres $K_{\alpha\beta} = 0$.

Si

$$\sigma = 0, \qquad \delta_0 = 1, \qquad \delta_1 = \ldots = \delta_{r-2} = 0,$$
$$\Delta = \rho^2 \rho \ldots \rho,$$

K est semblable à une matrice où l'élément de la première ligne et de la deuxième colonne est égal à 1 et seul différent de zéro. Pour toutes explications, je renverrai, par exemple, à la première Partie et au Chapitre I de mon Mémoire : *Sur les formes mixtes* (Gauthier-Villars, 1905). Bref, on pourra supposer encore

$$K_{12} = g_1 h_2 = 1, \qquad K_{\alpha\beta} = 0.$$

Ces remarques seront utiles plus loin (**58**).

40. Faisons le rang de la matrice K, $\mathfrak{K} > 1$, et envisageons les n fonctions

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r),$$
$$\zeta_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} K_{\alpha\beta}\, x_{\beta\gamma},$$

où les $n = r^2$ variables x sont indépendantes.

Les $\zeta_{\alpha\gamma}$ sont liées par $r(r - \mathfrak{K})$ relations distinctes

$$(\mathrm{M}) \qquad \sum_{\alpha} m_{\rho\alpha}\zeta_{\alpha\gamma} = 0 \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, r;\ \rho = 1, 2, \ldots, r - \mathfrak{K})$$

et seulement par celles-là.

Dans le Tableau à $r - \mathfrak{K}$ lignes et r colonnes

$$\begin{matrix} m_{11} \ldots m_{1r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_{r-\mathfrak{K},1} \ldots m_{r-\mathfrak{K},r}, \end{matrix}$$

un au moins des déterminants $(r - \mathfrak{K})$ — aires, par exemple celui des $r - \mathfrak{K}$ dernières colonnes, est différent de zéro.

On peut résoudre (M) par rapport aux $r - \mathfrak{K}$ quantités $\zeta_{\pi\gamma}$ (où $\pi = \mathfrak{K} + 1, \mathfrak{K} + 2, \ldots, r$), qui se trouveront exprimées à l'aide des $\zeta_{1\gamma}, \ldots, \zeta_{\mathfrak{K}\gamma}$.

En résumé, *les* $r\mathfrak{K}$ *quantités*

$$\zeta_{\sigma\gamma}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \mathfrak{K};\ \gamma = 1, 2, \ldots, r)$$

peuvent varier librement.

Supposons maintenant que les r expressions, fonctions des $\zeta_{\alpha\gamma}$,

$$\mathfrak{P}_\alpha(\zeta_{\alpha 1}, \ldots, \zeta_{\alpha\gamma}, \ldots, \zeta_{\alpha r}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r)$$

aient une valeur commune Ω. Je dis que Ω *est une constante, les* $\mathfrak{P}_\sigma$ *ne dépendant plus des* ζ.

En effet, si $\mathfrak{K} > 1$, on aura en particulier

$$\mathfrak{P}_1(\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{1r}) = \mathfrak{P}_2(\zeta_{21}, \ldots, \zeta_{2r}).$$

Comme il ne peut exister entre les $\zeta_{\sigma\gamma}$ aucune relation, il faut que chacune des expressions $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ soit indépendante des ζ et séparément égale à une même constante Ω. Pour le même motif, la relation $\mathfrak{P}_\sigma = \Omega$ entraîne l'indépendance des $\mathfrak{P}_\sigma$ par rapport aux ζ. Quant aux relations

$$\mathfrak{P}_\alpha = \Omega \qquad (\alpha = \mathfrak{K} + 1, \ldots, r),$$

elles doivent être une conséquence du système (M).

Ces remarques seront utiles plus loin (**48**).

41. Prenons les coordonnées

$$x_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r;\ n = r^2)$$

et la matrice r — aire afférente (*Préliminaires*, **9**)

$$(x) = [x_{\alpha\beta}],$$

ainsi qu'une constante hypercomplexe g, avec sa matrice r-aire (g). Remplacer la matrice (x) par la matrice

$$(g)^{-1}(x)(g),$$

c'est effectuer, sur les n coordonnées de x dans le groupe (ε), une certaine substitution linéaire n — aire B, de déterminant $\neq 0$, c'est-à-dire effectuer dans (ε) un changement de fondamentaux. Cette question a été discutée aux n^{os} **19** à **24**. La jacobienne $J = J\binom{X}{x}$ devient (**21**, *in fine*)

$$\bar{J} = B'JB'^{-1}.$$

Or on peut choisir la r — aire (g) de façon que dans $\bar{J}$ aucun élément ne soit nul. D'autre part, l'intervention de la r — aire (g) n'a pas pour effet de changer dans (ε) la formule de multiplication et *les coordonnées restent spéciales*.

Tout cela revient à dire qu'il est licite de supposer différente de zéro *chacune* des n^2 dérivées partielles, éléments de la jacobienne $J = \binom{X}{x}$ ou de la jacobienne $H = \binom{X}{z}$, $x_{\beta\gamma} = z_{\gamma\beta}$.

C'est ce que nous ferons au cours de la discussion qui remplit le Chapitre suivant.

42. On est maintenant à même d'aborder la construction d'une fonction X, ayant l'indice *un* de monogénéité.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE HYPERCOMPLEXE AVEC L'INDICE *un* DE MONOGÉNÉITÉ.

43. Je vais construire les fonctions

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \ldots = 1, 2, \ldots, r;\ n = r^2),$$
$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(x_{11}, \ldots, x_{rr})$$

de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma}\, x_{\beta\gamma}$$

ou

$$z = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} z_{\gamma\beta}, \qquad x_{\beta\gamma} = z_{\gamma\beta},$$

de façon que l'indice N de monogénéité soit *un*; alors

$$(17) \qquad dX = u\, dx\, v.$$

Reprenons les jacobiennes $J = J\binom{X}{x}$ et $H = J\binom{X}{z}$ et leurs canevas (**27**). Il viendra (**30**)

$$H = |\upsilon_{\alpha\gamma}|, \qquad W = H_2 = |\upsilon'_{\alpha\gamma}|$$

avec

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = [\upsilon_{\alpha\gamma}]_{\delta\beta} = [\upsilon'_{\alpha\gamma}]_{\beta\delta}.$$

44. La n — aire W a, par hypothèse, le rang *un*; la r — aire $\upsilon_{\alpha\gamma}$ ne peut, puisque $r \geqq 2$, avoir pour rang que *un* ou zéro. La seconde supposition est inadmissible, puisque aucune des dérivées partielles n'est zéro (**41**). D'autre part, $\upsilon_{\alpha\gamma}$ est la jacobienne des r fonctions

$$X_{\alpha 1}, \quad \ldots, \quad X_{\alpha\delta}, \quad \ldots, \quad X_{\alpha r},$$

par rapport aux r variables

$$z_{\gamma 1}, \quad \ldots, \quad x_{\gamma\beta}, \quad \ldots, \quad z_{\gamma r},$$

$$\upsilon_{\alpha\gamma} = J\begin{pmatrix} X_{\alpha 1} & \ldots & X_{\alpha r} \\ z_{\gamma 1} & \ldots & z_{\gamma r} \end{pmatrix}.$$

Le rang étant *un*, les $X_{\alpha\delta}$ ne dépendent pas des $z_{\gamma\beta}$, mais d'une fonction unique

$$(18) \qquad \varpi_{\alpha\gamma}(z_{\gamma 1}, \ldots, z_{\gamma\beta}, \ldots; z_{\gamma r}),$$

indépendante de l'indice δ.

Considérant de même les matrices $\upsilon_{\alpha 1}, \ldots, \upsilon_{\alpha r}$, on voit que

$$(19) \qquad X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}(\varpi_{\alpha 1}, \varpi_{\alpha 2}, \ldots, \varpi_{\alpha\gamma}, \ldots, \varpi_{\alpha r}).$$

45. Formons $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}$. $X_{\alpha\delta}$ ne contient les z que par l'intermédiaire des ϖ.

$z_{\gamma\beta}$ ne figure que dans les ϖ où le second indice est γ. $X_{\alpha\delta}$ ne contient que les ϖ où le premier indice est α. Donc

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \varpi_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}}. \tag{20}$$

D'autre part, la formule (17) donne

$$dX = \sum_{\alpha\delta\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\delta} \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} dz_{\gamma\beta} = u\,dx\,v = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta}\, u_{\alpha\beta}\, dz_{\gamma\beta}\, v_{\gamma\delta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = u_{\alpha\beta}\, v_{\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \varpi_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}}; \tag{21}$$

aucun des $u_{\alpha\beta}$ ni des $v_{\gamma\delta}$ n'est zéro, puisque aucune des dérivées partielles $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}$ n'est nulle.

De (21) on tire, β_0 étant un indice quelconque,

$$\frac{u_{\alpha\beta}}{u_{\alpha\beta_0}} = \frac{\dfrac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}}}{\dfrac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta_0}}}. \tag{22}$$

Le second membre de la formule (22) est une fonction des r variables

$$z_{\gamma 1}, \quad \ldots, \quad z_{\gamma r}$$

seulement, tandis que le premier membre est indépendant de l'indice γ. Les z sont variables indépendantes et il ne peut exister entre elles aucune relation. Donc, ni le premier, ni le second membre de (22) ne dépendent des z; ils sont égaux à une même constante $K_{\alpha\beta}$, indépendante de l'indice γ.

Si l'on pose

$$\theta_\alpha = u_{\alpha\beta_0}, \qquad \varphi_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta_0}},$$

l'indice β_0 étant fixe, on pourra écrire

$$u_{\alpha\beta} = \theta_\alpha K_{\alpha\beta} \tag{23}$$

et

$$\frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \varphi_{\alpha\gamma} K_{\alpha\beta}. \tag{24}$$

Mais $\varpi_{\alpha\gamma}$ ne contient que les r variables $z_{\gamma 1}, \ldots, z_{\gamma r}$. Donc

$$\sum_\beta \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} dz_{\gamma\beta} = d\varpi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}\, d \sum_\beta K_{\alpha\beta}\, z_{\gamma\beta}.$$

46. Posons

$$\zeta_{\alpha\gamma} = \sum_\beta K_{\alpha\beta}\, z_{\gamma\beta} = \sum_\beta K_{\alpha\beta}\, x_{\beta\gamma}. \tag{25}$$

Il viendra

$$d\varpi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}\, d\zeta_{\alpha\gamma};$$

$\varpi_{\alpha\gamma}$ est une fonction de la seule quantité $\zeta_{\alpha\gamma}$,

$$\varpi_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\gamma}(\zeta_{\alpha\gamma}).$$

Mais, dans la formule (19), il est indifférent d'écrire

$$X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}[\ldots, f_{\alpha\gamma}(\zeta_{\alpha\gamma}), \ldots],$$

ou bien, $X_{\alpha\delta}$ étant une fonction arbitraire,

$$X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}(\ldots, \zeta_{\alpha\gamma}, \ldots).$$

Cela revient à faire

$$\varphi_{\alpha\gamma} = 1, \qquad \varpi_{\alpha\gamma} = \zeta_{\alpha\gamma}, \qquad \frac{\partial \varpi_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = K_{\alpha\gamma}.$$

Combinant avec les formules (20), (21) et (25), il vient

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\alpha}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \frac{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} K_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}\, v_{\gamma\delta} = \theta_\alpha\, K_{\alpha\beta}\, v_{\gamma\delta},$$

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} = \theta_\alpha\, v_{\gamma\delta}. \tag{26}$$

47. De (26) on tire

$$(27) \qquad v_{\gamma\delta} : v_{\gamma'\delta'} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} : \frac{\partial X_{\alpha\delta'}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}}.$$

Le second membre de (27) est, comme $X_{\alpha\delta}$ et $X_{\alpha\delta'}$, une fonction de r variables

$$\zeta_{\alpha 1}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha\gamma}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha r},$$

tandis que le premier est indépendant de l'indice α. Les r expressions obtenues en faisant dans le second membre $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ ont une valeur commune, qui ne dépend que de γ, γ', δ, δ'. On est ainsi dans le cas traité au n° **40**; il faut distinguer les cas où le rang $\mathfrak{K}$ de la matrice r — aire $K = [K_{\alpha\beta}]$ est > 1 ou $= 1$.

48. Faisons d'abord $\mathfrak{K} > 1$. Alors (**40**) le premier membre de (27) ne dépend pas des variables ζ et, les indices γ_0 et δ_0 étant fixés arbitrairement, avec $\omega = v_{\gamma_0\delta_0}$, on a

$$(28) \qquad v_{\gamma\delta} = \omega L_{\gamma\delta}, \qquad L_{\gamma\delta} = \text{const.};$$

$$(29) \qquad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} = \omega\theta_\alpha L_{\gamma\delta},$$

sous le bénéfice de (26).

De (29) on tire

$$\frac{\partial^2 X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}\, \partial \zeta_{\alpha\gamma'}} = L_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}} \omega\theta_\alpha = L_{\gamma'\delta} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \omega\theta_\alpha,$$

et, changeant δ en δ',

$$\frac{\partial^2 X_{\alpha\delta'}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}\, \partial \zeta_{\alpha\gamma'}} = L_{\gamma\delta'} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma'}} \omega\theta_\alpha = L_{\gamma'\delta'} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \omega\theta_\alpha.$$

De là, ou bien

$$(30) \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} \omega\theta_\alpha = 0,$$

ou bien

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} L_{\gamma\delta} & L_{\gamma'\delta} \\ L_{\gamma\delta'} & L_{\gamma'\delta'} \end{vmatrix} = 0.$$

49. En vertu de (29), $\omega\theta_\alpha$ ne peut dépendre, comme $X_{\alpha\delta}$, que des variables

$$\zeta_{\alpha 1}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha\gamma}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha r}.$$

La formule (30) exprime donc que $\omega\theta_\alpha$ est une constante, ainsi que, en vertu de (29), l'expression $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}}$. Il vient alors

$$dX_{\alpha\delta} = \sum_\gamma \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} d\zeta_{\alpha\gamma} = \omega\theta_\alpha \sum_\gamma L_{\gamma\delta}\, d\zeta_{\alpha\gamma} = \omega\theta_\alpha\, d \sum_\gamma L_{\gamma\delta}\, \zeta_{\alpha\gamma}.$$

Tenons compte de (25), on a

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} dX_{\alpha\delta} &= \omega\theta_\alpha \sum_{\gamma\beta} K_{\alpha\beta}\, dz_{\gamma\beta}\, L_{\gamma\delta} \\ &= \omega\theta_\alpha \sum_{\gamma\beta} K_{\alpha\beta}\, dx_{\beta\gamma}\, L_{\gamma\delta} = d(KxL)_{\alpha\delta}, \end{aligned} \right.$$

fondant la constante $\varpi\theta_\alpha$ dans la constante $K_{\alpha\beta}$. Quant à $(KxL)_{\alpha\delta}$, c'est la coordonnée d'indices $\alpha\delta$ pour la quantité hypercomplexe KxL, produit des trois quantités hypercomplexes x, K, de coordonnées $K_{\alpha\beta}$, et L, de coordonnées $L_{\gamma\delta}$.

De (32) on tire finalement

$$dX = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta}\, dX_{\alpha\delta} = d(KxL),$$

$$(33) \qquad X = KxL + M, \qquad M = \text{const.},$$

solution banale.

50. La condition (31) exprime que la matrice $L = [L_{\gamma\delta}]$ a le rang *un*. Alors [en vertu de (29)],

$$(34) \qquad L_{\gamma\delta} = l_\gamma m_\delta, \qquad \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} = \omega\theta_\alpha l_\gamma m_\delta \qquad (l_\gamma, m_\delta = \text{const.}),$$

$$dX_{\alpha\delta} = \sum_\gamma \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial \zeta_{\alpha\gamma}} d\zeta_{\alpha\gamma} = \omega\theta_\alpha \sum_\gamma m_\delta l_\gamma\, d\zeta_{\alpha\gamma} = \omega m_\delta \theta_\alpha\, dt_\alpha,$$

$$(35) \qquad t_\alpha = \sum_\gamma l_\gamma \zeta_{\alpha\gamma}.$$

Alors $m_\delta^{-1} X_{\alpha\delta}$ ne dépend que de t_α.

$$(36) \qquad X_{\alpha\delta} = m_\delta \psi_\alpha(t_\alpha), \qquad \psi_\alpha = \text{fonction arbitraire.}$$

51. Ces conditions sont suffisantes, car

$$dX_{\alpha\delta} = m_\delta \psi'_\alpha(t_\alpha) \sum_\gamma l_\gamma \, d\zeta_\gamma = m_\delta \psi'_\alpha(t_\alpha) \sum_{\gamma\beta} K_{\alpha\beta} \, dx_{\beta\gamma} l_\gamma,$$

sous le bénéfice de (25). Il suffit de poser, eu égard à (21),

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \psi'_\alpha(t_\alpha) K_{\alpha\beta} \mathfrak{P} \\ v_{\gamma\delta} &= m_\delta l_\gamma \mathfrak{P}^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{P} = \text{fonction quelconque des } x,$$

pour avoir

$$dX = u \, dx \, v.$$

L'indice de monogénéité est bien égal à *un*.

52. La discussion de l'éventualité $\mathfrak{K} > 1$ (**47**, *in fine*) est ainsi épuisée. L'éventualité a fourni la *solution banale* du n° **49** et la *première solution* donnée par le n° **50**.

Passons à l'éventualité $\mathfrak{K} = 1$.

53. Alors $K_{\alpha\beta} = g_\alpha h_\beta$, g_α et h_β étant des constantes,

$$(37) \qquad \zeta_{\alpha\gamma} = \sum_\beta K_{\alpha\beta} z_{\gamma\beta} = \sum_\beta K_{\alpha\beta} x_{\beta\gamma} = g_\alpha q_\gamma,$$

$$(38) \qquad q_\gamma = \sum_\beta h_\beta z_{\gamma\beta} = \sum_\beta h_\beta x_{\beta\gamma}$$

et, eu égard à (19),

$$(39) \quad X_{\alpha\delta} = X_{\alpha\delta}(\zeta_{\alpha 1}, \zeta_{\alpha 2}, \ldots, \zeta_{\alpha\gamma}, \ldots, \zeta_{\alpha r}) = X_{\alpha\delta}(q_1, \ldots, q_\gamma, \ldots, q_r),$$

et les r variables q_γ sont indépendantes, puisqu'elles ne dépendent pas des mêmes z.

Alors [sous le bénéfice de (20) et (21)]

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial q_\gamma}\frac{\partial q_\gamma}{\partial z_{\gamma\beta}} = h_\beta \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial q_\gamma} = u_{\alpha\beta} v_{\gamma\delta} = \theta_\alpha K_{\alpha\beta} v_{\gamma\delta} = g_\alpha h_\beta \theta_\alpha v_{\gamma\delta},$$

(40)
$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial q_\gamma} = g_\alpha \theta_\alpha v_{\gamma\delta},$$

$$dX_{\alpha\delta} = \sum_\gamma \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial q_\gamma} dq_\gamma = g_\alpha \theta_\alpha \sum_\gamma v_{\gamma\delta}\, dq_\gamma,$$

$$\sum_\gamma v_{\gamma\delta}\, dq_\gamma = \frac{dX_{\alpha\delta}}{g_\alpha \theta_\alpha} = \frac{dX_{\alpha_0\delta}}{g_{\alpha_0}\theta_{\alpha_0}},$$

(41)
$$\begin{cases} dX_{\alpha\delta} = \eta_\alpha\, d\Lambda_\delta, \\ \eta_\alpha = \dfrac{g_\alpha \theta_\alpha}{g_{\alpha_0}\theta_{\alpha_0}}, \qquad \Lambda_\delta = X_{\alpha_0\delta}. \end{cases}$$

De là

(42)
$$X_{\alpha\delta} = \psi_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta), \qquad \psi'_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) = \eta_\alpha.$$

54. Supposons d'abord $\eta_\alpha =$ const. et que, par suite, dans la formule (23), on ait

$$\theta_\alpha = e_\alpha \Theta \qquad (e_\alpha = \text{const.}).$$

L'on tire alors de (42)

(43)
$$X_{\alpha\delta} = \eta_\alpha \Lambda_\delta + M_{\alpha\delta}, \qquad M_{\alpha\delta} = \text{const.}$$

Ce sera la *seconde solution*, car les conditions trouvées sont suffisantes. En effet, eu égard à (38),

$$dX_{\alpha\delta} = \eta_\alpha\, d\Lambda_\delta = \eta_\alpha \sum_\gamma \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma} dq_\gamma = \eta_\alpha \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma} h_\beta\, dx_{\beta\gamma}.$$

Pour assurer les formules (17) ou (21), il suffit de faire

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \eta_\alpha h_\beta \mathfrak{P} \\ v_{\gamma\delta} &= \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma} \mathfrak{P}^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{P} = \text{fonction quelconque des } x.$$

55. Supposons enfin qu'une au moins des η_α ne soit pas une constante.

Alors (42) donne

$$(44) \qquad \begin{cases} \eta_\alpha = \psi'_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) = \psi'_{\alpha\delta_0}(\Lambda_{\delta_0}) = \psi'_{\alpha\delta_0}(\omega), \\ \omega = \Lambda_{\delta_0}; \end{cases}$$

ω n'est sûrement pas une constante, puisque η_α est variable. Pour le même motif

$$\psi''_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) \neq 0, \qquad \text{car} \qquad \psi'_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) \neq \text{const.}$$

La relation

$$\psi'_{\alpha\delta}(\Lambda_\delta) = \psi'_{\alpha\delta_0}(\omega)$$

peut être résolue par rapport à Λ_δ et Λ_δ est une fonction de la variable ω. En vertu de (42), $X_{\alpha\delta}$ ne dépend non plus que de ω. Pareillement pour η_α.

Alors

$$(45) \qquad \frac{dX_{\alpha\delta}}{d\omega} = \frac{dX_{\alpha\delta}}{d\Lambda_\delta}\frac{d\Lambda_\delta}{d\omega} = \eta_\alpha f'_\delta(\omega).$$

56. Les conditions trouvées sont suffisantes, car

$$dX_{\alpha\delta} = \eta_\alpha f'_\delta(\omega)\, d\omega = \eta_\alpha f'_\delta \sum_\gamma \frac{\partial\omega}{\partial q_\gamma} dq_\gamma = \eta_\alpha f'_\delta \sum_{\gamma\beta} \frac{\partial\omega}{\partial q_\gamma} h_\beta\, dx_{\beta\gamma}.$$

Pour assurer la formule (17), il suffit de poser

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \eta_\alpha h_\beta \mathfrak{P} \\ v_{\gamma\delta} &= \frac{\partial\omega}{\partial q_\gamma} f'_\delta \mathfrak{P}^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{P} = \text{fonction quelconque des } x.$$

Ce sera la *troisième solution*.

57. Si l'on omet la solution banale $X = KxL + M$ du n° **49** et les facteurs $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^{-1}$ aisés à rétablir, la discussion du présent Chapitre se résume ainsi, comme expressions trouvées pour

$$X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}, \qquad dX = u\,dx\,v,$$

$$u = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}, \qquad v = \sum_{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} v_{\gamma\delta}.$$

Première solution (nos 50 et 51).

$$X_{\alpha\delta} = m_\delta \psi_\alpha(t_\alpha), \qquad t_\alpha = \sum_{\beta\gamma} K_{\alpha\beta} l_\gamma x_{\beta\gamma},$$

$$\psi_\alpha = \text{fonction arbitraire},$$

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \psi'_\alpha(t_\alpha) K_{\alpha\beta} \\ v_{\gamma\delta} &= l_\gamma m_\delta \end{aligned}\right\} K_{\alpha\beta}, l_\gamma, m_\delta = \text{const.},$$

Deuxième solution (n° 54).

$$\left.\begin{aligned} X_{\alpha\delta} &= \eta_\alpha \Lambda_\delta + M_{\alpha\delta} \\ \Lambda_\delta &= \Lambda_\delta(q_1, \ldots, q_\gamma, \ldots, q_r) \\ q_\gamma &= \sum_\beta h_\beta x_{\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\eta_\alpha, M_{\alpha\delta}, h_\beta = \text{const.}, \\ &\Lambda = \text{fonction arbitraire}, \end{aligned}$$

$$u_{\alpha\beta} = \eta_\alpha h_\beta,$$

$$v_{\gamma\delta} = \frac{\partial \Lambda_\delta}{\partial q_\gamma}.$$

Troisième solution (n° 56).

$$X_{\alpha\delta} = \psi_{\alpha\delta}(\omega), \qquad \psi'_{\alpha\delta}(\omega) = \eta_\alpha(\omega) f_\delta(\omega),$$

$$\omega = \omega(q_1, \ldots, q_\gamma, \ldots, q_r),$$

$$q_\gamma = \sum_\beta h_\beta x_{\beta\gamma} \qquad (h_\beta = \text{const.})$$

$$u_{\alpha\beta} = h_\beta \eta_\alpha(\omega),$$

$$v_{\gamma\delta} = \frac{\partial \omega}{d q_\gamma} f'_\delta(\omega).$$

Les résultats précédents ont été obtenus en évitant de prendre des coordonnées trop particulières; notamment on a supposé chacune des

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial x_{\beta\gamma}} \neq 0.$$

Je me propose maintenant de particulariser au contraire les coordonnées, de façon à donner aux solutions une expression aussi simple que possible.

58. Reportons-nous aux considérations (**41** et **39**) et reprenons la formule (17). Effectuons un changement de coordonnées spéciales, dans le groupe (ε), de façon que la matrice (y) afférente à une quantité y de (ε') se trouve remplacée par la matrice $(g)^{-1}(y)(g)$. Alors la formule (17) devient

$$(g)^{-1}(dX)(g) = (g)^{-1}(u)(g)(g)^{-1}(dx)(g)(g)^{-1}(v)(g).$$

Cela équivaut à transformer les matrices r — aires

$$(u) = [u_{\alpha\beta}], \qquad (v) = [v_{\gamma\delta}]$$

par la matrice r — aire (g).

Si les $u_{\alpha\beta}$ sont des constantes, on peut supposer (**39**), si (u) a le rang 1, soit $u_{11} = c \neq 0$, les autres $u_{\alpha\beta}$ étant nuls, soit $u_{12} = 1$, les autres $u_{\alpha\beta}$ étant nuls.

Pareillement, si les $v_{\gamma\delta} = \text{const.}$, on pourra faire encore soit v_{11} seul, soit v_{12} seul, différent de zéro, si (v) a le rang 1.

59. Prenons d'abord la *première solution* (**57**). (v) a le rang 1, puisque $v_{\gamma\delta} = l_\gamma m_\delta$; l_γ, $m_\delta = \text{const.}$

Faisons d'abord v_{11} seul $\neq 0$;

$$l_1 m_1 \neq 0, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_r; \qquad m_2, \quad \ldots, \quad m_r = 0.$$

Les $X_{\alpha 1}$ sont seuls $\neq 0$. De plus

$$t_\alpha = l_1 \sum_\beta K_{\alpha\beta} x_{\beta 1},$$

$$(46) \qquad X = \sum_\alpha \varepsilon_{\alpha 1} X_{\alpha 1} \Big(\sum_\beta K_{\alpha\beta} x_{\beta 1} \Big).$$

Faisons maintenant v_{12} seul $\neq$ o. $l_1 m_2 \neq 1$. Un calcul simple donne

$$(47)\qquad X = \sum_\alpha \varepsilon_{\alpha 2} X_{\alpha 2}\Big(\sum_\beta K_{\alpha\beta} x_{\beta 1}\Big).$$

Ces deux expressions de X ne sont pas essentiellement différentes, car, multipliant par derrière (**36**) les deux membres de (47) par le fondamental ε_{21}, on retombe sur (46).

(46) sera donc la formule définitive de la *première solution*, type II de l'*Introduction*.

60. Prenons la *seconde solution* (**57**). La r — aire

$$(u) = [\eta_\alpha h_\beta]$$

est formée de constantes et a le rang 1.

Faisons u_{11} seul $\neq$ o. Les constantes $M_{\alpha\delta}$ n'interviennent qu'en ajoutant une constante à X. Les $X_{1\delta}$ sont seuls $\neq$ o, $q_\gamma = x_{1\gamma} h_1$,

$$(48)\qquad X = \sum_\delta \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta}(x_{11}, \ldots, x_{1\gamma}, \ldots, x_{1r}).$$

Si l'on fait $u_{12} = \eta_1 h_2$ seul $\neq$ o, $q_\gamma = h_2 x_{2\gamma}$,

$$(49)\qquad X = \sum_\delta \varepsilon_{1\delta} X_{1\delta}(x_{21}, \ldots, x_{2\gamma}, \ldots, x_{2r}).$$

Multiplions par devant, dans (49), les deux membres par le fondamental ε_{21}. Il vient

$$X = \sum_\delta \varepsilon_{2\delta} X_{1\delta}(x_{21}, \ldots, x_{2r}),$$

ce qui ne diffère de (48) que par l'écriture. (48) sera la formule définitive de la *deuxième solution*, type III de l'*Introduction*.

61. Ces multiplications (**59** et **60**) par un fondamental, par devant ou par derrière, sont licites (**36**), car elles n'augmentent pas l'indice de monogénéité.

62. Prenons enfin la *troisième solution* (**57**). Aucune des deux matrices (u) ou (v) n'est composée de constantes. La méthode précédente n'est plus applicable. On laissera à la *troisième solution* l'expression du n° **57**. C'est, avec d'insignifiants changements de notations, le type IV de l'*Introduction*.