JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS BACHELIER

Théorie des probabilités continues

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 2 (1906), p. 259-327.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1906_6_2__259_0>

Théorie des probabilités continues;

PAR M. LOUIS BACHELIER.

Les formules discontinues dont il est fait usage dans la théorie élémentaire des épreuves répétées présentent de grands inconvénients.

Dans les cas les plus simples relatifs à ces probabilités discontinues, on obtient facilement des formules donnant la solution des divers problèmes; mais, comme ces formules contiennent des factorielles, leur calcul devient impraticable quand le nombre des épreuves n'est pas très petit.

Dès que les données d'un problème se compliquent, sans cependant que le problème change de nature, il devient de plus en plus difficile de trouver une formule qui en exprime la solution. Deux formules relatives à deux problèmes de même nature peuvent être apparemment très différentes; il est cependant évident que, le nombre des épreuves devenant très grand, les solutions des deux problèmes doivent être représentées par des mêmes formules ne différant que par des coefficients.

Enfin les formules discontinues ne sont pas expressives, elles ne donnent aucune idée des lois de la variation des probabilités avec le nombre des épreuves.

Ces inconvénients sont si évidents que depuis longtemps on emploie, pour la théorie des épreuves répétées et pour le problème le plus simple de la théorie du jeu, des formules approchées qui sont continues et expressives, qui conduisent à des calculs simples et qui donnent une idée très nette de la variation des probabilités avec le nombre des épreuves. Ces formules que l'on déduit des formules discontinues ont toujours été considérées comme approchées et c'est pour cette raison que leur usage est resté très limité.

Des formules approchées ne peuvent servir de point de départ pour de nouvelles recherches et c'est pourquoi l'emploi des formules continues ne s'est aucunement étendu depuis Laplace.

Les problèmes que l'on s'était posés ne pouvant admettre comme solution exacte que des formules discontinues, l'idée de considérer les probabilités comme continues *a priori* fut envisagée seulement il y a quelques années lorsqu'on se proposa de résoudre des problèmes analogues mais dont les solutions exactes devaient être nécessairement continues.

La théorie édifiée alors était relativement particulière, il fallait la généraliser de façon qu'elle comprît les résultats connus avec beaucoup d'autres, il fallait aussi établir la classification des différents problèmes d'après leurs caractères réels et pour cela, si possible, les considérer tous comme des cas particuliers d'un seul genre de questions; il fallait enfin traiter ces questions en admettant *a priori* la continuité.

Pour satisfaire à cette dernière condition, nous supposerons une suite d'épreuves en nombre très grand, de telle sorte que la succession de ces épreuves puisse être considérée comme continue et que chaque épreuve puisse être considérée comme un élément.

S'il s'agit d'un très grand nombre μ d'épreuves, on peut supposer que celles-ci se suivent à intervalles de temps infiniment petits égaux et considérer la variable μ comme représentant le temps total.

Cette assimilation fournit une image précieuse qui fait concevoir la transformation des probabilités dans une suite d'épreuves comme un phénomène continu.

Pour montrer l'extrême avantage de cette conception, il n'est pas nécessaire de faire connaître les résultats qu'elle a permis d'obtenir, il suffit de considérer la simple définition de la probabilité.

La somme des probabilités de tous les cas possibles a pour valeur *un*, c'est une conséquence immédiate de la définition. La considération des probabilités continues et la notion du temps donnent à ce principe stérile une forme en quelque sorte animée qui fait naître dans l'esprit une foule d'assimilations : la probabilité est une sorte de matière, d'énergie, ... de chose qui se transforme, mais qui jouit de la propriété de la conservation dans le temps.

La théorie des probabilités continues présente ainsi de grandes analogies avec certaines théories de la Physique mathématique, analogies qu'il est même possible de préciser dans certains cas.

La variable qui représente un nombre d'épreuves peut donc être considérée comme exprimant le temps, mais cette assimilation, si elle est avantageuse, n'est pas nécessaire et c'est pourquoi, dans la suite de cette étude, il n'y sera pas fait allusion.

Afin d'obtenir l'unité indispensable pour la classification des différents problèmes, nous ramènerons ceux-ci à un seul type en supposant toujours qu'ils se rapportent à un jeu.

Lorsqu'un problème n'est pas explicitement relatif à un jeu, on peut le considérer comme le cas particulier d'un problème relatif à un jeu. Sans chercher la preuve de ce principe dans la suite de cette étude, il suffit de remarquer que si, dans un problème, il s'agit par exemple uniquement des probabilités p_1, p_2, ..., on augmente la généralité de ce problème en supposant qu'à chacune des probabilités corresponde un gain ou une perte α_1, α_2. .... Le problème proposé n'est que le cas particulier pour lequel $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$.

La théorie des probabilités continues pour être générale devra donc être une théorie générale du jeu.

Nous imaginerons un jeu fictif, continu, tel que, s'il doit être joué μ parties, les gains ou les pertes des joueurs soient supposés continus. Les probabilités correspondantes s'exprimeront par des fonctions continues et enfin la quantité μ sera continue elle-même.

Lorsque nous parlerons de la $\mu^{\text{ième}}$ et de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ partie [ou de la $\mu^{\text{ième}}$ et de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ épreuve], il faudra entendre que dans le second cas μ est remplacé par $\mu + d\mu$.

Ce que nous appellerons *les conditions du jeu pour une partie*, ce sera l'ensemble des variations possibles des gains ou des pertes des joueurs entre μ et $\mu + d\mu$.

Pour bien comprendre la continuité de la quantité μ, il suffit de la considérer comme désignant le temps; nous l'avons déjà remarqué.

On conçoit aisément les avantages que l'on peut tirer de la considération de ce jeu fictif : sa théorie est absolument indépendante de celle des probabilités discontinues; elle est mathématiquement exacte et ne procède ni par approximations, ni par tâtonnements; elle permet, pour toutes les questions, l'emploi du calcul infinitésimal; ses formules sont simples et expressives, et absolument générales.

Les problèmes dont s'occupe cette théorie se succèdent dans un ordre logique, d'après une classification méthodique; les calculs qu'ils nécessitent sont simples et leurs résultats peuvent presque toujours se traduire immédiatement en chiffres par les Tables de Kramp.

En résumé, les principes qui servent de base à cette étude peuvent se ramener à deux conceptions : la supposition de la continuité et la réduction de toutes les questions à un type unique.

Classification des probabilités.

1. Les conditions du jeu peuvent être identiques dans chaque élément $d\mu$ ou, si l'on veut, à chaque partie, on dit alors que le jeu est uniforme ou qu'il y a *uniformité*.

Les conditions peuvent être variables d'une partie à l'autre suivant une loi donnée d'avance dépendant uniquement du rang occupé par cette partie et indépendante des faits antérieurs à cette partie. On dit alors qu'il y a *indépendance*.

Lorsque les conditions relatives à un élément $d\mu$ ou, si l'on veut, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie dépendent des faits qui peuvent se produire antérieurement, on dit qu'il y a *connexité*.

2. On peut établir la classification en se plaçant à un second point de vue; s'il y a n joueurs, le problème dont on s'occupe peut être relatif à la détermination des gains de un, de deux, ... de $n-1$ joueurs. On dit alors que les probabilités sont à une, deux, ... $(n-1)$ variables.

3. Une troisième classification est également indispensable; lorsque toutes les variables peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, les probabilités sont dites du *premier genre*. Lorsqu'une des variables est limitée dans un sens, les probabilités sont dites du *second genre*.

Lorsqu'une des variables est limitée dans les deux sens, les probabilités sont du *troisième genre*.

Les probabilités sont des *genres supérieurs* quand deux ou plusieurs variables sont limitées.

4. Avant de débuter par l'étude des probabilités du premier genre à une variable, il est nécessaire de faire une remarque relative à l'application pratique de nos formules : celles-ci supposent la continuité, leurs résultats ne seront donc qu'approchés quand on les appliquera à des jeux discontinus. L'approximation sera d'autant plus grande que le nombre μ des parties qui doivent être jouées sera plus grand.

Probabilité élémentaire.

5. *Le joueur A qui possède une fortune infinie doit jouer μ parties; quelle est la probabilité pour que sa perte soit x?*

Nous supposerons l'indépendance mais non l'uniformité, alors la probabilité pour que, entre les parties μ_α, μ_β, il se produise une perte y, ne dépend que des quantités μ_α, μ_β, y, elle peut donc être représentée par $\varpi_{\mu_\alpha,\mu_\beta,y}\,dy$. (Si nous supposions l'uniformité, la probabilité ne dépendrait que de $\mu_\alpha-\mu_\beta$, y. Nous ne ferons pas cette hypothèse).

Soit $\varpi_{0,\mu,x}\,dx$ la probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie (c'est-à-dire pour que, à cette partie, elle se trouve comprise entre x et $x+dx$).

La probabilité pour que la perte soit x_1 à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie est $\varpi_{0,\mu_1,x_1}\,dx_1$.

La probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, cette perte ayant été x_1 à la $\mu_1^{\text{ième}}$, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\varpi_{0,\mu_1,x_1} \times \varpi_{\mu_1,\mu,x-x_1}\, dx_1\, dx.$$

La probabilité de la perte x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'obtient, d'après le principe des probabilités totales, en intégrant l'expression précédente pour toutes les valeurs de x_1 de $-\infty$ à $+\infty$. Cette probabilité a aussi pour expression $\varpi_{0,\mu,x}\, dx$, on a donc

$$\varpi_{0,\mu,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{0,\mu_1,x_1} \times \varpi_{\mu_1,\mu,x-x_1}\, dx_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la probabilité élémentaire du premier genre $\varpi\, dx$.

La somme de toutes les probabilités doit être égale à un, on doit donc avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{0,\mu,x}\, dx = 1.$$

6. On vérifie facilement que la solution de ces équations est

$$\varpi_{\mu_1,\mu,y} = \frac{e^{-\frac{\left[\int_{\mu_1}^{\mu} \psi'(\mu)\, d\mu + y\right]^2}{\int_{\mu_1}^{\mu} \varphi'(\mu)\, d\mu}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{\mu_1}^{\mu} \varphi'(\mu)\, d\mu}}\, dy.$$

L'identification des deux membres de l'équation conditionnelle repose uniquement sur l'égalité connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(az^2+bz+c)}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}.$$

La probabilité a donc bien la valeur exprimée ci-dessus; $\psi'(\mu)$ et $\varphi'(\mu)$ sont des fonctions arbitraires (dont la seconde est positive); ce sont ces fonctions supposées données qui caractérisent le jeu dans l'intervalle $d\mu$ ou si l'on veut à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

7. Nous écrirons simplement comme suit l'expression de la probabilité élémentaire du premier genre, ou *probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{ième}$ partie,*

$$\varpi_{\mu,x} = \frac{e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx,$$

et nous considérerons les fonctions ψ et φ comme arbitraires en tenant compte quand besoin sera de leur propriété additive; les fonctions $\psi(\mu)$ et $\varphi(\mu)$ ayant respectivement pour expression

$$\int_0^\mu \psi'(\mu)\,d\mu, \quad \int_0^\mu \varphi'(\mu)\,d\mu,$$

la valeur de ces fonctions pour μ parties est la somme des valeurs de ces fonctions pour chacune des μ parties considérée isolément. La seconde intégrale a tous ses éléments positifs, donc $\varphi(\mu)$ va sans cesse en croissant avec μ.

8. Il est facile de reconnaître ce que représentent les fonctions φ et ψ : le gain moyen ou espérance mathématique totale est

$$\mathcal{E} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx = \psi(\mu).$$

La fonction $\psi(\mu)$ est donc l'espérance mathématique totale.

La valeur moyenne des carrés des gains et des pertes est

$$E^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx = \frac{\varphi(\mu)}{2} + [\psi(\mu)]^2,$$

on en déduit $\varphi(\mu) = 2(E^2 - \mathcal{E}^2)$, donc :

La probabilité de la perte x à la $\mu^{ième}$ partie est

$$\frac{e^{-\frac{(\mathcal{E}+x)^2}{2(E^2-\mathcal{E}^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2(E^2-\mathcal{E}^2)}}\,dx,$$

$\mathcal{E}$ étant la valeur moyenne des gains et E^2 la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes.

9. Nous avons vu que la fonction $\psi(\mu)$ pour μ parties était égale à la somme des fonctions analogues relatives à chacune des parties considérée isolément. La fonction $\psi(\mu)$ est l'espérance totale $\mathcal{E}$; donc l'espérance totale pour μ parties est la somme des espérances des μ parties; résultat évident.

La fonction $\varphi(\mu) = 2(E^2 - \mathcal{E}^2)$, que nous appellerons la *fonction d'instabilité*, jouit des mêmes propriétés additives, de sorte que *la probabilité de la perte x à la $\mu^{ième}$ partie a pour expression*

$$\frac{e^{-\frac{(\Sigma\mathcal{E}_i+x)^2}{2\Sigma(E_i^2-\mathcal{E}_i^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma(E_i^2-\mathcal{E}_i^2)}}\,dx.$$

$\mathcal{E}_i$ est l'espérance mathématique ou gain moyen de la $i^{ème}$ partie considérée isolément. E_i^2 est la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes de la $i^{ème}$ partie considérée isolément.

On doit remarquer que la probabilité est indépendante de l'ordre des parties jouées.

Les formules se simplifient lorsqu'il y a uniformité; nous n'étudierons pas spécialement ce cas particulier.

10. Si, par exemple, à chaque partie, deux alternatives sont seules possibles; si à la $i^{ème}$ partie le joueur a probabilité p_i de gagner la somme α_i et probabilité q_i de perdre la somme β_i, on a

$$\mathcal{E}_i = \alpha_i p_i - \beta_i q_i, \qquad E_i^2 = \alpha_i^2 p_i + \beta_i^2 q_i,$$
$$E_i^2 - \mathcal{E}_i^2 = p_i q_i(\alpha_i + \beta_i)^2.$$

On peut supposer aussi qu'une infinité d'alternatives soit possible à chaque partie; que, par exemple, à la $i^{ème}$ partie il y ait probabilité $\zeta(y)\,dy$ pour que le joueur perde une somme y; y pouvant, par exemple, varier de $-\varepsilon_1$ à $+\varepsilon_2$. On aura alors

$$\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2}\zeta(y)\,dy = 1, \qquad \mathcal{E}_i = \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} y\zeta(y)\,dy, \qquad E_i^2 = \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} y^2\zeta(y)\,dy.$$

11. La formule du n° **9** était connue de Laplace, la différence entre cette formule et celle du n° **7** consiste dans la conception.

Laplace considérait sa formule comme approchée, nous considérons la nôtre comme exacte.

La formule de Laplace constituait le but de sa théorie; elle est, au contraire, le point de départ de la nôtre.

Cas où il y a symétrie.

12. Le jeu peut être équitable dans son ensemble, il suffit pour cela que $\psi(\mu) = \Sigma e_i$ soit nul. Si à chaque partie le jeu est équitable, il est nécessairement équitable dans son ensemble. La probabilité de la perte x a alors pour valeur

$$\varpi_{\mu,x} = \frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx.$$

Si l'on change x en $-x$, cette formule ne change pas. Donc, lorsqu'on suppose la continuité, le fait pour un jeu d'être équitable a pour conséquence la symétrie de la probabilité.

La probabilité $\mathfrak{P}_{\mu,x}$ pour que la perte soit supérieure à x, ou *probabilité totale du premier genre*, s'obtient en intégrant l'expression précédente entre x et ∞ et en posant $x^2 = \lambda^2\varphi(\mu)$, on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Cette probabilité se calcule donc facilement par les Tables de Kramp.

13. Considérons l'intervalle $\pm x$ tel que la probabilité pour que l'écart soit inférieur à x soit égale à une quantité donnée u, on doit avoir

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = u.$$

Cet intervalle x, si la probabilité est constante, varie proportionnellement à la racine carrée de la fonction d'instabilité, donc :

Les écarts croissent proportionnellement à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

C'est à cette propriété que la fonction d'instabilité doit son nom.

La fonction $\varphi(\mu)$ croissant constamment, les écarts vont sans cesse en croissant; ils croissent indéfiniment si $\varphi(\mu)$ tend vers l'infini, autrement ils tendent vers la loi asymptote à laquelle correspond $\varphi(\infty)$.

Cas général.

14. La *probabilité du premier genre* $\mathfrak{P}_{\mu,x}$, ou probabilité pour que la perte soit supérieure à x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, s'obtient en intégrant la formule du n° **7** entre x et $+\infty$, et en posant $\psi(\mu)+x=\lambda\sqrt{\varphi(\mu)}$, on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\psi(\mu)+x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Cette probabilité se calcule donc facilement par les Tables de Kramp.

Reprenons la formule du n° **7** et posons $x=x'-\psi(\mu)$, la probabilité relative à x' est

$$\frac{e^{-\frac{x'^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx'.$$

La distribution des probabilités de part et d'autre de la probabilité maxima $[x=-\psi(\mu)]$ est donc analogue à celle que nous avons étudiée (n° **12**), nous pouvons donc dire :

Le gain moyen est égal à l'espérance mathématique totale, les écarts en plus ou en moins sont proportionnels à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

Application à la théorie des épreuves répétées.

15. *La probabilité d'un événement est p_1 à la première épreuve, p_2 à la deuxième, p_3 à la troisième, etc. Quelle est la probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves?*

Supposons qu'un joueur A touche un franc chaque fois que l'événement se produit et qu'il ne touche rien quand l'événement ne se produit pas. La probabilité pour que l'événement se produise z fois est égale à la probabilité pour que le joueur gagne z francs, probabilité qui est exprimée par la formule du n° **9**. Dans le cas considéré

$$\mathcal{E}_i = p_i, \qquad \Sigma\mathcal{E}_i = \Sigma p, \qquad \mathrm{E}_i^2 = p_i,$$
$$2\Sigma(\mathrm{E}_i^2 - \mathcal{E}_i^2) = 2\Sigma(p^2 - p) = 2\Sigma pq$$

en posant $q = 1 - p$. La probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves est donc

$$\frac{e^{-\frac{(\Sigma p - z)^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dz.$$

16. La valeur moyenne, la valeur probable et la valeur la plus probable du nombre des arrivées de l'événement est Σp. Nous représenterons les autres nombres des arrivées de l'événement par leurs différences à Σp; nous poserons $z = \Sigma p + x$. La quantité x est dite l'*écart*.

La formule ci-dessus donne la probabilité pour que z soit compris entre z et $z + dz$, la probabilité pour que l'écart x soit compris entre x et $x + dx$ est donc

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dx.$$

Cette formule attribuée à Poisson n'est donc qu'un cas particulier de celle de Laplace.

Lorsqu'il y a uniformité, c'est-à-dire lorsque les épreuves sont identiques, elle se réduit à

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dx.$$

Je n'ai pas à exposer les conséquences de cette formule, elles sont développées dans le cours de calcul des probabilités de M. H. Poincaré.

Lorsqu'il n'y a pas uniformité, les conclusions à tirer de la formule sont les mêmes, sauf lorsque Σpq tend vers une limite fixe; alors les écarts au lieu d'augmenter indéfiniment avec le nombre des épreuves tendent vers une limite fixe.

PROBABILITES CONNEXES.

17. Jusqu'à présent, nous avons supposé l'indépendance, nous avons admis que les conditions pour une partie étaient indépendantes des résultats antérieurs du jeu.

Lorsqu'on essaie de s'affranchir de cette hypothèse on rencontre des difficultés excessives, de sorte que certaines classes de probabilités connexes semblent seules pouvoir être l'objet d'une théorie.

Nous étudierons ici les probabilités connexes du premier genre. Nous dirons qu'il y a connexité du premier genre quand les conditions à une partie dépendent uniquement de la perte actuelle et du rang occupé par la partie. Nous supposerons d'abord l'uniformité, de sorte que les conditions à une partie ne dépendent que de la perte réalisée quand on commencera cette partie.

18. Si les conditions d'un jeu sont telles que, à chaque partie, l'espérance totale relative à cette partie soit proportionnelle à la perte actuelle et que la fonction d'instabilité soit constante, la probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi_1\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1\frac{1-e^{2a\mu}}{2a}}}\,dx,$$

φ_1 est la fonction d'instabilité relative à une partie, c'est une constante, nous l'avons supposé. a est le coefficient correspondant à l'espérance totale; quand la perte actuelle est x, l'espérance totale pour la partie suivante est ax.

Pour démontrer cette formule, on suppose d'abord que l'intervalle μ est divisé en deux intervalles μ_1, μ_2. Dans chacun d'eux il y a indépendance; dans le premier, l'espérance est nulle, mais dans le second l'espérance est proportionnelle à la perte réalisée dans le premier.

On suppose ensuite que l'intervalle μ est divisé en trois intervalles dans lesquels il y a indépendance. Dans le premier l'espérance est nulle, dans le deuxième, l'espérance est proportionnelle à la perte réalisée à la fin du premier et, dans le troisième, l'espérance est proportionnelle à la perte réalisée à la fin du deuxième.

On suppose ensuite l'intervalle μ divisé en une infinité d'autres, et l'on arrive ainsi à la formule précédente.

19. Le problème considéré paraît particulier, il a cependant une grande importance parce qu'il étudie le cas le plus simple, celui où il existe une cause accélératrice ou retardatrice des écarts, proportionnelle à la valeur même de ces écarts.

Si a est négatif, une perte x rend plus probable une perte plus grande; les conditions du jeu rendent plus rapide la production des écarts, elles sont accélératrices.

Si a est nul, il y a indépendance.

Si a est positif, à une perte x correspond une espérance ax positive qui tend à diminuer cette perte, les conditions du jeu ont donc une influence régulatrice.

Considérons maintenant le cas général des probabilités connexes du premier genre, supposons qu'il y ait symétrie dans l'ensemble (c'est-à-dire que la perte x en μ parties ait même probabilité que le gain x) et supposons qu'il existe une cause tendant à régulariser les écarts. Cette cause se traduit par une espérance mathématique qui, par définition, ne dépend que de l'écart x et qui peut se représenter par le développement : $a_0 + ax + a_2x^2 + \ldots$. Puisqu'il y a symétrie dans l'ensemble, a_0 est nul, et, si l'écart est infiniment petit, l'espérance mathématique se réduit à ax.

Le problème considéré est donc très important, parce qu'il régit tous les cas où les écarts restent très petits.

20. La probabilité pour que la perte soit supérieure à x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'obtient en intégrant la formule ci-dessus entre x et $+\infty$. En posant $x = \lambda\sqrt{\varphi_1 \frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}$, cette probabilité a pour expression

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x\sqrt{2a}}{\sqrt{\varphi_1(1-e^{-2a\mu})}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

elle est donc facilement calculable par les Tables de Kramp.

L'amplitude des écarts est mesurée par la quantité

$$\sqrt{\varphi_1 \frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}$$

dont le carré pourrait être nommé *fonction d'instabilité totale*. Cette fonction ne jouit pas de la propriété d'addition comme lorsqu'il y a indépendance.

21. Nous allons supposer que μ augmente indéfiniment et nous distinguerons trois cas :

1° Les conditions du jeu sont retardatrices ($a > 0$); la distribution des probabilités tend vers la loi asymptote

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{\varphi_1}{2a}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}}}\,dx.$$

Les écarts croissent constamment, mais ils tendent vers des limites fixes; ils décroissent indéfiniment en valeur relative (relativement à μ).

2° Les conditions sont accélératrices ($a < 0$) : Les écarts croissent en valeur absolue et relative, et plus rapidement que toute quantité algébrique.

3° Dans le cas intermédiaire où $a = 0$, nous retrouvons la loi de Bernoulli et la formule de Laplace : Les écarts croissent indéfiniment en valeur absolue, ils décroissent indéfiniment en valeur relative.

22. Supposons qne le joueur A ait perdu actuellement la somme z; la probabilité pour que, en jouant μ_2 nouvelles parties, sa perte totale soit x (ou, si l'on veut, pour que dans ces μ_2 parties il perde la somme $x - z$) est

$$\frac{e^{-\frac{(x - z e^{-a\mu_2})^2}{\frac{\varphi_1}{2a}(1 - e^{-2a\mu_2})}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}(1 - e^{-2a\mu_2})}}\,dx.$$

Si, en effet, on désigne par $\varpi_{\mu_2, z, x}$ cette probabilité, celle-ci doit vérifier l'équation suivante analogue à celle du n° **5**

$$\varpi_{\mu_1+\mu_2, o, x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{\mu_1, o, z}\, \varpi_{\mu_2, z, x}\, dz.$$

En donnant aux quantités ϖ la valeur ci-dessus, l'identification des deux membres ne présente pas de difficulté.

23. *L'urne* A *contient* m *boules blanches et* n *boules noires, l'urne* B *contient* m' *boules blanches et* n' *boules noires; chaque épreuve consiste à tirer une boule de* A *pour la placer dans* B, *en même temps qu'à tirer une boule de* B *pour la placer dans* A. *Quelle est la probabilité pour que, après* μ *épreuves, les urnes* A *et* B *aient une composition donnée?*

Nous dirons que l'écart est x si les nombres des boules blanches et des boules noires contenues dans l'urne A sont respectivement

$$\frac{(m + m')(m + n)}{s} + x, \quad \frac{(n + n')(m + n)}{s} - x,$$

s désignant la somme $m + m' + n + n'$ des boules.

Si l'écart est x, il y a au prochain tirage probabilité

$$\frac{(m + m')(m + n)(n + n')(m' + n') + sx[(m + m')(m + n) + (n + n')(m' + n')] + s^2x^2}{(m + n)(m' + n')s^2}$$

pour qu'il sorte une boule blanche de l'urne A et une noire de l'urne B et, par suite, pour que l'écart diminue d'une unité.

Il y a de même probabilité

$$\frac{(n+n')(m+n)(m+m')(m'+n')-sx[(n+n')(m+n)+(m+m')(m'+n')]+s^2x^2}{(m+n)(m'+n')s^2}$$

pour qu'il sorte une noire de l'urne A et une blanche de l'urne B et, par suite, pour que l'écart augmente d'une unité.

Supposons qu'un joueur H perde une somme égale à l'écart. Pour le tirage considéré son espérance mathématique est égale à la différence des probabilités précédentes; elle a donc pour valeur

$$\frac{sx}{(m+n)(m'+n')},$$

elle est proportionnelle à x.

Nous supposerons que m, m', n, n', μ sont des grands nombres du même ordre. Si les écarts partaient de zéro et si aucune cause retardatrice n'agissait sur eux, ces écarts seraient de l'ordre $\sqrt{\mu}$ (théorie ordinaire des épreuves répétées) négligeables comparativement à μ et, par suite, comparativement à m, m', n, n'. Dans le cas actuel, il en est de même à plus forte raison si l'écart initial

$$z = \frac{mn' - m'n}{s}$$

est (comme nous le supposerons) négligeable comparativement à μ, m, m', n, n'.

Si l'on néglige x auprès de m, m', n, n' dans l'expression de la fonction d'instabilité relative au prochain tirage, celle-ci se réduit à

$$\frac{4(m+m')(n+n')}{s^2}.$$

L'espérance étant proportionnelle à x et la fonction d'instabilité étant constante, la probabilité pour que, en μ épreuves, l'écart ait une valeur donnée x s'obtient en remplaçant dans la formule du n° **22** les quantités a, φ_1 et z par leur valeur; la probabilité de l'écart x est donc

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{s\left[sx-(mn'-m'n)e^{-\frac{s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\right]^2}{2(m+m')(n+n')(m+n)(m'+n')\left[1-e^{-\frac{2s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\right]}}}{\sqrt{2(m+m')(n+n')(m+n)(m'+n')\left[1-e^{-\frac{2s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\right]}}\,dx.$$

Il faut remarquer que la formule du n° **22** est exacte, tandis que celle-ci n'est qu'approchée.

Laplace a essayé de résoudre le problème dont nous venons de nous occuper (*Théorie des Probabilités*, p. 292), il suppose que l'on ait $m'+n'=m+n$ et $m+m'=n+n'$, il établit d'abord une équation aux différences finies partielles qui est exacte, puis il transforme celle-ci par des approximations mal conduites, il arrive ainsi à une équation aux dérivées partielles qui est inexacte.

Sa méthode, convenablement employée, eût permis sinon de résoudre le problème, du moins d'obtenir l'équation aux dérivées partielles qui le régit : Si l'on désigne par U la probabilité d'un écart x en μ épreuves, la fonction U doit vérifier l'équation

$$\frac{e^{-\frac{4\mu}{m+n}}}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{m-n}{m+n}e^{-\frac{2\mu}{m+n}}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial \mu},$$

et plus généralement, quand les urnes sont quelconques,

$$\frac{(m+m')(n+n')}{s^2}e^{-\frac{2s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{mn'-m'n}{(m+n)(m'+n')}e^{-\frac{s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial \mu},$$

l'expression donnée précédemment pour la probabilité satisfait bien à cette équation.

Probabilités non uniformes.

24. Il est possible d'obtenir l'expression des probabilités, quand, à chaque partie, la fonction d'instabilité dépend uniquement de μ, quand elle est, par conséquent, de la forme $\lambda(\mu)$ et quand, d'autre part, l'espérance mathématique pour une partie est égale au produit de la perte totale x réalisée avant cette partie par une fonction de μ, $f(\mu)$.

Le cas précédemment traité supposait $\lambda(\mu)$ et $f(\mu)$ constants.

En suivant un raisonnement analogue à celui du n° **18**, on est conduit à ce résultat.

La probabilité de la perte x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{F(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{F(\mu)}}\,dx,$$

$F(\mu)$ étant l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}+2f(\mu)F=\lambda(\mu).$$

25. Une urne contient m boules blanches et n boules noires; on en extrait μ boules au hasard sans les remettre dans l'urne; on dit que l'écart est x si en μ tirages il est sorti $\frac{\mu m}{m+n}+x$ boules blanches. Quelle est la probabilité de l'écart x?

Supposons qu'un joueur A perde une somme égale à l'écart, supposons encore que μ tirages aient été effectués et que l'écart soit x.

Au tirage suivant il y a probabilité

$$\frac{(m-x)(m+n)-m\mu}{(m+n)(m+n-\mu)}$$

pour qu'il sorte une blanche et, par suite, pour que l'écart augmente de la quantité $\frac{n}{m+n}$, il y a de même probabilité

$$\frac{(m+n)(n+x)-n\mu}{(m+n)(m+n-\mu)}$$

pour qu'il sorte une noire et qu'alors l'écart diminue de la quantité $\frac{m}{m+n}$.

L'espérance mathématique du joueur A pour le tirage considéré est donc

$$\frac{x}{m+n-\mu},$$

elle est proportionnelle à x et elle est de la forme $x f(\mu)$.

La fonction d'instabilité a pour valeur

$$\frac{2[(m+n)(m-x)-m\mu][(m+n)(n+x)-n\mu]}{(m+n)^2(m+n-\mu)^2}.$$

Nous supposerons que m, n, μ sont de grands nombres du même ordre. Si aucune cause retardatrice n'existait, c'est-à-dire si à chaque épreuve la probabilité de sortie d'une boule blanche était constante, l'écart x serait de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ (théorie ordinaire des épreuves répétées) et, par suite, il serait négligeable par rapport à μ. Puisque, dans le cas actuel, les écarts tendent d'eux-mêmes à diminuer, x est à plus forte raison négligeable comparativement à μ, à m ou à n. L'expression de la fonction d'instabilité se réduit à

$$\frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

L'espérance mathématique étant de la forme $x f(\mu)$ et la fonction d'instabilité de la forme $\lambda(\mu)$, on peut appliquer au problème qui nous occupe la formule du n° **24**.

La probabilité de l'écart x en μ épreuves est donc

$$\frac{(m+n)\sqrt{m+n}\, e^{-\frac{x^2}{2\mu}\frac{(m+n)^2}{mn}\frac{m+n}{m+n-\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu mn(m+n-\mu)}}\,dx.$$

Cette formule est connue, mais il faut remarquer qu'elle constitue une simple application de notre théorie; elle sera, d'ailleurs, généralisée comme la théorie elle-même dans la suite de cette étude.

PROBABILITÉS DU SECOND GENRE.

26. D'après notre classification des probabilités, celles-ci sont dites *du second genre* quand la variable qui exprime la somme gagnée ou perdue par un joueur est limitée dans un sens.

Nous allons donc traiter le cas où un joueur A qui possède seulement la somme m, que nous appellerons *sa fortune*, joue contre des adversaires de fortune infinie. Chacun des joueurs devant régler les différences après chaque partie, il pourra arriver un moment où le joueur A aura perdu la somme m qu'il possède, nous dirons alors qu'il est ruiné.

Les probabilités de ruine du joueur A dépendent des conditions du jeu qui lui sont propres et non du nombre de ses adversaires. Si le joueur A a un seul adversaire B, le sort de B se déduit immédiatement de celui de A.

Nous aurons à résoudre les questions suivantes :

1° Quelle est la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ pour que le joueur A soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, ou, en d'autres termes, quelle est la probabilité pour que la perte m soit atteinte pour la première fois à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

La probabilité $\Pi_{\mu,m}$ est la probabilité élémentaire du second genre.

2° Quelle est la probabilité $P_{\mu,m}$ pour que la ruine se produise en μ parties? $P_{\mu,m}$ est la probabilité du second genre.

Il est évident que la connaissance d'une des probabilités P et Π entraîne la connaissance de l'autre, car on a

$$P_{\mu,m} = \int_0^{\mu} \Pi_{\mu,m}\, d\mu \qquad \text{et} \qquad \Pi_{\mu,m} = \frac{\partial P_{\mu,m}}{\partial \mu}.$$

3° En supposant qu'aucune limite ne soit assignée pour la durée du jeu, quelle est la durée moyenne de celui-ci et la probabilité totale $P_{\infty,m}$ de ruine du joueur?

4° Quelle est la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde une somme donnée?

5° Quelle est l'espérance mathématique du joueur A ?

Cas où il y a symétrie.

27. Nous étudierons d'abord le cas où le jeu est équitable et *non uniforme*.

Nous avons vu (nº **12**) que, si l'on suppose la continuité, le fait pour un jeu d'être équitable a pour conséquence la symétrie des probabilités. Il en résulte que certains problèmes relatifs aux jeux équitables peuvent se résoudre par simple raison de symétrie.

En désignant, comme précédemment (nº **12**), par $\mathfrak{P}_{\mu,m}$ la probabilité pour que le joueur perde une somme supérieure à m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie et par $\mathrm{P}_{\mu,m}$ la probabilité pour qu'il soit ruiné avant μ parties, on a

$$\mathrm{P}_{\mu,m} = 2\mathfrak{P}_{\mu,m}.$$

En effet, la perte m ne peut être dépassée au bout de μ parties sans l'avoir été antérieurement, la probabilité $\mathfrak{P}$ est donc égale à la probabilité P multipliée par la probabilité pour que la perte m ayant été atteinte avant μ parties soit dépassée à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire multipliée par $\frac{1}{2}$, on a donc

$$\mathfrak{P}_{\mu,m} = \tfrac{1}{2}\mathrm{P}_{\mu,m}.$$

On en déduit

$$\mathrm{P}_{\mu,m} = 2\mathfrak{P}_{\mu,m} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

La probabilité $\mathrm{P}_{\mu,m}$ se calcule donc facilement par les Tables de Kramp. On doit remarquer qu'elle est indépendante de l'ordre des parties. (Si le jeu est uniforme et si μ tend vers l'infini, $\mathrm{P}_{\mu,m}$ tend vers un, la probabilité de la ruine est alors une certitude.)

28. La probabilité élémentaire $\Pi_{\mu,m}$ pour que la ruine ait lieu exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour valeur

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{\partial \mathrm{P}_{\mu,m}}{\partial\mu} = \frac{m\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\,d\mu,$$

cette probabilité est proportionnelle à la fonction d'instabilité $\varphi'(\mu)$ de la dernière partie et indépendante de l'ordre des parties antérieures.

Quelques intégrales.

29. Le perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m est plus grand que m_1. La probabilité pour que la perte m soit atteinte pour la première fois à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{0,\mu_1,m_1} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être atteinte pour la première fois à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, on a, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\Pi_{0,\mu,m} = \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu} \Pi_{0,\mu_1,m_1} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m-m_1}\, d\mu_1,$$

ou, en remplaçant les quantités Π par leur valeur,

$$\frac{m\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}} = \int_0^{\mu} \frac{m_1\varphi'(\mu_1)\, e^{-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}}\; \frac{(m-m_1)\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{(m-m_1)^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\, d\mu_1;$$

cette formule peut être obtenue, quoique péniblement, par les procédés ordinaires de l'Analyse.

Mais le calcul des probabilités permet sa généralisation immédiate : on peut supposer la perte m divisée en un nombre arbitraire d'intervalles égaux ou non : $m_n, m_{n-1}, \ldots, m_1$, de sorte que

$$m = m_n + m_{n-1} + \ldots + m_1,$$

le premier étant atteint à la $(\mu_{n-1})^{\text{ième}}$ partie, le second à la $(\mu_{n-2})^{\text{ième}}$ partie, le troisième à la $(\mu_{n-3})^{\text{ième}}$ partie, ..., on aura alors

$$\Pi_{\mu,(m_1+m_2+\ldots+m_n)} = \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu}\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1}\cdots\int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}}\int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}} \Pi_{0,\mu_{n-1},m_n}$$
$$\times\, \Pi_{\mu_{n-1},\mu_{n-2},m_{n-1}} \times\ldots\times \Pi_{\mu_2,\mu_1,m_2} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m_1}\, d\mu_{n-1}\, d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1$$

ou, en remplaçant les quantités Π par leur valeur,

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)\,\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}$$

$$=\int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu}\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1}\cdots\int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}}\int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}}\frac{m_1 m_2\ldots m_n\,\varphi'(\mu)\,\varphi'(\mu_1)\,\varphi'(\mu_2)\ldots\varphi'(\mu_{n-1})}{(\sqrt{\pi})^n}$$

$$\times\frac{e^{-\frac{m_n^2}{\varphi(\mu_{n-1})}-\frac{m_{n-1}^2}{\varphi(\mu_{n-2})-\varphi(\mu_{n-1})}-\frac{m_{n-2}^2}{\varphi(\mu_{n-3})-\varphi(\mu_{n-2})}-\ldots-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\{\varphi(\mu_{n-1})[\varphi(\mu_{n-2})-\varphi(\mu_{n-1})][\varphi(\mu_{n-3})-\varphi(\mu_{n-2})]\ldots[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]\}^{\frac{3}{2}}}\,d\mu_{n-1}\,d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1.$$

La valeur de cette intégrale dont l'ordre de multiplicité est arbitraire est obtenue sans aucun calcul.

Je rappelle que la fonction φ (dont φ' est la dérivée) est arbitraire sous la seule condition d'être positive et croissante.

30. La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m est plus grand que m_1. La probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été, pour la première fois, atteinte à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{0,\mu_1,m_1}\times\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être atteinte pour la première fois à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, on a, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{0,\mu,m}=\int_0^{\mu}\Pi_{0,\mu_1,m_1}\times\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}\,d\mu_1$$

ou, en remplaçant les quantités ϖ et Π par leur valeur,

$$\frac{e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}=\int_0^{\mu}\frac{m_1\varphi'(\mu_1)\,e^{-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}}\,\frac{e^{-\frac{(m-m_1)^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\,d\mu_1.$$

Sans qu'aucun nouveau calcul soit nécessaire, on peut généraliser cette formule comme nous l'avons fait précédemment; on obtient ainsi une intégrale multiple analogue à celle du n° **29**.

Si, dans la dernière intégrale simple, on pose

$$y^2 = \frac{a(m-m_1)}{m_1} \frac{\varphi(\mu_1)}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)},$$

on obtient l'intégrale connue

$$\int_0^\infty e^{-y^2-\frac{a^2}{y^2}} \frac{dy}{y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2a};$$

en posant dans cette intégrale $xy = a$, elle devient

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

Cas général.

51. Nous ne supposerons pas que le jeu soit équitable ni uniforme. Sans traiter le cas le plus général où il y aurait indépendance absolue, c'est-à-dire où l'espérance et la fonction d'instabilité seraient individuellement quelconques et variables à chaque partie, nous supposerons que la fonction d'instabilité soit variable et quelconque et que l'espérance lui soit constamment proportionnelle.

En désignant comme précédemment par $\varphi(\mu)$ la fonction d'instabilité et par $\psi(\mu)$ l'espérance totale, nous aurons donc $\psi(\mu) = k\varphi(\mu)$, k étant un coefficient.

La fonction $\varphi(\mu)$ étant constamment positive et croissante, l'espérance $k\varphi(\mu)$ sera constamment croissante ou décroissante suivant le signe de k.

Si k est nul, le jeu est équitable et non uniforme, le problème considéré est donc plus général que celui que nous venons de traiter.

Lorsque la fonction $\varphi(\mu)$ est linéaire, le jeu considéré est uniforme et si ψ_1 et φ_1 désignent l'espérance et la fonction d'instabilité relatives à une partie, on a

$$\varphi(\mu) = \mu\varphi_1, \qquad \psi(\mu) = \mu\psi_1 \qquad \text{et} \qquad k = \frac{\psi_1}{\varphi_1}.$$

Le cas le plus important de beaucoup, celui du jeu uniforme quelconque, n'est donc qu'un cas particulier de celui que nous étudions.

32. La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m_1 est inférieur à m.

La probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{0,\mu_1,m_1} \times \varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être atteinte à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, la probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{0,\mu,m} = \int_0^{\mu} \Pi_{0,\mu_1,m_1} \times \varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

33. Les probabilités ϖ sont connues (n° **7**), on a, par exemple, puisque $\psi(\mu) = k\varphi(\mu)$,

$$\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1} = \frac{e^{-\frac{\{k[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]+m-m_1\}^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}.$$

Il est facile de voir que l'équation conditionnelle est vérifiée si l'on a

$$\Pi_{0,\mu,m} = \frac{m\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}};$$

le second membre de l'équation conditionnelle peut en effet s'écrire :

$$e^{-[k^2\varphi(\mu)+2mk]} \int^{\mu} \frac{m_1\varphi'(\mu_1)\, e^{-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}} \frac{e^{-\frac{(m-m_1)^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\, d\mu_1,$$

l'intégrale est celle que nous avons déterminée (n° **30**), et, en substituant sa valeur dans l'équation conditionnelle, celle-ci devient identique.

La probabilité de ruine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire la *probabilité élémentaire du second genre*, a donc pour expression

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}},$$

elle est indépendante de l'ordre des parties qui précèdent la $\mu^{\text{ième}}$ et proportionnelle à la fonction d'instabilité $\varphi'(\mu)$ de la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Probabilité totale.

34. La probabilité pour que la ruine ait lieu en μ parties s'obtient en intégrant l'expression précédente entre zéro et μ.

Par des changements de variables on obtient, quel que soit le signe de k,

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{m+k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-4mk}\int_{\frac{m-k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Telle est l'expression de la *probabilité totale du second genre*.

Si l'on différentie $P_{\mu,m}$ par rapport à μ, on obtient $\Pi_{\mu,m}$, résultat évident.

La valeur de $P_{\mu,m}$ se calcule immédiatement par les Tables de Kramp.

Lorsque le jeu est uniforme et quelconque, on a

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}}\int_{\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Lorsque le jeu est équitable, $k=0$ et la valeur de $P_{\mu,m}$ se réduit à celle que nous avons déjà obtenue (n° **27**).

35. Supposons qu'aucune limite ne soit fixée pour la durée du jeu; si celui-ci est avantageux, c'est-à-dire si k est positif et si de plus $\varphi(\mu)$

croît vers l'infini avec μ, on a

$$P_{\infty,m} = e^{-4mk}.$$

Cette probabilité ne dépend pas de la fonction $\varphi(\mu)$.

Si k est négatif et si $\varphi(\mu)$ croît indéfiniment, on a $P_{\infty,m} = 1$.

Enfin, si $\varphi(\mu)$ ne tend pas vers l'infini avec μ, on a

$$P_{\infty,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+k\varphi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{4mk} \int_{\frac{m-k\varphi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Si, en particulier, le jeu est uniforme, la probabilité tend vers $e^{4m\frac{\psi_1}{\varphi_1}}$ ou vers un, suivant que ψ_1 est positif ou négatif (ou nul).

Durée moyenne.

56. La durée moyenne d'un jeu est l'espérance mathématique d'un joueur H qui toucherait une somme égale au nombre des parties jouées.

Nous supposons qu'aucune limite ne soit fixée pour la durée du jeu. Si k est positif, c'est-à-dire si le jeu est avantageux, la durée moyenne est infinie, car nous venons de voir qu'il existe alors une probabilité finie pour que le jeu ne se termine pas. Si k est négatif ou nul, la durée moyenne est exprimée par l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \mu \Pi\, d\mu = \int_0^{\infty} \frac{\mu m \varphi'(\mu) e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\,d\mu.$$

On ne peut la calculer sans préciser la fonction $\varphi(\mu)$. Si le jeu est uniforme, en remplaçant $\varphi(\mu)$ par $\mu\varphi_1$ et k par $\frac{\psi_1}{\varphi_1}$ et en posant $m^2 = \mu\varphi_1\lambda^2$, l'intégrale se ramène à l'une de celles que nous avons établies et la durée moyenne a pour valeur $-\frac{m}{\psi_1}$.

Lorsque le jeu est équitable et uniforme, la durée moyenne est infinie.

Distribution des probabilités.

37. La connaissance de la probabilité Π, pour que la ruine ait lieu à une partie indiquée, ne résout pas d'une façon complète le problème que nous nous sommes proposé; il nous reste à étudier les probabilités relatives aux cas où le joueur n'est pas ruiné.

Nous allons donc chercher la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur ait perdu la somme $m-y$.

Si le joueur ne pouvait être ruiné, la probabilité pour que sa perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait

$$\varpi_{0,\mu,m-y} = \frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m-y]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}.$$

La probabilité cherchée est égale à cette quantité diminuée d'une quantité correspondant à la possibilité de la ruine du joueur avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, quantité que nous allons calculer.

Si le joueur supposé ruiné à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie pouvait continuer à jouer, la probabilité, pour que, dans les $\mu-\mu_1$ parties suivantes, il gagne la somme y, et pour que, par suite, sa perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, serait $\varpi_{\mu_1,\mu,-y}$.

D'autre part, la probabilité pour que le joueur soit ruiné à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie est $\Pi_{\mu_1,m}\,d\mu_1$.

La possibilité pour le joueur d'être ruiné à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie diminue donc, d'après le principe de la probabilité composée, la probabilité $\varpi_{0,\mu,m-y}$ de la quantité $\Pi_{\mu_1,m}\varpi_{\mu_1,\mu,-y}\,d\mu_1$, et, puisque μ_1 peut prendre toutes les valeurs de zéro à μ, la probabilité cherchée est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{0,\mu,m-y} - \int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1,m} \times \varpi_{\mu_1,\mu,-y}\,d\mu_1.$$

L'intégrale est une de celles que nous avons étudiées (n° **30**). Finalement, la probabilité pour que la perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est

$$\frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m-y]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}} - \frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m+y]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}} e^{4ky},$$

on peut l'écrire

$$\varpi_{\mu,m-y} - \varpi_{\mu,m+y} e^{4ky}.$$

Nous connaissons maintenant les probabilités relatives à tous les cas possibles, c'est-à-dire la distribution des probabilités.

Lorsque le jeu est équitable, la formule se réduit à $\varpi_{\mu,m-y} - \varpi_{\mu,m+y}$; elle peut être obtenue par simple raison de symétrie. (Consulter mon Ouvrage *Sur la théorie de la spéculation*, p. 65.)

La distribution des probabilités étant connue, il est facile par des intégrations de calculer la probabilité pour que le joueur gagne, la probabilité pour qu'il perde une somme comprise entre zéro et m, et enfin l'espérance positive et l'espérance négative.

Par des changements de variables très simples, on rend les formules calculables par les Tables de Kramp.

Probabilités connexes du second genre.

38. Nous dirons qu'il y a connexité du second genre quand les conditions du jeu à chaque partie dépendent de la perte maxima antérieure du joueur.

Nous supposerons que le jeu soit uniforme, équitable et caractérisé à chaque partie par la fonction d'instabilité $\varphi(x)$ relative à cette partie, x désignant la perte maxima atteinte avant la partie considérée.

Si le joueur possède la fortune m, la probabilité pour que sa ruine ait lieu à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est exprimée par la formule

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{\int_0^m \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}} e^{-\frac{\left[\int_0^m \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2}{\mu}} d\mu.$$

Pour démontrer cette formule, on suppose d'abord que l'intervalle zéro, m est divisé en deux intervalles : zéro, m_1, et m_1, m, la fonction d'instabilité ayant la valeur φ_1 tant que la perte est inférieure à m_1, puis la valeur $\varphi(m_1)$ dès que la perte m_1 est atteinte.

La probabilité pour que la ruine ait lieu à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie, est, d'après le principe des probabilités composées,

$$\Pi_{\mu_1, m_1, \varphi_1} \times \Pi_{\mu - \mu_1, m - m_1, \varphi(m_1)},$$

et la probabilité pour que la ruine ait lieu à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est, d'après le principe des probabilités totales,

$$\int_0^\mu \Pi_{\mu_1, m_1, \varphi_1} \times \Pi_{\mu - \mu_1, m - m_1, \varphi(m_1)}\, d\mu_1.$$

L'intégration s'effectue par les formules que nous avons établies au n° **29**.

On suppose ensuite que l'intervalle zéro, m est divisé en trois, en quatre... intervalles, et finalement en une infinité. On obtient ainsi la formule ci-dessus.

39. La probabilité $P_{\mu,m}$, pour que la ruine ait lieu en μ parties, s'obtient en intégrant $\Pi_{\mu,m}$ entre zéro et μ. En posant

$$\frac{1}{\mu}\left[\int_0^m \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2 = \lambda^2,$$

on a

$$P_{\mu,m} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^m \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

Cette formule se calcule par les Tables de Kramp dès que l'intégration de la limite supérieure est effectuée.

Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, $P_{\infty,m}$ a pour valeur un, la ruine du joueur est certaine. La durée moyenne du jeu est infinie.

40. Nous supposons maintenant que le joueur possède une fortune infinie, qu'il joue à un jeu équitable et que, à chaque partie, les conditions du jeu dépendent de la perte maxima obtenue avant cette partie. Quelle est la probabilité pour que ce joueur perde la somme z en jouant μ parties?

Nous désignerons comme ci-dessus par $\varphi(x)$ la fonction d'instabilité relative à une partie quand la perte maxima antérieure est x.

Une analyse qu'il serait trop long de reproduire conduit au résultat suivant : La probabilité pour que le joueur ait perdu la somme z en μ parties est

$$\int_z^\infty \frac{4\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x-z}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}\,\varphi(x)} e^{-\frac{1}{\mu}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x-z}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2} dx.$$

La probabilité pour que le joueur ait gagné la somme z' est

$$\int_0^\infty \frac{4\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x+z'}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}\,\varphi(x)} e^{-\frac{1}{\mu}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x+z'}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2} dx.$$

Ces deux formules donnent la solution du problème proposé. Supposons, par exemple, que $\varphi(x)$ ait une valeur constante φ_1 dans l'intervalle zéro, m et que $\varphi(x)$ devienne nul (et, par suite, que le jeu cesse) dès que x atteint la valeur m. Pour obtenir la probabilité du gain z', on doit considérer la seconde formule et effectuer l'intégration entre zéro et m. En posant dans le résultat $y = m + z'$, on obtient la probabilité pour que la perte soit $m - y$, c'est

$$\frac{e^{-\frac{(m-y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} - \frac{e^{-\frac{(m+y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} = \varpi_{\mu,m-y} - \varpi_{\mu,m+y},$$

résultat précédemment obtenu (nº **37**).

41. Jusqu'ici, nous avons supposé le jeu équitable; nous ne traiterons relativement aux jeux non équitables que deux problèmes : celui qui consiste à chercher la probabilité totale de ruine quand aucune limite n'est assignée pour la durée du jeu et celui qui a pour but de déterminer la durée moyenne du jeu quand aucune limite n'est fixée pour cette durée.

Occupons-nous du premier problème : le jeu est défini pour une partie par les quantités $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ qui expriment l'espérance et la fonction d'instabilité relatives à cette partie. x est la perte maxima antérieure à la partie considérée.

La probabilité totale de ruine est

$$P_{\infty,m} = e^{-4\int_0^m \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}dx}.$$

Dans l'intégrale doivent figurer uniquement des éléments positifs; ceux qui sont négatifs doivent être considérés comme nuls.

Pour démontrer cette formule, on suppose que l'intervalle zéro, m est divisé en deux intervalles, puis en trois, ..., puis en une infinité. Le raisonnement est analogue à celui du n° **38**.

42. Nous allons maintenant déterminer la durée moyenne : Il faut d'abord remarquer que, si les conditions du jeu sont telles que celui-ci puisse, à un moment quelconque, devenir équitable ou avantageux, la durée moyenne est infinie (n° **36**).

Nous devons donc nous borner au cas où le jeu est constamment désavantageux; alors la durée moyenne est exprimée par l'intégrale

$$-\int_0^m \frac{dx}{\psi(x)}.$$

Pour le démontrer, on suppose l'intervalle zéro, m divisé en un nombre infini d'intervalles dx; les durées moyennes relatives à chacun de ces intervalles s'ajoutent; or, la durée moyenne entre les pertes maxima x et $x + dx$ est $-\frac{dx}{\psi(x)}$ (n° **36**); la durée moyenne totale a donc bien la valeur ci-dessus.

PROBABILITÉS DU TROISIÈME GENRE.

43. D'après notre classification, on dit que les probabilités sont du troisième genre quand elles sont relatives à une variable x qui exprime les gains ou les pertes d'un joueur, cette quantité x étant limitée dans les deux sens.

Nous supposerons donc un joueur A possédant la fortune m, jouant contre un adversaire B possédant la fortune n, chacun des joueurs devant régler les différences après chaque partie.

Si μ parties doivent être jouées au maximum, trois cas peuvent se présenter : Le joueur A peut être ruiné, le joueur B peut être ruiné, ou enfin les deux joueurs peuvent n'être ruinés ni l'un ni l'autre.

Les principaux problèmes que nous aurons à résoudre sont les suivants :

1° Quelle est la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ pour que le joueur A soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie?

La probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ est la probabilité élémentaire du troisième genre.

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'exprime par $\Omega_{\mu,n,m}$.

$\Pi_{\mu,m,n}$ et $\Omega_{\mu,n,m}$ se déduisent l'un de l'autre en substituant m à n et n à m, et en remarquant que les conditions du jeu relatives au joueur B sont l'inverse des conditions relatives au joueur A.

Lorsque le jeu est symétrique, on peut écrire simplement $\Pi_{\mu,n,m}$ au lieu de $\Omega_{\mu,n,m}$.

La probabilité pour que le jeu prenne fin à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est $\Pi_{\mu,m,n} + \Omega_{\mu,n,m}$.

2° Quelle est la probabilité $P_{\mu,m,n}$ pour que le joueur A soit ruiné en μ parties? $P_{\mu,m,n}$ est la probabilité du troisième genre.

Les probabilités $P_{\mu,m,n}$ et $\Pi_{\mu,m,n}$ se déduisent l'une de l'autre, on a

$$P_{\mu,m,n} = \int_0^\mu \Pi_{\mu,m,n}\,d\mu \qquad \text{et} \qquad \Pi_{\mu,m,n} = \frac{\partial P_{\mu,m,n}}{\partial \mu}.$$

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné en μ parties se désigne par $Q_{\mu,n,m}$, on a évidemment

$$Q_{\mu,n,m} = \int_0^\mu \Omega_{\mu,n,m}\,d\mu, \qquad \text{et} \qquad \Omega_{\mu,n,m} = \frac{\partial Q_{\mu,n,m}}{\partial \mu}.$$

La probabilité pour que le jeu prenne fin avant μ parties est

$P_{\mu,m,n} + Q_{\mu,n,m}$. La probabilité pour que le jeu ne soit pas terminé en μ parties est $1 - P_{\mu,m,n} - Q_{\mu,n,m}$.

Probabilité élémentaire.

44. Nous supposerons que le jeu dont il s'agit est celui qui a été décrit au n° **31** et qui est plus général qu'un jeu uniforme quelconque et qu'un jeu équitable non uniforme.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Le joueur A *possédant la somme* m *et le joueur* B *la somme* n, *quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie par la ruine du joueur* A?

Si le joueur B possédait une fortune infinie, la probabilité de ruine du joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait (n° **33**)

$$\Pi_{\mu,m,\infty} = \frac{m\varphi'(\mu)e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}.$$

Lorsque le joueur B possède la somme n, la probabilité cherchée a pour valeur

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} &- e^{4nk}\Pi_{\mu,m+2n,\infty} \\ &+ e^{(4m+4n)k}\,\Pi_{\mu,3m+2n,\infty} - e^{(4m+8n)k}\,\Pi_{\mu,3m+4n,\infty} \\ &+ e^{(8m+8n)k}\,\Pi_{\mu,5m+4n,\infty} - e^{(8m+12n)k}\,\Pi_{\mu,5m+6n,\infty} + \dots\end{aligned}$$

En effet, la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ est égale à la probabilité $\Pi_{\mu,m,\infty}$ diminuée de la probabilité relative aux cas où le joueur B est ruiné avant la fin des μ parties.

Le joueur B peut être ruiné à la partie d'ordre μ_1, ($\mu_1 < \mu$), cette éventualité, d'après le principe de la probabilité composée diminue $\Pi_{\mu,m,\infty}$ de la quantité $\Omega_{\mu_1,n,m} \times \Pi_{\mu_1,\mu,(n+m),\infty}$, car, si le joueur B, ruiné à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie, pouvait continuer à jouer, la probabilité pour qu'il ruinât le joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait $\Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}$.

La ruine du joueur B pouvant avoir lieu depuis $\mu_1 = 0$ jusqu'à

$\mu_1 = \mu$, la possibilité de la ruine antérieure du joueur B diminue la probabilité $\Pi_{\mu,m,\infty}$ de la quantité

$$\int_0^\mu \Omega_{\mu_1,n,m} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}\, d\mu_1.$$

On doit donc avoir

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \int_0^\mu \Omega_{\mu_1,n,m} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

On vérifie sans grande difficulté qu'elle devient identique si l'on remplace les quantités Π par leur valeur. $\Omega_{\mu_1,n,m}$ s'obtient en remplaçant dans l'expression de $\Pi_{\mu_1,m,n}$ m par n, n par m et k par $-k$.

L'équation contient une suite d'intégrales analogues à celles que nous avons étudiées (n° **29**) ; je ne crois pas utile d'en écrire les formules, qui sont quelque peu compliquées.

L'expression que nous avons donnée pour $\Pi_{\mu,m,n}$ est donc exacte, on doit remarquer qu'elle est proportionnelle à $\varphi'(\mu)$, c'est-à-dire à l'instabilité de la dernière partie et qu'elle est indépendante de l'ordre des parties antérieures.

On voit que les probabilités du troisième genre s'expriment par des séries de probabilités du second genre.

Lorsque le jeu est équitable, $k = 0$ et l'expression de la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ se réduit à

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty} + \Pi_{\mu,3m+2n,\infty} - \ldots,$$

formule que l'on peut démontrer par simple raison de symétrie, en suivant un raisonnement analogue à celui que j'ai employé autrefois (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1901, p. 201).

Probabilité totale.

45. *Le joueur* A *possédant la somme* m *et le joueur* B *la somme* n, *quelle est la probabilité pour que le jeu se termine avant* μ *parties par la ruine du joueur* A ?

La probabilité cherchée, dite *probabilité du troisième genre* $P_{\mu,m,n}$, s'obtient en intégrant $\Pi_{\mu,m,n}$ entre zéro et μ; on a donc

$$\begin{aligned} P_{\mu,m,n} = P_{\mu,m,\infty} - e^{4nk} P_{\mu,m+2n,\infty} + e^{(4m+4n)k} P_{\mu,3m+2n,\infty} \\ - e^{(4m+8n)k} P_{\mu,3m+4n,\infty} + e^{(8m+8n)k} P_{\mu,5m+4n,\infty} - e^{(8m+12n)k} P_{\mu,5m+6n,\infty} + \ldots \end{aligned}$$

Les quantités $P_{\mu,z,\infty}$ se calculent par la formule du n° **34**

$$P_{\mu,z,\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z+k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{e^{-4kz}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z-k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

dont la valeur numérique s'obtient par les Tables de Kramp.

46. Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, quelle est la probabilité de la ruine du joueur A ?

Si $\varphi(\mu)$ tend, lorsque μ devient infini, vers une limite fixe, $\varphi(\infty)$, les formules précédentes font connaître la valeur de $P_{\infty,m,n}$, il suffit d'y remplacer $\varphi(\mu)$ par $\varphi(\infty)$.

Si $\varphi(\mu)$ tend vers l'infini (comme nous le supposerons toujours dans la suite) et si le jeu est avantageux pour le joueur A, $(k > 0)$, on a

$$P_{\infty,z,\infty} = e^{-4kz},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P_{\infty,m,n} = e^{-4mk} - e^{-(4m+4n)k} + e^{-(8m+4n)k} \\ - e^{-(8m+8n)k} + e^{-(12m+8n)k} - \ldots \end{aligned}$$

Les termes de rang pair forment une progression géométrique de même que les termes de rang impair. La probabilité de ruine est

$$P_{\infty,m,n} = \frac{e^{-4mk} - e^{-4(m+n)k}}{1 - e^{-4(m+n)k}}.$$

La probabilité de ruine du joueur B est

$$Q_{\infty,n,m} = \frac{1 - e^{-4mk}}{1 - e^{-4(m+n)k}}.$$

Ces probabilités ne dépendent pas de la fonction $\varphi(\mu)$. Si k est négatif, le jeu avantage le joueur B et les probabilités s'obtiennent sans plus de difficulté.

47. On est conduit au même résultat en employant le raisonnement suivant, applicable également lorsqu'il y a discontinuité.

Nous supposons que le jeu est uniforme et qu'il avantage le joueur A. Si le joueur B avait une fortune infinie, la probabilité de ruine du joueur A serait $P_{\infty,m,\infty}$.

Pour obtenir la probabilité $P_{\infty,m,n}$ de ruine du joueur A quand le joueur B possède la somme n, on doit de $P_{\infty,m,\infty}$ retrancher les probabilités correspondant aux cas où le joueur B d'abord ruiné aurait ensuite ruiné le joueur A si le jeu avait pu se continuer, c'est-à-dire retrancher

$$(1 - P_{\infty,m,n})P_{\infty,m+n,\infty}.$$

En effet, aucune limite n'étant assignée pour la durée du jeu, la probabilité pour que B soit ruiné avant A est la probabilité totale de ruine de B, c'est-à-dire $1 - P_{\infty,m,n}$, et, d'autre part, la probabilité de ruine du joueur A quand il possède la somme $m + n$ est bien $P_{\infty,m+n,\infty}$. On a donc

$$P_{\infty,m,n} = \frac{P_{\infty,m,\infty} - P_{\infty,m+n,\infty}}{1 - P_{\infty,m+n,\infty}}.$$

Cette formule est exacte qu'il y ait continuité ou non, elle n'exige pas la connaissance des probabilités $P_{\infty,z,\infty}$.

S'il n'y avait pas uniformité, la formule serait encore exacte, mais il faudrait d'abord démontrer que $P_{\infty,m,n} + Q_{\infty,n,m} = 1$ et que, de plus, $P_{\infty,z,\infty}$ est indépendant de μ.

Si, dans la formule qui précède, on remplace les quantités P par leur valeur (n° 35), on obtient le même résultat que précédemment.

48. Lorsque le jeu est équitable, $k = 0$ et les formules deviennent indéterminées; en leur appliquant la règle connue, on obtient

$$P_{\infty,m,n} = \frac{n}{m+n}, \qquad Q_{\infty,n,m} = \frac{m}{m+n}.$$

Ce résultat se démontre directement d'une manière fort simple par la considération de l'espérance mathématique. Le jeu étant équitable, l'espérance du joueur A est nulle, or cette espérance est

$$nP_{\infty,n,m} - mQ_{\infty,n,m};$$

comme $P_{\infty,m,n} + Q_{\infty,n,m}$ est un, le résultat précédent est démontré.

Il serait encore vrai dans le cas d'un jeu constamment équitable et connexe, après cependant que l'on aurait démontré l'égalité

$$P_{\infty,m,n} + Q_{\infty,n,m} = 1.$$

Durée moyenne.

49. Supposons que le jeu soit uniforme et désavantageux pour le joueur A, ($\psi_1 < 0$).

Soit $U_{m,n}$ la durée moyenne cherchée; si le joueur B avait une fortune infinie, la durée moyenne du jeu serait $U_{m,\infty}$. Le fait de la ruine possible du joueur B diminue cette durée moyenne $U_{m,\infty}$ d'une quantité que nous allons déterminer.

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné est $Q_{\infty,n,m}$ et au moment où il est ruiné, s'il pouvait continuer à jouer possédant une fortune infinie, la durée moyenne du jeu serait $U_{m+n,\infty}$.

La possibilité de la ruine du joueur B diminue donc la durée moyenne de la quantité $Q_{\infty,n,m} \times U_{m+n,\infty}$. Cette durée moyenne est donc

$$U_{m,n} = U_{m,\infty} - Q_{\infty,n,m} U_{m+n,\infty}.$$

Cette formule, dont on peut remarquer la simplicité, ne suppose pas la connaissance des quantités $U_{m,\infty}$, $U_{m+n,\infty}$ ni celle des probabilités P et Q.

Elle est exacte, que les probabilités soient continues ou discontinues.

Les quantités $U_{m,\infty}$ et $U_{m+n,\infty}$ ont respectivement pour valeur $-\dfrac{m}{\psi_1}$ et $-\dfrac{m+n}{\psi_1}$. On a (n° **46**)

$$Q_{\infty,n,m} = \frac{e^{\frac{4n\psi_1}{\varphi_1}} - e^{\frac{4(m+n)\psi_1}{\varphi_1}}}{1 - e^{\frac{4(m+n)\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule précédente donne l'expression explicite de la durée moyenne.

Lorsque le jeu est équitable, $\psi_1 = 0$ et l'expression de la durée moyenne prend la forme $\frac{0}{0}$; en lui appliquant deux fois de suite la règle connue, on trouve

$$\frac{2mn}{\varphi_1}.$$

La durée moyenne est proportionnelle au produit des fortunes des joueurs et inversement proportionnelle à la fonction d'instabilité.

Distribution des probabilités.

50. Il nous resterait à étudier la distribution des probabilités et l'espérance mathématique.

Les formules relatives à ces questions présentant quelque complication, nous nous contenterons de faire connaître le résultat.

Si le jeu est uniforme, la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, aucun des joueurs n'étant ruiné, le joueur A ait perdu la somme x, est

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\Bigg[& e^{-\frac{(x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} - e^{\frac{4\psi_1(m-x)}{\varphi_1}} e^{-\frac{(2m-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} \\ & + e^{\frac{4\psi_1(m+n-x)}{\varphi_1}} e^{-\frac{(2m+2n-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} - e^{\frac{4\psi_1(2m+n-x)}{\varphi_1}} e^{-\frac{(4m+2n-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + \ldots \\ & - e^{\frac{4\psi_1(n+x)}{\varphi_1}} e^{-\frac{(2n+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + e^{-\frac{4\psi_1(n+m+x)}{\varphi_1}} e^{-\frac{(2n+2m+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} \\ & - e^{-\frac{4\psi_1(2n+m+x)}{\varphi_1}} e^{-\frac{(4m+2n+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + \ldots \Bigg].\end{aligned}$$

Avant de passer à d'autres questions, une remarque n'est peut-être pas inutile : nous avons résolu d'une façon complète tous les problèmes de la théorie générale du jeu relatifs aux cas de deux joueurs en admettant que le jeu soit uniforme ou qu'il soit équitable et quelconque. La théorie de ces jeux, qui constitue la question la plus importante au point de vue mathématique du calcul des probabilités, peut donc être considérée comme entièrement connue et comme arrivée aujourd'hui à un degré de perfection qui semble définitif.

PROBABILITÉS A PLUSIEURS VARIABLES.

51. Comme nous l'avons remarqué au début de cette étude et comme l'ont déjà démontré les résultats qui précèdent, c'est par l'assimilation de toute question de probabilité à un problème relatif à un jeu que l'on obtient la généralité la plus grande. La théorie des probabilités à plusieurs variables sera donc dans ses questions les plus générales la théorie d'un jeu, les autres problèmes qu'elle traitera et qui paraîtront les plus importants et les plus curieux seront en réalité des cas particuliers. Ramener toutes les questions à un type unique, tel est un des principes de la théorie des probabilités continues.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Trois joueurs A, B, C *possédant chacun une fortune infinie doivent jouer* μ *parties, quelle est la probabilité pour que le joueur* A *perde la somme* x *et le joueur* B *la somme* y ?

Nous supposerons qu'il y a indépendance, c'est-à-dire que les conditions du jeu à chaque partie ne dépendent pas des résultats antérieurs du jeu, mais *nous ne supposerons pas l'uniformité,* les conditions du jeu pourront varier d'une partie à l'autre d'après une loi quelconque dépendant seulement du rang occupé par la partie considérée.

A chaque partie, par exemple à la $\mu^{\text{ième}}$, le jeu sera caractérisé : pour le joueur A par son espérance totale $\psi_1'(\mu)$ relative à cette $\mu^{\text{ième}}$ partie et par la fonction d'instabilité $\varphi_1'(\mu)$ relative à la même partie.

De même pour le joueur B, le jeu sera caractérisé à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par les fonctions $\psi_2'(\mu)$ et $\varphi_2'(\mu)$ et pour le joueur C par les fonctions $\psi_3'(\mu)$ et $\varphi_3'(\mu)$.

Nous désignerons par $f(\mu_1, \mu_2, x, y)$ la probabilité pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y entre les parties μ_1 et μ_2.

La probabilité pour que, à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x_1 et le joueur B la somme y_1 est $f(0, \mu_1, x_1, y_1)$.

La probabilité pour que, entre la $\mu_1^{\text{ième}}$ et la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme $x - x_1$ et le joueur B la somme $y - y_1$ est

$$f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1).$$

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y, les pertes de ces joueurs ayant été x_1, y_1 à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées, $f(o, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)$.

Les pertes x_1, y_1 ayant pu, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, avoir toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, la probabilité $f(o, \mu, x, y)$ pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\begin{aligned} f(o, \mu, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} & f(o, \mu_1, x_1, y_1) \\ & \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)\, dx_1\, dy_1. \end{aligned}$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f.

La somme des probabilités de tous les cas possibles doit avoir pour valeur *un*; la fonction f relative à un intervalle μ_1, μ_2 quelconque doit donc vérifier l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_1, \mu_2, x, y)\, dx\, dy = 1.$$

32. Ces conditions sont vérifiées par la fonction

$$\begin{aligned} & f(\mu_1, \mu_2, x, y) \\ & = \frac{2}{\pi K} e^{-\frac{4}{K^2}\left\{\left[x + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi_1'(\mu)\, d\mu\right]^2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_2'(\mu)\, d\mu + \left[x + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi_1'(\mu)\, d\mu\right] \left[y + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi_2'(\mu)\, d\mu\right] \int_{\mu_1}^{\mu_2} [\varphi_1'(\mu) + \varphi_2'(\mu) - \varphi_3'(\mu)]\, d\mu + \left[y + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi_2'(\mu)\, d\mu\right]^2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_1'(\mu)\, d\mu\right\}}. \end{aligned}$$

La quantité K^2 ayant pour valeur

$$\begin{aligned} K^2 = {} & 2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_1'(\mu)\, d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_2'(\mu)\, d\mu\right] + 2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_1'(\mu)\, d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_3'(\mu)\, d\mu\right] \\ & + 2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_2'(\mu)\, d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_3'(\mu)\, d\mu\right] \\ & - \left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_1'(\mu)\, d\mu\right]^2 - \left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_2'(\mu)\, d\mu\right]^2 - \left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_3'(\mu)\, d\mu\right]^2. \end{aligned}$$

La vérification est quelque peu pénible, mais elle ne présente aucune sérieuse difficulté, elle s'effectue par la même intégrale que celle du n° **6**.

S'il s'agit de la probabilité dans l'intervalle zéro, μ, on peut remplacer les intégrales telles que $\int_0^\mu \varphi'(\mu)\,d\mu$ par $\varphi(\mu)$ et finalement *la probabilité cherchée a pour valeur*

$$f(o, \mu, x, y) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-4\frac{\varphi_2(\mu)[x+\psi_1(\mu)]^2 + [\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)][x+\psi_1(\mu)][y+\psi_2(\mu)] + \varphi_1(\mu)[y+\psi_2(\mu)]^2}{2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu)}}}{\sqrt{2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu)}}\,dx\,dy.$$

Indépendance des fonctions d'instabilité.

53. La somme des trois espérances $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, $\psi_3(\mu)$ est nulle quel que soit μ. Ce résultat est presque évident; pour le démontrer en se basant sur la formule précédente, il suffit d'écrire que la probabilité pour que A perde la somme x et B la somme y est la probabilité pour que A perde la somme x et C la somme $-(x+y)$.

Les fonctions d'instabilité $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, $\varphi_3(\mu)$ dépendent des conditions du jeu, mais la connaissance de deux d'entre elles n'entraîne pas la connaissance de la troisième.

Supposons, par exemple, que le jeu se compose d'une seule partie, qu'il soit équitable et que $\varphi_1 = \varphi_2$. Dans ces conditions, φ_3 peut avoir toute valeur entre zéro et $4\varphi_1$.

La valeur limite $\varphi_3 = o$ correspond au cas où les joueurs A et B jouent seuls entre eux, C ne jouant pas.

φ_3 peut avoir même valeur que φ_1 et φ_2, par exemple par la supposition que chacun des joueurs ait une chance sur trois de gagner la somme $\frac{\sqrt{3\varphi_1}}{2}$, une chance sur trois de perdre la même somme et une chance sur trois de faire partie nulle. Dans ces conditions, en effet, la fonction d'instabilité relative à chaque joueur est φ_1.

La valeur limite $\varphi_3 = 4\varphi_1$ serait obtenue en supposant que les joueurs A et B ne jouent pas entre eux, le joueur C faisant la contre-partie de ces deux joueurs. En effet, soit $\zeta(u)\,du$ la probabilité pour que le joueur A perde la somme u. Si A perd la somme u, B perd également la somme u et C gagne la somme $2u$. Les fonctions d'instabilité relatives aux joueurs A et C sont donc, par définition,

$$\varphi_1 = 2\int u^2\zeta(u)\,du \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = 2\int (2u)^2\zeta(u)\,du = 4\varphi_1,$$

φ_3 peut donc prendre toute valeur entre φ_1 et $4\varphi_1$.

Un cas particulier intéressant est celui qui correspond à $\varphi_3 = 2\varphi_1$. On pourrait par exemple le réaliser en supposant que chacun des joueurs ait une chance sur trois de gagner : lorsque C gagnerait, il recevrait 1fr de B et 1fr de A. Lorsque A gagnerait il recevrait 1fr de C et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ de B. Lorsque B gagnerait, il recevrait 1fr de C et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ de A. Dans le cas considéré, on aurait

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = 2 = 2\varphi_1.$$

La formule précédente qui fait connaître la probabilité $f(0, \mu_1, x, y)$ pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y se réduit lorsque $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\varphi_3 = 2\varphi_1$ au produit des probabilités qu'auraient séparément les joueurs A et B pour perdre les sommes x et y. Donc dans ce cas la connaissance de la perte de l'un des joueurs A ou B n'influe pas sur les probabilités relatives à l'autre joueur.

En résumé, dans le cas général, la connaissance de deux fonctions d'instabilité ne détermine pas la troisième.

Cas particuliers.

54. Lorsqu'il y a uniformité, les fonctions $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, $\varphi_3(\mu)$ et $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, $\psi_3(\mu)$ ont respectivement pour valeurs $\mu\varphi_1$, $\mu\varphi_2$, $\mu\varphi_3$, $\mu\psi_1$, $\mu\psi_2$, $\mu\psi_3$; φ_1, φ_2, φ_3 et ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant les fonctions d'instabilité et les espérances relatives aux trois joueurs pour une partie ; alors

$$f(0, \mu, x, y) = \frac{2e^{-\frac{4[\varphi_2(x+\mu\psi_1)^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)(x+\mu\psi_1)(y+\mu\psi_2) + \varphi_1(y+\mu\psi_2)^2]}{\mu(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)}}}{\pi\mu\sqrt{2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2}}\,dx\,dy.$$

Lorsque le jeu est équitable pour les trois joueurs, les fonctions ψ sont nulles. Lorsque le jeu est symétrique, c'est-à-dire égal pour les trois joueurs, il est nécessairement équitable et la fonction f a pour valeur

$$f(o, \mu, x, y) = \frac{2e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\sqrt{3}\,\varphi(\mu)}\,dx\,dy.$$

Surface de probabilité.

55. Supposons d'abord que le jeu soit équitable et uniforme, l'équation

$$z = \frac{2e^{-\frac{4}{\mu M^2}[\varphi_2 x^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)xy + \varphi_1 y^2]}}{\pi\mu M},$$

qui exprime la probabilité pour que les pertes soient x et y (M^2 remplace la quantité $2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2$), représente une surface dont chaque section passant par l'axe des z est une courbe de probabilité de la forme connue.

La surface de probabilité présente la forme d'une sorte de cloche elliptique reposant sur le plan des xy et en réalité asymptote à ce plan; elle se déforme très vite, car la hauteur de son sommet diminue proportionnellement à μ. Les coordonnées des points x, y qui ont même probabilité sont liées par l'équation

$$\varphi_2 x^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)xy + \varphi_1 y^2 = u^2.$$

Les courbes d'égale probabilité sur le plan des xy sont donc des ellipses homothétiques ayant l'origine pour centre.

A chaque valeur de u^2 correspond une couronne elliptique élémentaire et la probabilité sur cette couronne est

$$U = \frac{8\,e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}\,u\,du}{\mu M^2}.$$

La probabilité entre l'ellipse u et l'infini a pour valeur $e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}$.

La valeur moyenne de u est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\mathrm{M}\sqrt{\mu} = 0{,}4431\,\mathrm{M}\sqrt{\mu},$$

la valeur probable de u est

$$0{,}416\,\mathrm{M}\sqrt{\mu}.$$

La couronne élémentaire de probabilité maxima s'obtient en annulant la dérivée de U, ce qui donne

$$u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{M}\sqrt{\mu} = 0{,}353\,\mathrm{M}\sqrt{\mu}.$$

56. La surface de probabilité est à courbures de même sens dans le voisinage de son sommet et à courbures opposées près du plan asymptote $z = 0$, elle se compose donc de deux régions séparées par une ligne de points paraboliques. La projection de cette ligne sur le plan des xy a pour équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

ou

$$\varphi_2 x^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)xy + \varphi_1 y^2 = \frac{\mu \mathrm{M}^2}{8}.$$

C'est l'équation d'une ellipse analogue à celles que nous avons considérées. Dans l'espace, la ligne des points paraboliques est donc une ligne de niveau de la surface de probabilité.

Il faut remarquer que la valeur de u correspondant à cette ellipse est la même que la valeur obtenue pour la couronne de probabilité maxima. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La probabilité sur une couronne élémentaire est maxima quand cette couronne correspond à la ligne des points paraboliques de la surface de probabilité.

Ainsi se trouve généralisé le théorème relatif aux points d'inflexion de la courbe des probabilités quand il n'y a qu'une variable. (Consulter mon *Étude sur la théorie de la spéculation,* p. 26, et les *Annales de l'École Normale,* 1901, p. 159.)

57. Considérons la probabilité comprise à l'intérieur de l'ellipse u

$$1 - e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}.$$

Pour que cette probabilité reste constante lorsque μ croît, il faut que u^2 varie proportionnellement à μ.

En d'autres termes, les aires des ellipses isoprobables croissent proportionnellement à μ et les rayons homologues proportionnellement à $\sqrt{\mu}$. Ces rayons diminuent donc *relativement* à μ.

Si nous considérons une ellipse de grandeur fixe, la probabilité relative à cette ellipse décroît indéfiniment jusqu'à zéro lorsque μ croît.

58. Lorsque le jeu est uniforme et non équitable, la représentation géométrique des probabilités est toujours la même, mais la surface des probabilités est alors animée dans son ensemble d'un mouvement rectiligne qui est uniforme si l'on assimile la variable μ au temps.

Lorsque le jeu n'est pas uniforme, la surface de probabilité se déforme suivant des lois plus complexes qui dépendent des fonctions d'instabilité et des espérances; les axes des ellipses de probabilité ne sont plus fixes, leur orientation est variable. Si le jeu n'est pas équitable, la surface de probabilité est animée d'un mouvement de translation sans cesse variable, et les composantes de sa vitesse sont à chaque instant $\psi_1'(\mu)$ et $\psi_2'(\mu)$.

Si les fonctions d'instabilité ne croissent pas à l'infini avec μ, la surface de probabilité ne tend pas à se confondre avec le plan des xy, sa forme se rapproche sans cesse de celle d'une surface asymptote.

Généralisation de la théorie des épreuves répétées.

59. *Trois événements s'excluent mutuellement, leurs probabilités sont respectivement* p_1, q_1, r_1 *à la première épreuve,* p_2, q_2, r_2 *à la seconde,* ..., p_μ, q_μ, r_μ *à la* $\mu^{\text{ième}}$. *Quelle est la probabilité pour* *que, en μ épreuves, le premier se produise* X *fois et le second* Y *fois?*

Supposons que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : A chacune des parties successives le joueur A a probabilité $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ pour perdre 1^{fr} et probabilité $(1-p_1), (1-p_2), \ldots, (1-p_\mu)$ pour gagner 2^{fr}.

Le joueur B a les probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ de perdre 1^{fr} et $(1-q_1), (1-q_2), \ldots, (1-q_\mu)$ de gagner 2^{fr}.

Le joueur C a les probabilités $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ de perdre 1^{fr} et $(1-r_1), (1-r_2), \ldots, (1-r_\mu)$ de gagner 2^{fr}.

$$(p_1+q_1+r_1=1,\ p_2+q_2+r_2=1,\ \ldots).$$

On suppose que, à chaque partie, l'un des joueurs gagne 2^{fr}, chacun des deux autres perdant 1^{fr}.

Chercher la probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement qui a pour probabilités successives $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ se produise X fois et l'événement de probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, Y fois, revient à chercher la probabilité pour que, en μ parties, le joueur A ait perdu X parties et le joueur B, Y parties.

Or, si le joueur A a perdu X parties, il en a gagné $\mu - X$ et sa perte totale est

$$X - 2(\mu - X) = 3X - 2\mu.$$

Si le joueur B a perdu Y parties, sa perte totale est

$$3Y - 2\mu.$$

La question revient donc à chercher la probabilité pour que, en μ parties, le joueur A ait perdu la somme $3X - 2\mu$ et le joueur B, la somme $3Y - 2\mu$. La formule du n° **52** donne la solution de la question, on a

$$\begin{aligned}
&\psi_1(\mu) = \Sigma\varepsilon_1 = \Sigma[2(1-p)-p] = \Sigma(2-3p),\\
&\psi_2(\mu) = \Sigma(2-3q), \qquad \psi_3(\mu) = \Sigma(3p+3q-4),\\
&\varphi_1(\mu) = 2\Sigma(E_1^2 - \varepsilon_1^2)\\
&\qquad = 2\Sigma[p+4(1-p)-(2-3p)^2] = \Sigma 18p(1-p),\\
&\varphi_2(\mu) = \Sigma 18q(1-q), \qquad \varphi_3(\mu) = \Sigma 18(1-p-q)(p+q).
\end{aligned}$$

La probabilité pour que l'événement de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ se produise X fois et l'événement de probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, Y fois en μ épreuves est donc

$$\frac{2}{3\pi K} e^{-\frac{2}{K^2}\left\{\Sigma q(1-q)(X-\Sigma p)^2 + \Sigma 2pq(X-\Sigma p)(Y-\Sigma q) + \Sigma p(1-p)(Y-\Sigma q)^2\right\}} dX\, dY,$$

K^2 désignant la quantité

$$\begin{aligned} K^2 = {} & 2[\Sigma p(1-p)][\Sigma q(1-q)] + 2[\Sigma p(1-p)][\Sigma r(1-r)] \\ & + 2[\Sigma q(1-q)][\Sigma r(1-r)] - [\Sigma p(1-p)]^2 \\ & - [\Sigma q(1-q)]^2 - [\Sigma r(1-r)]^2. \end{aligned}$$

60. La plus grande probabilité a lieu lorsque $X = \Sigma p$ et $Y = \Sigma q$. La valeur moyenne de X est Σp, la valeur moyenne de Y est Σq.

Les quantités Σp et Σq sont donc les valeurs normales des nombres des arrivées des événements. Si le premier événement se produit $\Sigma p \pm x$ fois et le second $\Sigma q \pm y$ fois, on dit que les *écarts* sont x et y.

La probabilité pour que les écarts soient $+x$ et $+y$ est

$$\frac{2}{3\pi K} e^{-\frac{2}{K^2}\left[x^2 \Sigma q(1-q) + xy \Sigma 2pq + y^2 \Sigma p(1-p)\right]} dx\, dy.$$

Cette formule généralise celle qui a été obtenue au n° **16**.

61. Elle se simplifie quand les épreuves sont identiques, elle devient alors

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu pqr}\left[q(1-q)x^2 + 2pqxy + p(1-p)y^2\right]}}{2\pi\mu\sqrt{pqr}}\, dx\, dy.$$

La probabilité est susceptible d'être représentée géométriquement (n° **35**), si l'on considère les ellipses isoprobables, l'aire de celles-ci croît proportionnellement à μ, les rayons homologues croissent proportionnellement à $\sqrt{\mu}$ et décroissent donc *relativement* à μ. C'est une généralisation du théorème de Bernoulli.

Probabilités mêlées.

62. *La probabilité pour que l'événement* A′ *se produise seul est* p_1 *à la première épreuve,* p_2 *à la deuxième,* ..., p_μ *à la* $\mu^{\text{ième}}$.

La probabilité pour que l'événement B′ *se produise seul est* q_1 *à la première épreuve,* q_2 *à la deuxième,* ..., q_μ *à la* $\mu^{\text{ième}}$.

Il y a de même les probabilités successives $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ *pour que les événements* A′ *et* B′ *se produisent tous deux et les probabilités* $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ *pour qu'aucun des événements ne se produise.*

Quelle est la probabilité pour que, en μ *épreuves, l'événement* A′ *se produise* X *fois et l'événement* B′, Y *fois?*

Supposons que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : Le joueur A a successivement les probabilités (p_1+r_1), (p_2+r_2), ..., $(p_\mu+r_\mu)$ pour perdre 1[fr] et les probabilités $1-p_1-r_1$, $1-p_2-r_2$, ..., $1-p_\mu-r_\mu$ pour faire partie nulle.

Le joueur B a successivement les probabilités (q_1+r_1), (q_2+r_2), ..., $(q_\mu+r_\mu)$ pour perdre 1[fr] et les probabilités $1-q_1-r_1$, ..., $1-q_\mu-r_\mu$ pour faire partie nulle.

Le joueur C a successivement les probabilités $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ pour gagner 2[fr], (p_1+q_1), (p_2+q_2), ..., $(p_\mu+q_\mu)$ pour gagner 1[fr] et t_1, t_2, ..., t_μ pour faire partie nulle.

La probabilité pour que l'événement A′ se produise X fois et l'événement B′, Y fois en μ épreuves est la probabilité pour que le joueur A perde X francs et le joueur B, Y francs en μ parties.

Cette probabilité est donnée par la formule du n° **52**. On a dans le cas actuel

$$\begin{aligned}
\psi_1(\mu) &= \Sigma(-p-r),\\
\psi_2(\mu) &= \Sigma(-q-r),\\
\psi_3(\mu) &= \Sigma(2r+p+q),\\
\varphi_1(\mu) &= \Sigma 2(p+r)(1-p-r),\\
\varphi_2(\mu) &= \Sigma 2(q+r)(1-q-r),\\
\varphi_3(\mu) &= \Sigma 2[p+q+4r-(2r+p+q)^2].
\end{aligned}$$

En désignant par K^2 la quantité

$$2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu),$$

la probabilité cherchée a pour expression

$$\frac{1}{\pi K}e^{-\frac{8}{K^2}\left\{[\Sigma(q+r)(1-q-r)][X-\Sigma(p+r)]^2+[\Sigma 2(pq-rt)][X-\Sigma(p+r)][Y-\Sigma(q+r)]+[\Sigma(p+r)(1-p-r)][Y-\Sigma(q+r)]^2\right\}}\,dX\,dY.$$

63. La plus grande probabilité a lieu lorsque $X=\Sigma(p+r)$ et $Y=\Sigma(q+r)$. La valeur moyenne de X est $\Sigma(p+r)$, la valeur moyenne de Y est $\Sigma(q+r)$.

Les quantités $\Sigma(p+r)$ et $\Sigma(q+r)$ sont donc les valeurs normales des nombres des arrivées des événements.

Si le premier événement se produit $[\Sigma(p+r)]\pm x$ fois et le second $[\Sigma(q+r)]\pm y$ fois, on dit que les *écarts* sont x et y. La probabilité pour que les écarts soient $+x$ et $+y$ est

$$\frac{1}{\pi K}e^{-\frac{8}{K^2}\left\{[\Sigma(q+r)(1-q-r)]x^2+[\Sigma 2(pq-rt)]xy+[\Sigma(p+r)(1-p-r)]y^2\right\}}\,dx\,dy.$$

64. Lorsque les épreuves sont identiques, la formule se simplifie, la probabilité pour que les écarts soient x et y en μ épreuves est

$$\frac{2}{\pi\mu M}e^{-\frac{1}{\mu M^2}[2(q+r)(1-q-r)x^2+4(pq-rt)xy+2(p+r)(1-p-r)y^2]}\,dx\,dy,$$

M^2 désignant la quantité

$$16[(p+r)(q+r)(p+t)(q+t)-(pq-rt)^2].$$

La probabilité est susceptible d'être représentée géométriquement (n° **55**); si l'on considère les ellipses isoprobables, l'aire de celles-ci croît proportionnellement à μ, les rayons homologues croissent proportionnellement à $\sqrt{\mu}$ et décroissent donc *relativement* à μ. C'est une généralisation du théorème de Bernoulli.

Probabilités du second genre.

65. *Le joueur* B *possède la somme* y *et les joueurs* A *et* C *une somme infinie ; quelle est la probabilité pour que, à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie exactement, le joueur* B *soit ruiné, le joueur* A *ayant perdu la somme* x ?

Désignons comme précédemment par $f(o, \mu, x, y)$ la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y et par $\chi(o, \mu, x, y)$ la probabilité cherchée. Nous allons écrire de deux façons différentes la probabilité $f(o, \mu, x, y)$.

Le joueur B ne peut perdre la somme y sans avoir perdu précédemment la somme y_1, si y_1 est inférieur à y. La probabilité pour que, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x_1, la perte y_1 étant pour la première fois atteinte par le joueur B, est $\chi(o, \mu_1, x_1, y_1)$.

La probabilité pour que, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x_1, la perte y_1 étant pour la première fois atteinte par le joueur B, et les pertes finales des deux joueurs étant x et y à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées, $\chi(o, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)$.

La perte y_1 pouvant être pour la première fois atteinte à toutes les parties de zéro à μ et, d'autre part, la perte x_1 pouvant avoir toute valeur de $-\infty$ à $+\infty$, la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$f(o, \mu, x, y) = \int_0^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(o, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)\, dx_1\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction χ.

66. Nous supposerons que le jeu soit symétrique, alors

$$f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1) = \frac{2 e^{-\frac{4[(x-x_1)^2 + (x-x_1)(y-y_1) + (y-y_1)^2]}{3[\varphi(\mu) - \varphi(\mu_1)]}}}{\pi\sqrt{3}[\varphi(\mu) - \varphi(\mu_1)]}.$$

L'équation de condition est identiquement vérifiée en posant

$$\chi(0, \mu_1, x_1, y_1) = \frac{y\varphi'(\mu_1)}{\varphi(\mu_1)} f(0, \mu_1, x_1, y_1).$$

La vérification se fait de la façon suivante : on intègre le second membre par rapport à x_1, puis on pose

$$\lambda^2 = \frac{(y - y_1)^2}{\varphi(\mu)} \frac{\varphi(\mu_1)}{\varphi(\mu) - \varphi(\mu_1)},$$

et l'on est ramené à une intégrale de la forme connue (n° **50**).

La probabilité demandée est donc

$$\frac{2y\varphi'(\mu)e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\sqrt{3}\,[\varphi(\mu)]^2}.$$

67. *Les joueurs* A *et* C *possèdent une somme infinie et le joueur* B *possède la somme* m; *quelle est la probabilité pour que, à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie, le joueur* A *ait perdu la somme* x *et le joueur* B *la somme* y ?

Nous supposerons, comme dans le problème précédent, que le jeu est symétrique.

Par un raisonnement analogue à celui du n° **37**, et par des calculs trop longs pour être reproduits, on obtient pour expression de la probabilité cherchée

$$\frac{2e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)} - 2e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2+3m^2-3my)}}{\pi\varphi(\mu)\sqrt{3}}.$$

Probabilités des genres supérieurs.

68. D'après notre classification, les probabilités sont dites des *genres supérieurs* quand les fortunes de plusieurs joueurs sont limitées. Dans ce cas, il semble difficile d'exprimer les probabilités de ruine de ces joueurs. Quand ceux-ci sont au nombre de trois, on peut déterminer la durée moyenne du jeu.

Les joueurs A, B, C, *possédant les sommes* a, b, c, *jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux; quelle est la durée moyenne du jeu?*

Nous supposerons que le jeu soit symétrique et uniforme, caractérisé à chaque partie par la fonction d'instabilité φ_1.

Nous rappelons que la durée moyenne d'un jeu est l'espérance mathématique d'un joueur H qui toucherait 1fr par partie jouée.

Par des considérations qu'il serait trop long d'exposer, on est conduit au résultat suivant : Si l'on désigne par $\lambda(x, y)$ la durée moyenne quand le joueur A possède la somme x et le joueur B la somme y (et, par suite, le joueur C la somme $a+b+c-x-y$), la fonction λ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} + \frac{4}{\varphi_1} = 0$$

et les conditions aux limites $\lambda(0, y) = 0$, $\lambda(x, 0) = 0$ et $\lambda = 0$ pour $x + y = a + b + c$.

Ces équations sont vérifiées par la solution

$$\lambda = \frac{4xy(a+b+c-x-y)}{(a+b+c)\varphi_1},$$

qui est d'ailleurs unique.

Puisque, au début du jeu, $x = a$ et $y = b$, la durée moyenne cherchée a pour valeur

$$\frac{4abc}{\varphi_1(a+b+c)}.$$

Si l'un des joueurs, le joueur C par exemple, a une fortune infinie, la durée moyenne du jeu est $\frac{4ab}{\varphi_1}$. Si deux des joueurs ont des fortunes infinies, la durée moyenne est infinie.

On peut traiter des problèmes analogues lorsqu'il y a discontinuité; on est alors conduit à des équations aux différences partielles qu'il est possible d'intégrer.

69. *Les joueurs A, B, C, dont les fortunes sont a, b, c, jouent jusqu'à ce que deux d'entre eux soient ruinés, quelle est la durée moyenne du jeu?*

Nous supposerons que les conditions du jeu soient les mêmes que précédemment et caractérisées par la fonction φ_1, puis, qu'après la ruine de l'un des joueurs, les deux autres jouent à un jeu équitable caractérisé par la fonction φ_2.

En désignant comme précédemment par $\lambda(x, y)$ la durée moyenne totale du jeu quand le joueur A possède la somme x, le joueur B la somme y et le joueur C la somme $s-x-y$, $(s=a+b+c)$, on a toujours

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{4}{\varphi_1}=0,$$

mais les conditions aux limites ne sont plus les mêmes.

Lorsque $x=0$, le joueur A est ruiné, et, si le joueur B possède la somme y, le joueur C possède la somme $s-y$.

Ces deux joueurs devant jouer jusqu'à la ruine de l'un d'eux, la durée moyenne de ce nouveau jeu est (n° **49**)

$$\frac{2y(s-y)}{\varphi_2}.$$

Le même raisonnement s'applique au cas où l'un des joueurs B ou C serait ruiné le premier, les conditions aux limites sont donc

Pour $x=0$.................... $\lambda=\dfrac{2y(s-y)}{\varphi_2}$,

Pour $y=0$.................... $\lambda=\dfrac{2x(s-x)}{\varphi_2}$,

Pour $s-x-y=0$............ $\lambda=\dfrac{2xy}{\varphi_2}$.

On reconnaît facilement que l'équation indéfinie et les conditions aux limites sont vérifiées si l'on pose

$$\lambda=\frac{4xy(s-x-y)}{\varphi_1 s}$$
$$+\frac{2}{\varphi_2 s}[xy(x+y)+x(s-x-y)(s-y)+y(s-x-y)(s-x)].$$

Cette solution est d'ailleurs unique.

Au début du jeu, $x = a, y = b, s - x - y = c$, donc *la durée moyenne du jeu a pour expression*

$$\frac{4abc}{\varphi_1(a+b+c)} + \frac{2}{\varphi_2(a+b+c)}[ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)].$$

La première partie de la somme exprime la durée moyenne jusqu'à ce que l'un des joueurs soit ruiné ; le second terme exprime la durée moyenne quand les deux autres joueurs jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux.

On obtient des résultats analogues en supposant le jeu discontinu, on est alors conduit à des équations aux différences finies partielles.

Il est regrettable que la place nous manque pour exposer le raisonnement qui a permis d'obtenir la dernière formule ; ce raisonnement, dont l'exposition prendrait plusieurs pages, est, croyons-nous, un des plus curieux du calcul des probabilités.

Probabilités connexes.

70. Nous avons admis jusqu'à présent l'indépendance, c'est-à-dire que nous avons considéré les conditions relatives à une partie comme indépendantes des parties antérieures.

Nous allons étudier maintenant les probabilités connexes du premier genre à deux variables. Nous dirons qu'il y a connexité du premier genre quand les conditions à une partie dépendent uniquement de la perte actuelle des joueurs et du rang occupé par la partie considérée.

Nous supposerons que les fonctions d'instabilité $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ relatives aux trois joueurs sont constantes et que, pour chacun d'eux, l'espérance relative à une partie est égale au produit de sa perte actuelle par une quantité a qui peut être variable d'une partie à l'autre, mais qui, à chaque partie, est la même pour les trois joueurs.

Si, par exemple, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, les joueurs ont perdu les sommes x, y, $-(x+y)$, leurs espérances pour la partie suivante sont ax, ay, $-a(x+y)$.

Le jeu considéré est, comme on voit, uniforme, relativement aux fonctions d'instabilité, mais non relativement aux espérances.

Le jeu étant ainsi défini, une analyse analogue à celle du n° **24**, mais plus laborieuse, conduit au résultat suivant :

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A *ait perdu la somme x et le joueur B la somme y est*

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-4\frac{\varphi_2 x^2+(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)xy+\varphi_1 y^2}{F(\mu)\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}}}}{F(\mu)}\,dx\,dy,$$

$F(\mu)$ étant l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial\mu}+2aF=\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}.$$

Si, en particulier, a est constant, on a

$$F=\frac{\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}}{2a}\left(1-e^{-2a\mu}\right).$$

Nous appliquerons ce résultat à la résolution approchée du problème suivant :

71. *D'une urne qui contient m boules blanches, n boules noires et k boules rouges, on extrait successivement μ boules sans les replacer dans l'urne. Quelle est la probabilité d'une composition donnée de l'urne ?*

Si, en μ tirages, il sort $\frac{\mu m}{m+n+k}+x$ boules blanches, $\frac{\mu n}{m+n+k}+y$ boules noires, et $\frac{\mu k}{m+n+k}-x-y$ boules rouges, nous disons que les écarts sont x et y. La question posée consiste à chercher la probabilité pour que les écarts soient x et y en μ épreuves.

Supposons que trois joueurs A, B, C perdent respectivement des sommes égales aux écarts x, y, et $-(x+y)$. Supposons encore que μ tirages aient été effectués et que les écarts soient x et y.

Au tirage suivant, il y a probabilité

$$\frac{(s-\mu)m-sx}{s(s-\mu)}$$

(s désignant la somme $m + n + k$) pour qu'il sorte une blanche et par suite pour que l'écart x augmente de la quantité $\frac{s-m}{s}$. Il y a de même probabilité

$$\frac{(s-m)(s-\mu)+sx}{s(s-\mu)}$$

pour qu'il ne sorte pas une blanche et par suite pour que l'écart x diminue de la quantité $\frac{m}{s}$.

L'espérance mathématique du joueur A pour le tirage considéré est donc $\frac{x}{s-\mu}$. L'espérance mathématique du joueur B est de même $\frac{y}{s-\mu}$.

Les espérances mathématiques des joueurs A et B sont donc constamment proportionnelles à leur perte totale et la quantité précédemment désignée par a est $\frac{1}{s-\mu}$.

La fonction d'instabilité relative au joueur A a pour valeur

$$\varphi_1 = 2\left[\frac{m(s-\mu)(s-m)+xs^2(2s-m)}{s^2(s-\mu)} - \frac{x^2}{(s-\mu)^2}\right].$$

Si les probabilités de sortie des boules étaient constantes, les écarts x et y seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, et par suite ils seraient négligeables comparativement à μ. Il en est de même à plus forte raison dans le cas actuel, puisque les écarts ont une tendance à diminuer d'autant plus grande que ces écarts sont plus grands eux-mêmes; x et y sont donc négligeables comparativement à μ et par suite comparativement à m, n, k qui sont de grands nombres supposés du même ordre que μ.

La fonction d'instabilité relative au joueur A se réduit donc, en négligeant x, à la quantité

$$\varphi_1 = \frac{2m(s-m)}{s^2}.$$

Les fonctions φ_2 et φ_3 ont de même pour valeurs

$$\varphi_2 = \frac{2n(s-n)}{s^2}, \qquad \varphi_3 = \frac{2k(s-k)}{s^2}.$$

Les fonctions d'instabilité étant constantes et les espérances étant proportionnelles aux pertes actuelles, on peut appliquer au problème dont il s'agit la formule du n° **70**. La fonction $F(\mu)$ est l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + \frac{2F}{s-\mu} = 4\sqrt{\frac{mnk}{s^3}},$$

on a donc

$$F(\mu) = 4\sqrt{\frac{mnk}{s^3}}\,\frac{\mu(s-\mu)}{s}.$$

La probabilité pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y, c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts soient x et y, a pour expression

$$\frac{s^2\sqrt{s}\,e^{-\frac{[n(s-n)x^2+2mnxy+m(s-m)y^2]s^2}{2mnk\mu(s-\mu)}}}{2\pi\sqrt{mnk}\,\mu(s-\mu)}\,dx\,dy.$$

Si l'on désigne par p, q, r les quantités $\frac{m}{s}, \frac{n}{s}, \frac{k}{s}$, l'expression ci-dessus s'écrit

$$\frac{s\,e^{-\frac{1}{2\mu pqr}[q(1-q)x^2+2pqxy+p(1-p)y^2]\frac{s}{\mu(s-\mu)}}}{2\pi\mu\sqrt{pqr}\,(s-\mu)}\,dx\,dy.$$

En comparant ce résultat à celui qui a été obtenu au n° **61** et qui serait relatif au cas où l'on replacerait les boules dans l'urne après chaque tirage, on voit que les écarts sont diminués dans le rapport de $\sqrt{s-\mu}$ à $\sqrt{s}$.

72. Reprenons la question relative aux joueurs (n° **70**) : si l'on suppose que, μ_1 parties ayant été jouées, les joueurs A et B aient perdu les sommes x_1 et y_1, quelle est la probabilité pour que ces joueurs perdent en tout les sommes x et y après une nouvelle série de μ parties?

Pour résoudre ce problème (pour lequel nous supposerons la quantité a constante, c'est-à-dire le jeu uniforme), nous écrirons de deux façons différentes la probabilité pour que les joueurs A et B aient perdu les sommes x et y en $\mu_1 + \mu$ parties.

Cette probabilité a pour valeur

$$f(\mu_1+\mu, 0, 0, x, y) = \frac{4ae^{-8a\frac{\varphi_2 x^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)xy + \varphi_1 y^2}{(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)(1-e^{-2a(\mu_1+\mu)})}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2(1-e^{-2a(\mu_1+\mu)})}}.$$

Soit $f(\mu, x_1, y_1, x, y)$ la probabilité cherchée ; la probabilité pour que, en μ_1 parties, les pertes soient x_1 et y_1 et pour qu'elles deviennent ensuite x et y après les μ parties suivantes est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{4ae^{-8a\frac{\varphi_2 x_1^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)x_1y_1 + \varphi_1 y_1^2}{(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)(1-e^{-2a\mu_1})}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2(1-e^{-2a\mu_1})}} \times f(\mu, x_1, y_1, x, y).$$

En intégrant cette expression pour toutes les valeurs de x_1, y_1, on obtient, d'après le principe de la probabilité totale, la probabilité pour que les pertes soient x et y en $\mu_1+\mu$ parties ; on doit donc avoir

$$\begin{aligned} &f(\mu_1+\mu, 0, 0, x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4ae^{-8a\frac{\varphi_2 x_1^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)x_1y_1 + \varphi_1 y_1^2}{(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)(1-e^{-2a\mu_1})}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2(1-e^{-2a\mu_1})}} \\ &\qquad \times f(\mu, x_1, y_1, x, y)\,dx_1\,dy_1. \end{aligned}$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f.

Cette équation est satisfaite si l'on pose

$$\begin{aligned} &f(\mu, x_1, y_1, x, y) \\ &= \frac{4ae^{-8a\frac{\varphi_2(x-x_1e^{-a\mu})^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)(x-x_1e^{-a\mu})(y-y_1e^{-a\mu}) + \varphi_1(y-y_1e^{-a\mu})^2}{(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)(1-e^{-2a\mu})}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2(1-e^{-2a\mu})}}. \end{aligned}$$

Telle est l'expression de la probabilité cherchée.

73. *L'urne* A *contient m boules blanches, n boules noires et k boules rouges ; l'urne* B *contient m' boules blanches, n' boules noires et k' boules rouges. A chaque épreuve, on tire une boule de* A *que l'on place dans* B, *en même temps qu'on tire une boule* *de* B *que l'on place dans* A. *Quelle est la probabilité pour que, après* μ *épreuves, les urnes aient une composition donnée?*

Désignons par s la somme $m+n+k+m'+n'+k'$ de toutes les boules; nous disons que les écarts sont x et y quand il y a

$$\frac{(m+m')(m+n+k)}{s}+x$$

boules blanches dans l'urne A et

$$\frac{(n+n')(m+n+k)}{s}+y$$

boules noires dans l'urne A.

La question peut s'énoncer ainsi : les écarts ayant initialement les valeurs données x_1, y_1, quelle est la probabilité pour que leurs valeurs soient x et y après μ épreuves.

Si les écarts sont x et y, il y a

$$\frac{(k+k')(m+n+k)}{s}-x-y$$

boules rouges dans l'urne A ; de même dans l'urne B, les nombres des boules blanches, noires et rouges sont respectivement

$$\frac{(m+m')(m'+n'+k')}{s}-x, \qquad \frac{(n+n')(m'+n'+k')}{s}-y,$$
$$\frac{(k+k')(m'+n'+k')}{s}+x+y.$$

Supposons que trois joueurs H, K, L perdent respectivement des sommes égales aux écarts x, y, $-(x+y)$ et supposons que les écarts soient x et y.

Au prochain tirage, il y a probabilité

$$\frac{(m+m')(m+n+k)+xs}{s^2(m+n+k)(m'+n'+k')}[(n+n'+k+k')(m'+n'+k')+xs]$$

pour que l'écart x diminue de un. Il y a de même probabilité

$$\frac{(m+m')(m'+n'+k')-xs}{s^2(m+n+k)(m'+n'+k')}[(n+n'+k+k')(m+n+k)-xs]$$

pour que l'écart x augmente de un.

L'espérance mathématique du joueur H pour le prochain tirage est donc

$$\frac{sx}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Celle du joueur K est de même

$$\frac{sy}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Ces espérances sont proportionnelles à x et à y et la quantité précédemment désignée par a a pour valeur

$$a=\frac{s}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Nous supposerons que m, n, k, m', n', k' sont de très grands nombres auprès desquels les écarts initiaux

$$x_1=\frac{mn'-m'n+mk'-m'k}{s}$$

et

$$y_1=\frac{nk'-n'k+nm'-n'm}{s}$$

sont négligeables. Les écarts x et y seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ (que nous supposons de l'ordre de $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$, ...) si aucune cause retardatrice ne tendait à en diminuer l'amplitude; ils seraient donc négligeables comparativement à m, n, ... Dans le cas actuel, ces écarts sont à plus forte raison négligeables comparativement à m, n, ... et, en les négligeant dans l'expression de la fonction d'instabilité relative au joueur H, celle-ci a pour valeur

$$\varphi_1=\frac{4(m+m')(n+n'+k+k')}{s^2},$$

on a de même

$$\varphi_2 = \frac{4(n+n')(k+k'+m+m')}{s^2} \quad \text{et} \quad \varphi_3 = \frac{4(k+k')(m+m'+n+n')}{s^2}.$$

Les espérances mathématiques des joueurs étant constamment proportionnelles à leurs pertes et les fonctions d'instabilité étant constantes, la probabilité pour que les joueurs H et K perdent finalement les sommes x et y ou, en d'autres termes, la probabilité pour que les écarts ayant initialement les valeurs x_1 et y_1 prennent les valeurs x et y après μ épreuves est donnée par la dernière formule du n° **72** dans laquelle on doit remplacer les quantités x_1, y_1, a, φ_1, φ_2, φ_3 par les valeurs que nous venons d'obtenir.

74. Dans certains cas, il est possible d'obtenir l'expression des probabilités, quoique les espérances relatives à chacun des joueurs ne soient pas proportionnelles à leurs pertes actuelles.

Nous supposerons que pour les trois joueurs A, B, C la fonction d'instabilité ait une valeur constante φ_1 et que, ces joueurs ayant perdu les sommes x, y, $-(x+y)$, leurs espérances pour la partie suivante soient respectivement $2ax+ay$, $ay-ax$ et $-ax-2ay$; a étant une constante.

Dans ces conditions, une analyse analogue à celle du n° **18** conduit au résultat suivant :

La probabilité pour que, après μ parties, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y est exprimée par la formule

$$\frac{2\sqrt{3}\,a\,e^{-\frac{4a(x^2+xy+y^2)}{\varphi_1(1-e^{-3a\mu})}}}{\pi\varphi_1(1-e^{-3a\mu})}\,dx\,dy.$$

75. *Trois urnes* A, B, C *contiennent chacune m boules blanches et m boules noires ; chaque épreuve consiste à tirer une boule de* A *pour la placer dans* B, *en même temps qu'à tirer une boule de* B *pour la placer dans* C, *en même temps qu'à tirer une boule de* C *pour la placer dans* A. *Quelle est la probabilité d'une composition donnée des urnes après* μ *épreuves ?*

Nous dirons que les écarts sont x et y s'il y a $m+x$ boules blanches dans l'urne A et $m+y$ boules blanches dans l'urne B.

Si les écarts sont x et y, il y a $m-x$ boules noires dans l'urne A, $m-y$ boules noires dans l'urne B, $m-x-y$ boules blanches dans l'urne C, et $m+x+y$ boules noires dans l'urne C.

Supposons que trois joueurs H, K, L perdent des sommes respectivement égales aux écarts, et supposons que ces écarts soient x, y et $-(x+y)$.

A la prochaine épreuve, il y a probabilité

$$\frac{m-x}{2m}\,\frac{m-x-y}{2m}$$

pour que x augmente de un, et probabilité

$$\frac{m+x}{2m}\,\frac{m+x+y}{2m}$$

pour que x diminue de un.

L'espérance mathématique du joueur H est donc, pour l'épreuve considérée, $\frac{2x+y}{2m}$.

A cette même épreuve, il y a probabilité

$$\frac{m-y}{2m}\,\frac{m+x}{2m}$$

pour que y augmente de un, et probabilité

$$\frac{m+y}{2m}\,\frac{m-x}{2m}$$

pour que y diminue de un; l'espérance mathématique du joueur K est donc $\frac{y-x}{2m}$.

La fonction d'instabilité relative au joueur H est, pour l'épreuve considérée,

$$\frac{2m^2-2x^2-2xy-y^2}{2m^2}.$$

Nous supposerons que m est un grand nombre et que μ est également un grand nombre du même ordre. S'il n'existait aucune cause retardatrice des écarts, ceux-ci seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ et, par suite, ils seraient négligeables comparativement à μ ou à m, et, à plus forte raison, leurs carrés ou produits seraient négligeables comparativement à μ^2 ou m^2.

Puisque, dans le cas actuel, il existe une cause retardatrice des écarts, on peut, à plus forte raison, négliger x^2, xy et y^2 comparativement à m^2.

La fonction d'instabilité φ_1 relative au joueur H se réduit donc à un. Il en est de même des fonctions d'instabilité φ_2, φ_3 relatives aux joueurs K et L.

Le problème actuel rentre dans le cas traité au n° **74**, car les trois fonctions d'instabilité sont égales et constantes, et les espérances mathématiques suivent la loi exigée. La probabilité pour que le joueur H perde la somme x et le joueur K la somme y, c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts soient x et y en μ épreuves, est

$$\frac{\sqrt{3}\, e^{-\frac{2(x^2+xy+y^2)}{m\left(1-e^{-\frac{3\mu}{m}}\right)}}}{m\pi\left(1-e^{-\frac{3\mu}{m}}\right)}\,dx\,dy.$$

Cas où le nombre des variables est quelconque.

76. *Les joueurs* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *qui possèdent chacun une fortune infinie, doivent jouer* μ *parties; quelle est la probabilité pour que le joueur* A_1 *perde la somme* x_1, *le joueur* A_2 *la somme* $x_2, \ldots,$ *le joueur* A_{n-1} *la somme* x_{n-1}?

Nous supposerons seulement que les conditions du jeu pour une partie sont indépendantes des résultats antérieurs du jeu; nous supposons l'indépendance, mais non l'uniformité.

Par une analyse qu'il serait trop long de développer, on démontre que l'expression de la probabilité cherchée est

$$f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1} = C\,e^{-\{\Sigma a_i[x_i+\psi_i(\mu)]^2+\Sigma b_{i,j}[x_i+\psi_i(\mu)][x_j+\psi_j(\mu)]\}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}.$$

$\psi_1(\mu), \ldots, \psi_i(\mu), \ldots, \psi_{n-1}(\mu)$ sont les espérances totales des différents joueurs pour les μ parties. C, $a_1, \ldots, a_i, \ldots, b_{1,1}, \ldots, b_{i,j}, \ldots$, dépendent de μ.

Les quantités $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, ... se déduisent immédiatement des conditions du jeu par suite de leur propriété d'addition.

Il s'agit de déterminer les fonctions C, $a_1, \ldots, b_{1,1}, \ldots$. On obtient une première équation en exprimant que la somme des probabilités est un :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}=1,$$

l'intégration du premier membre s'effectue en termes finis. La considération des fonctions d'instabilité relatives aux différents joueurs fournit $n-1$ autres équations; les fonctions d'instabilité $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, ..., $\varphi_{n-1}(\mu)$ se déduisent immédiatement des conditions du jeu, grâce à leur propriété d'addition; or, on a

$$\varphi_i(\mu)=2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}-2[\psi_i(\mu)]^2.$$

L'intégrale s'obtient en termes finis; chacune des fonctions φ fournit donc une équation de nature à déterminer les fonctions cherchées.

On obtient les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres équations nécessaires par la considération des valeurs moyennes des produits des variables deux à deux. On a, par exemple, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\mathrm{VM}x_1x_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}.$$

L'intégrale s'obtient en termes finis, et cette relation fournit une équation de nature à déterminer les fonctions cherchées quand on connaît $\mathrm{VM}x_1x_2$.

Il faut donc obtenir $\mathrm{VM}x_1x_2$ d'après les conditions du jeu. Nous allons démontrer que la quantité $\mathrm{VM}x_1x_2-\psi_1(\mu)\psi_2(\mu)$ jouit de la propriété d'addition, c'est-à-dire que sa valeur pour μ parties est égale à la somme des valeurs des quantités analogues pour chacune des parties considérée isolément.

Supposons que les joueurs A_3, A_4, ..., A_n, tout en continuant à jouer séparément, associent leurs gains et leurs pertes; cela ne change rien aux jeux de A_1 et A_2, mais on peut alors considérer le jeu comme composé de trois joueurs : les joueurs A_1 et A_2, et l'association des autres.

Soit z la perte de l'association; on a évidemment

$$x_1 + x_2 + z = 0,$$

d'où

$$z^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$$

et, par suite,

$$\mathrm{VM}x_1 x_2 = \tfrac{1}{2}(\mathrm{VM}z^2 - \mathrm{VM}x_1^2 - \mathrm{VM}x_2^2).$$

Désignons par $\Phi(\mu)$ et $\Psi(\mu)$ la fonction d'instabilité et l'espérance totale relatives à l'association; de l'égalité

$$\Phi(\mu) = 2[\mathrm{VM}z^2 - (\mathrm{VM}z)^2] = 2[\mathrm{VM}z^2 - \Psi^2(\mu)]$$

on déduit

$$\mathrm{VM}z^2 = \frac{\Phi(\mu)}{2} + \Psi^2(\mu);$$

on a de même

$$\mathrm{VM}x_1^2 = \frac{\varphi_1(\mu)}{2} + \psi_1^2(\mu), \qquad \mathrm{VM}x_2^2 = \frac{\varphi_2(\mu)}{2} + \psi_2^2(\mu)$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{VM}x_1 x_2 = \frac{\Phi(\mu) - \varphi_1(\mu) - \varphi_2(\mu)}{4} + \frac{\Psi^2(\mu) - \psi_1^2(\mu) - \psi_2^2(\mu)}{2}.$$

La somme des espérances est nulle (n° 33); on a donc

$$\Psi(\mu) + \psi_1(\mu) + \psi_2(\mu) = 0,$$

et l'on peut écrire

$$\mathrm{VM}x_1 x_2 = \frac{\Phi(\mu) - \varphi_1(\mu) - \varphi_2(\mu)}{4} + \psi_1(\mu)\psi_2(\mu),$$

d'où

$$\mathrm{VM}x_1 x_2 - \psi_1(\mu)\psi_2(\mu) = \frac{\Phi(\mu) - \varphi_1(\mu) - \varphi_2(\mu)}{4}.$$

Le second membre, somme de trois fonctions d'instabilité, possède la propriété d'addition; il en est de même du premier. La quantité $VMx_1x_2 - \psi_1(\mu)\psi_2(\mu)$ jouit donc de la propriété d'addition comme la quantité $VMx_1^2 - \psi_1^2(\mu)$, on l'obtient sans difficulté d'après les conditions du jeu.

77. Lorsque le jeu est uniforme, l'expression de la probabilité est

$$f = \frac{C}{(\mu)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-\frac{1}{\mu}[\Sigma a_i(x_i+\mu\psi_i)^2 + \Sigma b_{i,j}(x_i+\mu\psi_i)(x_j+\mu\psi_j)]} dx_1\, dy_2 \ldots dx_{n-1}.$$

Les quantités C, a_1, ..., a_i, ..., $b_{1,1}$, ..., $b_{i.j}$, ... sont de simples coefficients indépendants de μ.

78. Lorsque le jeu non uniforme est symétrique (c'est-à-dire identique pour tous les joueurs) et caractérisé par la fonction d'instabilité $\varphi(\mu)$, la probabilité est

$$\frac{\sqrt{n}\, e^{-\frac{2(n-1)}{n\varphi(\mu)}[\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_j]}}{\left(\sqrt{\frac{\pi n \varphi(\mu)}{n-1}}\right)^{n-1}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

79. A chaque épreuve, n événements de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ peuvent se produire et s'excluent mutuellement, de sorte que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Si, en μ épreuves, le premier événement s'est produit $\mu p_1 + x_1$ fois, le second $\mu p_2 + x_2$ fois, ..., le $\mu^{\text{ième}}$ $\mu p_n + x_n$ fois $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0)$, on dit que les écarts sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en μ épreuves est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}} + \frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Cette formule ne contient en réalité que $n - 1$ variables, puisque $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$; on peut éliminer la variable que l'on veut. Quant à l'infiniment petit qui doit multiplier la quantité ci-dessus, on l'obtient en supprimant du produit $dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}\, dx_n$ l'élément qui correspond à la variable éliminée.

80. Une urne contient un très grand nombre a de boules de n couleurs différentes, k_1 sont blanches, k_2 sont noires, ..., k_n sont vertes. On tire un grand nombre μ de boules, soit ensemble, soit successivement, sans replacer dans l'urne les boules sorties.

On dit que les écarts sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'il sort de l'urne $\mu \frac{k_1}{a} + x_1 = \mu p_1 + x_1$ boules blanches, $\mu \frac{k_2}{a} + x_2 = \mu p_2 + x_2$ boules noires, ..., $\mu \frac{k_n}{a} + x_n = \mu p_n + x_n$ boules vertes. (On a évidemment $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n = 0$).

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{\frac{a-\mu}{a}}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu\frac{a-\mu}{a}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Cette formule ne contient, en réalité, que $n-1$ variables, puisque $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$; on peut éliminer la variable que l'on veut. Quant à l'infiniment petit qui doit multiplier la quantité ci-dessus, on l'obtient en supprimant du produit $dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}\, dx_n$ l'élément qui correspond à la variable éliminée.

Le calcul des probabilités discontinues permet d'établir certaines identités curieuses entre quantités finies; le calcul des probabilités continues permet de même d'obtenir certaines relations curieuses entre intégrales. Ce calcul conduit aussi à la résolution par analogie de certains problèmes de Physique mathématique, notamment du problème du refroidissement d'un courant liquide et du problème plus simple du refroidissement d'une barre dont les extrémités sont maintenues à une température constante.

Je ne m'occuperai pas ici de ces questions et je remettrai également à plus tard l'exposition de mes études sur les probabilités discontinues et sur les probabilités des causes.

Remarquons, pour terminer, que si la présente étude change le niveau de nos connaissances sur la théorie des épreuves répétées, c'est grâce à la conception des probabilités continues et à la réduction de toute question à un problème relatif au jeu. Remarquons aussi que la théorie mathématique de la spéculation et la théorie des erreurs d'observation peuvent être considérées comme des cas particuliers de la théorie mathématique du jeu.

Cette théorie, dont le but primitif peut sembler si éloigné de tout idéal, domine en réalité tout le calcul des probabilités; elle en est l'expression la plus générale et, par suite, la plus intéressante au point de vue scientifique.