JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES RÉMOUNDOS

Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 2 (1906), p. 87-107.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1906_6_2__87_0>

Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

Préface.

1. J'appellerai *algébroïde* toute fonction ayant un nombre fini de branches dans tout le plan. L'étude des zéros de ces fonctions m'a déjà conduit aux théorèmes remarquables communiqués autrefois à l'Académie des Sciences de Paris, qui constituent une extension du théorème bien connu de M. Picard et de ses généralisations aux fonctions algébroïdes (¹).

J'ai, à plusieurs reprises, signalé le théorème fondamental de M. Borel, qui m'a servi de base et dont l'importance n'était pas remarquée avant mes recherches.

Dans ce petit Mémoire, je commence par établir une extension très intéressante de ce théorème de M. Borel concernant des identités de forme analogue à celles de M. Borel, dont les exposants et les coefficients ne sont plus des fonctions uniformes.

J'en déduis, dans le second Chapitre, quelques résultats remarquables qui complètent ceux que j'ai obtenus dans mes travaux anté-

(¹) Voir *Comptes rendus*, 20 avril 1903; 8 février, 20 juin, 8 août 1904; 8 mai 1905; et *Bulletin de la Société mathématique*, 1904, fascicule I et 1905, fascicule III.

rieurs. J'obtiens enfin un théorème sur les algébroïdes satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre.

CHAPITRE I.

LA CROISSANCE DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES. UN THÉORÈME GÉNÉRAL.

2. *Le module maximum.* — Je démontrerai d'abord que tous les théorèmes bien connus sur le module maximum et minimum et sur la croissance de la dérivée s'étendent aux fonctions algébroïdes. Pour fixer nos idées, considérons une fonction algébroïde d'ordre *fini*, donnée par l'équation suivante :

$$(1)\quad u^\nu + A_1(z)u^{\nu-1} + A_2(z)u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)u + A_\nu(z) = 0.$$

Nous appelons *ordre* de la fonction algébroïde $u = a(z)$ le plus grand des ordres des coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$; soit ρ cet ordre. Si $M(r)$ désigne le module maximum d'une branche quelconque de $a(z)$, il est facile de démontrer que l'inégalité

$$(2)\qquad M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

est satisfaite à partir d'une certaine valeur de r et que l'inégalité

$$(2')\qquad M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

sera satisfaite pour une infinité de valeurs de r croissantes indéfiniment. En effet, écrivons l'équation (1) de la façon suivante :

$$(2)\qquad u^\nu\left[1 + A_1(z)\frac{1}{u} + A_2(z)\frac{1}{u^2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)\frac{1}{u^{\nu-1}} + A_\nu(z)\frac{1}{u^\nu}\right] = 0,$$

et remarquons que, s'il y avait une infinité (I) de valeurs de r satisfaisant à l'inégalité

$$M(r) > e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

ε étant un nombre fixe, aussi petit que l'on voudra, pour cette série de valeurs de r, les termes $A_1(z)\frac{1}{u}$, $A_2(z)\frac{1}{u^2}$, $\cdots$ tendraient vers zéro avec $\frac{1}{r}$ et l'équation (2) ne serait pas du tout satisfaite.

De plus, si l'inégalité

$$M(r) < e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

était satisfaite à partir d'une certaine valeur de r et pour toutes les branches, il en serait de même des fonctions entières $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$ qui satisferaient à une inégalité

$$(3) \qquad M_i(r) < e^{r^{\rho-\varepsilon_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

$M_i(r)$ étant le module maximum de $A_i(z)$, et ε_i un nombre positif. Cela résulte bien des relations bien connues entre les fonctions entières $A_i(z)$ et les diverses branches de la fonction multiforme. Mais les inégalités (3), satisfaites à partir d'une certaine valeur de r, sont en contradiction avec notre hypothèse que les coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$, $\ldots$, $A_\nu(z)$ ne sont pas tous d'ordre inférieur à ρ.

Ces résultats justifient bien la définition d'*ordre* que nous avons donnée pour les fonctions algébroïdes.

5. Il est utile pour la suite de chercher une limite inférieure de l'étendue des arcs du cercle de rayon r, sur lesquels une branche de la fonction algébroïde satisfait à l'inégalité (2').

A cet effet, nous allons démontrer que, si une branche $u = a_1(z)$ satisfait à l'inégalité (2') pour un point de module assez grand, il en sera de même de l'un, au moins, des coefficients $A_i(z)$ [1].

La démonstration est facile : si, pour cette valeur $z = z_0$, on avait

$$|A_i(z)| < K e^{r^{\rho-\varepsilon_1}}, \qquad K < 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

l'équation ne saurait être satisfaite pour $r = |z_0|$ assez grand.

En effet, reportons-nous à l'équation (1) écrite sous la forme (2) et

---

[1] Pourvu que l'on remplace ε par un nombre ε_1 plus grand que ε mais quelconque.

remarquons que l'on aurait

$$\left|A_1(z)\frac{1}{u}+A_2(z)\frac{1}{u^2}+\ldots+A_\nu(z)\frac{1}{u^\nu}\right| < K\left(e^{r^{\rho-\varepsilon_1}-r^{\rho-\varepsilon}}+e^{r^{\rho-\varepsilon_1}-2r^{\rho-\varepsilon}}+\ldots\right)$$

et

$$\left|A_1(z)\frac{1}{u}+\ldots+A_\nu(z)\frac{1}{u^\nu}\right| < K\left[e^{r^{\rho-\varepsilon_1}(1-r^{\varepsilon_1-\varepsilon})}+e^{r^{\rho-\varepsilon_1}(1-2r^{\varepsilon_1-\varepsilon})}+\ldots\right].$$

Si $\varepsilon_1 > \varepsilon$, le second membre tend visiblement vers zéro et sera, à partir d'une certaine valeur de r, inférieur à $\frac{1}{K}$ et l'on aura

$$\left|A_1(z_0)\frac{1}{u}+\ldots+A_\nu(z_0)\frac{1}{u^\nu}\right| < K\frac{1}{K}.$$

Dès lors, il est clair que l'équation n'est pas satisfaite pour un tel point de module assez grand.

Il en résulte donc que tous les points satisfaisant à l'inégalité

$$|a(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

satisfont aussi à l'une, au moins, des inégalités

$$|A_i(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}} \qquad [i=1, 2, 3, \ldots, \nu],$$

$a(z)$ désignant une branche de la fonction algébroïde et ε_1 un nombre positif plus grand que ε, mais quelconque.

Appelons U_ε l'ensemble des points du cercle de rayon r, pour lesquels une, au moins, des branches de la fonction algébroïde satisfait à l'inégalité

$$(4) \qquad |a(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

et E_ε l'ensemble des points pour lesquels un, au moins, des coefficients $A_i(z)$ satisfait à l'inégalité

$$(5) \qquad |A_i(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}.$$

Nous avons donc démontré que *tout point de* U_ε *appartient aussi à* E_{ε_1}, ε_1 *étant un nombre quelconque supérieur à* ε.

Nous allons établir maintenant la réciproque

Soit z_0 un point du cercle de rayon r satisfaisant à l'inégalité (5), $A_i(z)$ étant un des coefficients de l'équation (1).

Si, pour ce point, toutes les branches de la fonction algébroïde satisfaisaient à l'inégalité

$$|a(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon_1}},$$

tous les coefficients $A_i(z)$ satisferaient à l'inégalité

$$|A_i(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon_2}} (\varepsilon_2 < \varepsilon_1),$$

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse, si l'on a $\varepsilon_2 > \varepsilon$ et, par conséquent, $\varepsilon_1 > \varepsilon$.

Nous en concluons le théorème suivant qui est la réciproque du précédent :

THÉORÈME. — *Tout point de l'ensemble* E_ε *appartient aussi à l'ensemble* U_{ε_1}, ε_1 *étant un nombre positif quelconque supérieur à* ε.

Donc, la mesure de l'ensemble E_ε *ne saurait dépasser celle de l'ensemble* U_{ε_1} $(\varepsilon_1 > \varepsilon)$.

Or, je démontre dans ma thèse [1] que la mesure de l'ensemble E_ε est plus grande qu'une certaine puissance finie de r; il en sera donc de même de l'ensemble U_{ε_1}. Donc, l'ensemble U_ε, même lorsqu'il tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ (sa mesure), la longueur totale des arcs qui le constituent est comparable à une puissance finie de r dont l'exposant ne dépend pas de r.

4. *Le module minimum.* — Nous allons maintenant étendre le théorème de M. Hadamard (sur le module minimum) aux fonctions algébroïdes. Il est aisé de démontrer que *toutes les branches* de $a(z)$

(1) Thèse de doctorat : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes*, deuxième Partie, p. 64-66 (Gauthier-Villars), et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

satisfont à l'inégalité

$$(6) \qquad |\mathrm{a}(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

les intervalles d'exclusion étant aussi bien négligeables que ceux qui concernent les fonctions entières.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi pour une branche quelconque $u_1 = \mathrm{a}_1(z)$ et que, pour un point $z = z_0$ de module assez grand, on ait

$$|\mathrm{a}_1(z)| < e^{-r^{\rho+\varepsilon_1}} \qquad (\varepsilon_1 < \varepsilon),$$

il en résulterait

$$|\mathrm{A}_k(z)[\mathrm{a}_1(z)]^{\nu-k}| < e^{-r^{\rho+\varepsilon_1}(\nu-k)} e^{r^{\rho+\delta}} < e^{-r^{\rho+\varepsilon_2}},$$

δ étant un nombre positif arbitrairement petit et $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

Cela acquis, l'équation

$$[\mathrm{a}_1(z)]^\nu + \mathrm{A}_1(z)[\mathrm{a}_1(z)]^{\nu-1} + \ldots + \mathrm{A}_{\nu-1}(z)\,\mathrm{a}_1(z) + \mathrm{A}_\nu(z) = 0$$

montre que ce point $z = z_0$ appartient à un arc d'exclusion pour la fonction entière $\mathrm{A}_\nu(z)$, c'est-à-dire à l'ensemble des points du cercle de rayon r, qui satisfont à l'inégalité

$$(7) \qquad |\mathrm{A}_\nu(z)| < e^{-r^{\rho+\varepsilon_3}} \qquad (\varepsilon_3 < \varepsilon_2).$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

Si l'on exclut du cercle de rayon r certains arcs dont la longueur totale tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ comme e^{-r^α} (α étant un nombre positif quelconque et inférieur à ε), tous les autres points du cercle satisfont à l'inégalité (6), *et cela pour toutes les branches de la fonction multiforme* $\mathrm{a}(z)$.

Ce théorème est l'extension de celui que j'ai établi tout récemment pour les fonctions entières de genre fini dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXII, 1904, p. 314), et qui constitue une extrême précision du théorème bien connu de M. Hadamard sur le module minimum.

5. *La croissance de la dérivée.* — La dérivée d'une fonction algébroïde est aussi algébroïde et se trouve déterminée par l'équation qui résulte de l'élimination de u entre l'équation (1) et la suivante :

$$(8)\quad \begin{cases} u^{\nu}+A'_1(z)u^{\nu-1}+\ldots+A'_{\nu-1}(z)u+A'_{\nu}(z) \\ \quad +u'[\nu u^{\nu-1}+(\nu-1)u^{\nu-2}A_1(z)+\ldots+A_{\nu-1}(z)]=0. \end{cases}$$

Une fonction entière ayant le même ordre avec sa dérivée, nous voyons immédiatement que la dérivée $a'(z)$ ne saurait avoir un ordre supérieur à celui de la fonction algébroïde $a(z)$.

La dérivée $a'(z)$ satisfait donc aux inégalités

$$(9)\qquad e^{-r^{\rho+\epsilon}}<|a'(z)|<e^{r^{\rho+\epsilon}},\qquad M_1(r)>e^{r^{\rho-\epsilon}},$$

les deux premières pour toutes les branches et la troisième pour une, au moins, des branches, dans les mêmes conditions et avec des intervalles d'exclusion (ou arcs d'exclusion) analogues à ceux de la fonction $a(z)$.

Les résultats précédents montrent que la croissance des fonctions algébroïdes jouit des mêmes propriétés fondamentales que celle des fonctions entières.

6. *Les fonctions algébroïdes d'ordre infini.* — Nous obtenons des résultats analogues pour les fonctions algébroïdes d'ordre infini, à savoir :

Si tous les coefficients $A_i(z)$ de l'équation (1) satisfont à l'inégalité

$$(10)\qquad |A_i(z)|<e^{[\mu(r)]^{1+\alpha}},$$

et que le module maximum $M(r)$ de l'une, au moins, d'entre elles, satisfasse à l'inégalité

$$(11)\qquad M(r)>e^{[\mu(r)]^{1-\alpha}}$$

(α un nombre positif arbitrairement petit) pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment, la fonction algébroïde $a(z)$

satisfera aux inégalités

$$(12)\qquad \begin{cases} e^{-[\mu(r)]^{1+\varepsilon}} < |\mathrm{a}(z)| < e^{[\mu(r)]^{1+\varepsilon}}, \\ m(r) > e^{[\mu(r)]^{1-\varepsilon}}; \end{cases}$$

les deux premières pour toutes les branches de $\mathrm{a}(z)$ et la troisième pour une, au moins, des branches, $m(r)$ désignant le module maximum d'une branche de $\mathrm{a}(z)$ et ε un nombre positif arbitrairement petit.

Pour l'inégalité

$$|\mathrm{a}(z)| > e^{-[\mu(r)]^{1+\varepsilon}},$$

il y a des intervalles d'exclusion (sur l'axe des modules $r = |z|$) dont la grandeur se trouve limitée à l'aide d'un résultat remarquable de M. Albert Kraft, dont je me suis déjà servi dans ma Thèse [*Ueber ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung* (*Inaugural Dissertation*, 1903, Universität zu Göttingen)]. Si l'on remplace, avec M. Kraft, les inégalités (10) et (11) par les suivantes

$$(13)\qquad |A_i(z)| < e^{r^{P(r)^{1+\alpha}}}, \qquad M(r) > e^{-r^{P(r)^{1+\alpha}}},$$

on aura à la place des (12) les inégalités suivantes :

$$(14)\qquad \begin{cases} e^{-r^{P(r)^{1+\varepsilon}}} < |\mathrm{a}(z)| < e^{r^{P(r)^{1+\varepsilon}}}, \\ m(r) > e^{r^{P(r)^{1-\varepsilon}}}; \end{cases}$$

et les intervalles d'exclusion concernant l'inégalité

$$|\mathrm{a}(z)| > e^{-r^{P(r)^{1+\varepsilon}}}$$

et situés entre r et $2r$ ont une étendue totale inférieure à $\frac{1}{P(r)}$.

Je tiens aussi à signaler un autre résultat très intéressant dû aux calculs de M. Kraft (*Inaugural-dissertation*, p. 74) et qui nous servira dans la suite :

Considérons une exponentielle $e^{H(z)}$ croissant plus vite que les coefficients $A_i(z)$ de l'équation (1). Le résultat annoncé est le suivant :

A partir d'une valeur r_0 de r, pour laquelle on ait l'inégalité

$$\mathrm{Max}|e^{H(z)}| > e^{r^{P(r)^{1+\alpha}}},$$

l'inégalité

$$\mathrm{Max}|e^{H(z)}| > e^{r^{P(r)^{1+\alpha_1}}} \qquad (\alpha_1 < \alpha) \tag{15}$$

est satisfaite dans un intervalle d'étendue égale à

$$\frac{1}{\log P(r_0)}.$$

A l'aide de ce théorème, M. Kraft a précisé la démonstration donnée par M. Borel pour son théorème fondamental, qui a servi de base dans mes recherches sur les zéros des fonctions multiformes et auquel j'ai fait allusion dans la préface de ce travail (travail cité, p. 63-75).

Des raisonnements analogues à ceux du n° 5 montrent que ce théorème s'étend aux fonctions algébroïdes d'ordre infini, si l'on tient compte de ce que l'ordre de grandeur d'une fonction algébroïde n'est autre chose que le plus grand des ordres de grandeur des coefficients $A_i(z)$ de l'équation qui la définit.

En ce qui concerne la dérivée d'une fonction algébroïde d'ordre infini, il est clair que sa croissance jouit de propriétés analogues à celles que nous avons établies pour les algébroïdes d'ordre fini.

7. *Un théorème sur les fonctions algébroïdes.* — Le théorème fondamental de M. Borel, que nous avons appliqué dans nos recherches, s'étend aux fonctions algébroïdes et prend la forme suivante :

Une identité de la forme

$$\mathrm{a}_1(z)e^{H_1(z)} + \mathrm{a}_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + \mathrm{a}_n(z)e^{H_n(z)} = 0, \tag{16}$$

où les fonctions algébroïdes $\mathrm{a}_i(z)$ *croissent moins vite que* $e^{r^{P(r)}}$, *tandis que les fonctions aussi* algébroïdes $H_i(z) - H_k(z)$ *croissent plus vite que* $r^{P(r)^{1+\alpha}}$, *entraîne la nullité de tous les coefficients* $\mathrm{a}_i(z)$.

Une fois les propriétés fondamentales de croissance des fonctions entières étendues aux fonctions algébroïdes, la démonstration de ce théorème est *identique* à celle du théorème analogue de M. Borel [cas où les fonctions algébroïdes $a_i(z)$ et $H_i(z)$ sont uniformes].

Je crois donc qu'il est tout à fait inutile de répéter ici la démonstration, et je renvoie le lecteur aux travaux de MM. Borel et Kraft [Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX), et Albert Kraft, *Ueber ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung* (*Inaugural Dissertation*, Gœttingen, 1903)].

Il n'y a qu'un point que je veux préciser ici; je me bornerai, pour fixer les idées, au cas où les coefficients $a_i(z)$ et les exposants $H_i(z)$ désignent des algébroïdes d'ordre fini.

Reportons-nous aux notations du n° 3, et rappelons-nous que l'ensemble U_{ε_1} a une mesure qui n'est pas inférieure à celle de $E_\varepsilon[\varepsilon_1 > \varepsilon]$. L'ensemble U_{ε_1} a donc une mesure supérieure à une puissance finie r^k de r.

Si je désigne par $\overline{U}_{\varepsilon_1}$ le plus grand (par rapport à la mesure) des ν ensembles correspondant aux ν diverses branches et définis par les inégalités

$$(17) \qquad |a_i(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}} \qquad [i = 1, 2, 3, \ldots, \nu],$$

il est clair que la mesure de $\overline{U}_{\varepsilon_1}$ n'est pas inférieure à $\frac{1}{\nu} r^k$. En effet, s'il en était ainsi, la mesure de U_{ε_1} serait inféri eureà r^k, ce qui est absurde.

Je tiens enfin à faire quelques remarques nécessaires à l'intelligence de notre théorème.

Partons d'un point z_0 de module r_0, et supposons que l'égalité (16) soit satisfaite en ce point avec des branches déterminées des fonctions $a_i(z)$ et $H_i(z) - H_1(z)$. Si l'on fait décrire au point z un chemin $z_0 z'$ ne contenant aucun des points critiques des fonctions $a_i(z)$ et $H_i(z) - H_1(z)$, il n'y aura aucune ambiguïté pour les déterminations de ces fonctions qui satisfont en chaque point du chemin C à l'égalité (16).

Or, je puis choisir le chemin C de façon que l'on arrive au point z'

avec telle détermination que l'on voudra pour une des fonctions $H_i(z) - H_1(z)$.

Ainsi, l'identité (16) étant satisfaite, si l'on se donne un point z' et une détermination quelconque d'une fonction figurant dans (16), il y a toujours des déterminations convenables des autres fonctions telles que l'égalité (16) soit satisfaite au point z'.

Ainsi, par exemple, pour démontrer que la fonction

$$\frac{a_i(z)}{a_1(z)} e^{H_i(z) - H_1(z)}$$

ne saurait être une constante, nous pouvons considérer parmi les déterminations de $H_i(z) - H_1(z)$ celle qui a le plus grand module maximum, et nous savons bien que ce module maximum sera supérieur à $e^{r^{\rho-\varepsilon}}$ sur des arcs dont la longueur totale dépasse une puissance finie de r (¹).

Convenons d'appeler *module maximum* d'une fonction algébroïde $a(z)$ pour $|z| = r$ *le plus grand des modules maximum de ses diverses déterminations.*

CHAPITRE II.

APPLICATIONS.

8. Considérons maintenant une transcendante algébroïde $a(z)$ à un nombre quelconque de branches et d'ordre quelconque, et suppo-

(¹) Par contre, la longueur totale des arcs du cercle de rayon r, dont les points ne satisfont pas à l'inégalité

$$\left|\frac{a_i(z)}{a_1(z)}\right| > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}},$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ comme e^{-r^α}, α étant un nombre quelconque inférieur à ε. Le nombre ρ_1 désigne le plus grand des ordres des $a_i(z)$ et $a_1(z)$. On ferait des développements analogues dans le cas où les $a_i(z)$ et $H_i(z) - H_1(z)$ désignent des algébroïdes d'ordre infini.

sons qu'il y ait un nombre a tel que la fonction $\mathrm{a}(z) - a$ n'admette qu'un nombre fini de zéros; nous supposons, de plus, que la fonction $\mathrm{a}(z)$ n'admette qu'un nombre fini de pôles. Dans nos travaux antérieurs, nous avons appelé *exceptionnel* un tel nombre, et nous avons démontré qu'il est impossible d'en avoir plus de 2ν, où ν désigne le nombre des branches de la transcendante algébroïde.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau$ les affixes des zéros de $\mathrm{a}(z) - a$ avec un ordre de multiplicité respectivement égal à $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$ les affixes des pôles de la même fonction avec un ordre de multiplicité respectivement égal à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$, et considérons la fonction algébrique $q(z)$

$$(18) \qquad q(z) = \frac{(z-\mu_1)^{m_1}(z-\mu_2)^{m_2}\ldots(z-\mu_\tau)^{m_\tau}}{(z-\alpha_1)^{\lambda_1}(z-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(z-\alpha_\sigma)^{\lambda_\sigma}}.$$

Il est clair que le quotient $\dfrac{\mathrm{a}(z)-a}{q(z)} = \varpi(z)$ n'admettra aucun infini et aucun zéro, et, par conséquent, $\log\varpi(z) = \mathrm{H}(z)$ sera une fonction toujours finie à distance finie. On aura

$$(19) \qquad \mathrm{a}(z) - a = q(z)e^{\mathrm{H}(z)}.$$

A priori, la fonction $\mathrm{H}(z)$ peut être à un nombre fini ou infini de branches. Nous allons démontrer que, en général, *cette fonction doit avoir un nombre infini de branches; le cas contraire doit être considéré comme exceptionnel.*

Nous allons, en effet, démontrer qu'*il n'y a pas deux nombres exceptionnels a_1 et a_2 pour lesquels la fonction correspondante* $\mathrm{H}(z)$ *soit à un nombre fini de branches* (algébroïde).

Supposons qu'il y ait deux tels nombres a_1 et a_2; on aura

$$(20) \qquad \mathrm{a}(z) - a_1 = q_1(z)e^{\mathrm{H}_1(z)}, \qquad \mathrm{a}(z) - a_2 = q_2(z)e^{\mathrm{H}_2(z)},$$

$q_1(z)$ et $q_2(z)$ étant des fonctions algébriques, $\mathrm{H}_1(z)$ et $\mathrm{H}_2(z)$ des fonctions algébroïdes toujours finies à distance finie. L'élimination de $\mathrm{a}(z)$ entre les identités (20) nous conduirait à l'identité

$$(21) \qquad \alpha_2 - \alpha_1 = q_1(z)e^{\mathrm{H}_1(z)} - q_2(z)e^{\mathrm{H}_2(z)}.$$

Or, cette identité est de la forme de celles que nous avons considérées dans le Chapitre précédent, remplissant les conditions exigées par le théorème que nous avons établi pour les identités (16). Elle appartient au cas particulier où les fonctions $a_i(z)$ figurant dans les identités (16) sont algébriques.

Dans le cas où la différence $H_1(z) - H_2(z)$ est une constante, il y aura une réduction dans le second membre de (21), mais le terme algébrique restera toujours égal à $a_2 - a_1$.

En appliquant donc le théorème du n° **7**, nous conclurons que l'identité (21) est impossible si $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Appelons donc *doublement exceptionnel* un nombre a exceptionnel tel que la fonction $H(z)$ qui lui correspond par la formule (19) soit à un nombre fini de branches (algébroïde).

Nous avons obtenu le théorème suivant :

Il est impossible d'avoir deux nombres doublement exceptionnels finis ([1]).

Nous voyons donc que, par rapport aux nombres doublement exceptionnels, les fonctions algébroïdes ne se distinguent pas du tout des transcendantes entières. Le cas de cette exception est encore *unique, quel que soit le nombre des branches,* qui ne joue aucun rôle ici ([2]).

Si la fonction algébroïde $a(z)$ est d'ordre fini, les exposants que nous avons rencontrés ci-dessus croîtront comme une puissance finie de r, et, par conséquent, seront des fonctions algébriques.

9. Notre théorème est susceptible de se généraliser comme il suit :

Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $a(z)$ soit d'ordre fini ρ et considérons un nombre a; si la fonction $a(z) - a$ admet une

---

([1]) Tandis que le nombre des valeurs *simplement exceptionnelles* peut atteindre 2ν, ν étant le nombre des branches. (*Voir* mes travaux cités dans la Préface.)

([2]) Il est facile de démontrer que la dérivée de l'exposant $H(z)$ est toujours une fonction algébroïde, même dans le cas général où $H(z)$ a un nombre *infini* de branches. Dans un travail prochain, j'exposerai d'autres résultats intéressants se rattachant à cette remarque.

infinité de zéros μ_1, μ_2, μ_3, ... avec un ordre de multiplicité respectivement égal à m_1, m_2, m_3, ... et une infinité de pôles α_1, α_2, α_3, ... avec un ordre de multiplicité respectivement égal à λ_1, λ_2, λ_3, ...; formons une autre fonction algébroïde $\varphi(z)$ admettant les mêmes zéros et les mêmes infinis avec le même ordre de multiplicité; alors le quotient $\frac{\mathrm{a}(z)-a}{\varphi(z)}$ sera dépourvu de zéros et d'infinis à distance finie et l'on pourra poser

$$(22)\qquad \frac{\mathrm{a}(z)-a}{\varphi(z)} = e^{\mathrm{H}(z)} \qquad \text{ou bien} \qquad \mathrm{a}(z)-a = \varphi(z)e^{\mathrm{H}(z)}.$$

Si l'algébroïde $\varphi(z)$ est d'ordre ρ_1 inférieur à ρ, l'exposant $\mathrm{H}(z)$ *sera, en général, à une infinité de branches. Si, $\varphi(z)$ étant d'ordre inférieur à ρ,* $\mathrm{H}(z)$ *est une fonction algébroïde, cette valeur doit être considérée comme exceptionnelle, grâce au théorème suivant:*

Théorème. — *Il n'y a pas deux nombres a tels que, $\varphi(z)$ étant d'ordre inférieur à ρ, l'exposant* $\mathrm{H}(z)$ *soit algébroïde.*

Supposons, en effet, qu'il y ait deux nombres a_1 et a_2 tels que

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathrm{a}(z)-a_1 = \varphi_1(z)e^{\mathrm{H}_1(z)}, \\ \mathrm{a}(z)-a_2 = \varphi_2(z)e^{\mathrm{H}_2(z)}, \end{cases}$$

$\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ étant des algébroïdes d'ordre inférieur à ρ, et les exposants $\mathrm{H}_1(z)$ et $\mathrm{H}_2(z)$ des *algébroïdes* toujours finies à distance finie; il en résulterait

$$(23')\qquad a_2 - a_1 = \varphi_1(z)e^{\mathrm{H}_1(z)} - \varphi_2(z)e^{\mathrm{H}_2(z)},$$

et cette identité est essentiellement impossible, d'après le théorème général du n° **7**. Nous appliquons ici le cas particulier de ce théorème où, dans les identités (10), les coefficients $\mathrm{a}_i(z)$ et les exposants $\mathrm{H}_i(z)$ désignent des algébroïdes d'ordre fini.

Nous avons aussi d'autres extensions de ces considérations aisées à comprendre, j'en laisse le soin au lecteur. On y sera conduit à l'aide du théorème du n° **7**, pris dans toute sa généralité.

10. *Les intégrales algébroïdes des équations différentielles du premier ordre.* — Étant donnée une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y), \tag{24}$$

et deux intégrales quelconques distinctes y_1 et y_2, nous savons que la différence $y_1 - y_2$ est une fonction qui ne peut s'annuler que pour les points singuliers de l'équation différentielle, c'est-à-dire les points qui satisfont à l'équation obtenue par l'élimination de y entre les équations [1]

$$P(x,y) = 0, \qquad Q(x,y) = 0.$$

En effet, d'après le théorème fondamental de Cauchy, si le point $x = \alpha$ n'est pas singulier pour l'équation (24), il n'y a qu'une intégrale qui, pour $x = \alpha$, prend une valeur donnée.

Cela posé, considérons quatre intégrales distinctes y_1, y_2, y_3, y_4 et leur rapport anharmonique

$$R(x) = \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)}. \tag{25}$$

Si les $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des polynomes par rapport à x et y, la fonction $R(x)$ n'admettra qu'un nombre *fini* de zéros et d'infinis; en effet, les zéros du numérateur et les zéros du dénominateur de la fraction (25) sont en nombre fini, puisqu'il en est ainsi des points singuliers de l'équation différentielle; d'autre part, les infinis d'une intégrale y_1, par exemple, sont des points ordinaires de $R(x)$, parce que les deux termes de la fraction (25) s'y comportent de la même façon, grâce à la conformation caractéristique du rapport anharmonique.

Si les intégrales y_1, y_2, y_3, y_4 sont algébroïdes, il en est de même

---

[1] Aussi pour les points singuliers de l'équation différentielle $(24)'$ que l'on déduit de (24) par la transformation $y = \frac{1}{Y}$.

Nous pouvons toujours, par une transformation homographique convenable, supposer que le degré de P par rapport à y surpasse de deux unités le degré de Q par rapport à la même lettre. Ainsi la valeur $y = \infty$ ne sera pas singulière pour l'équation différentielle.

de $R(x)$ et cette fonction sera *exceptionnelle*, c'est-à-dire les nombres o et ∞ sont exceptionnels pour elle. J'établirai d'abord le théorème suivant :

Il est impossible que tous les rapports anharmoniques de ces quatre intégrales soient des fonctions doublement exceptionnelles.

La démonstration sera faite à l'aide de notre théorème du n° **7**.

Supposons, en effet, que $R(x)$ soit doublement exceptionnelle; alors elle peut se mettre sous la forme

$$R(x) = q(x)e^{H(x)}, \tag{26}$$

$q(x)$ désignant une fonction algébrique et $H(x)$ une fonction *algébroïde* finie à distance finie.

Or, nous savons qu'il y a un autre rapport anharmonique $R_1(x)$ qui satisfait à la relation

$$R(x) + R_1(x) = 1.$$

Cette identité montre, d'après notre théorème général du n° **7**, que $R_1(x)$ ne saurait être aussi de la forme (26), c'est-à-dire *doublement exceptionnelle*. Si nous posons donc

$$R_1(x) = q_1(x)e^{H_1(x)}, \tag{27}$$

$q_1(x)$ étant une fonction algébrique admettant les mêmes zéros et les mêmes infinis avec le même ordre de multiplicité que $R_1(x)$, l'exposant $H_1(x)$ sera une fonction à un nombre *infini* de branches. Notre théorème est donc démontré.

11. Nous pouvons donc supposer que $R(x)$ ne soit pas doublement exceptionnelle; la dérivation nous donne

$$\tag{28} \left\{ \begin{aligned} & R'(x) = [q'(x) + q(x)H'(x)]e^{H(x)}, \\ & \frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{q'(x)}{q(x)} + H'(x) = \varphi(x). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, la dérivation de l'équation (25) nous conduit à une équation de la forme

$$R'(x) = \sigma(y_1, y_2, y_3, y_4, y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)$$

ou bien

$$(29) \left\{ \begin{aligned} &R(x)\varphi(x) \\ &\quad = \sigma[y_1, y_2, y_3, y_4), f(x, y_1), f(x, y_2), f(x, y_3), f(x, y_4)], \end{aligned} \right.$$

grâce à l'équation (28) et aux équations

$$y'_1 = f(x, y_1), \quad y'_2 = f(x, y_2), \quad y'_3 = f(x, y_3), \quad y'_4 = f(x, y_4).$$

Enfin, si l'on remplace dans (29) $R(x)$ par sa valeur

$$\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)},$$

nous obtenons l'équation suivante

$$(30) \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x)\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)} \\ &\quad = \sigma[y_1, y_2, y_3, y_4, f(x, y_1), f(x, y_2), f(x, y_3), f(x, y_4)], \end{aligned} \right.$$

dont le second membre est une fonction algébrique des y_1, y_2, y_3, y_4 et x. Les quatre intégrales y_1, y_2, y_3 et y_4 étant supposées algébroïdes, l'équation (30) montre qu'il en est de même de $\varphi(x)$, puisque l'expression $\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)}$ n'est pas identiquement nulle.

Dès lors, la dérivée $H'(x)$ sera aussi *algébroïde*, en vertu de l'équation (28).

Nous en déduisons donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si une équation différentielle de la forme* (24) *admet quatre intégrales algébroïdes distinctes* y_1, y_2, y_3, y_4, *tout rapport anharmonique* $R(x)$ *de ces intégrales peut se mettre sous la forme*

$$R(x) = q(x)e^{H(x)},$$

$q(x)$ désignant une fonction algébrique et $\mathrm{H}(x)$ une fonction dont la dérivée $\mathrm{H}'(x)$ est toujours algébroïde, c'est-à-dire à un nombre fini de branches. La fonction $\mathrm{H}(x)$ est encore toujours finie à distance finie (¹).

Ce théorème remarquable complète, pour ainsi dire, le théorème établi par M. Petrovitch sur le nombre des trancendantes uniformes satisfaisant à une équation du premier ordre et du premier degré (*Thèse de doctorat*, 1894, Paris, Gauthier-Villars et *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, p. 356).

Nous voyons que le rapport anharmonique de quatre intégrales algébroïdes distinctes ou bien est une fonction doublement exceptionnelle, ou bien il jouit de propriétés voisines de celles des fonctions doublement exceptionnelles.

Il sera peut-être possible d'aller plus loin, mais, dans ce travail, je m'arrête ici.

Au moment de la correction des épreuves, j'ajoute que l'identité (30) nous conduit à une précision intéressante de ces résultats dans le cas où les algébroïdes y_1, y_2, y_3, y_4 sont d'ordre fini :

Si le rapport anharmonique $\mathrm{R}(x)$ était une fonction doublement exceptionnelle, l'exposant $\mathrm{H}(x)$ serait une fonction algébrique et il en serait de même de sa dérivée $\mathrm{H}'(x)$; dès lors, l'identité (30) fournirait une relation algébrique entre les intégrales y_1, y_2, y_3, y_4 à coefficients algébriques.

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème. — *Si y_1, y_2, y_3, y_4 désignent des intégrales algébroïdes d'ordre fini et algébriquement distinctes, aucun rapport anharmonique de ces quatre intégrales ne saurait être une fonction doublement exceptionnelle.*

Dans un autre travail, j'exposerai des généralisations remarquables de ce résultat.

(¹) Comme nous avons indiqué plus haut, cette propriété de la dérivée $\mathrm{H}'(x)$ est générale pour toutes les fonctions algébroïdes $a(z)$.

APPENDICE.

Je me crois obligé d'exposer ici la démonstration d'un lemme, dont je me suis servi dans le n° **3**, à savoir :

Étant donnée une fonction entière $F(z)$ *d'ordre* ρ; *les points de la circonférence de rayon r, qui satisfont à l'inégalité*

$$(31) \qquad |F(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

remplissent des arcs de longueur supérieure à une puissance finie de r.

Soient, en effet, deux points z_r et $z_r + \Delta z_r$ de cette circonférence tels que

$$|F(z_r)| = e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \qquad |F(z_r + \Delta z_r)| = e^{r^{\rho-\delta}} \qquad (\delta < \varepsilon),$$

avec l'hypothèse que le module de $F(z)$ croît continuellement depuis le point z_r jusqu'au point $z_r + \Delta z_r$.

Nous avons

$$(32) \qquad |F(z_r + \Delta z_r) - F(z_r)| > e^{r^{\rho-\delta}} - e^{r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\delta}}(1 - \alpha),$$

α étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra.

D'autre part, on a

$$(33) \qquad F(z_r + \Delta z_r) - F(z_r) = \int_T H'(z)\, dz,$$

l'intégration étant faite sur l'arc T, ayant comme extrémités les points z_r et $z_r + \Delta z_r$, dont tous les points satisfont aux inégalités

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} \leqq |F(z)| \leqq e^{r^{\rho-\delta}}.$$

Nous utiliserons ici les résultats récents de M. Boutroux (voir : *Sur quelques propriétés des fonctions entières*, thèse de Doctorat, 1903).

Sur la croissance de la dérivée logarithmique d'une fonction entière, M. Boutroux a démontré que, si l'on exclut du champ de la variable z certaines aires fermées entourant les pôles, la dérivée logarithmique d'une fonction entière d'ordre fini reste comparable, partout ailleurs, à une puissance finie de z.

On sait que ce théorème sert de complément précieux aux résultats bien connus de M. Borel sur la croissance de la dérivée. Les points z_r que nous avons en vue ici se trouvent dans les régions du module maximum de $H(z)$ et, par suite, se trouvent en dehors des aires exclues par M. Boutroux. Son théorème est donc applicable pour ces points et nous y avons

$$|H'(z)| < |H(z)|\, r^k < e^{r^{\rho-\delta}} r^k \qquad \text{pour} \qquad |z| = r,$$

car on a

$$|H(z)| \leqq e^{r^{\rho-\delta}} \qquad \text{sur l'arc T}.$$

Dès lors, la formule (33) nous conduit à l'inégalité

$$|F(z_r + \Delta z_r) - F(z_r)| < \int_{\mathrm{T}} e^{r^{\rho-\delta}} r^k\, ds = e^{r^{\rho-\delta}} r^k \int_{\mathrm{T}} ds = r^k e^{r^{\rho-\delta}} l_r.$$

Nous avons donc l'inégalité

$$(34) \qquad |F(z_r + \Delta z_r) - F(z_r)| < r^k e^{r^{\rho-\delta}} l_r.$$

La comparaison de cette inégalité avec (32) nous conduit à l'inégalité

$$r^k e^{r^{\rho-\delta}} l_r > (1-\alpha) e^{r^{\rho-\delta}}$$

ou bien

$$l_r > (1-\alpha) r^{-k}.$$

Cette inégalité prouve notre théorème, puisque α est aussi petit que l'on voudra, pourvu que r soit assez grand.

Nous voyons donc que la longueur l_r de l'arc T, même lorsqu'elle tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, reste, à partir d'une certaine valeur de r, supérieure à une certaine puissance finie de r.

Notre théorème est donc démontré.