JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 2 (1906), p. 403-438.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1906_6_2__403_0>

Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

PREMIÈRE PARTIE.

RÉSEAUX DE FORMES QUADRATIQUES.

1. Soit

$$R = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

un réseau dérivé de m formes quadratiques $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des n variables $x_1, \ldots, x_n$. On peut se proposer de le réduire à une forme canonique par des transformations linéaires effectuées tant sur les x, d'une part, que sur les λ, d'autre part.

Ces transformations comportent $m^2 + n^2$ coefficients indéterminés; mais, R ne changeant pas si l'on multiplie simultanément les x par a et les λ par a^{-2}, le nombre des indéterminées utiles se réduit à $m^2 + n^2 - 1$. Si ce nombre est inférieur à celui des coefficients des formes φ, lequel est $m\frac{n(n+1)}{2}$, l'expression canonique cherchée contiendra dans le cas général

$$m^2 + n^2 - 1 - m\frac{n(n+1)}{2}$$

invariants.

Mais, dans certains cas particuliers, le réseau ne sera pas réductible à cette expression générale; chacun d'eux donnera lieu à une forme canonique spéciale. Et, pour déterminer si deux réseaux R, R' sont équivalents ou non, il sera nécessaire d'avoir formé le Tableau de toutes ces formes canoniques, tant générales que particulières.

Ce problème se réduit immédiatement au cas où les fonctions φ sont linéairement distinctes et où aucune substitution linéaire opérée sur les x ne peut faire disparaître complètement une de ces variables de l'expression des φ.

En effet, si l'on pouvait amener les φ à ne dépendre que des ν variables $x_1, \ldots, x_\nu$ et si d'autre part ces fonctions s'exprimaient linéairement par μ d'entre elles, on n'aurait plus qu'à réduire un réseau dérivé de μ formes à ν variables satisfaisant aux conditions ci-dessus. Supposons qu'on ait résolu cette question et trouvé $N_{\mu\nu}$ types canoniques distincts.

Le nombre total des types possibles pour les réseaux de m formes à n variables sera évidemment

$$M_{mn} = \sum_{\mu,\nu} N_{\mu\nu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Ceux de ces types où les fonctions φ sont linéairement distinctes seront en nombre

$$P_{mn} = \sum_{\nu} N_{m\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

et ceux où le système de ces fonctions dépend de toutes les variables x seront en nombre

$$Q_{mn} = \sum_{\mu} N_{\mu n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Le problème ainsi restreint reste encore assez complexe lorsque m et n sont quelconques. Aussi nous bornerons-nous aux cas les plus simples.

2. Remarquons tout d'abord que les fonctions φ, dépendant uniquement des $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités $x_i x_k$, seront nécessairement liées par des relations linéaires, si $m > \frac{n(n+1)}{2}$; et, si $m = \frac{n(n+1)}{2}$, une substitution linéaire, opérée sur les λ, ramènera toujours le réseau à la forme

$$\sum \lambda_{ik} x_i x_k.$$

Nous avons donc ce premier résultat :

$$N_{mn} = 0, \quad \text{si} \quad m > \frac{n(n+1)}{2},$$

$$N_{mn} = 1, \quad \text{si} \quad m = \frac{n(n+1)}{2}$$

(d'où en particulier $N_{3,2} = 1$).

En second lieu, si $m = 1$, nous n'aurons qu'une seule fonction φ_1; on sait qu'on peut la ramener (d'une infinité de manières) à une somme de carrés. On aura par suite un seul type canonique

$$\lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Donc

$$N_{1n} = 1.$$

Nous allons traiter successivement deux autres cas :

1° Celui où $m = 2$;

2° Celui où $n = 3$.

§ I. — Réduction d'un faisceau dérivé de deux formes quadratiques à n variables.

3. Soit $F = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ le faisceau considéré. Le problème de la réduction simultanée des deux fonctions φ_1, φ_2 (par une substitution linéaire opérée sur les x) a fait l'objet de nombreux travaux. Il est aujourd'hui entièrement résolu. Nous allons résumer rapidement les résultats acquis ([1]), en y ajoutant un léger complément nécessaire pour notre objet actuel; car ici nous effectuons des substitutions

([1]) *Voir* WEIERSTRASS, *Werke*, t. II, p. 19-44. — KRONECKER, *Werke*, t. I, p. 349-372. — DARBOUX, *Journal de Liouville*, 1874, p. 347-396. — JORDAN, *Ibid.*, p. 397-423.

linéaires, non seulement sur les x, mais aussi sur les λ (cette dernière opération revient à remplacer φ_1, φ_2 comme formes génératrices du faisceau par deux de leurs combinaisons linéaires).

4. Le faisceau F peut être *simple* ou *composé*. On dit qu'il est composé, si les variables peuvent être choisies de manière à se répartir en plusieurs séries

$$x_1, x_2, \ldots; \quad y_1, y_2, \ldots; \quad \ldots,$$

telles que l'on ait

$$\varphi_1 = X_1 + Y_1 + \ldots, \qquad \varphi_2 = X_2 + Y_2 + \ldots,$$

X_1, X_2 étant des fonctions des x seuls; Y_1, Y_2 des fonctions des y seuls, etc.

5. *Faisceaux simples.* — Si un faisceau simple F contient des formes de déterminant $\gtrless 0$ (ce qui arrivera nécessairement si le nombre n des variables est pair), soit $\psi_1 = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2$ l'une d'elles choisie à volonté; F contiendra d'autres formes de déterminant nul; soit ψ_2 l'une d'elles, choisie à volonté. On pourra réduire simultanément ψ_1 et ψ_2 aux expressions suivantes :

$$\psi_1 = A''_x, \qquad \psi_2 = B''_x$$

en posant pour abréger :

1° Si n est pair,

$$A''_x = 2(x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n),$$
$$B''_x = 2(x_2x_3 + x_4x_5 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}) + x_n^2.$$

2° Si n est impair,

$$A''_x = 2(x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}) + x_n^2,$$
$$B''_x = 2(x_2x_3 + x_4x_5 + \ldots + x_{n-1}x_n).$$

Les formes du faisceau ont pour expression générale

$$\lambda_1 A''_x + \lambda_2 B''_x,$$

et l'on voit immédiatement que le déterminant de cette forme sera nul si $\lambda_1 = 0$, $\gtrless 0$ dans le cas contraire.

Si donc nous considérons deux formes

$$aA''_x + bB''_x, \quad cB''_x,$$

a, b, c étant des constantes quelconques telles que $a \gtrless 0$, $c \gtrless 0$, la première aura son déterminant $\gtrless 0$; celui de la seconde sera nul. On pourra donc, par un changement de variables, les transformer en A''_x, B''_x ou réciproquement.

Soient maintenant

$$\varphi_1 = \alpha A''_x + \beta B''_x, \qquad \varphi_2 = \gamma A''_x + \delta B''_x$$

les deux formes génératrices du faisceau. On pourra les ramener simultanément à une expression canonique ne dépendant que de l'invariant $\frac{\gamma}{\alpha} = s$.

Appliquons en effet le changement de variables qui transforme

$$A''_x, B''_x \quad \text{en} \quad aA''_x + bB''_x, cB''_x;$$

φ_1, φ_2 seront transformés en

$$\begin{aligned} &\alpha a A''_x + (\alpha b + \beta c) B''_x, \\ &\gamma a A''_x + (\gamma b + \delta c) B''_x. \end{aligned}$$

Si α n'est pas nul, on pourra déterminer b, c par les relations

$$\alpha b + \beta c = 0, \qquad \gamma b + \delta c = 1$$

(car φ_1, φ_2 étant linéairement indépendantes, $\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$), puis a par la relation

$$\alpha a = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma a = s.$$

Les valeurs obtenues pour a et c ne sont pas nulles, et φ_1, φ_2 seront respectivement réduites aux expressions suivantes :

$$\varphi_1 = A''_x, \qquad \varphi_2 = sA''_x + B''_x.$$

Si $\alpha = 0$, on déterminera a, b, c par les relations

$$\beta c = 1, \qquad \gamma b + \delta c = 0, \qquad \gamma a = 1.$$

On trouvera ainsi

$$\varphi_1 = B''_x, \qquad \varphi_2 = A''_x$$

pour l'expression réduite correspondante au cas où l'invariant s est infini.

Enfin, si aux formes φ_1, φ_2 nous substituons de nouvelles formes génératrices

$$l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2, \quad m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2,$$

les coefficients α, γ étant changés en

$$l_1\alpha + l_2\gamma, \quad m_1\alpha + m_2\gamma,$$

l'invariant s sera changé en

$$\frac{m_1 + m_2 s}{l_1 + l_2 s},$$

subissant ainsi une transformation homographique.

6. Si n est un nombre impair $2k+1$ plus grand que l'unité, il existe un autre type de faisceaux simples, dont toutes les formes ont un déterminant nul. Deux quelconques d'entre elles (linéairement indépendantes) peuvent être ramenées simultanément aux formes suivantes :

$$\psi_1 = C''_x, \qquad \psi_2 = D''_x,$$

en posant pour abréger

$$C''_x = 2(x_1 x_2 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1}),$$
$$D''_x = 2(x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n).$$

7. *Faisceaux composés.* — Dans un semblable faisceau, les variables se répartissent en groupes, tels que les deux formes génératrices aient pour expression

$$\varphi_1 = X_1 + Y_1 + \ldots, \qquad \varphi_2 = X_2 + Y_2 + \ldots,$$

X_1, X_2 ne contenant que les variables x du premier groupe; Y_1, Y_2 les variables y du second groupe, etc.

Considérons l'un de ces groupes, contenant m variables x; elles se répartiront en séries

$$x'_1, x'_2, \ldots; \quad x''_1, x''_2, \ldots; \quad \ldots$$

contenant respectivement m', m'', ... variables; et les fonctions X_1, X_2, ... auront respectivement les formes suivantes :

$$\begin{aligned} X_1 &= \quad A_{x'}^{m'} \qquad + \quad A_{x''}^{m''} \qquad + \ldots, \\ X_2 &= s_1 A_{x'}^{m'} + B_{x'}^{m'} + s_1 A_{x''}^{m''} + B_{x''}^{m''} + \ldots, \end{aligned}$$

où figure un invariant s_1.

A chacun des autres groupes correspondent des fonctions partielles Y_1, Y_2, ... d'une forme analogue à la précédente, mais avec des invariants s_2, ..., tous différents.

Si parmi ces groupes il en est un pour lequel l'invariant soit infini, les fonctions partielles correspondantes Z_1, Z_2 auront, au lieu de la forme ci-dessus, celle-ci :

$$\begin{aligned} Z_1 &= B_{z'}^{\mu'} + B_{z''}^{\mu''} + \ldots, \\ Z_2 &= A_{z'}^{\mu'} + A_{z''}^{\mu''} + \ldots. \end{aligned}$$

Enfin on peut avoir un dernier groupe, tel que le faisceau partiel $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$ qui lui correspond ne contienne que des formes à déterminant nul; U_1, U_2 auront respectivement les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} U_1 &= C_{u'}^{\nu'} = C_{u''}^{\nu''} + \ldots, \\ U_2 &= D_{u'}^{\nu'} + D_{u''}^{\nu''} + \ldots \end{aligned}$$

(les nombres ν', ν'', ... de variables contenues dans les diverses séries de ce groupe étant nécessairement impairs).

Les variables peuvent ne former qu'un seul groupe; celles d'un même groupe peuvent ne former qu'une série. Mais, s'il n'y a en tout qu'une seule série, le faisceau sera simple.

8. Les nombres s_1, s_2, ... forment un système d'invariants simul-

tanés des deux formes φ_1, φ_2. Mais, si on leur substitue comme génératrices du faisceau deux de leurs combinaisons linéaires (ce qui revient à une transformation linéaire des λ), on pourra faire disparaître trois de ces invariants.

Soit, en effet,

$$\varphi_1' = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2, \qquad \varphi_2' = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2,$$

et considérons les diverses formes partielles dont ces expressions sont composées.

Les fonctions

$$l_1 C_{u'}^{v'} + l_2 D_{u'}^{v'}, \quad m_1 C_{u'}^{v'} + m_2 D_{u'}^{v'}$$

peuvent être ramenées (n° **6**) par une substitution linéaire opérée sur les u' à la forme

$$C_{u'}^{v'}, \quad D_{u'}^{v'}.$$

D'autre part (n° **5**) les invariants s_1, s_2, ... subissent par ce changement (combiné avec des substitutions linéaires convenables effectuées sur les variables x, y, ...) une même transformation homographique

$$\left| s \quad \frac{m_1 + m_2 s}{l_1 + l_2 s} \right|$$

qu'on peut choisir de telle sorte que trois d'entre eux prennent des valeurs arbitraires, telles que o, ∞, 1. On aura ainsi épuisé les ressources dont on dispose pour la réduction. Il y aura autant de types canoniques que de répartitions possibles des variables en groupes et en séries. Quelques-uns des types obtenus pourront encore renfermer des invariants.

9. Quelques précautions sont toutefois nécessaires pour éviter les doubles emplois en dressant le Tableau des formes canoniques. Nous pouvons, en effet, choisir à volonté ceux des groupes dont nous réduisons les invariants à o, ∞, 1 respectivement.

Pour lever cette indétermination, il suffit d'ordonner les groupes suivant une règle bien définie. Soit Γ l'un d'eux, contenant M variables, réparties en k séries, qui en contiennent respectivement $m_1, \ldots, m_k$. Soit $m_1 \overline{\gtrless} m_2 \overline{\gtrless} \ldots \overline{\gtrless} m_k$.

Soit Γ' un autre groupe, pour lequel les nombres correspondants soient M', k', m'_1, ..., $m'_{k'}$. Nous dirons que le groupe Γ précède le groupe Γ' :

1° Si $M > M'$;

2° Si $M = M'$, mais $k > k'$;

3° Si $M = M'$, $k = k'$, mais $m_1 > m'_1$;

etc.

Les groupes étant ainsi ordonnés, nous réduirons l'invariant du premier à zéro, celui du second à ∞, celui du troisième à l'unité.

10. Il est aisé, en partant de ces principes, de former le Tableau suivant des divers types réduits pour $n = 2, 3, 4, \ldots$.

1° $n = 2$.

On a deux types distincts :

$$(a) \qquad \lambda_1 x_1^2 \qquad + \lambda_2 x_2^2,$$

$$(b) \qquad \lambda_1 2x_1 x_2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Donc $N_{22} = 2$.

2° $n = 3$.

On a les six types suivants :

$$(c) \qquad \lambda_1 2x_1 x_2 \qquad + \lambda_2 2x_2 x_3,$$

$$(d) \qquad \lambda_1 (x_1^2 + x_3^2) \qquad + \lambda_2 (x_2^2 + x_3^2),$$

$$(e) \qquad \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) \qquad + \lambda_2 x_3^2,$$

$$(f) \qquad \lambda_1 2x_1 x_2 \qquad + \lambda_2 (x_2^2 + x_3^2),$$

$$(g) \qquad \lambda_1 (2x_1 x_2 + x_3^2) + \lambda_2 x_2^2,$$

$$(h) \qquad \lambda_1 (2x_1 x_2 + x_3^2) + \lambda_2 2x_2 x_3,$$

d'où $N_{23} = 6$.

3° $$n = 4.$$

On aura quatorze types :

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1(x_1^2 + x_3^2 + x_4^2) & + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2 + s x_4^2), \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) & + \lambda_2(x_3^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) & + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) & + \lambda_2 x_4^2, \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2) & + \lambda_2(x_3^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) & + \lambda_2(x_2^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) & + \lambda_2\, 2x_3x_4, \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) & + \lambda_2(2x_2x_3 + x_4^2), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) & + \lambda_2(x_2^2 + 2x_3x_4), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) & + \lambda_2\, 2x_2x_3, \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2) & + \lambda_2 x_2^2, \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2) & + \lambda_2\, 2x_2x_3, \\
\lambda_1(2x_1x_2 + 2x_3x_4) & + \lambda_2(x_2^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + 2x_3x_4) & + \lambda_2(2x_2x_3 + x_4^2).
\end{array}$$

Donc $N_{24} = 14$.
On trouverait de même $N_{25} = 29$, etc.

§ II. — Réduction des réseaux de formes quadratiques ternaires.

11. Soit $R = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$ un réseau dérivé de m formes $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des trois variables x_1, x_2, x_3. Nous avons trouvé précédemment (n^{os} **2** et **10**)

$$N_{m3} = 0 \quad \text{si} \quad m > 6, \qquad N_{63} = 1, \qquad N_{13} = 1, \qquad N_{23} = 6.$$

Il ne reste donc à examiner que les trois cas suivants : $m = 3, 4, 5$.

Premier cas : $m = 3$.

12. Soit

$$R = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3.$$

Une substitution linéaire opérée sur les λ revient évidemment à remplacer φ_1, φ_2, φ_3 par de nouvelles formes génératrices, combinaisons linéaires des précédentes.

A chaque système de valeurs des λ (ou plutôt de leurs rapports) correspond une forme du réseau (définie à un facteur près), laquelle, égalée à zéro, représentera une conique. Pour abréger le langage nous appellerons celle-ci la *conique du point* $P = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$.

Son déterminant Δ est homogène et du troisième degré en λ_1, λ_2, λ_3. Le lieu des points P dont la conique est décomposable en deux droites sera donc une cubique $\Delta = 0$. Si tous les mineurs de Δ s'annulent, ces deux droites se confondront et le réseau contiendra une droite double; mais ce cas sera exceptionnel, car pour qu'il se présente il faut satisfaire à trois conditions, et l'on ne dispose que de deux indéterminées, $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$.

Soient P_1, P_2 deux points quelconques du plan des λ; ψ_1, ψ_2 les coniques correspondantes. Aux divers points de la droite $\mathfrak{D} = P_1 P_2$ correspondront évidemment les coniques du faisceau

$$F = l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2,$$

que nous appellerons le *faisceau de la droite* $\mathfrak{D}$.

Si les dérivées partielles $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}$ peuvent s'exprimer par moins de trois fonctions des x linéairement distinctes, les variables x pourront être choisies de telle sorte que l'une d'elles ait disparu des expressions de ψ_1 et de ψ_2. Le faisceau F sera donc réductible à l'une des deux formes (a) ou (b) du n° **10**.

Si au contraire F dépend de toutes les variables x, il sera réductible à l'un des six types (c), ..., (h) du même numéro.

Les points d'intersection de la droite $\mathfrak{D}$ avec la cubique Δ correspondent à celles des formes du faisceau F dont le déterminant est nul. Cette condition s'exprime par une équation homogène du troisième degré en λ_1, λ_2.

Si F est de l'une des formes (a), (b), (c), le premier membre de cette équation est identiquement nul. Si donc le réseau R contient un faisceau F de l'une de ces trois formes, la droite $\mathfrak{D}$ qu'il caractérise appartiendra tout entière à la cubique Δ, qui sera décomposable. (On pourra même avoir identiquement $\Delta = 0$, auquel cas la cubique contiendra tous les points et toutes les droites du plan.)

Si F est de la forme (d), le premier membre de l'équation se réduit à $\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)$; la droite D coupera donc la cubique en trois points distincts.

Enfin, ce premier membre se réduira à $\lambda_1^2\lambda_2$, si F est de l'une des formes (e), (f); à λ_1^3 s'il est de l'une des formes (g), (h); deux ou trois des points d'intersection seront ainsi confondus en un seul.

13. Ces préliminaires posés, pour opérer la réduction du réseau R à sa forme canonique, nous prendrons pour côtés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du triangle de référence (et spécialement pour λ_3) des droites ayant une relation invariante avec la cubique Δ.

1° Ainsi, si Δ est indécomposable, et n'a pas de point de rebroussement, il existera au moins trois points d'inflexion, situés sur une même droite. On la prendra pour λ_3; et pour λ_1 et λ_2 les tangentes à deux de ces points d'inflexion;

2° Si Δ est indécomposable, mais a un point de rebroussement P, elle aura un point d'inflexion Q; on prendra pour λ_3 la droite PQ, pour λ_1 et λ_2 les tangentes à Δ aux points Q et P;

3° Si Δ est décomposable, elle aura au moins un facteur linéaire. Elle pourra en avoir plusieurs distincts (ou même une infinité, si Δ est identiquement nul). Nous choisirons pour λ_3 celle des droites représentées par ces facteurs dont le faisceau est le plus simple [en convenant de considérer un faisceau du type (a) comme plus simple qu'un faisceau du type (b), celui-ci comme plus simple qu'un faisceau du type (c)].

Examinons successivement ces divers cas :

14. 1° *Δ est indécomposable et sans rebroussement.* — La droite λ_3 coupant Δ en trois points distincts, son faisceau sera du type (d)

$$F = \lambda_1(x_1^2 + x_3^2) + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2)$$

ou en changeant x_3 en ix_3, λ_2 en $-\lambda_2$, pour plus de symétrie

$$F = \lambda_1(x_1^2 - x_3^2) + \lambda_2(x_3^2 - x_2^2) = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2.$$

Il contient trois formes à déterminant nul

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad -(\varphi_1 + \varphi_2) = x_2^2 - x_1^2$$

correspondant respectivement aux trois points d'inflexion P_1, P_2, P_3 situés sur λ_3.

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

la troisième forme génératrice du réseau

$$R = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3.$$

On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{21}\lambda_3 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 & a_{22}\lambda_3 - \lambda_2 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Mais, λ_1, λ_2 étant des tangentes d'inflexion, Δ doit se réduire à la forme

$$A\lambda_3^3 + \lambda_1\lambda_2(B\lambda_1 + C\lambda_2 + D\lambda_3),$$

et par suite être privé des termes en $\lambda_1^2\lambda_3$, $\lambda_2^2\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_3^2$, $\lambda_2\lambda_3^2$. Il en résulte les équations de condition

$$a_{11} = 0, \qquad a_{22} = 0,$$

puis

$$a_{12}a_{21} = a_{23}a_{32} = a_{31}a_{13}.$$

Les coefficients a_{12}, a_{23}, a_{31} sont donc égaux au signe près. On peut d'ailleurs les ramener au même signe (sans changer les expressions de φ_1, φ_2) en changeant

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \varphi_3 \quad \text{en} \quad \varepsilon_1 x_1,\ \varepsilon_2 x_2,\ \varepsilon_3 x_3,\ \varepsilon\varphi_3,$$

les ε étant des unités positives ou négatives convenablement choisies.

Soit a la valeur commune de ces coefficients. Elle ne peut être nulle, car Δ se réduisant à

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2 - a_{33}\lambda_3)$$

ne serait pas indécomposable.

Changeant donc φ_3 en $\frac{1}{a}\varphi_3$, on réduira ces trois coefficients à l'unité, le dernier deviendra $\frac{a_{33}}{a}$. Désignant cette quantité par σ, nous aurons pour φ_3 l'expression réduite suivante :

$$\varphi_3 = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \sigma x_3^2.$$

Les réseaux où Δ est indécomposable se ramènent donc à un type unique

$$\text{(I)} \quad \lambda_1(x_1^2 - x_3^2) + \lambda_2(x_3^2 - x_2^2) + \lambda_3(2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + \sigma x_3^2)$$

contenant un invariant σ.

15. Ce même type renferme également d'autres réseaux ; car on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix} = (2-\sigma)\lambda_3^3 - \lambda_1\lambda_2(\sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2)$$

et, pour la valeur particulière $\sigma = 2$, cette cubique devient le produit des trois droites non concourantes λ_1, λ_2, $2\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2$.

Ces trois droites sont d'ailleurs de l'espèce (c). Considérons, en effet, la troisième, par exemple; elle aura pour faisceau

$$(2\lambda_3 + \lambda_2)\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = \lambda_2(\varphi_2 + \varphi_1) + \lambda_3(\varphi_3 + 2\varphi_1).$$

Or les dérivées partielles

$$\frac{\partial(\varphi_2+\varphi_1)}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial(\varphi_2+\varphi_1)}{\partial x_2} = -2x_2, \quad \frac{\partial(\varphi_3+2\varphi_1)}{\partial x_3} = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

sont linéairement distinctes.

Or, nous verrons plus loin que tous les réseaux où Δ est formé de trois droites non concourantes de l'espèce (c) sont réductibles à une même expression canonique, qui pourra réciproquement être transformée dans la précédente (pour la valeur particulière $\sigma = 2$).

Le nouveau type que nous trouverons rentre donc comme cas particulier dans le type à invariant que nous venons de trouver. Mais il est beaucoup plus simple, et correspond d'ailleurs à une propriété invariante du réseau. Nous le conserverons donc dans notre énumération, en introduisant dans la définition du type actuel la restriction

$$\sigma \gtrless 2.$$

16. Quelques autres cas particuliers méritent d'être signalés:

1° Si $\sigma = 0$, les trois tangentes d'inflexion sont concourantes;

2° Le réseau contiendra une conique dégénérée en une droite double, si l'on peut déterminer les rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ de telle sorte que les mineurs de Δ soient tous nuls.

Cela donne entre autres équations de condition les suivantes:

$$\lambda_3(\lambda_3 + \lambda_2) = 0, \qquad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3^2 = 0.$$

Mais λ_3 ne peut être nul, car on aurait dans cette hypothèse

$$\lambda_1\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1(-\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \qquad \lambda_2(-\lambda_1 + \lambda_2) = 0;$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, solution inacceptable.

Donc

$$\lambda_3 = -\lambda_2 = \lambda_1.$$

Les équations de condition se réduiront alors à une seule

$$\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & (\sigma - 2)\lambda_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \sigma = 3.$$

3° Δ aura un point double, si l'on peut satisfaire aux relations

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda_1} = -\lambda_2(\sigma\lambda_3 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda_2} = -\lambda_1(\sigma\lambda_3 - \lambda_1 + 2\lambda_2) = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda_3} = 3(2 - \sigma)\lambda_3^2 - \sigma\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Ni λ_1 ni λ_2 ne peuvent être nuls, car on en déduirait $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il faut donc supposer

$$\sigma\lambda_3 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma\lambda_3 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0,$$

d'où

$$\lambda_2 = -\lambda_1 = -\frac{\sigma}{3}\lambda_3.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière équation, il vient

$$\sigma^3 + 27(2 - \sigma) = 0,$$

d'où $\sigma = 3$ ou $\sigma = -6$.

17. La réduction du réseau à sa forme canonique pourra s'opérer d'autant de manières différentes qu'il y a de couples de points d'inflexion, soit $\frac{9.8}{2} = 36$ dans le cas général, soit $\frac{3.2}{2} = 3$ si Δ a un point double. On devrait donc s'attendre à trouver autant de valeurs différentes de l'invariant σ qu'il existe de couples de points d'inflexion.

Mais on voit aisément que cet invariant conserve sa valeur pour les trois couples qu'on peut former avec trois points d'inflexion P_1, P_2, P_3 situés sur une même droite.

Changeons, en effet, le rôle des deux points P_2, P_3. A l'ancien triangle de référence λ_3, λ_2, λ_1, nous en substituons un nouveau, formé de la droite λ_3, et des tangentes λ_2 et $\sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2$ aux points P_1 et P_3. Les formes du réseau correspondant aux nouveaux sommets seront respectivement

$$\varphi'_1 = \varphi_1 = x_1^2 - x_3^2, \qquad \varphi'_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = x_1^2 - x_2^2,$$
$$\varphi'_3 = \varphi_3 + \sigma\varphi_1 = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \sigma x_1^2.$$

Or, si nous échangeons x_1, x_3, et si nous changeons en même temps le signe de φ'_1, nous retrouvons les expressions qu'avaient φ_1, φ_2, φ_3, l'invariant σ restant le même.

Cet invariant n'a donc qu'une valeur unique si Δ a un point double. Il peut en avoir douze si Δ est une cubique générale.

18. 2° *Δ est indécomposable, mais possède un point de rebrous-*

sement P *et un point d'inflexion* Q. — Les droites λ_1, λ_2 étant respectivement les tangentes à Δ aux points Q et P, Δ sera de la forme

$$(1) \qquad A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2 \qquad (A \text{ et } B \gtrless 0).$$

D'autre part, λ_3 rencontrant Δ en deux points confondus en $P = (\lambda_2\lambda_3)$ et au point $Q = (\lambda_1\lambda_3)$, son faisceau F appartiendra à l'un des deux types (e) ou (f). Examinons successivement ces deux hypothèses :

Si F est de l'espèce (e), il sera réductible à la forme

$$F = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2 x_3^2,$$

ou, en prenant pour variables indépendantes $x_1 + ix_2$ et $\frac{1}{2}(x_1 - ix_2)$ au lieu de x_1, x_2, à la forme équivalente

$$F = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_3^2.$$

Soit

$$\varphi_3 = \sum a_{ik}x_ix_k$$

la troisième forme génératrice du réseau R. On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 & a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{13}\lambda_3 \\ a_{21}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 \\ a_{31}\lambda_3 & a_{32}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix},$$

expression à identifier avec $A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2$.

La comparaison des termes en $\lambda_1^2\lambda_3$ et en λ_2 donnera

$$a_{33} = 0, \qquad a_{12} + a_{21} = 0,$$

d'où $a_{12} = a_{21} = 0$,

$$a_{11}a_{22} = 0.$$

Mais on peut, sans altérer F, permuter x_1 avec x_2, ce qui échange a_{11} et a_{22}. On peut donc admettre que a_{22} est nul.

La comparaison des autres termes donnera ensuite

$$a_{23}a_{31} + a_{32}a_{13} = 2a_{23}a_{13} = 0, \qquad a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}^2 \gtrless 0.$$

Donc $a_{13} = a_{31}$ sera nul; a_{11} et $a_{23} = a_{32}$ seront $\gtrless 0$. Par suite, φ_3 se réduira à la forme

$$\varphi_3 = a_{11} x_1^2 + 2 a_{23} x_2 x_3,$$

a_{11} et a_{23} n'étant pas nuls.

On pourra les réduire à l'unité en changeant x_1, x_2, λ_1 en $\frac{x_1}{\sqrt{a_{11}}}, \frac{x_2}{a_{23}}$, $a_{23}\sqrt{a_{11}}\lambda_1$. On obtient ainsi le type réduit

$$\text{(II)} \qquad R = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_3^2 + \lambda_3(x_1^2 + 2x_2x_3).$$

Toutes les coniques de ce réseau ont un point commun $x_1 = x_3 = 0$. L'une d'elles se réduit à une droite double : c'est celle du point $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

19. Supposons maintenant que F soit de l'espèce (f)

$$F = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2)$$

et soit

$$\varphi_3 = \sum a_{ik} x_i x_k.$$

On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 & a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{13}\lambda_3 \\ a_{21}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 + \lambda_2 & a_{23}\lambda_3 \\ a_{31}\lambda_3 & a_{32}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

L'identification avec $A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2$ donnera successivement

$$a_{33} = 0, \qquad a_{11} = 0, \qquad a_{12} + a_{21} = 0,$$

d'où $a_{12} = a_{21} = 0$,

$$a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23} = 0, \qquad a_{31}a_{13}a_{22} \gtrless 0,$$

d'où

$$a_{31} = a_{13} \gtrless 0, \qquad a_{22} \gtrless 0, \qquad a_{32} = a_{23} = 0.$$

Donc φ_3 se réduit à

$$2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2.$$

En changeant x_1, λ_1, λ_3 en $\frac{a_{22}}{a_{13}} x_1$, $\frac{a_{13}}{a_{22}} \lambda_1$, $\frac{1}{a_{22}} \lambda_3$, on réduira les coefficients a_{13}, a_{22} à l'unité, et l'on aura

$$\text{(III)} \qquad R = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2) + \lambda_3(2x_1x_3 + x_2^2).$$

Ici encore toutes les coniques du réseau ont un point commun $x_2 = x_3 = 0$. Mais aucune d'elles ne se réduit à une droite double.

20. 3° Δ *est décomposable* (*ou nul*) *et admet au moins un facteur linéaire de l'espèce* (a). — On aura

$$F = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Si toutes les coniques du réseau R n'ont pas de point commun, φ_3 contiendra un terme en x_3^2, et par le changement de la variable x_3 pourra être ramenée à la forme

$$x_3^2 + ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

On peut remplacer φ_3 comme forme génératrice par

$$\varphi_3 - a\varphi_1 - c\varphi_2 = x_3^2 + 2bx_1x_2.$$

Si b n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1 en changeant x_1, λ_1 en $\frac{x_1}{b}$, $b^2\lambda_1$. Il viendra

$$\text{(IV)} \qquad R = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3(x_3^2 + 2x_1x_2).$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2)$$

représente une droite et une conique qui se coupent.

Ses mineurs ne s'annulent que si $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Le réseau ne contient donc de formes qui soient des carrés parfaits que les deux qui sont en évidence.

Si b est nul, on a une autre expression réduite

$$\text{(V)} \qquad R = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2;$$

$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ représente trois droites de l'espèce (a) non concourantes.

R contient trois formes x_1^2, x_2^2, x_3^2 qui sont des carrés parfaits.

21. Si toutes les coniques du réseau ont un point commun $x_1 = x_2 = 0$, φ_3 se réduit à la forme

$$2(ax_3x_1 + bx_3x_2 + cx_1x_2) + dx_1^2 + ex_2^2.$$

Les coefficients a et b ne sont pas nuls à la fois, car x_3 doit figurer dans l'expression de R. D'ailleurs, en permutant λ_1, x_1 avec λ_2, x_2, a et b s'échangent entre eux; on peut donc supposer $a \gtrless 0$.

Nous ferons alors disparaître le terme en $x_1 x_2$ en changeant x_3 en $x_3 - \frac{c}{a} x_1$, puis les termes en x_1^2, x_2^2 en changeant la troisième forme génératrice. Changeant enfin λ_1, x_1 en $a^2\lambda_1$, $\frac{x_1}{a}$, on rendra a égal à 1; et de même pour b, s'il n'est pas nul.

Nous obtenons ainsi deux nouveaux types réduits :

$$\text{(VI)} \qquad R = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3\, 2(x_1 + x_2)x_3,$$

$$\text{(VII)} \qquad R = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3\, 2x_1 x_3.$$

Dans l'un et l'autre

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & b\lambda_3 \\ \lambda_3 & b\lambda_3 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_3^2(\lambda_2 + b^2\lambda_1)$$

est formé d'une droite double et d'une droite simple. Cette dernière est de l'espèce (c) pour le type (VI) et de l'espèce (b) pour le type (VII).

Un autre caractère invariant distingue ces deux types. Les coniques du réseau (VI) ont entre elles, au point $x_1 = x_2 = 0$, un contact du premier ordre. Dans le type (VII), le contact est du second ordre.

22. 4° Δ *est décomposable (ou nul). Son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce* (b). — On aura

$$F = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Si φ_3 contient un terme en x_3^2, on pourra, par le changement de la variable x_3, la réduire à la forme

$$x_3^2 + ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Par le changement de forme génératrice, on fera disparaître les termes en x_2^2, x_1x_2; il restera

$$\varphi_3 = x_3^2 + ax_1^2.$$

Le coefficient a n'est pas nul; car le réseau contiendrait la droite λ_1 dont le faisceau

$$\lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2,$$

étant de l'espèce (a), serait plus simple que celui de la droite λ_3. Changeant d'ailleurs x_1, λ_1, en $\frac{x_2}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}\lambda_1$, on réduira ce coefficient à l'unité; d'où le nouveau type

$$\text{(VIII)} \qquad R = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3(x_1^2 + x_3^2).$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1^2)$$

représente une droite et une conique tangentes entre elles.

Les diverses coniques du réseau R ont en commun les deux points

$$x_2 = x_1 \pm ix_3 = 0.$$

23. Si φ_3 ne contient pas x_3^2, elle sera de la forme

$$2x_3(ax_1 + bx_2) + cx_1^2 + 2dx_1x_2 + ex_2^2.$$

Supposons d'abord que a soit $\gtrless 0$. Par le changement de x_1, λ_2 en $x_1 - \frac{b}{a}x_2$, $\lambda_2 + \frac{2b}{a}\lambda_1$, on fera disparaître le coefficient b; puis, par le changement de la variable x_3, on réduira $2ax_1x_3 + cx_1^2$ à $2x_1x_3$; enfin, par le changement de la dernière forme génératrice, on fera disparaître d et e. On aura finalement

$$\text{(IX)} \qquad R = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 2x_1x_3.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_2\lambda_3^2$$

représente une droite double λ_3 et une droite simple λ_2, cette dernière du type (c).

Les coniques de ce réseau ont deux points communs $x_2 = x_1 = 0$ et $x_2 = x_3 = 0$.

Soit enfin $a = 0$; b ne sera pas nul, car φ_3 doit contenir x_3. Changeant cette forme génératrice, on réduira son expression à

$$2bx_2x_3 + cx_1^2.$$

Par le changement de x_3 en $\frac{x_3}{b}$, on réduira b à l'unité. Si c n'est pas nul, on le réduira aussi à l'unité en changeant x_1, λ_1 en $\frac{x_1}{\sqrt{c}}$, $\sqrt{c}\lambda_1$.

Pour $c = 1$, on aura le réseau-type

$$\text{(X)} \qquad \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3(2x_2x_3 + x_1^2)$$

pour lequel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_3^3$$

représente une droite triple.

Les coniques de ce réseau sont toutes tangentes entre elles au point $x_1 = x_2 = 0$.

Pour $c = 0$, on aura un autre type

$$\text{(XI)} \qquad \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 2x_2x_3$$

pour lequel

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \end{vmatrix}$$

est identiquement nul. Toutes ses coniques sont décomposables et ont une droite commune $x_2 = 0$.

Chacun des réseaux (VIII) à (XI) contient d'ailleurs parmi ses coniques une droite double $x_2^2 = 0$.

24. 5° *Δ est décomposable; ses facteurs linéaires sont tous de l'espèce* (c). — On peut, sans altérer l'expression

$$F = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 2x_2x_3,$$

opérer une substitution linéaire arbitraire sur x_1, x_3, à la condition d'effectuer en même temps la substitution inverse sur λ_1, λ_3.

Ceci permettra, dans l'expression de φ_3, qui peut s'écrire

$$\varphi_3 = f(x_1, x_3) + 2ax_1x_2 + 2bx_3x_2 + cx_2^2,$$

de ramener la forme binaire $f(x_1, x_2)$, si elle n'est pas nulle, à $2x_1x_3$ ou à x_1^2. En changeant la dernière forme génératrice, on peut faire disparaître a et b. Enfin, si c n'est pas nul, on le ramène à l'unité en changeant x_2, λ_1, λ_2 en $\frac{x_2}{\sqrt{c}}$, $\sqrt{c}\lambda_1$, $\sqrt{c}\lambda_2$.

Mais, parmi les six expressions réduites ainsi obtenues pour φ_3, on doit rejeter toutes celles où x_3 ne figure pas; car cette variable ne figurerait pas dans le faisceau $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_3\varphi_3$ et la droite correspondante λ_2 serait donc un facteur de Δ, de l'espèce (a) ou (b).

Restent donc deux solutions seulement :

$$\varphi_3 = 2x_1x_3 + x_2^2, \qquad \varphi_3 = 2x_1x_3.$$

Pour la première,

$$\text{(XII)} \qquad R = \lambda_1\, 2x_1x_2 + \lambda_2\, 2x_2x_3 + \lambda_3(2x_1x_3 + x_2^2).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_3(2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2)$$

représente une droite et une conique qui se coupent. Les coniques du réseau ont deux points communs :

$$x_2 = x_1 = 0, \qquad x_2 = x_3 = 0.$$

Pour la seconde,

$$\text{(XIII)} \qquad R = \lambda_1\, 2x_1x_2 + \lambda_2\, 2x_2x_3 + \lambda_3\, 2x_1x_3.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

représente trois droites non concourantes, d'espèce (c).

Ce dernier type pourrait être ramené à un cas particulier du type I, comme il a été dit au n° **15**.

25. Le Tableau suivant résume les résultats de la discussion précédente :

Nos des types.	FORMES GÉNÉRATRICES. φ_1.	φ_2.	φ_3.	NATURE DE Δ.	RELATIONS entre les facteurs de Δ.	RELATIONS entre les coniques du réseau.	NOMBRE des droites doubles.
I....	$x_1^2 - x_3^2$	$x_3^2 - x_2^2$	$2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + \sigma x_3^2$ $\sigma \gtrless 2$	Indécomposable, sans rebroussement.	″	″	0 en général. 1 si $\sigma = 3$.
II...	$2x_1x_2$	x_3^2	$x_1^2 + 2x_2x_3$	Indécomposable, un rebroussement.	″	Un point commun.	1
III..	$2x_1x_2$	$x_2^2 + x_3^2$	$2x_1x_3 + x_2^2$	Indécomposable, un rebroussement.	″	Un point commun.	0
IV...	x_1^2	x_2^2	$x_3^2 + 2x_1x_2$	Droite (a), conique.	Sécantes.	″	2
V....	x_1^2	x_2^2	x_3^2	Trois droites (a).	Non concourantes.	″	3
VI...	x_1^2	x_2^2	$2x_1x_3 + 2x_2x_3$	Droite double (a). Droite simple (c).	″	Deux points communs confondus.	2
VII..	x_1^2	x_2^2	$2x_1x_3$	Droite double (a). Droite simple (b).	″	Trois points communs confondus.	2
VIII.	$2x_1x_2$	x_2^2	$x_1^2 + x_3^2$	Droite (b), conique.	Tangentes.	Deux points communs.	1
IX...	$2x_1x_2$	x_2^2	$2x_1x_3$	Droite double (b). Droite simple (c).	″	Deux points communs.	1
X....	$2x_1x_2$	x_2^2	$2x_2x_3 + x_1^2$	Droite triple (b).	″	Deux points communs confondus.	1
XI...	$2x_1x_2$	x_2^2	$2x_2x_3$	Nul.	″	Une droite commune	1
XII..	$2x_1x_2$	$2x_2x_3$	$2x_1x_3 + x_2^2$	Droite (c), conique.	Sécantes.	Deux points communs.	0
XIII.	$2x_1x_2$	$2x_2x_3$	$2x_1x_3$	Trois droites (c).	Non concourantes.	Trois points communs.	0

Deuxième cas : $m = 4$.

26. Parmi les coniques du réseau

$$R = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4,$$

il en est une au moins dégénérée en droite double. Car cette condition s'exprime par trois équations homogènes entre les quatre inconnues

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \lambda_4.$$

Nous classerons les réseaux à étudier d'après le nombre de leurs droites doubles.

27. *Première hypothèse :* R *contient (au moins) trois droites doubles non concourantes*

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2, \qquad \varphi_3 = x_3^2.$$

Soit ψ une quatrième forme de R ; en la combinant linéairement avec les précédentes, on obtiendra une nouvelle forme φ_4 débarrassée des carrés des variables

$$\varphi_4 = 2(ax_1x_2 + bx_2x_3 + cx_3x_1).$$

Changeons x_1, x_2, x_3, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 en t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, $\frac{\varphi_1}{t_1^2}$, $\frac{\varphi_2}{t_2^2}$, $\frac{\varphi_3}{t_3^2}$, $\frac{\varphi_4}{t_1t_2t_3}$. Les coefficients a, b, c seront changés en $\frac{a}{t_3}$, $\frac{b}{t_1}$, $\frac{c}{t_2}$ et en choisissant convenablement les facteurs t_1, t_2, t_3 on pourra rendre égaux à 1 ceux de ces coefficients qui ne sont pas nuls.

D'ailleurs, φ_4 n'étant pas identiquement nul, a, b, c ne sont pas nuls à la fois. Enfin, l'échange des variables x_1, x_2, x_3 les permute entre eux. Il ne reste donc que trois hypothèses réellement distinctes

$$a = 1 \begin{cases} b = 1, & c = 1, \\ b = 1, & c = 0, \\ b = 0, & c = 0; \end{cases}$$

d'où trois types de réseaux réduits :

$$\text{(I)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 . 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1),$$

$$\text{(II)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 . 2(x_1 x_2 + x_2 x_3),$$

$$\text{(III)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 . 2 x_1 x_2.$$

Les types (I) et (II) ne contiennent que les trois droites doubles x_1^2, x_2^2, x_3^2. Mais le type (III) en contient une infinité de la forme $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2$, outre la droite x_3^2.

28. *Deuxième hypothèse : R contient trois droites doubles concourantes*, x_1^2, x_2^2, $(a x_1 + b x_2)^2$.

De la combinaison de ces trois formes, on déduit les formes génératrices

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2, \qquad \varphi_3 = 2 x_1 x_2$$

et R contiendra une infinité de droites doubles, de la forme générale

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)^2.$$

1° Supposons que, parmi les formes de R, il en existe une ψ qui contienne un terme en x_3^2. Par le changement de la variable x_3, on pourra la réduire à la forme

$$x_3^2 + a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2$$

et R contiendra la nouvelle droite double

$$\psi - a\varphi_1 - b\varphi_3 - c\varphi_2 = x_3^2$$

qui n'est pas concourante avec x_1^2, x_2^2. On retombe ainsi sur c type III déjà trouvé.

2° Si ψ ne contient pas x_3^2, elle sera de la forme

$$a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 + 2(d x_1 + e x_2) x_3$$

et R contiendra la forme

$$\varphi_4 = \psi - a\varphi_1 - b\varphi_3 - c\varphi_2 = 2(d x_1 + e x_2) x_3.$$

Mais on peut opérer sur x_1, x_2 une substitution linéaire quelconque sans altérer l'expression du réseau dérivé de x_1^2, x_2^2, $2x_1x_2$. On pourra ainsi réduire $dx_1 + ex_2$ à x_1; d'où le type réduit

$$(\text{IV}) \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 . 2x_1x_2 + \lambda_4 . 2x_1x_3.$$

Toutes les coniques de ce réseau ont un point commun $x_1 = x_2 = 0$, et ont même tangente en ce point.

29. *Troisième hypothèse :* R *ne contient que les deux droites doubles*

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2.$$

1° Si R contient une forme ψ_3 où figure un terme en x_3^2, on pourra ramener son expression à

$$\psi_3 = x_3^2 + ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

et, en la combinant avec φ_1, φ_2, on aura la forme plus simple

$$\varphi_3 = x_3^2 + 2bx_1x_2.$$

Soit ψ_4 une dernière forme de R; en la combinant aux précédentes, on obtiendra une forme

$$\varphi_4 = \alpha x_1x_2 + \beta x_3x_1 + \gamma x_2x_3.$$

Considérons la forme

$$\begin{aligned}\varphi_3 + s\varphi_4 + t\varphi_1 + u\varphi_2 = tx_1^2 + ux_2^2 + x_3^2 + 2(b + s\alpha)x_1x_2 \\ + s\beta x_3x_1 + s\gamma x_2x_3.\end{aligned}$$

Ce sera une droite double, si l'on a les trois équations

$$\begin{aligned}(b + s\alpha)^2 &= tu, \\ s\beta &= t, \\ s\gamma &= u,\end{aligned}$$

dont les deux dernières déterminent t, u, pourvu que s le soit par l'équation

$$(b + s\alpha)^2 = \beta\gamma s^2.$$

Mais, R ne contenant par hypothèse que deux droites doubles, cette dernière équation doit être impossible; d'où l'on déduit

$$b \gtrless 0, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta\gamma = 0.$$

D'ailleurs β et γ s'échangent entre eux par l'échange de x_1 avec x_2. On peut donc supposer $\beta = 0$; quant à γ il ne peut être nul en même temps, car φ_4 serait identiquement nul. On aura donc

$$\varphi_3 = x_3^2 + 2bx_1x_2, \qquad \varphi_4 = 2\gamma x_2 x_3.$$

Changeant enfin x_1, φ_1, φ_4 en $\frac{1}{b}x_1$, $b^2\varphi_1$, $\frac{\varphi_4}{\gamma}$, on réduira b et γ à l'unité; d'où le type réduit

$$\text{(V)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3(x_3^2 + 2x_1x_2) + \lambda_4 . 2x_2x_3.$$

30. 2° Si aucune des formes de R ne contient de terme en x_3^2, R sera dérivé de φ_1, φ_2 et de deux nouvelles formes génératrices

$$\psi_3 = 2(b_3 x_1 x_2 + c_3 x_1 x_3 + d_3 x_2 x_3),$$
$$\psi_4 = 2(b_4 x_1 x_2 + c_4 x_1 x_3 + d_4 x_2 x_3).$$

Si $c_3 d_4 - c_4 d_3 \gtrless 0$, on pourra, en changeant x_3 en $x_3 + tx_1 + ux_2$, faire disparaître les termes en x_1x_2. Puis la combinaison linéaire de ψ_3 et ψ_4 donnera les nouvelles formes

$$\varphi_3 = 2x_1x_3, \qquad \varphi_4 = 2x_2x_3;$$

d'où résulte le type canonique

$$\text{(VI)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 . 2x_1x_3 + \lambda_4 . 2x_2x_3$$

dont toutes les coniques ont un point commun $x_1 = x_2 = 0$.

Si $c_3 d_4 - c_4 d_3$ était nul, on pourrait, en combinant ψ_3 et ψ_4, éliminer x_1x_3 et x_2x_3 et obtenir ainsi la forme

$$\varphi_3 = 2x_1x_2.$$

Le réseau R contiendrait une infinité de droites doubles, ayant pour expression générale $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2$. On retombe sur le type (IV).

31. *Quatrième hypothèse :* R *ne contient qu'une droite double*

$$\varphi = x_1^2.$$

Il dérive de la combinaison de φ_1 avec trois autres formes ψ_2, ψ_3, ψ_4 qu'on peut supposer privées de termes en x_1^2. On pourra, par la combinaison de ces trois dernières formes, en déduire une d'où x_2^2, x_3^2, x_2x_3 aient également disparu.

En effet, s'il en était autrement, on pourrait remplacer ψ_2, ψ_3, ψ_4 par trois de leurs combinaisons :

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= b_2 . 2x_1x_2 + c_2 . 2x_1x_3 + x_2^2,\\
\chi_3 &= b_3 . 2x_1x_2 + c_3 . 2x_1x_3 + 2x_2x_3,\\
\chi_4 &= b_4 . 2x_1x_2 + c_4 . 2x_1x_3 + x_3^2,
\end{aligned}$$

ne contenant chacune qu'un des produits précédents ; et l'on verrait aisément que R contient contre l'hypothèse une seconde droite double.

Considérons, en effet, la forme

$$\begin{aligned}
t\varphi_1 + \chi_2 + 2s\chi_3 + s^2\chi_4 = tx_1^2 &+ (b_2 + 2b_3s + b_4s^2)2x_1x_2\\
&+ (c_2 + 2c_3s + c_4s^2)2x_1x_3 + (x_2 + sx_3)^2.
\end{aligned}$$

En changeant x_2 en $x_2 - sx_3$, elle devient

$$tx_1^2 + x_2^2 + 2\mathfrak{B}x_1x_2 + 2\mathfrak{C}x_1x_3$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= b_2 + 2b_3s + b_4s^2,\\
\mathfrak{C} &= c_2 + 2c_3s + c_4s^2 - s(b_2 + 2b_3s + b_4s^2)
\end{aligned}$$

et sera un carré parfait et représentera une droite double, si l'on détermine s et t par les relations

$$\mathcal{S} = 0, \qquad \mathcal{M}^2 = t,$$

ce qui sera toujours possible si $\mathcal{S}$ contient s; et notamment si $b_4 \gtrless 0$.

Mais, d'autre part, si $b_4 = 0$, considérons la forme

$$t\varphi_1 + \chi_4 = tx_1^2 + c_4 . 2x_1 x_3 + x_3^2.$$

Elle représentera une droite double si $t = c_4^2$.

Le réseau contient donc nécessairement une forme se réduisant à

$$\varphi_2 = 2(bx_2 + cx_3)x_1.$$

Par un changement de variables effectué sur x_2, x_3, on lui donnera l'expression plus simple

$$\varphi_2 = 2x_1 x_2.$$

Le réseau R résulte de la combinaison de φ_1, φ_2 avec deux autres formes génératrices ψ_3, ψ_4.

52. Si l'une de ces dernières, telle que ψ_3, contient un terme en x_3^2, on pourra, en changeant la variable x_3, ramener son expression à

$$\psi_3 = x_3^2 + ax_1^2 + 2bx_1 x_2 + cx_2^2$$

et, en la combinant avec φ_1, φ_2, on obtient la nouvelle forme

$$\varphi_3 = x_3^2 + cx_2^2.$$

Ce n'est pas une droite double; donc c n'est pas nul, et en remplaçant x_2, φ_2 par $\frac{x_2}{\sqrt{c}}$, $\sqrt{c}\varphi_2$ on le réduira à l'unité.

On aura donc

$$\varphi_3 = x_3^2 + x_2^2.$$

Considérons la dernière forme génératrice. En la combinant avec φ_1, φ_2, φ_3, on pourra en faire disparaître les termes en x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2.

Elle aura donc pour expression

$$\varphi_4 = ax_3^2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3.$$

Mais la conique

$$t\varphi_1 + u\varphi_2 + v\varphi_3 + \varphi_4 = tx_1^2 + 2ux_1x_2 + vx_2^2 + (a+v)x_3^2 \\ + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3$$

serait une droite double (contre l'hypothèse) si l'on pouvait satisfaire aux relations

$$a^2 = tv, \qquad b^2 = t(a+v), \qquad c^2 = v(a+v);$$

or, ce serait toujours possible si l'on n'avait pas $a = 0$, $c = 0$.

Donc φ_4 doit se réduire au terme $2bx_1x_3$. On peut évidemment supposer $b = 1$. On obtient ainsi le type

(VII) $$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 . 2x_1x_2 + \lambda_3(x_3^2 + x_2^2) + \lambda_4 . 2x_1x_3,$$

dont toutes les coniques ont deux points communs, $x_1 = x_3 \pm ix_2 = 0$.

33. Supposons en dernier lieu qu'aucune des formes de R ne contienne x_3^2; ψ_3 et ψ_4 auront les expressions suivantes :

$$\psi_3 = 2(a_3x_1 + b_3x_2)x_3 + f_3(x_1, x_2),$$
$$\psi_4 = 2(a_4x_1 + b_4x_2)x_3 + f_4(x_1, x_2),$$

où b_3 et b_4 ne peuvent être nuls à la fois. Car, en combinant ψ_3 et ψ_4, on obtiendrait la nouvelle forme

$$\psi = a_4 f_3(x_1, x_2) - a_3 f_4(x_1, x_2),$$

et R contenant ainsi trois formes φ_1, φ_2, ψ où ne figurent que x_1, x_2 contiendrait toutes les droites doubles $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2$.

Soit donc $b_3 \gtrless 0$. On peut le supposer égal à 1. Changeons x_2 en $x_2 - a_3x_1$, λ_1 en $\lambda_1 + 2a_3\lambda_2$, ce qui n'altère pas l'expression du faisceau $\lambda_1x_1^2 + \lambda_2 . 2x_1x_2$; ψ_3 sera changé en

$$2x_2x_3 + cx_1^2 + 2dx_1x_2 + ex_2^2.$$

On fera disparaître le terme en x_2^2 par le changement de x_3 en $x_3 - \frac{e}{2}x_2$, puis ceux en x_1^2, $x_1 x_2$ par soustraction de $c\varphi_1 + d\varphi_2$. On obtiendra ainsi une troisième forme génératrice

$$\varphi_3 = 2x_2 x_3.$$

Par combinaison de φ_1, φ_2, φ_3 avec ψ_4 on en fera disparaître les termes en x_1^2, $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ et l'on obtiendra la dernière forme génératrice

$$\varphi_4 = 2ax_1 x_3 + bx_2^2,$$

a n'est pas nul, φ_4 ne représentant pas une droite double. On peut le supposer égal à 1; et si $b \gtrless 0$, on le réduira aussi à l'unité en changeant x_2, φ_2, φ_3 en $\frac{x_2}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{b}\varphi_2$, $\sqrt{b}\varphi_3$. On aura donc les deux solutions

$$\varphi_4 = 2x_1 x_3 + x_2^2, \qquad \varphi_4 = 2x_1 x_3.$$

La première donne le type réduit

$$\text{(VIII)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 . 2x_1 x_2 + \lambda_3 . 2x_2 x_3 + \lambda_4(2x_1 x_3 + x_2^2)$$

dont toutes les coniques ont un point commun $x_1 = x_2 = 0$.

La seconde donnerait le type suivant :

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 . 2x_1 x_2 + \lambda_3 . 2x_2 x_3 + \lambda_4 . 2x_1 x_3,$$

dont les coniques ont deux points communs

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_1 = x_3 = 0.$$

Mais ce type est à rejeter. Il formerait double emploi avec le type (VII), dans lequel il se transforme si l'on change

$$x_2, \quad x_3, \quad \lambda_2, \quad \lambda_4$$

en

$$x_2 + ix_3, \qquad x_2 - ix_3, \qquad \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - i\lambda_4), \qquad \tfrac{1}{2}(\lambda_2 + i\lambda_4).$$

Nous aurons donc en tout *huit* types réduits essentiellement distincts. Donc $N_{43} = 8$.

Troisième cas : $m = 3$.

34. Le réseau R contient tout d'abord une droite double

$$\varphi_1 = x_1^2.$$

D'autre part, les cinq coniques génératrices ne contenant x_1 que dans les trois combinaisons x_1^2, $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, deux d'entre elles se réduiront à des formes binaires $f(x_2, x_3)$, $f_1(x_2, x_3)$. Parmi les combinaisons de ces deux formes il en est au moins une, et en général deux, qui sont des carrés parfaits. R contiendra donc au moins deux droites doubles, et en général trois droites doubles non concourantes.

Traitons d'abord ce cas général.

35. On aura

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2, \qquad \varphi_3 = x_3^2.$$

Les deux autres coniques génératrices pourront être supposées réduites à la forme

$$a x_1 x_2 + b x_2 x_3 + c x_3 x_1.$$

En les combinant linéairement, on obtiendra les expressions plus simples

$$\varphi_4 = 2 x_1 x_2 + d_4 x_2 x_3,$$
$$\varphi_5 = 2 x_1 x_3 + d_5 x_2 x_3.$$

Changeant x_2, x_3, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 en $t x_2$, $u x_3$, $\frac{\varphi_2}{t^2}$, $\frac{\varphi_3}{u^2}$, $\frac{\varphi_4}{t}$, $\frac{\varphi_5}{u}$, on changera d_4, d_5 en $u d_4$, $t d_5$. On peut donc rendre égaux à 1 ceux de ces coefficients qui ne sont pas nuls. D'ailleurs l'échange de x_2 avec x_3 les permute entre eux. On n'a donc que trois cas distincts à considérer :

$$d_4 = 1, \qquad d_5 = 1,$$
$$d_4 = 1, \qquad d_5 = 0,$$
$$d_4 = 0, \qquad d_5 = 0.$$

d'où trois types de réseaux :

$$(\text{I})\quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4\, 2(x_1 x_2 + x_2 x_3) + \lambda_5\, 2(x_1 x_3 + x_2 x_3),$$
$$(\text{II})\quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4\, 2(x_1 x_2 + x_2 x_3) + \lambda_5\, 2 x_1 x_3,$$
$$(\text{III})\quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4\, 2 x_1 x_2 \qquad + \lambda_5\, 2 x_1 x_3.$$

Le premier n'a que trois droites doubles x_1^2, x_2^2, x_3^2. Le second a pour droites doubles x_2^2 et toutes les droites qui passent par le point $x_1 = x_3 = 0$. Le dernier, toutes celles qui passent par un des deux points $x_1 = x_2 = 0$, ou $x_1 = x_3 = 0$.

Ces trois types sont donc nettement distincts.

56. Passons au cas où toutes les droites doubles sont concourantes. On a vu qu'il en existe au moins deux :

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2.$$

Les trois autres coniques génératrices peuvent être supposées réduites à la forme

$$2 a x_1 x_2 + 2 b x_2 x_3 + 2 c x_3 x_1 + d x_3^2.$$

En les combinant entre elles, on en obtient une nouvelle, de la forme

$$\varphi_3 = 2 c' x_3 x_1 + d' x_3^2.$$

Mais, si d' n'était pas nul, R contiendrait une nouvelle droite double

$$\varphi_3 + t\varphi_1 = t x_1^2 + 2 c' x_3 x_1 + d' x_3^2,$$

en posant $t = \frac{c'^2}{d'}$.

Il faut donc admettre que $d' = 0$. Quant à c', on peut le supposer égal à 1. On aura donc

$$\varphi_3 = 2 x_1 x_3.$$

On verra de même que R contient la conique

$$\varphi_4 = 2 x_2 x_3.$$

La dernière conique génératrice φ_5 peut être supposée réduite à la forme

$$2ax_1x_2 + bx_3^2.$$

Ce n'est pas une droite double; donc a n'est pas nul; on peut le supposer égal à 1. Si b n'est pas nul, on le réduira aussi à l'unité en changeant x_3, φ_3, φ_4 en $\frac{x_3}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{b}\varphi_3$, $\sqrt{b}\varphi_4$. On aura donc en posant $b = 1$, $b = 0$ deux nouveaux types :

(IV) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 2x_1x_3 + \lambda_4 2x_2x_3 + \lambda_5(2x_1x_2 + x_3^2)$,

(V) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 2x_1x_3 + \lambda_4 2x_2x_3 + \lambda_5 2x_1x_2$.

Dans le type (IV) il n'y a que deux droites doubles, x_1^2 et x_2^2; dans le type (V) on a toutes celles qui se croisent au point $x_1 = x_2 = 0$.

Nous avons trouvé en tout cinq types distincts : donc

$$N_{53} = 5.$$