JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes linéaires à moins de sept variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 3 (1907), p. 213-266.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1907_6_3__213_0>

Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes linéaires à moins de sept variables;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

§ I. — Préliminaires.

1. On nomme *groupes abéliens* ceux dont les substitutions sont échangeables entre elles.

Soient G_m, G_n deux groupes abéliens, respectivement contenus dans les groupes linéaires à m et à n variables. La réunion de leurs substitutions donnera un nouveau groupe abélien contenu dans le groupe linéaire à $m+n$ variables. Un groupe ainsi formé sera dit *réductible*.

Nous nous bornerons à l'étude des groupes *irréductibles* et *généraux,* c'est-à-dire qui ne sont contenus comme sous-groupes dans aucun autre groupe de même nature.

2. Soit

$$S = \left| x_i \quad \sum_k a_{ik} x_k \right| \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n, \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

une substitution quelconque de l'un de ces groupes; son déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} - s & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

égalé à zéro, n'aura qu'une seule racine s_1, de l'ordre n de multiplicité.

Supposons, en effet, pour fixer les idées, qu'il ait deux racines différentes s_1, s_2; par un choix convenable de variables indépendantes, on pourra ramener S à une forme canonique, telle que la suivante :

$$\left|\begin{array}{llllll} x_1, & x'_1, & \ldots & s_1 x_1, & s_1 x'_1, & \ldots \\ x_2, & x'_2, & \ldots & s_1(x_2+x_1), & s_1(x'_2+x'_1), & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots \\ y_1, & y'_1, & \ldots & s_2 y_1, & s_2 y'_1, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \end{array}\right|.$$

Une substitution quelconque S_1 du groupe G que nous considérons, devant être échangeable à S, devra permuter les unes dans les autres les fonctions linéaires des variables x_1, x'_1, ...; car ces fonctions sont les seules que S multiplie par s_1. Elle permutera de même entre elles les fonctions linéaires de x_2, x'_2, ..., x_1, x'_1, ... qui sont les seules que S multiplie par s_1 et accroisse en outre de fonctions linéaires de x_1, x'_1, ..., et ainsi de suite.

Donc S_1 remplace chacune des variables x par une fonction linéaire de ces seules variables. De même pour les variables y; de sorte que G sera réductible, contrairement à notre hypothèse.

Remarquons d'ailleurs qu'une substitution s_1, qui multiplie toutes les variables par un même facteur arbitraire s_1, est échangeable à toute substitution linéaire. Elle fera donc partie du groupe G supposé général. Et la substitution S sera le produit de la substitution s_1 par une nouvelle substitution S' dont le déterminant caractéristique n'a d'autre racine que l'unité.

Le problème est donc ramené à la construction des groupes abéliens G dont toutes les substitutions ont pour déterminant caractéristique une puissance de $s - 1$.

3. Soit S une substitution d'un pareil groupe. En la ramenant à sa forme canonique, on voit qu'il existe certaines variables x, x', ... qu'elle n'altère pas. Soient y, y', ... les autres variables.

Soit S_1 une seconde substitution du groupe. Elle devra permuter entre elles les fonctions linéaires de $x, x', \ldots$; elle sera donc de la forme

$$\begin{vmatrix} x, x' & \ldots & f(x, x', \ldots), & f_1(x, x', \ldots), & \ldots \\ y, y' & \ldots & \varphi(x, x', \ldots, y, y', \ldots), & \varphi_1(x, x', \ldots, y, y', \ldots), & \ldots \end{vmatrix}.$$

Considérons la substitution partielle opérée sur les $x, x', \ldots$. Son déterminant caractéristique, entrant en facteur dans celui de S_1, sera une puissance de $s - 1$. Parmi les fonctions linéaires de $x, x', \ldots$, il en existe donc que S_1 n'altère pas.

Soit S_2 une nouvelle substitution de G. Elle devra permuter les unes dans les autres ces fonctions que ni S, ni S_1 n'altèrent, et parmi elles il y en aura que S_2 laisse également invariables.

Il existe donc certaines fonctions inaltérées par toutes les substitutions de G. Prenons-les pour variables indépendantes et désignons-les par $x'_1, x''_1, \ldots$; nous les appellerons *variables de rang* 1; soit m_1 leur nombre. Désignons par $y, y', \ldots$ les variables restantes.

Les substitutions de G seront de la forme générale

$$\begin{vmatrix} x'_1, x''_1, & \ldots & x'_1, & x''_1, & \ldots \\ y, y', & \ldots & f(y, y', \ldots) + \varphi(x_1, x'_1, \ldots), & f_1(y, y', \ldots) + \varphi_1(x_1, x'_1, \ldots), & \ldots \end{vmatrix}.$$

Pour qu'elles soient échangeables entre elles, il faut évidemment que les substitutions réduites

$$|y, y', \quad \ldots \quad f(y, y', \ldots), \quad f_1(y, y', \ldots), \quad \ldots|,$$

obtenues en effaçant les variables $x, x', \ldots$, soient échangeables entre elles. Elles laisseront donc invariables certaines fonctions des $y, y', \ldots$. Soient $x'_2, x''_2, \ldots$ celles de ces fonctions qui sont linéairement distinctes; m_2 leur nombre. Ce sont les *variables de rang* 2, et toute substitution de G (si elle les altère) les accroîtra d'une fonction linéaire des variables de rang 1.

Poursuivant ce raisonnement, on arrive au résultat suivant :

THÉORÈME. — *Les variables indépendantes étant convenablement* *choisies, se répartiront ainsi :*

$$\begin{array}{llll} m_1 & \textit{variables} & x'_1, x''_1, \ldots & \textit{de rang } 1, \\ m_2 & \textit{variables} & x'_2, x''_2, \ldots & \textit{de rang } 2, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots, \ldots, \ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ m_r & \textit{variables} & x'_r, x''_r, \ldots & \textit{de rang } r. \end{array}$$

Toute substitution de G *laissera inaltérées les variables de rang* 1 *et accroîtra, en général, chaque variable de rang k d'une fonction linéaire des variables de rang $< k$.*

L'ensemble des nombres m_1, m_2, ... constituera pour nous la *signature*

$$[m_1, m_2, \ldots, m_r]$$

du groupe G.

La question à traiter peut donc être formulée ainsi :

Construire les divers groupes correspondant à une signature donnée.

4. La marche qui se présente naturellement à l'esprit pour la résoudre est la suivante :

On connaît déjà par le théorème précédent la forme générale des substitutions du groupe cherché G. Soit Γ le groupe constitué par l'ensemble de toutes les substitutions de cette forme.

Choisissons arbitrairement l'une d'elles, S, que nous supposerons appartenir à G. Déterminons le sous-groupe Γ_1 formé par celles des substitutions de Γ qui sont échangeables à S; il contiendra G.

Choisissons arbitrairement dans Γ_1 une substitution S_1 qui ne soit pas échangeable à toutes les autres. Supposons qu'elle appartienne à G; ce groupe sera contenu dans le sous-groupe Γ_2 formé par celles des substitutions de Γ_1 qui sont échangeables à S_1.

Choisissons dans Γ_2 une nouvelle substitution S_2, qui ne soit pas échangeable à toutes les autres, et ainsi de suite. Nous arriverons à un dernier sous-groupe Γ_i qui soit abélien. Ce sera l'un des groupes cherchés.

Ce procédé de tâtonnement donnera bien tous les groupes G, mais au prix de calculs fort longs; de plus, un même groupe pourra se reproduire sous plusieurs formes différentes, dont une seule devra être conservée, si l'on veut éviter les doubles emplois dans l'énumération des groupes G.

Deux des groupes obtenus ne peuvent, en effet, être considérés comme vraiment distincts, s'ils sont identiques, ou peuvent être rendus tels par le changement des variables indépendantes.

Or, si nous convenons de dire qu'une fonction linéaire des variables x_k^i est de rang k, lorsque les variables de rang le plus élevé qui y figurent sont de rang k, il est évident que le groupe Γ sera transformé en lui-même, si l'on remplace chacune des variables x_k^i par une nouvelle variable indépendante du même rang (à la seule condition que les nouvelles variables soient linéairement distinctes).

Soient G l'un des groupes abéliens contenus dans Γ; G, G$'$, ... ses divers transformés par les changements de variables ci-dessus; ces groupes ne seront pas distincts et ne devront compter que pour un seul dans l'énumération des groupes cherchés.

Les considérations suivantes permettent d'abréger les opérations que nous venons d'indiquer et d'obtenir la solution effective du problème dans les cas les plus simples.

§ II. — Considérations générales.

5. Une substitution S du groupe Γ est complètement définie lorsque l'on connaît l'accroissement $\Delta x_k^i = f_{ik}$ qu'elle fait subir à chacune des variables x_k^i. On pourra donc la représenter commodément par la notation

$$S = |\Delta x_1' = f_{11}, \ldots, \Delta x_k^i = f_{ik}, \ldots|.$$

On pourra même, pour abréger l'écriture, supprimer l'indication des variables que S laisserait inaltérées.

Soit

$$\varphi = \Sigma \lambda_{ik} x_k^i$$

une fonction linéaire des x à coefficients indéterminés; S lui donnera l'accroissement

$$\Delta\varphi = \Sigma\lambda_{ik}\Delta x_k^i$$

et l'on pourra écrire, sous une forme plus condensée,

$$S = |\Delta\varphi = \Sigma\lambda_{ik} f_{ik}|.$$

Soit S_1 une autre substitution de Γ, qui accroisse φ de $\Delta_1\varphi$. La substitution SS_1 transforme φ en

$$\varphi + \Delta\varphi + \Delta_1(\varphi + \Delta\varphi) = \varphi + \Delta\varphi + \Delta_1\varphi + \Delta_1\Delta\varphi.$$

De même S_1S la changera en

$$\varphi + \Delta\varphi + \Delta_1\varphi + \Delta\Delta_1\varphi.$$

La condition pour que S et S_1 soient échangeables est donc exprimée par la relation

$$\Delta_1\Delta\varphi = \Delta\Delta_1\varphi$$

qui doit avoir lieu identiquement, quelle que soit la fonction linéaire φ.

En égalant séparément les coefficients de chacune des arbitraires λ_{ik} dans la relation précédente, on obtiendra celles-ci

$$\Delta_1\Delta x_k^i = \Delta\Delta_1 x_k^i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m_k \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix},$$

dont elle est le résumé.

6. Si deux opérations Δ et Δ_1 peuvent être interverties, comme l'exprime cette égalité, il en sera de même des opérations

$$D = a_1\Delta + a_2\Delta^2 + a_3\Delta^3 + \ldots \qquad \text{et} \qquad \Delta_1,$$

$a_1, a_2, \ldots$ étant des constantes arbitraires. Donc tout groupe abélien G qui contient la substitution S contiendra (s'il est général, comme on le suppose) la substitution Σ qui accroît φ de $D\varphi$. En effet, soit S_1 une substitution quelconque de G; étant échangeable à S, elle le sera à Σ. Si donc Σ n'appartenait pas à G, on pourrait la lui adjoindre pour former un groupe abélien plus général.

Nous appellerons ces substitutions Σ les *dérivées* de S. En particulier, nous appellerons *multiples* de S celles pour lesquelles l'opération D se réduit à $a_1 \Delta$.

De même, si G contient plusieurs substitutions $S, S_1, \ldots$ accroissant respectivement φ de $\Delta\varphi, \Delta_1\varphi, \ldots$, il contiendra toutes les substitutions Σ qui l'accroissent de $D\varphi$, D désignant un polynome symbolique arbitraire en $\Delta, \Delta_1, \ldots$ (sans terme constant). Ces substitutions seront dites les *dérivées* de $S, S_1, \ldots$. En particulier, nous appellerons *combinaisons linéaires* de $S, S_1, \ldots$ et nous représenterons par

$$(aS + a_1 S_1 + \ldots)$$

celles où le polynome D se réduit à la forme linéaire

$$D = a\Delta + a_1 \Delta_1 + \ldots.$$

7. Supposons, pour fixer les idées, qu'on connaisse déjà deux substitutions S, S_1 du groupe G. Soit x l'une des variables. Parmi les fonctions linéaires $\Delta x, \Delta_1 x, \Delta^2 x, \Delta\Delta_1 x, \ldots$, soient $y, y', \ldots$ celles qui sont linéairement distinctes. Prenons-les, ainsi que x, pour variables indépendantes; soient $z, z', \ldots$ les variables restantes. Une substitution quelconque S_2 du groupe G donnera à x un accroissement de la forme

$$\Delta_2 x = ay + a'y' + \ldots + bz + b'z' + \ldots.$$

Mais, parmi les substitutions dérivées de S, S_1, que l'on sait déjà appartenir à G, il en est une σ qui lui donne l'accroissement

$$\delta x = ay + a'y' + \ldots.$$

On peut substituer à S_2 comme génératrice du groupe la combinaison linéaire

$$(S_2 - \sigma) = S_2',$$

pour laquelle l'accroissement de x se réduit à

$$\Delta_2' x = bz + b'z' + \ldots.$$

C'est donc uniquement parmi les substitutions ainsi réduites qu'il conviendra de choisir une substitution échangeable à S, S_1, qu'on puisse leur adjoindre pour continuer la construction progressive de G.

8. Cette condition d'échangeabilité restreindra d'ailleurs beaucoup le champ des hypothèses possibles sur la nature de la nouvelle substitution S'_2.

Supposons, pour en donner un exemple qui sera utile plus tard, que l'on ait $b = b' = \ldots = 0$, de telle sorte que $\Delta'_2 x$ soit nul; $\Delta'_2 y$, $\Delta'_2 y'$, ... le seront également. En effet, S'_2 étant échangeable à σ, on aura nécessairement

$$\Delta'_2 \delta x = \delta \Delta'_2 x = 0,$$

car $\Delta'_2 x$ est nul.

Mais, d'autre part,

$$\Delta'_2 \delta x = a \Delta'_2 y + a' \Delta'_2 y' + \ldots$$

et, pour que cette expression s'annule, quelles que soient les constantes a, a', ..., il faudra qu'on ait

$$\Delta'_2 y = 0, \qquad \Delta'_2 y' = 0, \qquad \ldots.$$

9. Comme cas particulier du précédent, considérons celui où les variables x, y, y', ... épuisent le nombre des variables indépendantes; il n'y aura pas de variables z, et S'_2 n'altérant aucune variable se réduira à l'unité. Il n'existera donc aucune substitution nouvelle qu'on puisse adjoindre au groupe dérivé des substitutions S, S_1 déjà connues et ce groupe sera général.

10. Il existe dans le groupe Γ certaines substitutions σ échangeables à toutes les autres et qui, par suite, appartiendront à tous les groupes G contenus dans Γ. Ce sont celles qui n'altèrent aucune variable, sauf celles de rang maximum x'_r, x''_r, ..., qu'elles accroissent de fonctions arbitraires $\delta x'_r$, $\delta x''_r$, ..., des variables de rang 1. Elles accroîtront, en effet, la fonction arbitraire

$$\varphi = \Sigma \lambda_{ik} x$$

de la quantité

$$\delta \varphi = \lambda_{1r} \delta x'_r + \lambda_{2r} \delta x''_r + \ldots.$$

Soit S une autre substitution de Γ; elle accroîtra φ d'une fonction $\Delta\varphi$ qui ne contient que des variables de rang $< r$. On aura donc

$$\delta\,\Delta\varphi = 0.$$

Mais, d'autre part, $\delta\varphi$ étant de rang 1, on aura

$$\Delta\,\delta\varphi = 0.$$

La condition d'échangeabilité est donc remplie.

On remarquera que le succès de ce raisonnement tient à cette circonstance que x'_r, x''_r, ... ne figurent pas dans $\Delta\varphi$. Ces variables de rang maximum sont les seules qui jouissent de cette propriété, quelle que soit la fonction φ et de quelque manière que S soit choisie dans le groupe Γ.

Mais si la substitution S doit être choisie, non plus dans toute l'étendue du groupe Γ, mais dans un de ses sous-groupes Γ_1, il peut arriver que certaines variables, de rang $< r$, ne figurent pourtant pas dans les $\Delta\varphi$. Les substitutions σ', qui n'altèrent que ces variables, en les accroissant de fonctions arbitraires des variables de rang 1, seront échangeables à toutes celles de Γ_1; elles appartiendront donc à tout groupe abélien G contenu dans Γ_1, et supposé général.

11. Soit x_k l'une des variables de rang k. Les diverses substitutions S, S_1, ... du groupe G lui donneront des accroissements Δx_k, $\Delta_1 x_k$, ... de rang $k-1$ *au plus*. Mais l'un au moins d'entre eux sera effectivement de rang $k-1$. Autrement ce serait à tort qu'on aurait inscrit x_k comme variable de rang k; elle serait, en réalité, de rang inférieur.

Nous allons établir que G contient une substitution S pour laquelle Δx_k, $\Delta^2 x_k$, ..., $\Delta^{k-1} x_k$ soient respectivement de rangs $k-1$, $k-2$, ..., 1.

Supposons, en effet, qu'on ait trouvé déjà une substitution S pour laquelle Δx_k, ..., $\Delta^{l-1} x_k$ soient respectivement de rangs $k-1$, ..., $k-l+1$, mais où $\Delta^l x_k$ soit de rang $< k-l$.

Puisque $\Delta^{l-1} x_k$ est de rang $k-l+1$, G contiendra une substitution S_1 qui l'accroît d'une fonction de rang $k-l-1$.

Soient $\Delta\varphi$, $\Delta_1\varphi$ les accroissements que S, S_1 donnent à la fonction arbitraire φ; G contiendra la combinaison linéaire

$$\Sigma = (S + \varepsilon S_1),$$

ε étant un infiniment petit. Cette substitution accroît φ de

$$D\varphi = (\Delta + \varepsilon\Delta_1)\varphi.$$

Répétant cette opération, on aura

$$D^l\varphi = (\Delta + \varepsilon\Delta_1)^l\varphi$$

et, en particulier,

$$D^l x_k = (\Delta + \varepsilon\Delta_1)^l x_k = (\Delta^l + l\varepsilon\Delta_1\Delta^{l-1} + \ldots)x_k.$$

Or, par hypothèse, $\Delta^l x_k$ est de rang $< k-l$ et $\Delta_1\Delta^{l-1}x_k$ de rang $k-l$; les termes non écrits peuvent être du même rang; mais, étant infiniment petits par rapport aux précédents, ils ne peuvent les détruire. Donc $D^l x_k$ aura le rang $k-l$ et $D^l x_k$, $D^{l-1}x_k$, ..., x_k étant de rangs croissants, dont le dernier est k, leurs rangs respectifs seront bien $k-l$, $k-l+1$, ..., k.

Soit S la substitution dont nous venons d'établir l'existence. Désignons par x_k, x_{k-1}, ..., x_1 les fonctions x_k, Δx_k, ..., $\Delta^{k-1}x_k$. Étant de rangs décroissants, elles seront linéairement distinctes. Prenons-les pour variables indépendantes. La substitution S prendra, en ce qui concerne ces variables, la forme suivante :

$$\Delta x_k = x_{k-1}, \qquad \Delta x_{k-1} = x_{k-2}, \qquad \ldots, \qquad \Delta x_1 = 0.$$

12. Soient S, S_1 deux substitutions d'un groupe G de signature $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$. Nous avons trouvé pour exprimer leur échangeabilité les conditions suivantes (n° **5**) :

$$\Delta_1\Delta x_k^i = \Delta\Delta_1 x_k^i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m_k \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}.$$

Si nous nous bornons à considérer celles de ces identités où $k \overline{\gtrless} \rho$, elles exprimeront que les substitutions effectuées sur les variables des ρ premiers rangs seulement sont échangeables. L'ensemble de ces substitutions partielles (correspondant aux diverses substitutions S, $S_1, \ldots$ du groupe G) formera donc un groupe abélien de signature $[m_1, \ldots, m_\rho]$; mais ce groupe pourra ne pas être général dans son espèce.

On peut même négliger, parmi celles des identités où $k = \rho$, toutes celles où $i > \mu$, μ étant un entier moindre que m_ρ; les identités restantes exprimeront l'échangeabilité des substitutions partielles opérées sur les variables de rang $< \rho$ et les μ premières variables de rang ρ. L'ensemble de ces substitutions partielles formera donc un groupe abélien de signature $[m_1, \ldots, m_{\rho-1}, \mu]$, mais qui pourra ne pas être général.

Parmi les conditions conservées jusqu'à présent, effaçons encore toutes celles où $k < \sigma$ et, dans celles qui subsistent, supprimons dans les deux membres les termes qui contiennent les variables de rang $< \sigma$. Les conditions ainsi restreintes expriment que les altérations produites par S, $S_1, \ldots$ sur les variables des rangs $\sigma, \ldots, \rho - 1$ et les μ premières variables de rang ρ seraient échangeables si l'on y biffait les termes qui contiennent les variables de rang $< \sigma$. Les substitutions restreintes ainsi obtenues formeront encore un groupe abélien, de signature $[m_\sigma, \ldots, m_{\rho-1}]$.

On voit par là que la détermination des groupes abéliens généraux de signatures simples, telles que $[m_1, m_2]$, $[m_1, m_2, m_3]$, ... et de leurs divers sous-groupes constituerait un premier pas assez important vers la solution du problème général relatif à une signature quelconque $[m_1, m_2, \ldots]$.

13. Avant de passer aux applications particulières des principes ci-dessus, il convient encore de remarquer qu'il existe certaines signatures auxquelles ne correspond aucun groupe G. Nous allons montrer, par exemple, l'impossibilité de la signature $[m_1, 1, 2]$.

Supposons, en effet, qu'il existe un groupe G ayant cette signature; soient x_2 la variable de rang 2, x_3, x'_3 celles de rang 3. Une substitution quelconque S du groupe G donnera à x_3, x'_3 des accroissements de la forme

$$\Delta x_3 = a x_2 + R_1, \qquad \Delta x'_3 = a' x_2 + R_1,$$

en désignant, d'une façon générale, par R_1 une fonction des variables de rang 1, qu'il est inutile de préciser et qui ne sera pas partout la même.

La variable x_3 étant de rang 3, G contient au moins une substitution S où a n'est pas nul et, si nous changeons de variables, en posant

$$x_3 = aX_3, \qquad a'x_3 - ax'_3 = X'_3,$$

nous aurons plus simplement

$$\Delta X_3 = x_2 + R_1, \qquad \Delta X'_3 = R_1.$$

Les substitutions de G seront des combinaisons linéaires de celle-là avec d'autres substitutions S_1, ... donnant à X_3, X'_3 des accroissements de la forme

$$\Delta_1 X_3 = R_1, \qquad \Delta_1 x'_3 = bx_2 + R_1.$$

Mais, X'_3 étant une variable de rang 3, il existe au moins une substitution S_1 pour laquelle b n'est pas nul, et, comme on peut remplacer la substitution S_1 par un de ses multiples, il est permis de supposer $b = 1$.

Les substitutions de G seront évidemment des combinaisons linéaires de S, S_1 avec d'autres substitutions Σ pour lesquelles les accroissements de X_3, X'_3 se réduiront à la forme

$$DX_3 = R_1, \qquad DX'_3 = R_1.$$

Cela posé, aucune des substitutions S, S_1, Σ ne pourra altérer x_2. Soit, en effet, Δx_2 l'accroissement que lui donne S; on aura

$$\Delta_1 \Delta X_3 = \Delta_1(x_2 + R_1) = \Delta_1 x_2$$

et, d'autre part,

$$\Delta\Delta_1 X_3 = \Delta R_1 = 0.$$

Donc $\Delta_1 x_2 = 0$.

On trouvera de même

$$\Delta_1 \Delta X'_3 = \Delta_1 R_1 = 0, \qquad \Delta\Delta_1 X'_3 = \Delta(x_2 + R_1) = \Delta x_2,$$
$$\Delta_1 DX'_3 = \Delta_1 R_1 = 0, \qquad D\Delta_1 X'_3 = D(x_2 + R_1) = Dx_2,$$

d'où

$$\Delta x_2 = 0, \qquad D x_2 = 0.$$

Donc x_2, n'étant altérée par aucune des substitutions dont G est dérivé, est une variable de rang 1 et non de rang 2, comme on l'avait supposé, de sorte que la signature du groupe n'est pas $[m_1, 1, 2]$, mais $[m_1 + 1, 2]$.

14. De l'impossibilité de la signature $[m_1, 1, 2]$, qui vient d'être établie, résulte évidemment (n° **12**) celle de toute signature de la forme $[m_1, \ldots, m_{k-1}, 1, m_{k+1}, \ldots, m_r]$, où l'un des nombres $m_{k+1}, \ldots, m_r$ serait plus grand que l'unité.

§ III. — Applications.

1° *Groupe de signature* $[m, n]$.

15. Les substitutions de Γ ne sont autres que les substitutions σ du numéro **10**. Le groupe G, qui doit les contenir toutes, n'est autre que Γ lui-même.

Ses substitutions sont des combinaisons linéaires de mn substitutions distinctes dont chacune laisse inaltérées toutes les variables, sauf l'une de celles de rang 2, $x'_2, \ldots, x''_2$, qu'elle accroît de l'une des variables de rang 1, $x'_1, \ldots, x'''_1$.

16. Un sous-groupe g contenu dans G sera dit d'*espèce* p, si toutes ses substitutions sont des combinaisons linéaires de p substitutions distinctes $S_1, \ldots, S_p$.

Une quelconque S_i de ces substitutions accroîtra une quelconque des variables de rang 2, telle que x^k_2, d'une certaine fonction linéaire φ_{ik} des variables x_1 de rang 1.

La substitution générale de g, $(\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_p S_p)$, donnera donc à la fonction générale de rang 2

$$\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_n x^n_2,$$

l'accroissement

$$D(\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_n x^n_2) = \Sigma \lambda_i \Sigma \mu_k \varphi_{ik} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, p, \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Le second membre est une fonction trilinéaire par rapport aux trois séries de variables λ, μ, x. On dispose pour la réduire à une forme canonique des opérations suivantes :

1° Une substitution linéaire arbitraire opérée sur les x_1;

2° Une substitution linéaire opérée sur les μ;

3° Une substitution linéaire opérée sur les λ.

Ces deux dernières opérations altéreraient les expressions

$$\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_n x''_2,$$
$$\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_p S_p.$$

Mais on les ramènera à leur forme initiale en exécutant les substitutions inverses des précédentes sur les x_2 et sur les S; opérations permises, car on peut changer, d'une part, les variables indépendantes, et, d'autre part, remplacer $S_1, \ldots, S_p$ comme génératrices du groupe g par p de leurs combinaisons linéaires.

On aura donc autant de sous-groupes g de l'espèce p qu'il existe de formes réduites distinctes pour la fonction trilinéaire

$$\Sigma\Sigma\lambda_i \mu_k \varphi_{ik}.$$

La construction de ces réduites est un problème assez complexe; nous l'avons abordé dans un précédent Mémoire (*Journal de Liouville*, 1906, p. 403 et 1907, p. 5) et nous en avons donné la solution : 1° dans le cas où l'un des nombres m, n, p est égal à 1 ou à 2; 2° dans celui où

$$m = n = p = 3.$$

2° *Groupe de signature* $[m, 1, 1, 1, \ldots, 1]$.

17. Soit x_r la variable unique de rang maximum r. Le groupe cherché G contient (n° **11**) une substitution S pour laquelle on a

$$\Delta x_r = x_{r-1}, \qquad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \qquad \ldots, \qquad \Delta x_1 = 0,$$

$x_{r-1}, \ldots, x_1$ étant des variables de rangs $r-1, \ldots, 1$.

Soient $x'_1, x''_1, \ldots$ les $m-1$ autres variables de rang 1; G contiendra, en outre (n° **10**), les substitutions σ qui accroissent x_r d'une fonction linéaire de x'_1, x''_1, ..., sans altérer aucune des autres variables.

Les substitutions dérivées de S et des σ donneront aux diverses variables des accroissements de la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
Dx_r &= a_1 x_{r-1} + a_2 x_{r-2} + a_3 x_{r-3} + \ldots + a_{r-1} x_1 + b_1 x'_1 + b_2 x''_1 + \ldots,\\
Dx_{r-1} &= a_1 x_{r-2} + a_2 x_{r-3} + \ldots + a_{r-2} x_1,\\
Dx_{r-2} &= a_1 x_{r-3} + \ldots + a_{r-3} x_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Dx_1 &= Dx'_1 = Dx''_1 = \ldots = 0,
\end{aligned}
$$

où les coefficients a, b peuvent prendre toutes les valeurs possibles.

Ces substitutions, permettant d'accroître x_r d'une fonction linéaire quelconque des autres variables, épuiseront toutes celles du groupe cherché (n° **9**).

On n'a donc ici encore qu'*un seul* groupe G de la signature demandée.

3° *Groupes de signature* $[m, n, 1]$.

18. Soient x_3 la variable unique de rang 3; x'_2, ..., x^n_2 celles de rang 2; x'_1, ..., x^m_1 celles de rang 1.

G contient les substitutions σ du numéro **10** et résulte (n° **7**) de leur combinaison avec des substitutions S_1, S_2, ... pour lesquelles on a simplement

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 x_3 &= \varphi_1, & \Delta_1 x^k_2 &= f_{1k},\\
\Delta_2 x_3 &= \varphi_2, & \Delta_2 x^k_2 &= f_{2k},\\
&\ldots\ldots, & &\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

les φ étant des fonctions de x'_2, ..., x^n_2 (qui ne sont pas toutes nulles) et les f des fonctions de x'_1, ..., x^m_1.

Supposons que parmi les fonctions φ il y en ait l linéairement distinctes. En les prenant pour variables indépendantes, nous aurons l substitutions S_1, ..., S_l, telles que, pour l'une quelconque d'entre elles S_i, on ait les accroissements

$$\Delta_i x_3 = x^i_2, \qquad \Delta_i x^k_2 = f_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, l \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

G résultera de la combinaison de σ, $S_1, \ldots, S_l$ avec d'autres substitutions σ' qui laissent invariable x_3 et, par suite, $x'_1, \ldots, x_1^m, x'_2, \ldots, x_2^l$ (**8**). Si donc l était égal à n, les substitutions σ' se réduiraient à la seule substitution 1, et la construction de G s'arrêterait là.

Supposons, au contraire, $l < n$ pour rester dans l'hypothèse la plus générale. Les substitutions σ' accroîtront $x_2^{l+1}, \ldots, x_2^n$ de fonctions linéaires $\psi_{l+1}, \ldots, \psi_n$ des variables de rang 1. D'ailleurs, quelles que soient ces fonctions $\psi_i, \ldots, \sigma'$ sera échangeable aux substitutions σ, $S_1, \ldots, S_l$ (**10**). Donc G sera dérivé des substitutions σ, $S_1, \ldots, S_l$, σ'.

Mais, en combinant les σ' avec $S_1, \ldots, S_l$, on pourra simplifier l'expression de ces dernières substitutions en les remplaçant par d'autres substitutions génératrices $S'_1, \ldots, S'_l$, pour lesquelles toutes celles des fonctions f_{ik} où $k > l$ soient nulles.

Le groupe G sera ainsi dérivé des substitutions σ' et d'un groupe G' de substitutions d'où les variables $x_2^{l+1}, \ldots, x_2^n$ ont disparu. Ce dernier groupe, de signature $[m, l, 1]$, sera dérivé des substitutions σ, jointes à des substitutions $S'_1, \ldots, S'_l$ de la forme suivante :

$$S'_i = |\Delta_i x_3 = x_2^i, \Delta_i x_2^k = f_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, l \\ k = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}.$$

19. Nous n'avons pas encore exprimé que ces substitutions S' sont échangeables deux à deux. Cette condition donne les relations

$$\Delta_i \Delta_k x_3 = \Delta_k \Delta_i x_3,$$

d'où

$$f_{ik} = f_{ki}.$$

Les f se réduiront donc à $\frac{l(l+1)}{2}$ fonctions distinctes, contenant chacune m coefficients arbitraires. Mais le nombre de ces paramètres peut être réduit par un choix convenable des variables indépendantes et des substitutions génératrices.

Considérons, en effet, la substitution

$$(\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_l S_l),$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont des indéterminées. Elle accroîtra x_3 de la quantité

$$Dx_3 = \lambda_1 x_2' + \ldots + \lambda_l x_2^l$$

et x_2^k de la quantité

$$Dx_2^k = \lambda_1 f_{1k} + \ldots + \lambda_l f_{lk} = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_k},$$

ψ désignant la forme quadratique

$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_k f_{ik}\lambda_i\lambda_k.$$

D'ailleurs, les f_{ik} étant des fonctions linéaires des m variables $x_1', \ldots, x_1^m$, on aura, en les mettant en évidence,

$$\psi = x_1'\psi_1 + \ldots + x_1^m\psi_m,$$

$\psi_1, \ldots, \psi_m$ étant des fonctions quadratiques des λ.

Soient enfin $\mu_1, \ldots, \mu_l$ de nouvelles indéterminées; on aura

$$D(\mu_1 x_2' + \ldots + \mu_l x_2^l) = \sum_k \mu_k \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_k} = \sum_i x_1^i \sum_k \mu_k \frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_k}.$$

Le second membre de cette égalité est un covariant de la forme ψ (une polaire), lorsqu'on y soumet les deux séries de variables λ et μ à la même substitution. On peut le faire sans altérer les expressions

$$\lambda_1 x_2' + \ldots + \lambda_l x_2^l, \qquad \mu_1 x_2' + \ldots + \mu_l x_2',$$
$$\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_l S_l,$$

pourvu qu'on opère la substitution inverse sur les x_2 et sur les S.

On aura donc après cette transformation

$$(1)\quad \begin{cases} Dx_3 = \lambda_1 x_2' + \ldots + \lambda_l x_2^l, \\ D(\mu_1 x_2' + \ldots + \mu_l x_2^l) = \sum_k \mu_k \dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_k} = \sum_i x_1^i \sum_k \mu_k \dfrac{\partial\Psi_i}{\partial\lambda_k}, \end{cases}$$

Ψ, Ψ_i désignant les transformées de ψ, ψ_i par la substitution opérée sur les λ. D'ailleurs, on peut soumettre également les x_1 à une substitution linéaire quelconque. On voit donc que le problème de construire les groupes G′ revient à déterminer les formes canoniques distinctes à l'une desquelles peut être ramené le réseau

$$\psi = x'_1\psi_1 + \ldots + x_1^m\psi_m$$

dérivé de m formes quadratiques à l variables.

En effet, si la forme réduite Ψ est connue, on n'aura qu'à remplacer D par sa valeur $\lambda_1\Delta_1 + \ldots + \lambda_p\Delta_p$ dans les relations (1) et à égaler les coefficients des indéterminées λ et μ dans les deux membres pour obtenir explicitement toutes les quantités $\Delta_i x_3$, $\Delta_i x_2^k$ et connaître, par suite, les substitutions S_i.

20. Parmi les types réduits Ψ, il en existe dans lesquels quelques-unes des variables x_1 ou des variables λ ont disparu.

Soit N_{ml} le nombre des réduites restantes qui contiennent toutes les variables. Le nombre total des réduites possibles sera évidemment

$$\sum_i\sum_k N_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}$$

et celui des réduites où figurent tous les λ, avec tout ou partie des x_1, sera

$$\sum_i N_{il} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ces dernières réduites sont, d'ailleurs, les seules auxquelles correspondent des groupes G′ ayant la signature demandée. En effet, si l'on suppose que l'une des variables λ, telle que λ_k, ne figure pas dans Ψ, on aura, d'après les relations (1), $Dx_2^k = \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_k} = 0$, d'où

$$\Delta_1 x_2^k = \Delta_2 x_2^k = \ldots = 0$$

et la variable x_2^k, inaltérée par toute substitution de G′, ne serait pas de rang 2, mais de rang 1.

Le nombre des groupes G′ correspondant à une valeur donnée de l

sera donc

$$\sum_i N_{il}.$$

Chacun d'eux concourt à la formation d'un groupe G. D'ailleurs, l peut prendre successivement toutes les valeurs de 1 à n.

Le nombre total des groupes G de signature $[m, n, 1]$ sera donc

$$(2) \qquad \sum_l \sum_i N_{il} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

21. Pour la détermination de ces nombres N, nous renverrons au Mémoire déjà cité (*Journal de Liouville*, 1906, p. 403), auquel nous empruntons les résultats suivants :

$$N_{il} = 0, \quad \text{si} \quad i > \frac{l(l+1)}{2},$$

$$N_{il} = 1, \quad \text{si} \quad i = \frac{l(l+1)}{2},$$

$$N_{1l} = 1,$$

$$N_{21} = 0, \quad N_{22} = 2, \quad N_{23} = 6, \quad N_{24} = 14,$$

$$N_{33} = 13, \quad N_{43} = 8, \quad N_{53} = 5, \quad N_{63} = 1.$$

On en déduit aisément, par la formule (2), le Tableau suivant du nombre des groupes G pour toutes les valeurs de n qui ne surpassent pas 3 :

$m =$	1	2	3	4	5	$m>5$
$n = 1$	1	1	1	1	1	1
$n = 2$	2	4	5	5	5	5
$n = 3$	3	11	25	33	38	39

4° *Groupes de signature* $[1, n, 1, 1, \ldots, 1]$.

22. Soit x_r la variable de rang maximum ; G contiendra (**11**), outre les substitutions σ du n° **10**, une substitution S, pour laquelle on aura

$$\Delta x_r = x_{r-1}, \qquad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \qquad \ldots, \qquad \Delta x_1 = 0,$$

$x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$ étant de rang r, $r-1$, ..., 1 et pouvant être choisies comme variables indépendantes.

Soient $x'_2, \ldots, x_2^{n-1}$ les variables de rang 2, autres que x_2; S leur donnera des accroissements de la forme

$$\Delta x'_2 = a' x_1, \qquad \Delta x''_2 = a'' x_1, \qquad \ldots.$$

Mais on annulera ces accroissements si l'on prend pour variables

$$x'_2 - a' x_2, \qquad x''_2 - a'' x_2, \qquad \ldots.$$

Nous pouvons donc supposer qu'on ait

$$\Delta x'_2 = 0, \qquad \Delta x''_2 = 0 \qquad \ldots.$$

Cela posé, G résultera (7) de la combinaison des substitutions σ, S avec d'autres substitutions S_1, S_2, ... qui donnent respectivement à x_r des accroissements

$$\Delta_1 x_r = \varphi_1, \qquad \Delta_2 x_r = \varphi_2, \qquad \ldots,$$

les φ étant des fonctions des seules variables $x'_2, x''_2, \ldots$, en nombre $n-1$.

Supposons que, parmi ces fonctions, il y en ait l linéairement distinctes (l pourra être égal à l'un des nombres 0, 1, ..., $n-1$). En les prenant pour variables indépendantes, on aura simplement, pour les substitutions $S_1, \ldots, S_l$,

$$\Delta_1 x_r = x'_2, \qquad \Delta_2 x_r = x''_2, \qquad \ldots, \qquad \Delta_l x_r = x_2^l.$$

Ces substitutions n'altéreront d'ailleurs aucune des variables $x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$. On a, en effet, par exemple,

$$\Delta_1 x_{r-k} = \Delta_1 \Delta^k x_r = \Delta^k \Delta_1 x_r = \Delta^k x'_2 = 0.$$

Quant aux variables $x'_2, \ldots, x_2^n$ elles leur donneront des accroissements de la forme

$$\Delta_i x_2^k = a_{ik} x_1.$$

Cela posé, le groupe G sera dérivé de la combinaison des substitutions σ, S, S_1, .. , S_l avec d'autres substitutions σ' qui laissent inaltéré x_r et, par suite, $x_{r-1}, \ldots, x_1, x'_2, \ldots, x_2^l$ (8). Quant à $x_2^{l+1}, \ldots, x_2^n$, elles les accroîtront de multiples de x_1. Quels que soient ces multiples, la substitution σ' appartiendra à G (**10**).

Le groupe G sera donc dérivé des substitutions σ, σ', S, $S_1, \ldots, S_l$. En combinant ces dernières substitutions avec les σ', on obtiendra des substitutions génératrices plus simples $S'_1, \ldots, S'_l$, où ceux des $\Delta_i x_2^k$, pour lesquels $k > l$ seront tous nuls.

Après cette simplification, les substitutions $\sigma, S'_1, \ldots, S'_l$ ne contiendront plus les variables $x_2^{l+1}, \ldots, x_2^n$ et formeront un groupe abélien G', de signature $[1, l+1, 1, 1, \ldots]$, dont la combinaison, avec les substitutions σ', donnera G.

23. Les substitutions $S'_1, \ldots, S'_l$ sont de la forme

$$S'_i = |\, \Delta_i x_r = x_2^i,\ \Delta_i x_2^k = a_{ik} x_1 \,| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, l \\ k = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}.$$

Elles sont échangeables deux à deux, ce qui donne les relations

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

La réduction à la forme canonique du groupe G' peut s'effectuer comme au n° **19**.

La substitution

$$(\lambda_1 S'_1 + \ldots + \lambda_l S'_l)$$

donne, en effet, à x_r l'accroissement

$$D x_r = \lambda_1 x'_2 + \ldots + \lambda_l x_2^l$$

et à la fonction linéaire

$$\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_l x_2^l$$

l'accroissement

$$D(\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_l x_2^l) = x_1 \sum \mu_k \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_k},$$

ψ désignant la forme quadratique

$$\psi = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}\lambda_i\lambda_k$$

En opérant sur les indéterminées λ et μ une même substitution linéaire et la substitution inverse sur les x_2 et sur les S′, on n'altérera pas les expressions

$$\lambda_1 S' + \ldots + \lambda_l S'_l,$$
$$\lambda_1 x'_2 + \ldots + \lambda_l x^l_2,$$
$$\mu_1 x'_2 + \ldots + \mu_l x^l_2,$$

mais on transformera ψ en une somme de carrés

$$\psi = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_l^2)$$

contenant nécessairement toutes les variables λ (*voir* le n° **20**) et sa polaire

$$\sum \mu_k \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_k}$$

en

$$\sum \mu_k \lambda_k.$$

Cette forme canonique étant unique, on voit qu'à chaque valeur de l correspond un seul groupe G′ et partant un seul groupe G. Mais on peut assigner successivement à l les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$.

Il existe donc n groupes G ayant pour signature $[1, n, 1, 1, \ldots]$.

5° *Groupes de signature* $[1, m, n]$.

24. Il faut supposer ici m et n plus grands que l'unité; car, pour $n = 1$, on retomberait sur des cas déjà traités, et, pour $m = 1$, $n > 1$, le groupe G ne saurait exister (**14**).

Soient x_1; $x'_2, \ldots, x^m_2$; $x'_3, \ldots, x^n_3$ les variables.

Le groupe G sera dérivé des substitutions σ, combinées à d'autres substitutions que, d'après le n° **7**, on peut supposer réduites à la forme

$$S = |\Delta x_3^l = \varphi_l, \ \Delta x_2^k = a_k x_1, \ \Delta x_1 = 0| \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, m \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les φ étant des fonctions des seules variables $x_2', \ldots, x_2^m$.

Parmi les substitutions de cette forme que G doit contenir, il en est une au moins S_1 où a_1 n'est pas nul. Autrement x_2 ne serait pas de rang 2.

En prenant, d'ailleurs, pour variables indépendantes,

$$\frac{1}{a_1} x_2', \quad a_2 x_2' - a_1 x_2'', \quad \ldots,$$

au lieu de $x_2', x_2'', \ldots$, on rendra a_1 égal à l'unité et l'on fera disparaître $a_2, \ldots, a_m$, de sorte que S_1 aura la forme

$$S_1 = |\Delta x_3^l = \varphi_{1l}, \ \Delta_1 x_2' = x_1, \ \Delta_1 x_2^k = 0 \text{ (pour } k > 1), \ \Delta_1 x_1 = 0|,$$

et G résultera de la combinaison des substitutions σ, S_1 avec de nouvelles substitutions de l'espèce S, mais dans lesquelles on pourra supposer $a_1 = 0$.

Parmi ces nouvelles substitutions, il en est au moins une S_2 où a_2 n'est pas nul, et, par un changement de variables analogue au précédent, on la ramènera à la forme

$$S_2 = |\Delta_2 x_3^l = \varphi_{2l}, \ \Delta_2 x_2'' = x_1, \ \Delta_2 x_2^k = 0 \text{ (si } k \gtrless 2), \ \Delta_2 x_1 = 0|.$$

Continuant ainsi, on voit que G contiendra, outre les σ, m substitutions $S_1, \ldots, S_m$ ayant les formes suivantes :

$$S_i = |\Delta_i x_3^l = \varphi_{il}, \ \Delta_i x_2^i = x_1, \ \Delta_i x_2^k = 0 \text{ (si } k \gtrless i), \ \Delta_i x_1 = 0|,$$

les φ_{il} étant des fonctions des x_2, telles que

$$\varphi_{il} = a_{i1}^l x_2' + \ldots + a_{im}^l x_2^m.$$

Le groupe cherché G sera, d'ailleurs, dérivé des seules substitutions σ, $S_1, \ldots, S_m$, car les substitutions qu'on aurait à lui adjoindre pour le compléter pourraient être supposées de la forme

$$S = |\Delta x_3^l = \varphi_l,\ \Delta x_2^i = 0,\ \Delta x_1 = 0|.$$

Mais les fonctions φ_l devraient être toutes nulles.

Soit, en effet,

$$\varphi_l = a_1^l x_2^1 + \ldots + a_m^l x_2^m;$$

S étant échangeable à S_i, on aura

$$\Delta\Delta_i x_3^l = \Delta_i \Delta x_3^l.$$

Mais le premier membre est égal à

$$\Delta\varphi_{il} = 0,$$

car φ_{il} ne contient que les variables de rang 2; quant au second membre, il est égal à

$$\Delta_i(a_1^l x_2^1 + \ldots + a_m^l x_2^m) = a_i^l x_1.$$

Donc $a_i^l = 0$, quels que soient i, l. Les substitutions S se réduiront donc à la seule substitution 1 qui appartient déjà à G.

25. Les substitutions $S_1, \ldots, S_m$ doivent être échangeables deux à deux; d'où les conditions

$$\Delta_i \Delta_k x_3^l = \Delta_k \Delta_i x_3^l.$$

Mais

$$\Delta_i \Delta_k x_3^l = \Delta_i [a_{k1}^l x_2^1 + \ldots + a_{km}^l x_2^m] = a_{ki}^l x_1$$
$$\Delta_k \Delta_i x_3^l = a_{ik}^l x_1.$$

Donc

$$a_{ik}^l = a_{ki}^l.$$

On pourra écrire en conséquence

$$\Delta_i x_3^l = \frac{\partial \psi_l(x_2^1, \ldots, x_2^m)}{\partial x_2^i},$$

ψ_l désignant la forme quadratique

$$\psi_l = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}^l x_2^i x_2^k \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{array}\right).$$

La substitution

$$(\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_m S_m)$$

donnera à chacune des variables x_2^i un accroissement

$$Dx_2^i = \lambda_i x_1,$$

et à la fonction

$$\mu_1 x_3' + \ldots + \mu_n x_3''$$

l'accroissement

$$\begin{aligned} D(\mu_1 x_3' + \ldots + \mu_n x_3'') &= \sum_l \mu_l \sum_i \lambda_i \frac{\partial \psi_l(x_2', \ldots, x_2^m)}{\partial x_2^i} \\ &= \sum_l \mu_l \sum_i x_2^i \frac{\partial \psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{\partial \lambda_i}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est la polaire par rapport aux x_2 de la fonction

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{1}{2} \sum_l \mu_l \psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

L'expression du groupe G étant ainsi trouvée, il est aisé de la réduire à une forme canonique, en changeant les variables indépendantes et les substitutions génératrices.

Opérons, en effet, sur les λ une substitution linéaire quelconque, en soumettant les x_2 à la même substitution et les S à la substitution inverse. Opérons, d'autre part, sur les μ une substitution linéaire quelconque et sur les x_3 la substitution inverse. Ni $\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_m S_m$, ni $\mu_1 x_3' + \ldots + \mu_n x_3''$ ne seront changés, et les relations

$$Dx_2^i = \lambda_i x_1$$

subsisteront; mais la fonction f sera changée en une autre fonction

$$F = \frac{1}{2} \sum_l \mu_l \Psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

et l'on aura

$$D(\mu_1 x_3' + \ldots + \mu_n x_3'') = \sum_l \mu_l \sum x_2^i \frac{\partial \Psi_l}{\partial \lambda_i}.$$

Nous sommes ainsi ramenés au problème déjà rencontré au n° **19** :

Déterminer les types canoniques distincts à l'un desquels doit se ramener un réseau

$$\mu_1 \psi_1 + \ldots + \mu_n \psi_n$$

dérivé de n formes quadratiques des m variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, lorsqu'on opère des substitutions linéaires sur les variables λ et sur les paramètres μ.

26. Le nombre de ces types est

$$\sum_{i,k} N_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les nombres N étant les mêmes qu'aux n^{os} **20-21**. Mais ceux de ces types où $k < n$ doivent être rejetés, les groupes G correspondants n'ayant pas la signature requise.

En effet, si k était $< n$, l'une au moins des variables μ, telle que μ_l, ne figurerait plus dans l'expression de F, ni par suite dans sa polaire. Celle-ci étant égale à

$$D(\mu_1 x'_3 + \ldots + \mu_n x''_3),$$

on aurait identiquement

$$D x^l_3 = 0.$$

Donc toute substitution de G laisserait x^l_3 invariable, sauf les substitutions σ, qui lui donnent un accroissement de rang 1. Donc x^l_3 serait de rang 2 et non de rang 3, comme cela doit être.

Le nombre des groupes G, de signature $[1, m, n]$, sera donc

$$\sum_i N_{in} \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

D'après les valeurs des nombres N, données au n° **21**, on pourra former aisément le Tableau suivant du nombre des groupes G pour les valeurs de n qui ne surpassent pas 3 :

$m =$	1	2	3	4	5	$m>5$
$n=1$	1	1	1	1	1	1
$n=2$	1	3	4	4	4	4
$n=3$	1	7	20	28	33	34

6° *Groupes de signature* $[2, 2, 1, 1, \ldots]$.

27. Soient x_r la variable de rang maximum; $x_{r-1}, \ldots; x_2, x'_2; x_1, x'_1$ celles de rang $r-1, \ldots, 2, 1$.

Le groupe G doit contenir, outre les substitutions σ, une autre substitution S de la forme

$$S = |\Delta x_r = x_{r-1}, \quad \Delta x_{r-1} = x_{r-2}, \quad \ldots, \quad \Delta x_1 = 0, \quad \Delta x'_2 = a x_1 + b x'_1, \quad \Delta x'_1 = 0|.$$

Pour achever de le construire on devra combiner avec les substitutions précédentes de nouvelles substitutions S_1 pour lesquelles $\Delta_1 x_r$ se réduise à la forme $c x'_2$ (7). Comme S_1 est échangeable à S, on aura ensuite

$$\Delta_1 x_{r-1} = \Delta_1 \Delta x_r = \Delta\Delta_1 x_r = \Delta c x'_2 = c(a x_1 + b x'_1),$$
$$\Delta_1 x_{r-2} = \Delta_1 \Delta^2 x_r = \Delta^2 \Delta_1 x_r = \Delta^2 c x'_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin $\Delta_1 x'_2$, $\Delta_1 x'_1$ seront de la forme

$$\Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1, \qquad \Delta_1 x'_1 = 0.$$

La forme générale des substitutions S_1 sera donc

$$(3) \quad S_1 = |\Delta_1 x_r = c x'_2, \ \Delta_1 x_{r-1} = c(a x_1 + b x'_1), \ \Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1|,$$

les autres Δ_1 étant tous nuls.

Celles des substitutions de cette forme où $c = 0$ sont toutes échangeables entre elles. En les adjoignant simultanément aux substitutions σ et S, on obtiendra donc un premier groupe abélien. Ce sera l'un des groupes G que nous voulons construire, car il est général.

Cherchons, en effet, à le compléter par une nouvelle substitution S_2. Celle-ci devrait être de la forme (3), et, comme on peut la remplacer par une de ses combinaisons avec les substitutions déjà contenues dans G, on peut supposer que les coefficients α, β, y sont nuls. Donc S_2 se réduira à la forme

$$S_2 = |\Delta_2 x_r = c x'_2,\ \Delta_2 x_{r-1} = c(a x_1 + b x'_1),\ \Delta_2 x'_2 = 0|.$$

Elle est, d'ailleurs, échangeable à la substitution

$$S_1 = |\Delta_1 x_r = 0,\ \Delta_1 x_{r-1} = 0,\ \Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_2|,$$

laquelle est contenue dans G, quels que soient α et β. On aura donc

$$\Delta_1 \Delta_2 x_r = \Delta_2 \Delta_1 x_r.$$

Mais le premier membre est égal à $c(\alpha x_1 + \beta x'_1)$, le second à 0; donc $c = 0$ et S_2 se réduit à l'unité.

28. Nous obtiendrons d'autres groupes G en adjoignant à σ, S une substitution S_1 où c ne soit pas nul. On peut le supposer égal à 1, car on pourrait remplacer S_1 par $\frac{1}{c} S_1$ comme génératrice du groupe. D'ailleurs, la construction du groupe sera achevée après l'adjonction de S_1; car les nouvelles substitutions qu'on pourrait essayer de lui ajouter devraient laisser invariable x_r et, par suite, $x_{r-1}, \ldots, x'_2, x_1, x'_1$. Elles se réduiraient donc à l'unité.

Le nouveau groupe que nous venons d'obtenir contient qnatre paramètres a, b, α, β; mais un changement de variables va nous en débarrasser :

1° Supposons d'abord $b = 0$. En prenant pour variable $x'_2 - a x_2$ au lieu de x'_2 on fera disparaître a. Si β n'est pas nul, on prendra pour variable $\alpha x_1 + \beta x'_1$ au lieu de x'_1. On obtiendra ainsi un *second* groupe G, dérivé des σ, joint aux deux substitutions

$$S = |\Delta x_r = x_{r-1},\ \Delta x_{r-1} = x_{r-2},\ \ldots,\ \Delta x_1 = \Delta x'_2 = \Delta x'_1 = 0|,$$

$$S_1 = |\Delta_1 x_r = x'_2,\ \Delta_1 x_{r-1} = 0,\ \ldots,\ \Delta_1 x_1 = 0,\ \Delta_1 x'_2 = x'_1,\ \Delta_1 x'_1 = 0|.$$

Si β était nul, $\Delta_1 x'_2$ ne serait pas égal à x'_1, mais à αx_1; α n'est pas nul, car x'_2, étant de rang 2, ne peut pas rester invariable par toute substitution du groupe. On le réduira à l'unité en changeant

$$x'_2,\ S_1 \quad \text{en} \quad x'_2\sqrt{\alpha},\ \frac{S_1}{\sqrt{\alpha}}.$$

On a ainsi un *troisième* groupe, où la substitution S_1 a la forme

$$S_1 = |\, \Delta_1 x_r = x'_2,\ \Delta_1 x_{r-1} = 0,\ \ldots,\ \Delta_1 x_1 = 0,\ \Delta_1 x'_2 = x_1,\ \Delta_1 x'_1 = 0 \,|.$$

29. 2° Soit, au contraire, $b \gtrless 0$. Prenons pour variable $ax_1 + bx'_1$, au lieu de x'_1; S et S_1 seront respectivement réduits aux formes suivantes :

$$S = |\, \Delta x_r = x_{r-1},\ \ldots,\ \Delta x_1 = 0,\ \Delta x'_2 = x'_1,\ \Delta x'_1 = 0 \,|,$$
$$S_1 = |\, \Delta_1 x_r = x'_2,\ \Delta_1 x_{r-1} = x'_1,\ \ldots,\ \Delta_1 x'_2 = \alpha x_1 + \beta x'_1,\ \Delta_1 x'_1 = 0 \,|.$$

Il est permis de supposer $\beta = 0$, car, s'il en était autrement, on pourrait, par un changement de variables et de substitutions génératrices, ramener ce cas à ceux déjà traités.

Considérons, en effet, la substitution

$$(\lambda S + S_1) = S'.$$

Elle donne aux variables les accroissements suivants :

$$Dx_r = \lambda x_{r-1} + x'_2, \quad Dx_{r-1} = \lambda x_{r-2} + x'_1, \quad Dx_{r-2} = \lambda x_{r-3}, \quad \ldots,$$
$$Dx'_2 = \alpha x_1 + (\beta + \lambda) x'_1, \quad \ldots.$$

On en déduit

$$D^2 x_r = \lambda(\lambda x_{r-2} + x'_1) + \alpha x_1 + (\beta + \lambda) x'_1 = \lambda^2 x_{r-2} + \alpha x_1 + (\beta + 2\lambda) x'_1,$$
$$D^3 x_r = \lambda^3 x_{r-3}, \quad \ldots, \quad D^{r-1} x_r = \lambda^{r-1} x_1.$$

Prenant donc pour variables nouvelles

$$X_r = x_r, \quad X_{r-1} = DX_r, \quad X_1 = D^{r-1} X_r$$

au lieu de $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$, la substitution S′ prendra la forme

$$S' = \left| \begin{array}{lll} DX_r = X_{r-1}, & DX_{r-1} = X_{r-2}, \ldots, & DX_1 = 0 \\ Dx'_2 = \alpha\lambda^{1-r}X_1 + (\beta+\lambda)x'_1, & & Dx'_1 = 0 \end{array} \right|,$$

semblable à celle qu'avait tout à l'heure la substitution S; mais le coefficient analogue à b est ici $\beta + \lambda$ et l'indétermination de λ permet de l'annuler.

Soit donc $\beta = 0$; si α n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1 en changeant x'_2, x'_1, S_1 en $\sqrt{\alpha}x'_2$, $\sqrt{\alpha}x'_1$, $\frac{S_1}{\sqrt{\alpha}}$.

Nous obtenons ainsi deux nouveaux groupes en supposant successivement $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$ dans les formules précédentes.

Il y a donc en tout *cinq* groupes G de signature [2, 2, 1, 1, 1, ...].

7° Groupes de signature [1, 2, 2, 1].

30. Soient x_4; x'_3, x''_3; x'_2, x''_2; x_1 les variables.

On voit, comme au n° **24**, que G contient nécessairement, outre les σ, deux autres substitutions S_1, S_2 donnant respectivement à x'_2, x''_2 les accroissements suivants :

$$\begin{array}{lll} S_1, & \Delta_1 x'_2 = x_1, & \Delta_1 x''_2 = 0, \\ S_2, & \Delta_2 x'_2 = 0, & \Delta_2 x''_2 = x_1. \end{array}$$

Quant à x'_3, x''_3, leurs accroissements seront de la forme

$$\begin{array}{ll} \Delta_1 x'_3 = \varphi_{11} + \alpha_{11}x_1, & \Delta_1 x''_3 = \varphi_{12} + \alpha_{12}x_1, \\ \Delta_2 x'_3 = \varphi_{21} + \alpha_{21}x_1, & \Delta_2 x''_3 = \varphi_{22} + \alpha_{22}x_1, \end{array}$$

les φ étant des fonctions linéaires de x'_2, x''_2, telles que

$$\varphi_{ik} = a'_{ik}x'_2 + a''_{ik}x''_2.$$

Les substitutions S_1, S_2 devront être échangeables; on en déduit, comme au n° **25**,

$$a'_{ik} = a'_{ki}, \qquad a''_{ik} = a''_{ki}.$$

Si donc on négligeait les termes en x_1, on pourrait écrire, comme au n° **25**,

$$\Delta_i x_3^l = \frac{\partial \psi_l}{\partial x_2^i} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ l = 1, 2 \end{pmatrix},$$

les ψ étant des formes quadratiques en x_2', x_2''.

Par un changement convenable des variables et des substitutions génératrices, on pourra transformer les deux fonctions ψ, de telle sorte que

$$\mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2$$

représente l'un des deux types réduits

$$\tfrac{1}{2}(\mu_1 x_2'^2 + \mu_2 x_2''^2)$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\mu_1 x_2'^2 + \mu_2 x_2' x_2'',$$

dont est susceptible un faisceau de deux formes binaires. Nous aurons donc à discuter successivement deux hypothèses distinctes :

31. *Première hypothèse :* $\psi_1 = \frac{1}{2} x_2'^2$, $\psi_2 = \frac{1}{2} x_2''^2$. — Rétablissant dans les expressions $\Delta_i x_3^l$ les termes en x_1 que nous avions négligés, il viendra

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_3' &= x_2' + \alpha_{11} x_1, & \Delta_1 x_3'' &= \alpha_{12} x_1, \\ \Delta_2 x_3' &= \phantom{x_2' +{}} \alpha_{21} x_1, & \Delta_2 x_3'' &= x_2'' + \alpha_{22} x_1. \end{aligned}$$

Mais on peut faire disparaître ces termes en x_1 en prenant pour variables, au lieu de x_3', x_3'', les suivantes :

$$x_3' - \alpha_{11} x_2' - \alpha_{21} x_2'', \qquad x_3'' - \alpha_{12} x_2' - \alpha_{22} x_2''.$$

On aura donc simplement

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_3' &= x_2', & \Delta_1 x_3'' &= 0, \\ \Delta_2 x_3' &= 0, & \Delta_2 x_3'' &= x_2''. \end{aligned}$$

Passons à l'examen de $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$. Ils sont de la forme

$$\Delta_1 x_4 = a_1 x'_3 + b_1 x''_3 + c_1 x'_2 + d_1 x''_2 + e_1 x_1,$$
$$\Delta_2 x_4 = b_2 x'_3 + a_2 x''_3 + d_2 x'_2 + c_2 x''_2 + e_2 x_1.$$

Mais on peut supposer c_1, c_2, e_1, e_2 nuls; car on les ferait disparaître en prenant pour variable

$$x_4 - c_1 x'_3 - c_2 x''_3 - e_1 x'_2 - e_2 x''_2$$

au lieu de x_4.

Soit donc

$$\Delta_1 x_4 = a_1 x'_3 + b_1 x''_3 + d_1 x''_2, \qquad \Delta_2 x_4 = b_2 x'_3 + a_2 x''_3 + d_2 x'_2.$$

On doit avoir l'identité

$$\Delta_1 \Delta_2 x_4 = \Delta_2 \Delta_1 x_4$$

ou

$$b_2 x'_2 + d_2 x_1 = b_1 x''_2 + d_1 x_1.$$

Donc $b_1 = b_2 = 0$, et $d_1 = d_2$; et $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$ se réduisent à

$$\Delta_1 x_4 = a_1 x'_3 + d x''_2, \qquad \Delta_2 x_4 = a_2 x''_3 + d x'_2.$$

Posons enfin, μ, λ_1, λ_2 étant des indéterminées,

$$x_1 = \mu X_1, \qquad x'_2 = \mu\lambda_1 X'_2, \qquad x''_2 = \mu\lambda_2 X''_2,$$
$$x'_3 = \mu\lambda_1^2 X'_3, \qquad x''_3 = \mu\lambda_2^2 X''_3,$$
$$S'_1 = \lambda_1 S_1, \qquad S'_2 = \lambda_2 S_2.$$

Les substitutions S'_1, S'_2 donneront aux nouvelles variables les accroissements suivants :

$$\Delta'_1 X'_2 = X_1, \quad \Delta'_1 X''_2 = 0, \quad \Delta'_1 X'_3 = X'_2, \quad \Delta'_3 X''_3 = 0, \quad \Delta'_1 x_4 = a_1 \mu\lambda_1^3 X'_3 + d\mu\lambda_1\lambda_2 X''_2,$$
$$\Delta'_2 X'_2 = 0, \quad \Delta'_2 X''_2 = X_1, \quad \Delta'_2 X'_3 = 0, \quad \Delta'_2 X''_3 = X''_2, \quad \Delta'_2 x_4 = a_2 \mu\lambda_2^3 X''_3 + d\mu\lambda_1\lambda_2 X'_2.$$

On voit que ces Δ' ont la même forme que les Δ précédents, sauf que a_1, a_2, d y sont multipliés par les facteurs indéterminés $\mu\lambda_1^3$, $\mu\lambda_2^3$, $\mu\lambda_1\lambda_2$ (qui toutefois ne peuvent pas être nuls). Grâce à cette transformation, on peut admettre que chacun des coefficients a_1, a_2, d se réduit à o ou à 1.

On peut d'ailleurs rejeter l'hypothèse $a_1 = 0$. En effet, si $a_1 = a_2 = 0$, $\Delta_1 x_4$ et $\Delta_2 x_4$ seraient de rang 2 au plus. Mais x_4 est de rang 4. Donc G devrait contenir, outre S_1, S_2 et les σ, une autre substitution Σ qui accroisse x_4 d'une fonction de rang 3, telle que

$$Dx_4 = \alpha x'_3 + \beta x''_3 + \ldots,$$

α et β ne pouvant être nuls à la fois. Mais une semblable substitution ne peut être échangeable à S_1 et à S_2. On aura, en effet,

$$\Delta_1 Dx_4 = \alpha x'_2 + \ldots, \qquad \Delta_2 Dx_4 = \beta x''_2 + \ldots,$$

et l'une au moins de ces expressions est de rang 2, puisque α ou β est $\gtrless 0$. Mais elles devraient être égales respectivement à $D\Delta_1 x_4$, $D\Delta_2 x_4$, qui sont de rang < 2, puisque $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$ sont de rang < 3. Il y a donc contradiction.

Si, d'autre part, on avait $a_1 = 0$, mais $a_2 \gtrless 0$, il suffirait de permuter x'_2, x'_3, S_1 avec x''_2, x''_3, S_2 pour échanger a_1 et a_2 et ramener ainsi ce cas à celui où $a_1 \gtrless 0$, mais $a_2 = 0$.

Admettant donc que a_1 est égal à l'unité, il reste les quatre hypothèses suivantes :

$$a_2 = 1, \quad d = \begin{cases} 0, \\ 1 \end{cases} \qquad a_2 = 0, \quad d = \begin{cases} 0. \\ 1 \end{cases}$$

Chacune d'elles nous fournit un groupe abélien. Mais ils ne seront généraux que s'il est impossible de les compléter par l'adjonction de nouvelles substitutions qui soient échangeables à σ, S_1, S_2 sans en être dérivées.

32. Cette impossibilité est manifeste, d'après le n° **9**, si $a_2 = 1$, car les $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$, $\Delta_1 \Delta_2 x_4$, ... forment un système de fonctions distinctes en nombre égal à celui des variables x'_3, x''_3, x'_2, x''_2, x_1.

On arrivera au même résultat si $a_2 = 0$, $d = 0$. On a, dans ce cas,

$$S_1 = | \Delta_1 x_4 = x'_3, \quad \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x''_3 = 0, \quad \Delta_1 x'_2 = x'_1, \quad \Delta_1 x''_2 = 0, \quad \Delta_1 x_1 = 0 |,$$
$$S_2 = | \Delta_2 x_4 = 0, \quad \Delta_2 x'_3 = 0, \quad \Delta_2 x''_3 = x''_2, \quad \Delta_2 x'_2 = 0, \quad \Delta_2 x''_2 = x_1, \quad \Delta_2 x_1 = 0 |.$$

Toute substitution Σ échangeable à S_1 et à S_2, devant permuter exclusivement entre elles les fonctions que S_2 n'altère pas, devra donner à x_4 un accroissement de la forme

$$Dx_4 = ax'_3 + bx'_2 + cx_1.$$

En la combinant avec les dérivées de S_1, on en déduit une nouvelle substitution Σ' qui laisse inaltéré x_4 et, par suite, x'_3, x'_2, x_1. D'ailleurs elle doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que S_1 n'altère pas. L'accroissement qu'elle donne à x''_3 sera donc de la forme

$$D'x''_3 = a'x''_2 + b'x_1.$$

En la combinant avec les dérivées de S_2, on obtient une dernière substitution S'' qui n'altère plus aucune variable et se réduit à l'unité.

Donc Σ n'est pas une substitution nouvelle, mais est dérivée de S_1, S_2.

33. Reste à examiner le dernier cas, où $a_2 = 0$, $d = 1$. Les substitutions S_1, S_2 auront les formes suivantes :

$$S_1 = | \Delta_1 x_4 = x'_3 + x''_2, \quad \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x'_2 = x_1, \quad \Delta_1 x''_3 = \Delta_1 x''_2 = \Delta_1 x_1 = 0 |,$$
$$S_2 = | \Delta_2 x_4 = x'_2, \quad \Delta_2 x''_3 = x''_2, \quad \Delta_2 x''_2 = x_1, \quad \Delta_2 x'_3 = \Delta_2 x'_2 = \Delta_2 x_1 = 0 |.$$

Cherchons à leur adjoindre une troisième substitution Σ qui leur soit échangeable. Elle donnera à x_4 un accroissement Dx_4, dont on pourra faire disparaître les termes en x'_3, x'_2, x_1 en remplaçant, s'il est nécessaire, Σ par une de ses combinaisons avec les dérivées de S_1, S_2. Soit donc

$$Dx_4 = ax''_3 + bx''_2.$$

Les conditions d'échangeabilité donnent

$$\Delta_1^2 Dx_4 = D\Delta_1^2 x_4, \qquad \Delta_2 Dx_4 = D\Delta_2 x_4.$$

Mais

$$\Delta_1^2 Dx_4 = 0, \qquad D\Delta_1^2 x_4 = Dx'_2,$$
$$\Delta_2 Dx_4 = ax''_2 + bx_1, \qquad D\Delta_2 x_4 = Dx'_2.$$

On en déduit $a = 0$, $b = 0$, d'où $Dx_4 = 0$ et, par suite (nº **8**),

$$Dx_4 = 0, \qquad D(x'_3 + x''_2) = 0, \qquad Dx'_2 = 0, \qquad Dx_1 = 0.$$

Mais Dx''_2 est de la forme cx_1; Dx'_3 sera égal à $-cx_1$; enfin Dx''_3 sera de la forme

$$Dx''_3 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 + \gamma x_1$$

et, comme parmi les dérivées de S_2 figure une substitution qui accroît x''_3 de γx_1 sans altérer les autres variables, on peut supposer $\gamma = 0$.

Les conditions d'échangeabilité de la substitution Σ ainsi définie seront satisfaites d'elles-mêmes, sauf celles-ci :

$$\Delta_1 Dx''_3 = D\Delta_1 x''_3, \qquad \Delta_2 Dx''_3 = D\Delta_2 x''_3$$

qui donneront respectivement $\alpha = 0$ et $\beta = c$.

Les substitutions cherchées Σ seront donc des multiples de la seule substitution

$$S_3 = |Dx_4 = 0, \quad Dx'_3 = -x_1, \quad Dx''_3 = x''_2, \quad Dx'_2 = 0, \quad Dx''_2 = x_1, \quad Dx_1 = 0|$$

qui devra être adjointe à S_1, S_2 pour obtenir le groupe général G relatif à ce cas.

34. *Deuxième hypothèse :* $\psi_1 = \frac{1}{2}x'^2_2$, $\psi_2 = x'_2 x''_2$. — On aura, dans ce cas,

$$\begin{aligned} \Delta_1 x'_3 &= x'_2 + \alpha_{11} x_1, & \Delta_1 x''_3 &= x''_2 + \alpha_{12} x_1, \\ \Delta_2 x'_3 &= \phantom{x'_2 +{}} \alpha_{21} x_1, & \Delta_2 x''_3 &= x'_2 + \alpha_{22} x_1. \end{aligned}$$

Mais on peut supposer nuls les termes en x_1; car, s'ils existaient, on les ferait disparaître en prenant pour nouvelles variables

$$X'_3 = x'_3 - \alpha_{11} x'_2 - \alpha_{21} x''_2, \qquad X''_3 = x''_3 - \alpha_{12} x'_2 - \alpha_{22} x''_2.$$

Il est donc permis d'admettre qu'on ait plus simplement

$$\begin{aligned} &\Delta_1 x_1 = 0, && \Delta_1 x'_2 = x_1, && \Delta_1 x''_2 = 0, && \Delta_1 x'_3 = x'_2, && \Delta_1 x''_3 = x''_2, \\ &\Delta_2 x_1 = 0, && \Delta_2 x'_2 = 0, && \Delta_2 x''_2 = x_1, && \Delta_2 x'_3 = 0, && \Delta_2 x''_3 = x'_2; \end{aligned}$$

quant à $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$, ils seront de la forme

$$\Delta_1 x_4 = a_1 x'_3 + b_1 x''_3 + c_1 x'_2 + d_1 x''_2 + e_1 x_1,$$
$$\Delta_2 x_4 = a_2 x'_3 + b_2 x''_3 + c_2 x'_2 + d_2 x''_2 + e_2 x_1.$$

Mais on pourra faire disparaître de ces expressions les termes en x_1 et en x_2 en prenant, s'il y a lieu, pour nouvelle variable

$$X_4 = x_4 - c_1 x'_3 - c_2 x''_3 - e_1 x'_2 - e_2 x''_2.$$

Soit donc $c_1 = c_2 = e_1 = e_2 = 0$. On aura, en outre, S_1 et S_2 devant être échangeables,

$$\Delta_1 \Delta_2 x_4 = \Delta_2 \Delta_1 x_4$$

ou

$$a_2 x'_2 + b_2 x''_2 = b_1 x'_2 + d_1 x_1.$$

Donc $b_1 = a_2$, $b_2 = 0$, $d_1 = 0$, de sorte que $\Delta_1 x_4$, $\Delta_2 x_4$ se réduiront aux formes suivantes :

$$\Delta_1 x_4 = a x'_3 + b x''_3, \qquad \Delta_2 x_4 = b x'_3 + d x''_2.$$

35. D'ailleurs a et b ne peuvent être nuls à la fois. En effet, on aurait dans cette hypothèse $\Delta_1 x_4 = 0$. Soit alors Σ une substitution quelconque de G,

$$D x_4 = \alpha x'_3 + \beta x''_3 + \ldots,$$

l'accroissement qu'elle donne à x_4 ; on aura

$$D\Delta_1 x_4 = 0, \qquad \Delta_1 D x_4 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 + \ldots,$$

d'où $\alpha = \beta = 0$. Donc x_4 ne serait pas une variable de rang 4.

Mais, d'autre part, on peut admettre que l'un des deux coefficients a, b est nul. Supposons, en effet, qu'aucun des deux ne le soit. Prenons pour variables, au lieu de x''_2, x''_3, celles-ci

$$X''_2 = x''_2 - \lambda x'_2, \qquad X''_3 = x''_3 - 2\lambda x'_3,$$

il viendra

$$\Delta_1 X''_2 = -\lambda x_1, \qquad \Delta_1 X''_3 = x''_2 - 2\lambda x'_2 = X''_2 - \lambda x'_2,$$
$$\Delta_1 x_4 = (a + 2b\lambda) x'_3 + b X''_3,$$
$$\Delta_2 X''_2 = x_1, \qquad \Delta_2 X''_3 = x'_2, \qquad \Delta_2 x_4 = b x'_3 + d(X''_2 + \lambda x'_2).$$

Prenons pour substitution génératrice, au lieu de S_1, la suivante :

$$S'_1 = (S_1 + \lambda S_2).$$

Elle donnera aux variables les accroissements suivants :

$$\Delta'_1 x_1 = 0, \qquad \Delta'_1 x'_2 = x_1, \qquad \Delta'_1 x'_3 = x'_2,$$
$$\Delta'_1 x_4 = (a + 3b\lambda) x'_3 + b X''_3 + \lambda d (X''_2 + \lambda x'_2),$$
$$\Delta'_1 X''_2 = 0, \qquad \Delta'_1 X''_3 = X''_2.$$

Posons encore

$$X_4 = x_4 - \lambda^2 d x'_3 - \lambda d X''_3,$$

on aura

$$\Delta'_1 X_4 = (a + 3b\lambda) x'_3 + b X''_3, \qquad \Delta_2 X_4 = b x'_3 + d X''_2.$$

Les substitutions S'_1, S_2 auront donc, par rapport aux nouvelles variables x_1, x'_2, x'_3, X''_2, X''_3, X_4, la même forme qu'avaient S_1, S_2 par rapport à x_1, x'_2, x'_3, x''_2, x''_3, x_4, sauf que le coefficient a est remplacé par $a + 3b\lambda$. On peut disposer de l'indétermination de λ pour l'annuler.

36. Il est d'ailleurs aisé de rendre égaux à l'unité ceux des coefficients a, b, d qui ne sont pas nuls. Posons, en effet,

$$x_1 = \mu X_1, \qquad x'_2 = \mu\lambda X'_2, \qquad x'_3 = \mu\lambda^2 X'_3, \qquad x_4 = X_4,$$
$$x''_2 = \mu\lambda X''_2, \qquad x''_3 = \mu\lambda^2 X''_3,$$
$$S'_1 = \lambda S_1, \qquad S'_2 = \lambda S_2.$$

Les nouvelles substitutions génératrices S'_1, S'_2 auront, par rapport aux nouvelles variables X, la même forme que S_1, S_2 par rapport aux x, sauf que d sera multiplié par $\mu\lambda^2$ et celui des coefficients a, b qui n'est pas nul par $\mu\lambda^3$, facteurs non nuls, mais d'ailleurs arbitraires.

Nous aurons donc finalement *quatre* combinaisons possibles :

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad \begin{cases} d = 0, \\ d = 1; \end{cases}$$
$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad \begin{cases} d = 0, \\ d = 1, \end{cases}$$

auxquelles correspondent autant de groupes abéliens, qu'on devra toutefois compléter par l'adjonction de nouvelles substitutions, s'il en existe qui soient échangeables à S_1 et S_2 sans en être dérivées.

37. 1° Les deux groupes pour lesquels $b=1$ sont déjà complets (n° **9**); car les fonctions $x_4, \Delta_1 x_4, \Delta_2 x_4, \ldots, \Delta_1^i \Delta_2^k x_4$ reproduisent par leur combinaison une fonction quelconque des variables.

2° Passons au cas où $a=1$, $b=d=0$.

Toute substitution Σ échangeable à S_1 et à S_2 doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que S_2 n'altère pas. Elle donnera donc à x_4 un accroissement de la forme

$$Dx_4 = ax'_3 + bx'_2 + cx_1.$$

Mais tout accroissement de cette forme peut être donné à x_4 par une substitution dérivée de S_1, nous pouvons donc supposer

$$Dx_4 = 0$$

et, par suite (n° **6**),

$$Dx'_3 = Dx'_2 = Dx_1 = 0.$$

Quant à x''_3, x''_2, leurs accroissements seront de la forme

$$Dx''_3 = \alpha x'_2 + \beta x''_2 + \gamma x_1, \qquad Dx''_2 = \delta x_1.$$

Les conditions d'échangeabilité de Σ avec S_1 donneront $\alpha = \delta$; celles d'échangeabilité avec S_2 donnent $\beta = 0$. Les substitutions Σ ont donc pour forme générale

$$| Dx''_3 = \alpha x'_2 + \gamma x_1,\ Dx''_2 = \alpha x_1 |.$$

Ce sont les dérivées de la substitution unique

$$S_3 = | Dx''_3 = x'_2,\ Dx''_2 = x_1 |$$

qu'il faudra adjoindre à S_1, S_2 pour obtenir le groupe G.

3° Soit enfin $a=1$, $b=0$, $d=1$; d'où $\Delta_2 x_4 = x''_2$. Les dérivées de S_1, S_2 permettent d'accroître x_4 d'une autre variable quelconque, sauf x''_3. On peut donc admettre que les nouvelles substitutions Σ à adjoindre à S_1, S_2 lui donnent un accroissement

$$Dx_4 = \alpha x''_3.$$

On aura, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} Dx'_3 &= D\Delta_1 x_4 = \Delta_1 Dx_4 = \alpha \Delta_1 x''_3 = \alpha x''_2, \\ Dx'_2 &= D\Delta_1^2 x_4 = \Delta_1^2 Dx_4 = \Delta_1^2 x''_3 \quad = 0; \end{aligned}$$

Dx''_3 sera de la forme

$$Dx''_3 = \beta x'_2 + \gamma x''_2 + \delta x_1$$

et l'on en déduit

$$Dx''_2 = D\Delta_1 x''_3 = \Delta_1 Dx''_3 = \beta x_1.$$

On a, en outre,

$$\begin{array}{llll} D\Delta_2 x_4 = Dx''_2 = \beta x_1, & \Delta_2 Dx_4 = \alpha x'_2, & \text{d'où} & \alpha = \beta = 0, \\ D\Delta_2 x''_3 = Dx'_2 = 0, & \Delta_2 Dx''_3 = \gamma x_1 & \text{d'où} & \gamma = 0. \end{array}$$

Les substitutions Σ laisseront donc toutes les variables inaltérées, sauf x''_3, qu'elles accroîtront de δx_1. Elles se réduisent donc aux multiples de la seule substitution

$$S_3 = | \, Dx''_3 = x_1 \, |,$$

dont l'adjonction à S_1, S_2 donnera le groupe G.

En résumé, notre analyse nous a fourni *huit* groupes de signature $[1, 2, 2, 1]$.

8° *Groupes de signature* $[1, 2, 2, 1, 1, \ldots]$.

38. Ces groupes contiennent, outre les substitutions σ, une autre substitution S_1 pour laquelle on a

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 x_r = x_{r-1}, & \Delta_1 x_{r-1} = x_{r-2}; & \ldots, \\ \Delta_1 x_3 = x_2, & \Delta_1 x_2 = x_1, & \Delta_1 x_1 = 0, \\ \Delta_1 x'_3 = a x'_2 + b x_2 + c x_1, & & \Delta_1 x'_2 = d x_1. \end{array}$$

D'ailleurs, en prenant pour nouvelles variables

$$X'_3 = x'_3 - bx_3 - cx_2, \qquad X'_2 = x'_2 - dx_2,$$

on fera disparaître b, c, d; puis, si a n'est pas nul, on le réduira à l'unité en prenant aX'_2 pour variable. On aura donc finalement, soit

$$\Delta_1 x'_3 = 0, \qquad \Delta_1 x'_2 = 0,$$

soit

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_1 x'_2 = 0.$$

Discutons successivement ces deux cas.

39. *Première hypothèse :* $\Delta_1 x'_3 = \Delta_1 x'_2 = 0$. — Le groupe cherché résulte de la combinaison de S_1 avec d'autres substitutions Σ pour lesquelles on a

$$Dx_r = ax'_3 + bx'_2$$

et, par suite,

$$Dx_{r-1} = D\Delta_1 x_r = \Delta_1 Dx_r = 0, \qquad Dx_{r-2} = 0, \qquad \ldots, \qquad Dx_1 = 0.$$

Enfin Dx'_3, Dx'_2 seront de la forme

$$Dx'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1, \qquad Dx'_2 = \delta x_1.$$

La condition

$$\Delta_1 Dx'_3 = D\Delta_1 x'_3$$

montre que β est nul. D'autre part, x'_3 étant une variable de rang 3, G contient au moins une substitution S_2 de l'espèce Σ où α ne soit pas nul.

Soit, pour cette substitution,

$$\Delta_2 x'_3 = \alpha_2 x'_2 + \gamma_2 x_1, \qquad \Delta_2 x'_2 = \delta_2 x_1.$$

On peut admettre que δ_2 n'est pas nul, car, s'il l'était, x''_2 étant de rang 2, G devrait contenir une nouvelle substitution S_3 d'espèce Σ et pour laquelle on aurait

$$\Delta_3 x'_3 = \alpha_3 x'_2 + \gamma_3 x_1, \qquad \Delta_3 x'_2 = \delta_3 x_1 \qquad (\delta_3 \gtrless 0).$$

Il contiendrait donc la substitution $(S_2 + \lambda S_3) = S'$, pour laquelle on a

$$\Delta' x'_3 = (\alpha_2 + \lambda\alpha_3) x'_2 + (\gamma_2 + \lambda\gamma_3) x_1, \qquad \Delta' x'_2 = (\delta_2 + \lambda\,\delta_3) x_1.$$

Or on peut choisir λ de telle sorte que ni $\alpha_2 + \lambda\alpha_3$, ni $\delta_2 + \lambda\,\delta_3$ ne soit nul.

Supposons donc $\alpha_2 \gtrless 0$, $\delta_2 \gtrless 0$. Posant

$$\alpha_2 x'_2 + \gamma_2 x_1 = \alpha_2 \delta_2 X'_2, \qquad x'_3 = \alpha_2 \delta_2 X'_3,$$

on aura

$$\Delta_2 X'_3 = X'_2, \qquad \Delta_2 X'_2 = x_1.$$

Par ce changement de variables, γ_2 aura été réduit à zéro, α_2 et δ_2 à l'unité; S_2 sera donc de la forme

$$S_2 = \left| \begin{array}{c} \Delta_2 x_r = a_2 x'_3 + b_2 x'_2, \qquad \Delta_2 x_{r-1} = \ldots = \Delta_2 x_2 = \Delta_2 x_1 = 0 \\ \Delta_2 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_2 x'_2 = x_1 \end{array} \right|.$$

On fera, d'ailleurs, disparaître b_2 en prenant pour variable $x_r - b_2 x'_3$. Enfin, si a_2 n'est pas nul, on peut le rendre égal à l'unité en prenant pour variables $\mu x'_2$, $\mu^2 x'_3$ et pour substitution génératrice $\frac{1}{\mu} S_2$, μ désignant la racine cubique de a_2.

On aura donc deux cas possibles, $a_2 = 0$ ou $a_2 = 1$. Dans chacun de ces deux cas, la combinaison des substitutions σ, S_1, S_2 donnera un groupe abélien.

Chacun d'eux sera général. Voyons, en effet, parmi les substitutions de l'espèce Σ celles qu'on pourrait lui adjoindre pour le compléter :

1° Si $a_2 = 1$, ces substitutions devraient laisser invariables x_r, x_{r-1}, ..., x_1, x'_3, x'_2; elles se réduiraient donc à l'unité.

2° Si $a_2 = 0$, ces substitutions, simplifiées au besoin par leur combinaison avec les dérivées de S_2, laisseront invariables x'_3, x'_2. Elles ne pourraient donc plus altérer que la seule variable x_r qu'elles accroîtraient d'une quantité

$$Dx_r = ax'_3 + bx'_2.$$

Mais on aurait

$$D\Delta_2 x_r = 0, \qquad \Delta_2 Dx_r = ax'_2 + bx_1.$$

Donc $a = b = 0$ et les substitutions cherchées se réduisent à l'unité.

40. *Deuxième hypothèse :* $\Delta_1 x'_3 = x'_2$, $\Delta_1 x'_2 = 0$. — On aura

$$S_1 = | \Delta_1 x_r = x_{r-1}, \quad \ldots, \quad \Delta_1 x_2 = x_1, \quad \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x'_2 = 0 |$$

et pour les substitutions Σ

$$\begin{aligned}
Dx_r &= ax'_3 + bx'_2,\\
Dx_{r-1} &= D\Delta_1 x_r = \Delta_1 Dx_r = ax'_2,\\
Dx_{r-2} &= \ldots = Dx_1 = 0,\\
Dx'_3 &= \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1,\\
Dx'_2 &= D\Delta_1 x'_3 = \Delta_1 Dx'_3 = \beta x_1.
\end{aligned}$$

Divers cas seront à distinguer ici :

1° Supposons d'abord que G contienne une substitution S_2 de l'espèce Σ et dans laquelle a ne soit pas nul. Les dérivées des substitutions S_1, S_2 permettant d'accroître x_r d'autant de fonctions linéairement distinctes qu'il y a de variables, G ne contiendra pas d'autres substitutions (n° **9**).

Il reste à réduire ce groupe à une forme canonique en changeant de variables indépendantes et de substitutions génératrices.

On peut tout d'abord prendre pour nouvelles variables

$$X'_3 = ax'_3 + bx'_2, \qquad X'_2 = ax'_2$$

au lieu de x'_3, x'_2; les substitutions S_1, S_2 conserveront leur forme; mais a sera réduit à l'unité et b à zéro. Soit donc

$$S_2 = | \Delta_2 x_r = x'_3, \Delta_2 x_{r-1} = x'_2, \ldots, \Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2 + \gamma x_1, \Delta_2 x'_2 = \beta x_1 |.$$

Le coefficient β sera $\gtrless 0$, car, s'il était nul, x'_2 n'étant altérée par aucune substitution de G, serait de rang 1 et non de rang 2.

Si α est également $\gtrless 0$, nous poserons

$$X'_3 = x'_3 + \lambda x_2, \qquad X'_2 = x'_2 + \lambda x_1.$$

Ce changement de variable n'altère pas l'expression de S_1; mais l'on aura pour S_2

$$\begin{aligned} \Delta_2 x_r &= X'_3 - \lambda x_2, & \Delta_2 x_{r-1} &= X'_2 - \lambda x_1, \\ \Delta_2 X'_3 &= \alpha X'_2 + \beta x_2 + (\gamma - \alpha\lambda) x_1, & \Delta_2 x'_2 &= \beta x_1. \end{aligned}$$

On peut déterminer λ de telle sorte que $\gamma - \alpha\lambda$ soit nul.

Cela fait, il existe parmi les dérivées de S_1 une substitution s qui donne aux variables x_r, x_{r-1}, x_{r-2}, ..., X'_3, ... les accroissements respectifs

$$\delta x_r = \lambda \Delta_1^{r-2} x_r = \lambda x_2, \quad \delta x_{r-1} = \lambda \Delta_1^{r-2} x_{r-1} = \lambda x_1, \quad \delta x_{r-2} = 0, \quad \ldots,$$
$$\delta X'_3 = \lambda \Delta_1^{r-2} X'_3 = 0, \qquad \ldots.$$

On pourra prendre pour substitution génératrice de G, au lieu de S_2, la substitution $(S_2 + s)$ qui a la même forme que S_2, sauf que le coefficient γ a été annulé.

Il est donc permis de supposer que dans l'expression de S_2 l'un au moins des deux coefficients α, γ est nul.

Posons maintenant

$$\ldots, \quad X_m = \lambda^m x_m, \quad \ldots, \quad X'_3 = u\lambda^r x'_3, \quad X'_2 = u\lambda^{r-1} x'_2,$$

et prenons $S'_1 = \lambda^{-1} S_1$, $S'_2 = u S_2$ pour substitutions génératrices au lieu de S_1, S_2. Les coefficients α, β, γ se reproduiront multipliés respectivement par $u\lambda$, $u^2\lambda^{r-2}$, $u^2\lambda^{r-1}$. On pourra profiter de l'indétermination de λ, u pour réduire à l'unité le coefficient β, et celui des coefficients α, γ qui pourrait être différent de zéro.

On obtient ainsi *trois* types réduits correspondant aux trois hypothèses

$$\beta = 1 \begin{cases} \alpha = 1, & \gamma = 0, \\ \alpha = 0, & \gamma = 1, \\ \alpha = 0, & \gamma = 0. \end{cases}$$

41. 2° Supposons maintenant que, parmi les substitutions de l'espèce Σ que G peut contenir, il n'en existe aucune où a soit différent de zéro; G contiendra nécessairement (n° **10**) la substitution σ_1 qui accroît x'_3 de x_1 sans altérer les autres variables; et il sera dérivé de la combinaison des substitutions σ_1, S_1 avec d'autres substitutions Σ' pour lesquelles

$$D'x_r = bx'_2, \qquad D'x_{r-1} = bx_1, \qquad D'x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \qquad D'x'_2 = \beta x_1,$$

les autres variables restant inaltérées.

Supposons que parmi ces substitutions Σ' (contenues dans G) il en existe une S_2 où b ne soit pas nul. On peut le supposer égal à l'unité; et l'on aura

$$S_2 = | \Delta_2 x_r = x'_2, \ \Delta_2 x_{r-1} = x'_1, \ \Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \ \Delta_2 x'_2 = \beta x_1 |.$$

Le groupe G sera dérivé des seules substitutions σ', S_1, S_2. Car, s'il contenait une autre substitution S_3 non dérivée de celle-là, on pourrait admettre qu'elle laisse invariable x_r et, par suite, $x_{r-1}, \ldots, x_1, x'_2$. Quant à x'_3 son accroissement serait de la forme

$$\Delta_3 x'_3 = \alpha' x'_2 + \beta' x_2.$$

Mais on a

$$\Delta_1 \Delta_3 x'_3 = \beta' x_1, \qquad \Delta_3 \Delta_1 x'_3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \beta' = 0,$$
$$\Delta_2 \Delta_3 x'_3 = \alpha' \beta_1 x_1, \qquad \Delta_3 \Delta_2 x'_3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha' \beta = 0.$$

D'ailleurs β ne peut être nul (car x'_2 ne serait pas de rang 2). Donc $\alpha' = \beta' = 0$, et S_3 se réduit à l'unité.

Posons enfin

$$\ldots, \qquad X_m = \lambda^m x_m, \qquad \ldots, \qquad X'_3 = \mu\lambda^r x'_3, \qquad X'_2 = \mu\lambda^{r-1} x_2,$$
$$\sigma'_1 = \frac{1}{\mu\lambda^{r-1}} \sigma_1, \qquad S'_1 = \lambda^{-1} S_1, \qquad S'_2 = u S_2.$$

Les coefficients b, α, β seront par ce changement multipliés respectivement par

$$\frac{u\lambda}{\mu}, \quad u\lambda, \quad u\mu\lambda^{r-2},$$

ce qui permettra de réduire b et β à l'unité, et α à l'une des deux valeurs 0 ou 1 : on obtient ainsi *deux* types réduits.

42. 3° Supposons enfin que toutes celles des substitutions Σ que G contient laissent invariable x_r (et, par suite, $x_{r-1}, \ldots, x_1$). Le groupe G résultera de la combinaison des substitutions σ_1, S_1 avec de nouvelles substitutions de la forme

$$\Sigma = | D x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \; D x'_2 = \beta x_1 |.$$

Or deux substitutions de cette forme ne sont échangeables que si leurs coefficients sont proportionnels. On ne pourra donc adjoindre à σ_1, S_1 pour former le groupe G qu'une seule substitution nouvelle

$$S_2 = | \Delta_2 x'_3 = \alpha x'_2 + \beta x_2, \; \Delta_2 x'_2 = \beta x_1 |$$

et ses multiples.

Le coefficient β ne peut être nul (car x'_2 ne serait pas de rang 2); mais on peut le ramener à l'unité, et le coefficient α à l'unité ou à zéro; car on peut comme tout à l'heure les multiplier par les deux indéterminées $u\lambda$, $u\mu\lambda^{r-2}$.

On obtient ainsi *deux* types réduits nouveaux, correspondant aux deux valeurs de α.

Conclusion. — Il existe *neuf* groupes réduits de signature [1, 2, 2, 1, 1, ...], quel que soit d'ailleurs le nombre des unités qui terminent cette signature (s'il y en a plus d'une).

9° *Groupes de signature* [2, 2, n].

43. Soient x'_1, x''_1; x'_2, x''_2; x^i_3 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les variables.

Les groupes cherchés s'obtiennent par la combinaison des σ avec d'autres substitutions S, dans lesquelles chacune des variables x^i_3 de rang 3 reçoit un accroissement de la forme

$$\Delta x^i_3 = a_i x'_2 + b_i x''_2.$$

Première hypothèse. — Le groupe contient deux substitutions S_1,

S_2, telles que les deux fonctions

$$\Delta_1 x'_3, \quad \Delta_2 x'_3$$

soient distinctes.

Prenons-les pour variables indépendantes; on aura

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_2 x'_3 = x''_2$$

et le groupe sera dérivé de σ, S_1, S_2 et d'autres substitutions Σ qui n'altèrent plus x'_3, x'_2, x''_2, x'_1, x''_1. Ces substitutions Σ donneront à l'une quelconque des variables restantes un accroissement

$$\Delta x^i_3 = a_i x'_2 + b_i x''_2.$$

On aura d'ailleurs

$$\Delta_1 (a_i x'_2 + b_i x''_2) = \Delta_1 \Delta x^i_3 = \Delta\Delta_1 x^i_3 = 0,$$

car $\Delta_1 x^i_3$ ne dépend que de x'_2, x''_2 que les Σ n'altèrent pas. On trouvera de même

$$\Delta_2 (a_i x'_2 + b_i x''_2) = 0.$$

La fonction $a_i x'_2 + b_i x''_2$ ne serait donc altérée par aucune substitution de G, quoiqu'elle soit de rang 2. Cette contradiction ne peut être levée que si $a_i = b_i = 0$.

Les substitutions Σ n'altéreront donc aucune des variables et se réduiront à l'unité. Le groupe G sera donc dérivé des seules substitutions σ, S_1, S_2.

L'analyse du n° **18** nous a montré que la substitution

$$S = (\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2),$$

qui donne à x'_3 l'accroissement

$$D x'_3 = \lambda_1 x'_2 + \lambda_2 x''_2,$$

donne à $\mu_1 x'_2 + \mu_2 x''_2$ un accroissement de la forme

$$D(\mu_1 x'_2 + \mu_2 x''_2) = \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} + \mu_2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2},$$

où

$$\psi = x'_1 \psi_1 + x''_1 \psi_2,$$

ψ_1 et ψ_2 étant quadratiques en λ_1, λ_2. En choisissant convenablement les variables et les substitutions génératrices, on pourra faire en sorte que ψ soit réduit à l'un des trois types suivants :

$$\tfrac{1}{2}(x'_1\lambda_1^2 + x''_1\lambda_2^2), \quad \tfrac{1}{2}x'_1\lambda_1^2 + x''_1\lambda_1\lambda_2, \quad \tfrac{1}{2}x'_1(\lambda_1^2+\lambda_2^2),$$

d'où autant de cas distincts à étudier séparément.

44. *Premier cas :* $\psi = \frac{1}{2}(x'_1\lambda_1^2 + x''_1\lambda_2^2)$. — Les substitutions S_1, S_2 donneront à x'_3, x'_2, x''_2 les accroissements

$$\Delta_1 x'_3 = x'_2, \qquad \Delta_1 x'_2 = x'_1, \qquad \Delta_1 x''_2 = 0,$$
$$\Delta_2 x'_3 = x''_2, \qquad \Delta_2 x'_2 = 0, \qquad \Delta_2 x''_2 = x''_1,$$

et à une autre variable de rang 3 (s'il en existe plusieurs), telle que x''_3, des accroissements de la forme

$$\Delta_1 x''_3 = a x'_2 + b x''_2, \qquad \Delta_2 x''_3 = c x'_2 + d x''_2.$$

On a d'ailleurs

$$\Delta_1\Delta_2 x''_3 = c x'_1, \qquad \Delta_2\Delta_1 x''_3 = b x''_1,$$

donc $b = 0$, $c = 0$. On peut enfin rendre a égal à zéro en prenant pour variable $x''_3 - a x'_3$ au lieu de x''_3. Cela fait, d ne pourra être nul, car, x''_3 étant de rang 3, G doit contenir au moins une substitution qui lui donne un accroissement de rang 2. On rendra d égal à 1, en prenant pour variable $\frac{1}{d}x''_3$. Soit donc

$$\Delta_1 x''_3 = 0, \qquad \Delta_2 x''_3 = x''_2.$$

Il ne peut exister une troisième variable x'''_3 de rang 3, car S_1, S_2 lui donneraient des accroissements de la forme

$$\Delta_1 x'''_3 = a x''_1, \qquad \Delta_2 x'''_3 = d x''_2;$$

elles n'altéreraient donc pas la fonction

$$x'''_3 - a x'_3 - (d - a) x''_3$$

qu'on pourrait prendre pour variable indépendante au lieu de x_3''' et qui serait de rang < 3.

La discussion de ce premier cas nous fournit donc un groupe de signature [2, 2, 1] et un autre de signature [2, 2, 2]; aucun de signature $[2, 2, n]$, si $n > 2$.

45. *Deuxième cas :* $\psi = \frac{1}{2}x_1'\lambda_1^2 + x_1''\lambda_1\lambda_2$. — On a ici

$$\Delta_1 x_3' = x_2', \qquad \Delta_1 x_2' = x_1', \qquad \Delta_1 x_2'' = x_1'',$$
$$\Delta_2 x_3' = x_2'', \qquad \Delta_2 x_2' = x_1'', \qquad \Delta_2 x_2'' = 0.$$

S'il y a une autre variable x_3'' de rang 3, elle subira des accroissements

$$\Delta_1 x_3'' = ax_2' + bx_2'', \qquad \Delta_2 x_3'' = cx_2' + dx_2''.$$

Mais

$$\Delta_1\Delta_2 x_3'' = cx_1' + dx_1'', \qquad \Delta_2\Delta_1 x_3'' = ax_1'',$$

d'où $c = 0$, $a = d$. Par les mêmes changements de variables que dans le cas précédent, on rendra $a = d$ nul et b égal à 1.

On voit de même qu'il ne peut exister de troisième variable de rang 3. On obtient donc, comme dans le cas précédent, deux groupes, de signature [2, 2, 1] et [2, 2, 2] respectivement.

46. *Troisième cas :* $\psi = \frac{1}{2}x_1'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$. — On aura

$$\Delta_1 x_3' = x_2', \qquad \Delta_1 x_2' = x_1', \qquad \Delta_1 x_2'' = 0,$$
$$\Delta_2 x_3' = x_2'', \qquad \Delta_2 x_2' = 0, \qquad \Delta_2 x_2'' = x_1'.$$

S'il n'y a qu'une variable de rang 3, la construction du groupe sera terminée. S'il en existe une seconde, x_3'', elle recevra des accroissements

$$\Delta_1 x_3'' = ax_2' + bx_2'', \qquad \Delta_2 x_3'' = cx_2' + dx_2'',$$

mais

$$\Delta_1\Delta_2 x_3'' = cx_1', \qquad \Delta_2\Delta_1 x_3'' = bx_1',$$

donc $b = c$.

D'ailleurs, en prenant pour variable $x_3'' - ax_3'$, on annulera a; il restera donc

$$\Delta_1 x_3'' = bx_2'', \qquad \Delta_2 x_3'' = bx_2' + dx_2''.$$

S'il existe une troisième variable de rang 3, telle que x_3''', on aura de même

$$\Delta_1 x_3''' = \beta x_2'', \qquad \Delta_2 x_3''' = \beta x_2' + \delta x_2''.$$

En remplaçant x_3'', x_3''' par des fonctions linéaires convenables, il viendra plus simplement

$$\Delta_1 x_3'' = x_2'', \qquad \Delta_1 x_3''' = 0,$$
$$\Delta_2 x_3'' = x_2', \qquad \Delta_2 x_3''' = x_2''.$$

On a ainsi formé un groupe G de signature [2, 2, 3].

On ne peut ajouter une quatrième variable x_3^{IV}; car en la combinant avec les précédentes on la remplacerait par une nouvelle variable pour laquelle Δ_1 et Δ_2 seraient nuls et qui, par suite, serait de rang < 3.

Revenons au cas où il n'y a que deux variables x_3', x_3'' de rang 3. Nous avons, dans les expressions de $\Delta_1 x_3''$, $\Delta_2 x_3''$, deux paramètres b, d. Ils ne peuvent être nuls à la fois, car x_3'' ne serait pas de rang 3. Si l'un d'eux est nul, on pourra rendre l'autre égal à l'unité, en remplaçant x_3'' par un de ses multiples. Si tous deux sont différents de zéro, on peut rendre encore l'un d'eux égal à l'unité, mais on ne pourra modifier leur rapport, qui subsiste comme paramètre invariant.

La discussion de ce cas donne donc *trois* groupes, de signature

[2, 2, 2] :

Dans le premier........................	$b = 0$,	$d = 1$,
Dans le second........................	$b = 1$,	$d = 0$,
Dans le troisième..................	$b = 1$,	$d = e$,

e étant un invariant non nul.

47. *Deuxième hypothèse.* — Supposons, au contraire, que toutes les substitutions S accroissent x_3' des multiples d'une même fonction.

Il existe (n° **11**) une substitution S_1, telle que $\Delta_1 x_3'$, $\Delta_1^2 x_3'$ soient de rang 2, 1 respectivement. En les prenant pour variables indépendantes, on pourra écrire

$$\Delta_1 x_3' = x_2', \qquad \Delta_1 x_2' = x_1', \qquad \Delta_1 x_1' = 0.$$

Les accroissements des autres variables seront de la forme

$$\Delta_1 x_3^i = a_i x_2' + b_i x_2'' \qquad (i = 2, \ldots, n),$$
$$\Delta_1 x_2'' = \alpha x_1' + \beta x_1'', \qquad \Delta_1 x_1'' = 0.$$

Mais on peut supposer les coefficients a_i, α nuls, car on les ferait disparaître au besoin par le changement de variables

$$X_2'' = x_2'' - \alpha x_2', \qquad X_3^i = x_3^i - (a_i + \alpha b_i) x_3'.$$

Soit donc plus simplement

$$\Delta_1 x_3^i = b_i x_2'', \qquad \Delta_1 x_2'' = \beta x_1''.$$

Si β n'est pas nul, on le réduira ensuite à l'unité en prenant pour nouvelle variable $\frac{1}{\beta} x_2''$; enfin, si l'un des coefficients b_i, par exemple b_2, est différent de zéro, on le rendra égal à 1 et l'on annulera $b_3, \ldots$ par un dernier changement de variables

$$X_3'' = \frac{1}{b_2} x_3'', \qquad X_3^i = x_3^i - \frac{b_i}{b_2} x_3'';$$

S_1 sera ainsi ramené à la forme

$$S_1 = \left| \begin{array}{lll} \Delta_1 x_3' = x_2', & \Delta_1 x_2' = x_1', & \Delta_1 x_1' = 0 \\ \Delta_1 x_3'' = b x_2'', & \Delta_1 x_2'' = \beta x_1'', & \Delta_1 x_1'' = 0 \\ \Delta_1 x_3^i = 0, & \text{si} \quad i > 2, & \end{array} \right| \qquad \left(\begin{array}{l} b = 0 \text{ ou } 1 \\ \beta = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right).$$

48. Nous allons établir que l'hypothèse de l'existence de plusieurs variables de rang 3 doit être rejetée.

Le groupe G doit, en effet, dériver de la combinaison des substitutions σ, S_1 avec de nouvelles substitutions Σ qui n'altèrent plus x_3', x_2', x_1', x_1'', et qui donneront aux autres variables des accroissements

$$D x_2'' = \gamma x_1' + \delta x_1'', \qquad D x_3^i = c_i x_2' + d_i x_2'' \qquad (i > 1).$$

Supposons tout d'abord qu'on ait au moins trois variables de rang 3, x_3', x_3'', x_3'''. Les substitutions σ donnent à x_2''' un accroissement de rang 1;

S_1 le laisse invariable. Mais G doit contenir une substitution au moins qui lui donne un accroissement de rang 2 (n° **11**). Cette substitution Σ_1 sera de l'espèce Σ et différente de l'unité. Elle donnera à x_3''' un accroissement

$$D_1 x_3''' = c x_2' + d x_2''.$$

Mais, étant échangeable à S_1, elle doit permuter exclusivement entre elles les fonctions que S_1 n'altère pas; donc c sera nul et, comme $D_1 x_3'''$ ne peut être identiquement nul, d sera $\gtrless 0$.

Considérons maintenant la fonction

$$X_3' = x_3''' + \lambda x_3'.$$

Les substitutions S_1 et Σ_1 l'accroissent respectivement de $\lambda x_2'$ et de $d x_2''$; ces deux fonctions sont linéairement distinctes. Donc, en prenant X_3' comme variable indépendante, nous retomberions sur la première hypothèse, déjà complètement discutée (n^{os} **42-45**).

La même démonstration s'appliquerait au cas où l'on n'aurait que deux variables de rang 3, x_3', x_3'', mais où b serait nul.

Si b était égal à 1, on aurait

$$S_1 = \left| \begin{array}{lll} \Delta_1 x_3' = x_2', & \Delta_1 x_2' = x_1', & \Delta_1 x_1' = 0 \\ \Delta_1 x_3'' = x_2'', & \Delta_1 x_2'' = \beta x_1'', & \Delta_1 x_1'' = 0 \end{array} \right|,$$

et le groupe abélien dérivé de σ, S_1 n'est pas général, car la substitution

$$\left| \begin{array}{c} \Delta x_3' = \Delta x_2' = \Delta x_1' = 0 \\ \Delta x_3'' = x_2'', \quad \Delta x_2'' = \beta x_1'', \quad \Delta x_1'' = 0 \end{array} \right|$$

est évidemment échangeable à ses substitutions. On devra donc le compléter par l'adjonction d'une substitution au moins de l'espèce Σ, autre que l'unité. Cette substitution Σ_1 laissera x_3' invariable et accroîtra x_3'' d'une expression de la forme

$$D_1 x_3'' = c x_2' + d x_2''.$$

Mais, si c n'était pas nul, les accroissements $D_1 x_3''$, $\Delta_1 x_3''$ seraient deux fonctions linéairement distinctes et l'on retomberait ainsi sur la première hypothèse.

Si $c=0$ et $d \gtrless 0$, la fonction $X'_3 = x''_3 + \lambda x'_3$ aurait des accroissements dx''_2, $x''_2 + \lambda x'_2$ linéairement distincts. On retomberait encore sur la première hypothèse.

Enfin, si c et d étaient nuls, Σ_1 laissant x''_3 invariable, n'altérerait pas $x''_2 = \Delta_1 x''_3$ (n° **8**). Elle se réduirait donc à l'unité, résultat inadmissible.

49. Considérons enfin le cas où il n'existe qu'une variable de rang 3; on aura

$$S_1 = | \; \Delta_1 x'_3 = x'_2, \quad \Delta_1 x'_2 = x'_1, \quad \Delta_1 x'_1 = 0, \quad \Delta_1 x''_2 = \beta x''_1, \quad \Delta_1 x''_1 = 0 \; |.$$

Les substitutions Σ n'altèrent que x''_2 et lui donnent un accroissement de la forme

$$Dx''_2 = \gamma x'_1 + \delta x''_1.$$

Toutes ces substitutions sont évidemment échangeables entre elles, et le groupe cherché s'obtiendra en les adjoignant aux substitutions σ, S_1. D'ailleurs, les deux substitutions S_1^0, S_1^1, que l'on obtient en faisant successivement $\beta = 0$, $\beta = 1$ dans l'expression de S_1, résultent évidemment de la combinaison de l'une d'elles avec une substitution Σ. On aura donc un seul groupe G, dérivé des substitutions σ, S_1^0, Σ.

En résumé, nous avons obtenu :

Quatre groupes de signature [2, 2, 1] (confirmation d'un résultat déjà trouvé);

Cinq de signature [2, 2, 2];

Un de signature [2, 2, 3];

Aucun de signature [2, 2, n], $\quad n > 3$.

IV. — Récapitulation.

50. Parmi les groupes G construits dans la section précédente figurent tous ceux où le nombre n des variables ne surpasse pas 6. Le Tableau suivant indique leur nombre pour chaque signature donnée :

1° *Deux variables.*

Signature.	Nombre des groupes.
[1, 1]	1
Total	1

2° *Trois variables.*

Signature.	Nombre des groupes.
[1, 2]	1
[2, 1]	1
[1, 1, 1]	1
Total	3

3° *Quatre variables.*

Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.
[1, 3]	1	[1, 1, 2]	0
[2, 2]	1	[1, 2, 1]	2
[1, 3]	1	[2, 1, 1]	1
		[1, 1, 1, 1]	1
		Total	7

4° *Cinq variables.*

Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.
[1, 4]	1	[1, 1, 3]	0	[1, 1, 1, 2]	0
[2, 3]	1	[1, 2, 2]	2	[1, 1, 2, 1]	0
[3, 2]	1	[1, 3, 1]	3	[1, 2, 1, 1]	2
[4, 1]	1	[2, 1, 2]	0	[2, 1, 1, 1]	1
		[2, 2, 1]	4	[1, 1, 1, 1, 1]	1
		[3, 1, 1]	1		
				Total	18

5° *Six variables.*

Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.	Signature.	Nombre des groupes.
[1, 5]	1	[3, 1, 2]	0	[2, 1, 1, 2]	0
[2, 4]	1	[3, 2, 1]	5	[2, 1, 2, 1]	0
[3, 3]	1	[4, 1, 1]	1	[2, 2, 1, 1]	5
[4, 2]	1	[1, 1, 1, 3]	0	[3, 1, 1, 1]	1
[5, 1]	1	[1, 1, 2, 2]	0	[1, 1, 1, 1, 2]	0
[1, 1, 4]	0	[1, 1, 3, 1]	0	[1, 1, 1, 2, 1]	0
[1, 2, 3]	7	[1, 2, 1, 2]	0	[1, 1, 2, 1, 1]	0
[1, 3, 2]	4	[1, 2, 2, 1]	8	[1, 2, 1, 1, 1]	2
[1, 4, 1]	4	[1, 3, 1, 1]	3	[2, 1, 1, 1, 1]	1
[2, 1, 3]	0			[1, 1, 1, 1, 1, 1]	1
[2, 2, 2]	5				
[2, 3, 1]	11				
				Total	63