JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. MATHY

Composantes de la force magnétique d'un aimant ellipsoïdal uniforme

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 3 (1907), p. 207-212.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1907_6_3__207_0>

Composantes de la force magnétique d'un aimant ellipsoïdal uniforme;

PAR M. E. MATHY.

Ces composantes se déduisent de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, dont les formules sont [1] :

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{3Mx}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}[\zeta(u+\omega_3)-\eta_3+e_3u], \\ -\dfrac{dP}{dy} = \dfrac{3My}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}[\zeta(u+\omega_2)-\eta_2+e_2u], \\ -\dfrac{dP}{dz} = \dfrac{3Mz}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}[\zeta(u+\omega_1)-\eta_1+e_1u]. \end{cases}$$

Les quantités qui entrent dans ces expressions sont déterminées par les conditions suivantes :

M représente la masse de l'ellipsoïde considéré; (x, y, z) désigne le point extérieur;

Par ce point extérieur, on a fait passer un ellipsoïde homothétique au premier; ses axes principaux (a', b', c') seront connus par

$$(2)\qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. II, 1896, fasc. III.

quand le point (x, y, z) sera donné;

$$(4)\qquad \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2c^2), \\ e_2 = \frac{1}{3}(a^2 + c^2 - 2b^2), \\ e_3 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2); \end{cases}$$

l'argument u, pour $\frac{dP}{dx}$, satisfait à $pu - e_3 = a'^2$, pour $\frac{dP}{dy}$, à $pu - e_2 = b'^2$ et, pour $\frac{dP}{dz}$, à $pu - e_1 = c'^2$; mais ces trois valeurs de u sont égales, en vertu de (2) et de (4); elles permettent d'écrire (3) sous la forme

$$(5)\qquad \frac{x^2}{pu - e_3} + \frac{y^2}{pu - e_2} + \frac{z^2}{pu - e_1} = 1.$$

La dérivée $\frac{du}{dx}$ entrant dans les calculs suivants, il est préférable de la chercher séparément; à cet effet, en dérivant (5) par rapport à x, on trouve

$$(6)\qquad \frac{2x}{pu - e_3} - p'u\frac{du}{dx}\left[\frac{x^2}{(pu - e_3)^2} + \frac{y^2}{(pu - e_2)^2} + \frac{z^2}{(pu - e_1)^2}\right] = 0.$$

Or, si l'on représente par d la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'ellipsoïde (5) au point (x, y, z), on a

$$d^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{(pu - e_3)^2} + \frac{y^2}{(pu - e_2)^2} + \frac{z^2}{(pu - e_1)^2}}.$$

Dès lors (6) devient

$$(7)\qquad \frac{du}{dx} = \frac{2x\,d^2}{(pu - e_3)\,p'u}.$$

Mais on vient de voir que

$$pu - e_3 = a'^2$$

et que

$$p'u = -2\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3)} = -2a'b'c';$$

il en résulte

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x\,d^2}{a'^3 b'c'}. \tag{8}$$

On obtiendrait de même $\dfrac{du}{dy}$ et $\dfrac{du}{dz}$.

Ces opérations auxiliaires étant terminées, on peut résoudre la question. On examine d'abord le cas de l'aimantation dirigée suivant le grand axe; on sait qu'alors les composantes de la force magnétique sont

$$X_1 = \frac{d^2 P}{dx^2}, \qquad Y_1 = \frac{d^2 P}{dx\,dy}, \qquad Z_1 = \frac{d^2 P}{dx\,dz},$$

quand l'intensité est l'unité. Or, des formules (1), on déduit

$$\begin{aligned} -X_1 = -\frac{d^2 P}{dx^2} &= \frac{3M}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}[\zeta(u+\omega_3) - \eta_3 + e_3 u] \\ &\quad + \frac{3Mx}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}[-p(u+\omega_3)+e_3]\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

ou

$$-X_1 = 3M\frac{\zeta(u+\omega_3) - \eta_3 + e_3 u}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} + 3Mx\frac{p(u-\omega_3)-e_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}\left(-\frac{du}{dx}\right).$$

Mais

$$\frac{p(u+\omega_3)-e_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} = \frac{1}{pu-e_3} = \frac{1}{a'^2}.$$

En tenant compte de cette valeur, ainsi que de (8), on a

$$-X_1 = 3M\left[\frac{\zeta(u+\omega_3) - \eta_3 + e_3 u}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} + \frac{x}{a'^2}\frac{x\,d^2}{a'^3 b'c'}\right].$$

Pour les autres composantes, on trouve

$$\left\{\begin{aligned} -Y_1 = -\frac{d^2 P}{dx\,dy} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{dP}{dy}\right) \\ &= \frac{3My}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}[-p(u+\omega_2)+e_2]\frac{du}{dx} \end{aligned}\right. \tag{9}$$

ou

$$-\mathrm{Y}_1 = 3\mathrm{M}y\,\frac{p(u+\omega_2)-e_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}\left(-\frac{du}{dx}\right) = 3\mathrm{M}y\,\frac{1}{pu-e_2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3 b' c'};$$

$$-\mathrm{Y}_1 = \frac{3\mathrm{M}y}{b'^2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3 b' c'}.$$

De même

$$-\mathrm{Z}_1 = \frac{3\mathrm{M}z}{c'^2}\,\frac{x\,d^2}{a'^3 b' c'}.$$

On sait que les signes $\pm$ conviennent à la répulsion ou à l'attraction; on peut réunir les formules et rétablir l'intensité

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{X}_1 = 3\mathrm{MI}\left[\dfrac{\zeta(u+\omega_3)-\eta_3+e_3 u}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} + \dfrac{x}{a'^2}\,\dfrac{x\,d^2}{a'^3 b' c'}\right], \\[2ex] \mathrm{Y}_1 = 3\mathrm{MI}\,\dfrac{y}{b'^2}\,\dfrac{x\,d^2}{a'^3 b' c'}, \\[2ex] \mathrm{Z}_1 = 3\mathrm{MI}\,\dfrac{z}{c'^2}\,\dfrac{x\,d^2}{a'^3 b' c'}. \end{cases}$$

Ces formules pourront servir aux calculs numériques si l'argument u est déterminé. Pour cela, on remarquera que $pu - e_1 = c'^2$ donne $pu > e_1$; comme $k^2 = \dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$ est plus petit que 1, u est réel et sa plus petite valeur est

$$(11)\qquad u = \pm\, 2\omega_1 v.$$

On sait que v est donné, avec une très grande approximation, par

$$(12)\qquad \cos 2av = \frac{\left(1-\dfrac{a'}{b'}\sqrt{k'}\right)\left(1+\sqrt{k'}\right)}{\left(1-\sqrt{k'}\right)\left(1+\dfrac{a'}{b'}\sqrt{k'}\right)}.$$

Comme

$$\omega_1 = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{e_1-e_3}} = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

K étant l'intégrale complète elliptique de première espèce calculée par Legendre, correspondant au module k^2 et au module complémentaire

$$k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2},$$

on peut obtenir

$$(13)\qquad u = \frac{K}{\pi\sqrt{a^2-c^2}} \arc\cos \frac{\left(1-\frac{a'}{b'}\sqrt{k'}\right)(1+\sqrt{k'})}{(1-\sqrt{k'})\left(1+\frac{a'}{b'}\sqrt{k'}\right)}.$$

Il reste à étudier $\zeta(u+\omega_3)-\eta_3$:

Par la formule d'addition

$$\zeta(u+\omega_3)-\eta_3 = \zeta u + \zeta\omega_3 - \eta_3 + \frac{1}{2}\frac{p'u-p'\omega_3}{pu-p\omega_3}$$

ou

$$(14)\qquad \zeta(u+\omega_3)-\eta_3 = \zeta u + \frac{1}{2}\frac{p'u}{pu-e_3} = \zeta u - \frac{b'c'}{a'}.$$

Enfin, on développe ζu suivant les puissances de u et, retenant les deux premiers termes, on a

$$(15)\qquad \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{20}\frac{u^3}{3} = \frac{1}{u} + \frac{1}{5}(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)\frac{u^3}{3}.$$

Les égalités (13), (14), (15) permettent donc d'obtenir les valeurs numériques de (10).

Lorsque l'aimantation a lieu suivant l'un des deux autres axes principaux de l'ellipsoïde, on remarquera que, pour écrire les formules correspondantes, les termes en ζ se rapportent à l'axe de glissement et que les autres termes sont symétriques en x, y, z $(a'b'c')$.

Dans le cas le plus général, celui où l'aimantation a lieu suivant la direction s, à cosinus directeurs (λ, μ, ν), on fera le raisonnement suivant : P étant le potentiel d'un ellipsoïde de densité 1 au point extérieur, $-\frac{dP}{ds}$ sera le potentiel de la double couche de glissement au même point; or

$$-\frac{dP}{ds} = -\left(\frac{dP}{dx}\lambda + \frac{dP}{dy}\mu + \frac{dP}{dz}\nu\right) = \Omega.$$

Comme

$$X_1 = -\frac{d\Omega}{dx} = \lambda\frac{d^2P}{dx^2} + \mu\frac{d^2P}{dx\,dy} + \nu\frac{d^2P}{dx\,dz},$$

on a

$$(16)\left\{\begin{aligned} &X_1 = 3\mathrm{MI}\left[\lambda\frac{\zeta(u+\omega_3)-\eta_3+e_3u}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}+\frac{x\,d^2}{a'^3b'c'}\left(\frac{\lambda x}{a'^2}+\frac{\mu y}{b'^2}+\frac{\nu z}{c'^2}\right)\right].\\ &\text{De même}\\ &Y_1 = 3\mathrm{MI}\left[\mu\frac{\zeta(u+\omega_2)-\eta_2+e_2u}{(e_3-e_2)(e_1-e_2)}+\frac{y\,d^2}{a'b'^3c'}\left(\frac{\lambda x}{a'^2}+\frac{\mu y}{b'^2}+\frac{\nu z}{c'^2}\right)\right],\\ &Z_1 = 3\mathrm{MI}\left[\nu\frac{\zeta(u+\omega_1)-\eta_1+e_1u}{(e_1-e_3)(e_1-e_2)}+\frac{z\,d^2}{a'b'c'^3}\left(\frac{\lambda x}{a'^2}+\frac{\mu y}{b'^2}+\frac{\nu z}{c'^2}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Il est facile de reconnaître que le facteur

$$\frac{\lambda x}{a'^2}+\frac{\mu y}{b'^2}+\frac{\nu z}{c'^2}$$

est le cosinus que la normale n à l'ellipsoïde (3) au point (x, y, z) fait avec la direction s de l'aimantation, ce cosinus étant divisé par d.

La méthode des calculs numériques est applicable aux formules (16). Quand les ellipsoïdes sont de révolution, les termes en ζ dégénèrent en fonctions circulaires ou logarithmiques; ces expressions sont d'ailleurs obtenues directement dans les auteurs classiques. Cependant un calcul immédiat montre que dans le cas de la sphère, lorsque

$$a' = b' = c' = d = r,$$

on a

$$Y_1 = \frac{3\mathrm{MI}\,yx}{r^5} = 3\mathrm{MI}\frac{\sin\omega'\cos\omega}{r^3},$$

ce qui est bien la formule connue.