JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. D'ADHÉMAR

# Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique

*Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série*, tome 2 (1906), p. 357-379.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1906_6_2__357_0>

# *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique*

(Second Mémoire);

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

---

Je me propose de simplifier notablement les résultats obtenus dans mon premier Mémoire, inséré dans ce Journal en 1904, et de les compléter par un certain nombre de résultats nouveaux.

Il s'agira exclusivement de l'équation que j'appellerai *équation des ondes :*

$$(1) \qquad A(u) = F(x, y, z),$$

A représentant l'opération

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

et de l'intégrale *réelle* déterminée par des données sur une frontière réelle.

Cette intégrale se présente sous la forme intéressante de la différence finie de deux termes infinis.

L'on peut, cependant, arriver à manier très facilement ces expressions et à prouver :

1° Que l'intégrale prend la valeur donnée, à la frontière;

2° Que si, à l'intégrale, on applique l'opération A, l'équation (1) est vérifiée.

Alors on peut dire que l'intégration de (1) est achevée.

Je vais résoudre complètement ce double problème, après une remarque préliminaire qui n'avait pas été faite dans mon premier Mémoire.

## Remarques sur les données du problème.

Pour l'équation des ondes

$$A(u) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) u = 0,$$

l'on peut intégrer si, sur une frontière S, l'on connaît les valeurs de $u$ et de sa dérivée conormale.

« La donnée $u$ est seule nécessaire et suffisante si S est un cône formé de droites à 45° sur l'axe vertical : nous dirons droites $\beta$. »

J'ai, le premier, donné ce théorème en introduisant la *conormale* dans les formules de M. Volterra.

Il me paraît intéressant de démontrer à nouveau mon théorème sans me servir de la *conormale*, au point de vue qui est celui du théorème général d'existence de Cauchy et Mme de Kowaleska.

Je reprends pour cela, en deux mots, la théorie générale des *caractéristiques*, de Beudon, d'après l'exposé de M. Hadamard (1).

Écrivons

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = p_{ik};$$

la surface frontière S sera

$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

avec

$$P_1 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \qquad P_2 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \qquad P_{11} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2}, \qquad \dots.$$

Sur S l'on donne $u = \overline{u}(x_1, x_2)$ et $p_3 = \overline{p}_3(x_1, x_2)$.

---

(1) *Leçons sur la propagation des ondes*. Hermann, 1903, p. 263.

Comme l'on a

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1} = p_1 + p_3 P_1,$$

l'on voit que la donnée $\overline{p_3}$ détermine $\overline{p_1}$ et de même $\overline{p_2}$.

Puis il est facile de voir que $\overline{p_{ik}}$ est déterminé par $\overline{p_{33}}$ et que cette dérivée est fournie par l'équation

$$H\overline{p_{33}} + K = 0,$$

où l'on a posé

$$H = P_1^2 + P_2^2 - 1,$$

$$K = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2} - \overline{p_3}(P_{11} + P_{22}) - 2P_1 \frac{\partial \overline{p_3}}{\partial x_1} - 2P_2 \frac{\partial \overline{p_3}}{\partial x_2}.$$

Les *surfaces caractéristiques* sont données par

$$H = 0.$$

Ce sont bien des assemblages de droites $\beta$.

Mais, si l'on a $H = 0$, *on ne peut plus se donner arbitrairement* $\overline{p_3}$, car cette fonction $\overline{p_3}$ devra être une solution de l'équation

$$K = 0.$$

Si l'on prend une caractéristique quelconque, $\overline{p_3}$ contient un certain arbitraire : c'est le cas général.

Mais ici nous prenons une caractéristique très spéciale, un cône $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. Au sommet $\Omega$ du cône, il faut que $\overline{p_3}$ ait *la même valeur,* quel que soit le chemin suivi.

C'est pourquoi $\overline{p_3}$ ne contient aucun arbitraire, comme nous allons le reconnaître aisément.

Sur le *cône caractéristique* l'on a, en posant $\lambda^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{1}$$

D'ailleurs, les courbes caractéristiques (dans le sens primitif) de

$K = 0$ sont, en posant $\overline{p_3} = Z$,

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dZ}{-\frac{1}{2}Z + \frac{x_3}{2}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2}\right)}.$$

Sur l'une de ces *courbes caractéristiques,* l'on a

$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$\frac{x_2}{x_1} = C,$$

de sorte que, tenant compte de (I), l'on peut écrire

$$\frac{x_3}{2}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2}\right) = \varphi(C, \lambda),$$

$\varphi$ est *connu.*

Donc, sur la caractéristique fixée par la valeur de C, l'on a, d'après (I) et (II),

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dZ}{-\frac{1}{2}Z + \varphi(C, \lambda)}.$$

Intégrons, en représentant par $\Pi$ une fonction arbitraire,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\Pi(C) + \int_0^\lambda \frac{\varphi(C, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right].$$

Or, pour $\lambda = 0$, Z doit avoir *la même valeur,* quel que soit C.

Ceci exige $\Pi \equiv 0$.

Donc $Z = \overline{p_3}$ *ne renferme aucun arbitraire* (¹).

Il en serait de même pour $\overline{p_{33}}$, $\overline{p_{333}}$, etc.

Donc, on obtiendra une série formelle *unique* pour représenter l'intégrale de $A(u) = 0$.

Quant à la question de la *convergence* au voisinage du cône $\Omega$, elle

(¹) Comparer avec la recherche analogue de M. Hadamard, dans ses *Leçons sur les ondes,* p. 297.

présente des difficultés et des particularités sur lesquelles je me réserve de revenir.

Pour l'instant, j'abandonne le point de vue « analytique » pour prendre le cas « général », où aucune donnée n'est taylorienne et où l'instrument de recherche sera naturellement, non plus la *série de puissances,* mais bien l'*intégrale de contour.*

**Dérivation des intégrales simples à élément infini : Partie finie.**

Soit l'intégrale définie

$$F(\alpha)=\int_A^B f(x, \alpha)\,dx.$$

Si A et B sont des fonctions de $\alpha$ *continues* ainsi que leurs dérivées premières, et si $f(x, \alpha)$ admet une dérivée par rapport à $\alpha$ *continue,* il est bien connu que l'on a

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_A^B \frac{\partial f}{\partial \alpha}dx+f(B, \alpha)\frac{dB}{d\alpha}-f(A, \alpha)\frac{dA}{d\alpha}. \tag{1}$$

Dans son *Traité d'Analyse* (t. I, p. 43), M. Picard remarque que cette formule (1) ne serait pas applicable à la fonction

$$\Phi(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{x(\alpha-x)}}.$$

Il se présenterait « une différence n'ayant aucun sens, de *deux termes infinis* ».

Je voudrais présenter quelques réflexions au sujet de la dérivée de $\Phi$.

Prenons plus généralement

$$V(\alpha)=\int_0^\alpha f(x, \alpha)\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}. \tag{2}$$

Nous supposons que $f(x, \alpha)$ admet des dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ déterminées et *continues* (¹).

V est une fonction bien déterminée et continue. On peut donc faire le changement de variables

$$\alpha - x = \alpha(1 - y),$$

et V devient $V_1$ :

$$V_1(\alpha) = \int_0^1 f(\alpha y, \alpha)\sqrt{\alpha}\,\frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

Considérons d'ailleurs l'intégrale

$$W_1(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[f(\alpha y, \alpha)\sqrt{\alpha}\right]\frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

D'après les hypothèses faites, les intégrales $V_1$ et $W_1$ *convergent uniformément*, d'où

$$W_1 = \frac{dV_1}{d\alpha}.$$

Mais l'on peut écrire

$$W_1 = \lim_{h=0}\left[\int_0^{1-h} \frac{\partial}{\partial \alpha}(f\sqrt{\alpha})\frac{dy}{\sqrt{1-y}}\right].$$

Posons

$$J_h = \int_0^{1-h} f\sqrt{\alpha}\,\frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

On a

$$W_1 = \lim_{h=0}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}J_h\right).$$

Cette limite *existe certainement*, comme on le verrait en faisant

(¹) C'est M. de La Vallée-Poussin qui m'a fait observer que cette hypothèse *suffisait*. Je l'en remercie très vivement. *Voir*, sur ces questions, son Mémoire des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1892, et son très remarquable *Cours d'Analyse*, t. II, p. 95 et suivantes. *Voir* aussi le *Cours d'Analyse* de M. Jordan et celui de M. Goursat.

dans $W_4$ le changement

$$1-y=z^2.$$

Donc enfin

$$(3) \qquad \frac{dV}{d\alpha}=\lim_{h=0}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^{\alpha(1-h)} f(x,\alpha)\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}\right].$$

C'est-à-dire que nous avons le droit *d'intervertir l'ordre* des deux opérations de *passage à la limite*. Voilà la remarque essentielle.

Mais, en dérivant $J_h$, intégrale ci-dessus, où $h$ est *fini* pour l'instant, nous pouvons employer la formule (1) :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}J_h=\int_0^{\alpha(1-h)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{f(x,\alpha)}{\sqrt{\alpha-x}}dx+\frac{f[\alpha(1-h),\alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}}\frac{d}{d\alpha}[\alpha(1-h)].$$

Cette expression (4) renferme deux termes qui *croissent indéfiniment* lorsque $h$ tend vers zéro, mais dont *la somme est finie,* quelque petit que soit $h$. Nous le savons d'avance, par le changement de variables; vérifions-le :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{f(x,\alpha)}{\sqrt{\alpha-x}}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}-f\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}},$$

puisque

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}.$$

Alors

$$\int_0^{\alpha(1-h)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{f(x,\alpha)}{\sqrt{\alpha-x}}dx=\int_0^{\alpha(1-h)}\left[\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}-f\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}\right)dx\right].$$

La première intégrale sera *finie,* d'après nos hypothèses. La deuxième intégrale donne

$$-\left(\frac{f(x,\alpha)}{\sqrt{\alpha-x}}\right)_0^{\alpha(1-h)}+\int_0^{\alpha(1-h)}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}.$$

Ici encore l'intégrale est *finie.* Donc

$$\frac{\partial J_h}{\partial\alpha}=\text{partie finie}+\frac{f[\alpha(1-h),\alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}}(1-h)-\frac{f[\alpha(1-h),\alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}}.$$

Il est clair que *les deux termes en* $\frac{1}{\sqrt{h}}$ *devenant chacun infini pour* $h=0$ *ont une somme finie, quelque petit que soit* $h$, puisque la somme contient un facteur $\sqrt{h}$.

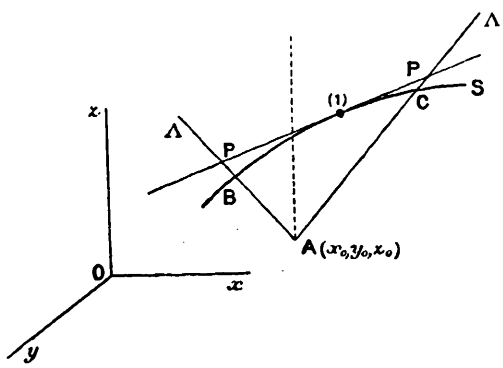
Il est utile de se servir de ces *parties finies,* plutôt que de mettre la dérivée sous forme *immédiatement finie,* ainsi qu'on va le reconnaître.

### Équation des ondes. Synthèse de la solution.

*Étude de l'intégrale au voisinage d'une frontière quelconque.* — La frontière S est soumise, on le sait, à quelques restrictions. En particulier, elle n'est pas une surface formée de droites $\beta$, cas qui sera examiné ensuite.

Soit un point (1) sur S où la valeur donnée de $\overline{u}$ est $u_1$. Nous vou-

Fig. 1.




lons montrer que, si le point A tend à prendre la position (1), la valeur de l'intégrale en A tend vers $u_1$.

L'on a, l'intégration étant étendue à l'aire BC sur S :

Donc

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = J_2 + J_1$$

en posant

$$J_2 = \int\int \frac{du}{dN} \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}},$$

$$J_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\int\int u \frac{dV}{dN} d\sigma\right) = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\int\int u_1 \frac{dV}{\partial N} d\sigma + \int\int (u-u_1) \frac{dV}{dN} d\sigma\right],$$

on a immédiatement

$$2\pi u_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\iint (u_1)\frac{dV}{dN}d\sigma\right].$$

Nous allons donc prouver que $J_2$ d'une part, et d'autre part

$$J_3 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\iint (u - u_1)\frac{dV}{dN}d\sigma\right],$$

*tendent vers zéro,* lorsque A tend vers (1).

Pour $J_2$, c'est extrêmement facile.

Posons, $r$ étant, bien entendu, la distance polaire au point A; $n$ la normale :

$$R = \sqrt{(z - z_0)^2 - r^2},$$

$$\Gamma = \cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r);$$

l'on a

$$\frac{dV}{dN} = \frac{\Gamma}{R}.$$

Comme $\cos(n, z)$ est indépendant de $z_0$, comme $\cos(n, r)$ et $(\bar{u} - \bar{u}_1)$ d'ailleurs, il nous suffit de montrer que $J_4$ et $J_5$ sont *finis :*

$$J_4 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\iint \frac{dx\,dy}{R}\right),$$

$$J_5 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\iint \frac{z - z_0}{r}\frac{dx\,dy}{R}\right),$$

ces deux intégrales étant étendues à l'aire B'C', projection de BC sur le plan $(x, y)$.

Nous appliquons le théorème de la moyenne, en conservant, sous le signe d'intégration, des éléments de *signe constant,* de sorte que $J_4$ et $J_5$ se présentent multipliés par un facteur :

$$\text{Valeur moyenne de } (\bar{u} - \bar{u}_1),$$

lequel tend vers zéro quand A tend vers (1).

Pour étudier $J_4$ et $J_5$, prenons des coordonnées polaires avec le pôle A, $r$ et $\theta$.

Nous avons à dériver une intégrale simple, puis à intégrer par rapport à $\theta$ entre les limites fixes $0$, $2\pi$.

Soit l'équation du plan tangent en (1) à la frontière

$$z - z_0 = mr + q.$$

Le plan tangent étant incliné sur $xOy$ de moins de $45^\circ$, on a

$$|m| < 1.$$

L'équation de la frontière elle-même sera

$$z - z_0 = mr + q + \varepsilon.$$

Si A tend vers (1), $q$ devient infiniment petit et $\varepsilon$ devient infiniment petit d'ordre supérieur, d'après la propriété du plan tangent.

Nous avons alors à dériver, par rapport à $z_0$, une intégrale de la forme

$$H = \int_0^B f(r, z_0) \frac{dr}{\sqrt{B - r}}.$$

B est la valeur limite de $r$ qui annule R. (B, comme $q$, dépend de $z_0$.)

D'après ce qui précède, quelque petit que soit $q$, la dérivée, par rapport à $z_0$, de H est *finie*.

*La convergence est démontrée.*

*Étude de l'intégrale au voisinage d'une frontière caractéristique.* — L'on voit aussitôt que la question est infiniment plus difficile. La surface frontière S est devenue un cône $\Omega$, formé de droites $\beta$.

Soit un point (1) de la surface du cône. Si A tend vers (1) l'aire découpée par le cône de A, formé de droites $\beta$, l'aire analogue de BC ne devient plus infiniment petite dans tous les sens.

L'on ne peut plus aller aussi vite que précédemment.

On ne peut plus prendre A pour origine des coordonnées polaires.

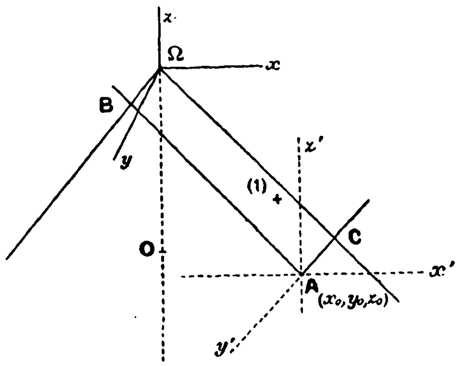
Il faut, non plus faire des applications rapides du théorème de la moyenne, mais faire certains calculs jusqu'au bout.

Il n'y a aucun intérêt à examiner l'expression

$$\iint \frac{du}{dN} \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\iint (u - u_1)\frac{dV}{dN} d\sigma\right].$$

Mais, grâce à la forme simple de la frontière, en prenant pour ori-

Fig. 2.




gine des coordonnées polaires le point O intersection de l'axe du cône avec le plan horizontal de A, l'on arrive à calculer $u$ avec assez d'approximation pour montrer que $u(x_0, y_0, z_0)$ tend vers $\overline{u_1}$,

valeur donnée au point (1),

lorsque A s'approche de (1).

Il se présente des *parties finies* d'intégrales simples tout à fait pareilles à celles que nous venons de rencontrer. Je me permettrai de renvoyer le lecteur à un Mémoire inséré dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (février 1905), où la discussion est complètement achevée.

**Dérivation des intégrales triples à élément infini : partie finie.**

Soit à dériver l'intégrale

$$(1) \qquad I = \iiint_{W(\lambda)} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

le champ d'intégration W, comme $\varphi$, dépend d'un paramètre $\lambda$.

L'on a, K étant fini et $\varepsilon$ une quantité infiniment petite par rapport à $\Delta\lambda$,

$$(2) \quad \Delta I = \iiint_{(W)} \Big[ \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda}_{(I)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial X}(\varphi\xi) + \frac{\partial}{\partial Y}(\varphi\eta) + \frac{\partial}{\partial Z}(\varphi\zeta)}_{(II)} \Big] dX\, dY\, dZ + K\varepsilon.$$

L'on verra, dans le Mémoire précédent, comment cette formule est établie et pourquoi un point $(x, y, z)$ de W est devenu ici $(X, Y, Z)$. Nous rétablirons la notation $(x, y, z)$ dans $\Delta I$ et nous allons mieux utiliser la formule (2) en la prenant sous deux formes différentes.

Dans l'intégrale figurent les termes (I) et (II). Pour ces derniers l'intégrale *triple* peut être changée en intégrale *de surface*. Il faut tantôt faire la transformation et tantôt garder l'intégrale triple, si l'on veut user facilement de la formule.

C'est là une remarque essentielle.

Précisons la question.

Soit W le volume ABC,

$$\varphi = F(x, y, z)\, G(x, y, z, x_0, y_0, z_0);$$

$\lambda$ est l'un des paramètres $x_0$, $y_0$, $z_0$.

*Dérivée par rapport à $z_0$.* — Le volume W est ABC.

Le volume $W + \Delta W$ est A′B′C′.

Intégrons par parties le terme (II). Décomposons l'aire du cône ABC en deux parties par un cylindre vertical de base B′C′.

Pour l'*aire* AB″C″ les formules de transformation sont :

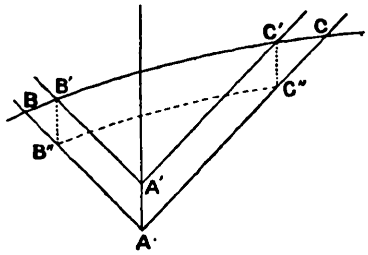
$$\zeta \equiv \Delta z_0, \qquad \xi \equiv 0, \qquad \eta \equiv 0.$$

Pour l'*aire* B′C′ qui fait partie de BC

$$\zeta \equiv 0 \equiv \xi \equiv \eta.$$

Enfin, les *aires* BB″CC″ du cône et BB′CC′ de la frontière, à la

Fig. 3.




limite, lorsque $\Delta z_0$ tend vers zéro, donneront des termes nuls. Il est inutile de calculer les $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

Donc

$$\Delta I = \Delta z_0 \left( \iiint_{\text{vol. ABC}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau + \iint_{\text{cône ABC}} \varphi\, dx\, dy + \varepsilon \right). \tag{3}$$

Ceci ne souffre aucune difficulté, si $\varphi$ et sa dérivée sont *finis*. Mais nous avons, précisément, à employer des fonctions $\varphi$ qui sont infinies sur le cône ABC.

Conservons donc la forme primitive

$$\Delta I = \iiint_{\text{vol. ABC}} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi \zeta) \right] d\tau + K\varepsilon. \tag{4}$$

$\zeta$ reste indéterminé dans le volume, mais sur le contour l'on a, sur le cône ABC :

$$\zeta \equiv \Delta z_0;$$

sur l'aire BC :

$$\zeta \equiv 0.$$

Prenons l'expression de $\varphi$. F reste fini, G sera supposée finie, ainsi que sa dérivée et telle que l'on ait

$$\frac{\partial G}{\partial z_0} = -\frac{\partial G}{\partial z};$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial z_0}(FG) = G\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(FG);$$

d'où

$$\iiint_{\text{vol. ABC}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau = \iiint_{\text{vol. ABC}} G\frac{\partial F}{\partial z} d\tau - \iint_{(\text{cône ABC}+\text{aire BC})} FG\,dx\,dy.$$

Cette formule est correcte, les intégrales ayant un sens bien déterminé.

D'autre part

$$\frac{1}{\Delta z_0}\iiint_{\text{vol. ABC}} \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\zeta)\,d\tau = \iint_{\text{cône ABC}} FG\,dx\,dy;$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{\partial I}{\partial z_0} = \iiint_{\text{vol. ABC}} G\frac{\partial F}{\partial z} d\tau - \iint_{\text{aire BC}} FG\,dx\,dy.$$

Supposons maintenant que G devienne infini comme $\frac{1}{R}$ sur le cône ABC, les deux intégrales ci-dessus ont un sens. Elles convergent uniformément lorsque l'on remplace ABC par une surface voisine et que, d'une manière quelconque, cette surface tend vers la position limite fixe ABC.

Donc les intégrales (1), d'une part, (4) et (5), d'autre part, convergent uniformément.

Donc (5) représente encore la dérivée de (1) quand G est infini comme $\frac{1}{R}$, F et ses dérivées étant finis.

A cause de la convergence uniforme, comme dans le cas des intégrales simples, *nous pouvons intervertir les deux opérations de passage à la limite* et dire : $w$ étant un volume intérieur à W et tendant vers W, ou : *abc* tendant vers ABC, l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\lim \iiint_w\right) = \lim\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\iiint_w\right).$$

Mais cette dérivée de l'intégrale du second membre, nous la prendrons sous la forme (3).

Nous pouvons donc écrire, en toute rigueur, puisque nous avons montré que la limite existe,

$$(6) \qquad \frac{\partial I}{\partial z_0} = \lim \left( \iiint\limits_{\text{vol. } abc} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau + \iint\limits_{\text{aire } abc} \varphi \, dx \, dy \right).$$

La dérivée est la limite de la somme de deux termes infinis.

Je l'appelais, dans ma Thèse, *la partie finie* de l'intégrale infinie.

L'on pourrait écrire

$$\text{partie finie} \left( \iiint\limits_{\text{vol. ABC}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau \right).$$

M. Hadamard emploie la même expression.

Indépendamment l'un de l'autre, nous avons reconnu le rôle de ces *parties finies* (1).

De même les dérivées de (1) par rapport à $x_0$ ou $y_0$ prennent soit la forme (5), soit la forme (6) à volonté.

Le raisonnement est identique.

**Équation des ondes. Vérification de la solution.**

Rappelons les résultats obtenus :

Soit A : $(x_0, y_0, z_0)$, soient

$$z' = z - z_0, \qquad x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0,$$
$$r^2 = x'^2 + y'^2;$$
$$V = \log \left[ \frac{z'}{r} + \sqrt{\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 1} \right],$$

(1) J. Hadamard, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, décembre 1903, et R. d'Adhémar, *Thèse* déposée à la Sorbonne en décembre 1903, soutenue en avril 1904; ensuite: J. Hadamard, *Verhandlungen der Mathematiker Kongresses*, Teubner, 1905, et R. d'Adhémar, *Circolo matematico di Palermo*, 1905.

V est bien *nulle* sur le cône $\Lambda$, qui a pour équation

$$\frac{z'}{r} = 1.$$

V est *infini* sur la verticale du point A et *indéterminé* au voisinage de ce point.

L'intégrale est donnée par la formule

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial J_A}{\partial z_0},$$

si l'on convient d'écrire

$$J_A = \iiint_{(ABC)} F(x, y, z) V_A \, d\tau.$$

J'affecte la lettre V de l'indice A pour bien montrer que la fonction auxiliaire V varie avec le point A $(x_0, y_0, z_0)$.

L'on a aussitôt la valeur de $u$, mais les difficultés se présentent pour ses *dérivées*.

*Expression de* $u(x_0, y_0, z_0)$. — Posons $\varphi = FV_A$, $\varphi$ étant *nul* sur le cône, nous avons de suite

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \iiint_{(ABC)} F \frac{\partial V_A}{\partial z_0} d\tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_0} = G = \frac{-1}{\sqrt{(z - z_0)^2 - r^2}} = \frac{-1}{R}.$$

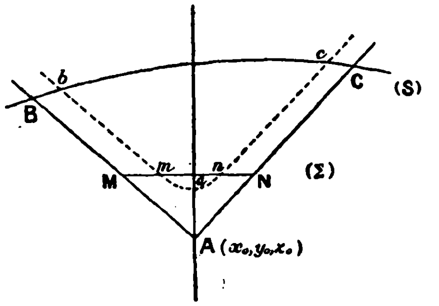
Comme, en A, V devient indéterminé, infini dans une direction et G aussi infini sur les génératrices du cône, nous devons ici séparer le volume d'intégration en deux parties par un plan horizontal MN.

Appelant W le volume AMN ou le volume BCMN, nous appelons toujours $w$ le volume *amn* ou *bcmn* qui a W pour *limite*. Nous appelons S la frontière donnée, $\Sigma$ le plan MN et $\Lambda$ la surface du cône de sommet A.

Suivant les cas, $\Lambda$ représentera l'aire MBNC ou l'aire AMN.

On représentera par $\lambda$ les aires relatives à la surface (pointillée) voisine du cône.

Fig. 4.




On représentera par $s$ et $\sigma$ les aires qui ont S et $\Sigma$ pour limites, par $[s]$ et $[\sigma]$ les contours des aires $s$ et $\sigma$.

*Dérivées relatives au volume* BCMN. — D'après ce qui précède l'on a, en appelant $u'$ la portion de $u(x_0, y_0, z_0)$ qui correspond à ce volume,

$$2\pi\frac{\partial u'}{\partial z_0} = \lim\left[\iiint_{(w)} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0}\right) d\tau + \iint_{(\lambda)} \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0}\right] dx\,dy$$

ou, sous forme *immédiatement finie*,

$$= \iiint_{\mathrm{W}} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} d\tau - \iint_{\mathrm{S}+\Sigma} \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} dx\,dy$$

(avec une convention relative au signe de $dx\,dy$),

$$= \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2.$$

Ces deux nouvelles intégrales sont dérivables, de même

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial \mathrm{J}_1}{\partial z_0} = \lim\left(\iiint_{w} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z_0^2} d\tau + \iint_{\lambda} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} dx\,dy\right),$$

$$(\beta) \qquad = \iiint_{\mathrm{W}} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} d\tau - \iint_{\mathrm{S}+\Sigma} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} dx\,dy,$$

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial \mathrm{J}_2}{\partial z_0} = \lim\left(-\iint_{s+\sigma} \mathrm{F}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z_0^2} dx\,dy - \int_{[s+\sigma]} \mathrm{F}_1\frac{\partial \mathrm{V}}{dz_0} dl\right).$$

On peut encore l'écrire sous forme *immédiatement finie* ($\delta$).

Mais la présence, dans la formule ($\alpha$), de $\frac{\partial F}{\partial z}$ nous embarrasse, et il faut grouper les termes de ($\alpha$) et ($\gamma$). Nous en avons le droit, puisque nous avons les expressions bien déterminées équivalentes ($\beta$) et ($\delta$). Remarquons que

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z_0} = \frac{\partial}{\partial z}\left(F\frac{\partial G}{\partial z_0}\right) + F\frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2}.$$

En intégrant dans $w$, l'on a :

1° $$\iiint_w F\frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2}d\tau;$$

2° Une intégrale appliquée à $S+\Sigma$ qui détruit la première intégrale de ($\gamma$);

3° Une intégrale appliquée à $\lambda$ *à élément partout infini.*

Ce dernier terme s'ajoute à la deuxième intégrale de ($\alpha$) et à la deuxième intégrale de ($\gamma$), qui sont de même nature.

Nous avons donc le droit d'écrire

$$\frac{\partial(J_1+J_2)}{\partial z_0} = \text{partie finie}\left(\iiint_W F\frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2}d\tau\right).$$

Ceci, sous forme immédiatement finie, étant donné par ($\beta$) et ($\delta$).

*Dérivées relatives au volume* AMN. — A cause des particularités de V et G au point A, nous ne pouvons ici parler de « partie finie ». Nous prendrons les dérivées, sous la forme *immédiatement finie,* d'après ($\beta$) et ($\delta$).

Elles sont parfaitement déterminées, cela est immédiat.

Bien entendu, l'on obtient de la même façon les dérivées

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}.$$

Nous pouvons maintenant, en établissant deux théorèmes, vérifier que l'on a bien $A(u) = F$, les données étant nulles, à la frontière.

Appelons toujours $u'$ et $u''$ les parties de $u(x_0, y_0, z_0)$ correspondant aux deux volumes BCMN, AMN.

Théorème I. — *Quel que soit le plan* MN *au-dessus de* A, *l'on a*

$$A(u') = 0.$$

En effet, nous avons, pour $A(u')$, trois parties correspondant aux trois variables : $2\pi A(u') = X + Y - Z$.

$$X = \text{partie finie}\left(\int\int\int F \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} d\tau\right)$$

ou, sous forme immédiatement finie, d'après ($\beta$) et ($\delta$),

$$X = B,$$

$$Y = \text{partie finie}\left(\int\int\int F \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2} d\tau\right),$$

et, sous forme immédiatement finie, d'après ($\beta$) et ($\delta$),

$$Y = B',$$

$$Z = \text{partie finie}\left(\int\int\int F \frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2} d\tau\right),$$

et de même

$$Z = B''.$$

Donc $2\pi A(u') = B + B' - B''$ sous forme immédiatement finie.

Cette quantité étant parfaitement déterminée, nous pouvons l'écrire

$$2\pi A(u') = \text{partie finie}\left[\int\int\int F A(G) d\tau\right].$$

Comme dans tout volume $bcmn$, et même dans BCMN, l'on a

$$A(G) \equiv 0,$$

nous pouvons en conclure

$$2\pi A(u') = 0$$

par le raisonnement suivant :

$$\iiint_w \mathrm{F}\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial z_0^2}\,d\tau = \mathrm{B}''_1 + \mathrm{L}''_1,$$

$\mathrm{B}''_1$ devenant $\mathrm{B}''$, *la partie finie,* quand $w$ devient W et, dans ces conditions, $\mathrm{L}''_1$ *croissant indéfiniment,* puisque pour le volume W l'intégrale n'a pas de sens.

D'autre part, la dérivée $2\pi\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}$ s'obtient en ajoutant à l'intégrale triple une intégrale de contour dont l'élément *croît indéfiniment* quand $w$ devient W, mais qui reste constamment égale à

$$-\mathrm{L}''_1 + \varepsilon''_1,$$

$\varepsilon''_1$ tendant vers zéro quand $w$ devient W.

Donc

$$\begin{aligned}2\pi\frac{\partial^2 u'}{\partial z_0^2} &= \lim\left(\iiint_w \mathrm{F}\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial z_0^2}\,d\tau - \mathrm{L}_1 + \varepsilon_1\right)\\ &= \lim(\mathrm{B}''_1 + \varepsilon''_1) = \mathrm{B}'',\end{aligned}$$

et l'on a les équations analogues pour les autres dérivées secondes de $u'$.

D'où

$$\begin{aligned}2\pi\,\mathrm{A}(u') = \lim\Big[&\iiint_w \mathrm{F}\,\mathrm{A}(\mathrm{G})\,d\tau\\ &- (\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}'_1 - \mathrm{L}''_1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon'_1 - \varepsilon''_1)\Big].\end{aligned}$$

Maintenant l'intégrale triple *n'augmente plus* quand $w$ devient W ; elle reste *identiquement nulle.*

Le terme $(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}'_1 - \mathrm{L}''_1)$, qui *détruit toujours l'accroissement* de l'intégrale dans ces conditions, est donc ici *identiquement nul.*

Donc

$$2\pi\,\mathrm{A}(u') = \lim(\varepsilon_1 + \varepsilon'_1 - \varepsilon''_1) = 0.$$

L'avantage de la considération des *parties finies* est donc clair, car la démonstration directe de l'égalité

$$B + B' - B'' = 0$$

serait très difficile. Précisons davantage :

La surface $\lambda$ a pour équation $R = \varepsilon$.

Les dérivées immédiatement finies B, B', B″ sont les limites, pour $\varepsilon = 0$, des dérivées $B_1$, $B'_1$, $B''_1$ relatives à *bcmn*. Les *parties infinies* de nos intégrales sont, d'après les formules ($\alpha$) et ($\gamma$), de la forme

$$\frac{p_1(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{q_1(\varepsilon)}{\varepsilon^3}.$$

C'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\int\int\int_w \mathrm{F}\,\mathrm{A}(\mathrm{G})\,\delta\tau = (B_1 + B'_1 - B''_1) + \frac{P_1(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{Q_1(\varepsilon)}{\varepsilon^3}.$$

Or, le premier membre est *nul*, quel que soit $\varepsilon$. Donc, quel que soit $\varepsilon$ et même pour $\varepsilon = 0$, l'on a

$$P_1 \equiv 0 \equiv Q_1 \equiv (B_1 + B'_1 - B''_1).$$

C'est-à-dire l'on a

$$B + B' - B'' = 0$$

ou

$$A(u') = 0.$$

Études maintenant la seconde partie $u''$ de $u\,(x_0, y_0, z_0)$.

THÉORÈME II. — *Quel que soit le volume* AMN, *l'on a*

$$2\pi\,A[u''(x_0, y_0, z_0)] = 2\pi\,F(x_0, y_0, z_0).$$

Nous ne devons plus parler de parties finies des intégrales triples.

Mais ici, à cause de la forme du champ, l'on a, sous forme immédiatement finie,

$$2\pi\frac{\partial^2 u''}{\partial x_0^2} = \int\int\int_{\mathrm{AMN}} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}\mathrm{G}\,d\tau,$$

$$2\pi\frac{\partial^2 u''}{\partial y_0^2} = \int\int\int_{\mathrm{AMN}} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}\mathrm{G}\,d\tau.$$

Ces deux intégrales tendent vers zéro avec le volume AMN.

De même

$$2\pi\frac{\partial^2 u''}{\partial z_0^2} = \iiint_{\text{AMN}} \frac{\partial^2 \text{F}}{\partial z^2}\text{G}\,d\tau$$
$$-\iint_{\text{MN}} \frac{\partial \text{F}}{\partial z}\text{G}\,dx\,dy - \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\iint_{\text{MN}} \text{FG}\,dx\,dy\right).$$

Les deux premiers termes tendent vers zéro avec le volume AMN.

Nous savons étudier le dernier, grâce aux parties finies des intégrales simples. Ce terme sera

$$\int_0^{2\pi} d\theta\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\int_0^{\text{B}} \text{F}\frac{r\,dr}{\sqrt{\text{B}^2-r^2}}\right),$$

$\text{B} = \text{H} - z_0$, H étant la cote du plan MN.

Formons

$$\frac{\partial}{\partial \text{B}} = -\frac{\partial}{\partial z_0};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \text{B}}\int_0^{\text{B}} \text{F}\frac{r\,dr}{\sqrt{\text{B}^2-r^2}} &= \quad \text{partie finie}\left(\int_0^{\text{B}} \text{F}\frac{\partial}{\partial \text{B}}\frac{1}{\sqrt{\text{B}^2-r^2}}\,r\,dr\right)\\
&= -\,\text{partie finie}\left(\int_0^{\text{B}} \text{FB}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{\text{B}^2-r^2}}\,dr\right)\\
&= -\,\text{partie finie}\left[\left(\frac{\text{FB}}{\sqrt{\text{B}^2-r^2}}\right)_0^{\text{B}} - \int_0^{\text{B}}\frac{1}{\sqrt{\text{B}^2-r^2}}\,\text{B}\frac{\partial \text{F}}{\partial r}\,dr\right]\\
&= +\,(\text{F})_{\text{MN}} + \int_0^{\text{B}}\frac{1}{\sqrt{\text{B}^2-r^2}}\,\text{B}\frac{\partial \text{F}}{\partial r}\,dr.
\end{aligned}$$

Le second terme tend vers *zéro* avec B.

Le premier doit être intégré avec son signe, car on doit prendre

$$-\frac{\partial}{\partial \text{B}}$$

et puis l'on a

$$-\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\ \text{dans le symbole A}.$$

Il donne donc

$$2\pi(\mathrm{F})_{\mathrm{MN}}$$

$(\mathrm{F})_{\mathrm{MN}}$ étant la valeur de F au centre de l'aire MN.

Passant à la limite, en faisant tendre B vers zéro, l'on a

$$2\pi\,\mathrm{A}[u''(x_0, y_0, z_0)] = 2\pi\,\mathrm{F}(x_0, y_0, z_0),$$

ce qui donne la vérification cherchée.

Il était, d'ailleurs, à prévoir que le seul volume infiniment voisin du point A devait entrer en jeu dans cette étude.

*Conclusion.* — Je ne saurais omettre de renvoyer le lecteur à un remarquable Mémoire de M. Hadamard, inséré dans les *Annales de l'École Normale* (mars 1905).

Non seulement M. Hadamard a remarquablement rapproché, d'une certaine manière, les équations des types *elliptique* et *hyperbolique*, mais encore il a assez sensiblement modifié la belle méthode de M. Volterra pour l'étendre à des équations à coefficients variables, dans le domaine *analytique*.

La principale conclusion que je tirerais des travaux actuels concernant les *équations hyperboliques*, c'est que l'on est naturellement amené, par des dérivations, à ces *parties finies d'intégrales infinies*.

L'on devra parler de ces parties finies tant que l'on n'aura pas obtenu un mode d'intégration *radicalement différent* de celui de M. Volterra. Et il sera prudent d'avoir constamment sous les yeux les expressions *immédiatement finies* correspondantes.