JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BUHL

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 10 (1904), p. 85-129.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__85_0>

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus;

Par M. A. BUHL,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Objet du Mémoire. — Parmi les équations linéaires aux dérivées partielles on peut remarquer celles dont le premier membre est une forme linéaire à coefficients constants de certains produits symboliques d'opérateurs qui, considérés en eux-mêmes, définissent les transformations infinitésimales d'un groupe continu. Ainsi toutes les équations à coefficients constants, au sens ordinaire de cette expression, sont formées à l'aide des opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \dots$$

d'un groupe de translations dans l'espace général. De même la célèbre équation d'Euler et Poisson

$$(x-y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} - n(x-y)\frac{\partial z}{\partial x} + m(x-y)\frac{\partial z}{\partial y} - pz = 0$$

s'écrit

$$XY(z) - nX(z) + (m-1)Y(z) - pz = 0;$$

si l'on pose

$$X(\ ) = (x-y)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y(\ ) = (x-y)\frac{\partial}{\partial y},$$

ces deux derniers opérateurs définissant, comme on le voit immédiatement, un groupe projectif d'une très grande simplicité, on a

$$XY - YX = X + Y.$$

Les équations de cette nature ont des propriétés entre lesquelles, à mon avis, il convient de faire des distinctions essentielles, suivant qu'elles résultent du choix des opérateurs composant le premier membre, indépendamment de la façon dont ces opérateurs y sont assemblés, soit qu'elles résultent de la forme de l'assemblage. Le but de ce Mémoire est d'étudier surtout les premières propriétés. J'y montrerai notamment que, lorsque l'on connaît une solution de telles équations, quelque particulière qu'elle puisse être, on peut, en général, en déduire une solution contenant des fonctions arbitraires. En de nombreux points de cette étude je retrouverai et utiliserai des idées dues à l'admirable géomètre que fut Sophus Lie.

I. — Quelques remarques sur les équations à coefficients constants.

1. Je vais passer rapidement sur certaines propriétés connues des équations à coefficients constants, car ces propriétés auront une extension toute naturelle dans la suite pour des équations plus générales. Toutes ces équations admettent une solution de la forme

$$e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots}, \tag{1}$$

les α étant liés par une équation algébrique, dite *équation caractéristique*, que l'on forme immédiatement en portant l'expression précédente dans le premier membre de l'équation donnée. Cette solution si simple contient pourtant en germe les innombrables solutions que donnent les méthodes de Cauchy et dont la Physique mathématique fait un si grand usage. J'insisterai sur le fait que, pour en déduire toutes ces dernières, nous ne nous appuierons plus que sur les propriétés des opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \dots \tag{2}$$

qui ne dépendent en rien de la façon dont ils sont assemblés pour constituer le premier membre de l'équation donnée.

Du fait que les opérateurs (2) sont permutables résulte cette propriété que je considère comme absolument fondamentale : *Toutes les dérivées partielles d'une solution d'une équation linéaire à coefficients constants sont également des solutions.* C'est, en effet, évident, puisque porter la dérivée partielle d'une solution dans l'équation proposée revient à appliquer l'opérateur de cette dérivation partielle au premier membre de ladite équation.

Une autre propriété, encore bien évidente, des équations à coefficients constants est que la substitution

$$x_1 \mid x_1 + \theta_1, \quad x_2 \mid x_2 + \theta_2, \quad \ldots, \tag{3}$$

où les θ sont des constantes arbitraires, change une solution en une autre. Une telle substitution change, en effet, les opérateurs (2) en eux-mêmes. Mais je considère comme essentiel de montrer que cette seconde propriété n'est pas forcément distincte de la première. Considérons pour cela l'opérateur

$$\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots.$$

D'après la première propriété, et attendu qu'il s'agit d'une équation linéaire, il transforme une solution en une autre, et il en est de même de tous les produits symboliques de tels opérateurs et de toutes les combinaisons linéaires de tels produits. En particulier, la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\left(\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\right)^{(n)} f$$

sera une solution si la fonction f en est une. Or cette série n'est autre que la formule de Taylor pour le cas de plusieurs variables et si toutes les dérivées partielles de f ont un sens et sont, par suite, de véritables solutions de l'équation aux dérivées partielles considérée, la formule précédente aura également un sens et représentera en général

$$f(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta_2, \ldots).$$

Cette propriété n'est donc pas distincte de la propriété fondamentale soulignée tout à l'heure. Elle permet de transformer la solution (1) en

$$e^{\alpha_1(x_1+\theta_1)+\alpha_2(x_2+\theta_2)+\dots}.$$

Or cette solution en reste encore une si on la multiplie par n'importe quelle fonction des α et des θ et même par les différentielles $d\alpha$ et $d\theta$. Intégrer entre des limites quelconques une telle expression, c'est encore faire une somme de solutions. Finalement nous parvenons à une expression telle que

$$\int F(\alpha, \theta) e^{\Sigma\alpha(x+\theta)} \Pi \, d\alpha \, d\theta. \tag{4}$$

C'est une intégrale multiple qui, par rapport aux α, doit être prise le long de la variété algébrique définie dans l'espace général par l'équation caractéristique, et une intégrale définie multiple à limites arbitraires par rapport aux θ.

On voit immédiatement que cette solution comprend, comme je l'ai annoncé, toutes les solutions déduites de la formule de Fourier, cette formule étant comprise dans l'expression ci-dessus. Le procédé de Cauchy, qui est vraisemblablement le plus avantageux pour la Physique mathématique, consiste à résoudre l'équation caractéristique par rapport à l'une des variables α. Plus généralement, on pourrait exprimer les coordonnées α de la surface caractéristique en fonction d'autres paramètres qu'eux-mêmes moins un seul. Mais mon but n'est pas de m'engager dans ces recherches. J'ai voulu simplement montrer que toutes les solutions comprises dans la formule (4) découlaient seulement de l'existence de la solution (1) et du lemme fondamental mentionné plus haut.

On verra plus loin qu'en exposant les choses comme je viens de le faire, elles se laissent généraliser de la façon la plus naturelle pour des équations à coefficients non constants. Pour donner un exemple aussi simple que possible de solutions déduites de la formule (4), je l'appliquerai à la formation de solutions qui se présentent sous forme de séries entières.

2. *De certaines solutions transcendantes entières.* — Pour m'écarter le moins possible des notations de Cauchy, je considérerai l'équation

$$
\begin{aligned}
\mathrm{o} = af + a_0 \frac{\partial f}{\partial t} + \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
+ a_{00} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \sum a_{0i} \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x_i} + \sum a_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k} + \ldots,
\end{aligned}
$$

où une variable t est spécialement mise en évidence, puis la solution

$$e^{\rho t + \Sigma \alpha_i x_i} \quad \text{ou} \quad e^{\rho(t-t_0) + \Sigma \alpha_i (x_i - \theta_i \sqrt{-1})},$$

où ρ est une fonction des α définie par l'équation caractéristique

$$\mathrm{o} = a + a_0 \rho + \sum a_i \alpha_i + a_{00} \rho^2 + \rho \sum a_{0i} \alpha_i + \sum a_{ik} \alpha_i \alpha_k + \ldots,$$

que, pour plus de symétrie, j'écrirai

$$\mathrm{o} = \mathrm{P}_n + \mathrm{P}_{n-1} \rho + \mathrm{P}_{n-2} \rho^2 + \ldots + \mathrm{P}_2 \rho^{n-2} + \mathrm{P}_1 \rho^{n-1} + \mathrm{P}_0 \rho^n,$$

P_k étant un polynome en α de degré k. P_0 est donc la simple constante $a_{00\ldots0}$, coefficient de $\frac{\partial^n f}{\partial t^n}$. Nous supposerons d'abord expressément que cette constante n'est pas nulle. L'expression

$$(5) \qquad \int \mathrm{F}(\theta_1 \sqrt{-1}, \theta_2 \sqrt{-1}, \ldots) e^{\rho(t-t_0) + \sqrt{-1} \sum \alpha_i \left(\frac{x_i}{\sqrt{-1}} - \theta_i\right)} \Pi \frac{d\alpha\, d\theta}{2\pi},$$

formée comme à l'habitude, les intégrales ayant des limites convenables, se réduit pour $t = t_0$ à la formule de Fourier qui représente $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots)$, c'est-à-dire à une fonction arbitraire des variables x. Je vais établir que *la somme des n expressions précédentes, formées en attribuant successivement à ρ, les n valeurs des racines de l'équation caractéristique, est une solution développable en série entière de l'équation aux dérivées partielles primitive*. On a tout d'abord

$$e^{\rho(t-t_0)} = 1 + \frac{t-t_0}{1!} \rho + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \rho^2 + \ldots.$$

Donnons à ρ les n valeurs en question et sommons, il vient

$$(6) \qquad s_0 + \frac{t-t_0}{1!} s_1 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} s_2 + \ldots,$$

s_k désignant la somme des $k^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation caractéristique, c'est-à-dire des fonctions symétriques bien connues et faciles à former. s_0 est la simple constante n, tandis que $s_1, s_2, \ldots$ sont des polynomes en α. Substituant alors la série (6) à la place de $e^{\rho(t-t_0)}$ dans la formule (5), il nous vient une série où l'on peut d'abord mettre tous les $\frac{(t-t_0)^n}{n!}$ en avant des intégrales. Et quant aux intégrales qui jouent le rôle de coefficients, la première, au facteur s_0 près, est $F(x_1, x_2, \ldots)$ et toutes les autres se déduisent de cette dernière fonction par des combinaisons linéaires de dérivations partielles, car, en admettant que les intégrales

$$(7)\qquad \int F(\theta_1\sqrt{-1}, \theta_2\sqrt{-1}, \ldots) s_k e^{\Sigma\alpha_i(x_i-\theta_i\sqrt{-1})} \Pi \frac{d\alpha\, d\theta}{2\pi}$$

aient toutes un sens pour les différentes valeurs de l'indice k, il est clair que ces polynomes s_k apparaîtront sous les signes sommatoires, même s'ils n'y figurent pas d'abord, en faisant une suite convenable de dérivations par rapport à $x_1, x_2, \ldots$ et en formant une fonction linéaire de ces dérivées partielles. Les exemples donnés plus loin éclairciront d'ailleurs tout ceci et nous verrons que les solutions en forme de séries entières que nous sommes en train de rattacher au type unique considéré en commençant sont celles que donne la méthode des coefficients indéterminés. A ce propos, je puis montrer tout de suite que, dans la solution que nous venons de définir et que je représenterai par

$$(8)\qquad S_0(F) + \frac{t-t_0}{1!} S_1(F) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} S_2(F) + \ldots,$$

une loi de récurrence se manifeste immédiatement quant à la formation des opérateurs S. Lorsqu'il s'agit de calculer les sommes de puissances semblables s_k des racines de l'équation caractéristique, on peut, par exemple, employer les formules de Newton jusqu'au calcul de s_{n-1} inclusivement. Au delà nous avons les formules récurrentes

$$P_0 s_{n+i} + P_1 s_{n+i-1} + \ldots + P_{n-1} s_{i+1} + P_n s_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

En multipliant cette égalité par

$$F(\theta_1\sqrt{-1}, \theta_2\sqrt{-1}, \ldots)e^{\Sigma\alpha_i(x_i-\theta_i\sqrt{-1})}\Pi\frac{d\alpha\, d\theta}{2\pi}$$

et intégrant toujours sous les mêmes conditions, nous voyons reparaître des intégrales de la forme (7) contenant de plus sous les signes sommatoires les polynomes en α que sont les P à l'exception de P_0 qui est une simple constante. L'égalité obtenue peut s'écrire symboliquement

$$(9)\qquad P_0 S_{n+i} + (P_1)S_{n+i-1} + \ldots + (P_{n-1})S_{i+1} + (P_n)S_i = 0,$$

les (P) représentant des opérateurs à définir une fois pour toutes et qui permettent de calculer S_{n+i} pour toutes les valeurs de i, c'est-à-dire tous les termes de la série (8) dès que l'on connaît les n premiers.

J'ai à revenir maintenant sur le lemme fondamental du début de ce Chapitre, lequel va nous donner des résultats d'un nouvel intérêt.

Une solution telle que (8) étant obtenue, ses dérivées partielles où l'on changerait la fonction F ne seraient-elles pas de nouvelles solutions distinctes de (8)?

La réponse est négative pour les dérivations partielles par rapport aux variables x, elle est affirmative pour les dérivations partielles par rapport à t. Dans le premier cas, en effet, tout revient à substituer à F une dérivée partielle de F et comme F est arbitraire cela n'augmente en rien la généralité. Dans le second, au contraire, les nouveaux coefficients S obtenus ne peuvent ainsi se ramener à ceux de la série primitive. Cela n'est vrai toutefois que jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivation inclusivement. Par des dérivations successives par rapport à t formons, en effet, les n solutions

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l}
S_0\;(F_1) + \dfrac{t-t_0}{1!}S_1(F_1) + \dfrac{(t-t_0)^2}{2!}S_2\;(F_1) + \ldots,\\
S_1\;(F_2) + \dfrac{t-t_0}{1!}S_2(F_2) + \dfrac{(t-t_0)^2}{2!}S_3\;(F_2) + \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
S_{n-1}(F_n) + \dfrac{t-t_0}{1!}S_n(F_n) + \dfrac{(t-t_0)^2}{2!}S_{n+1}(F_n) + \ldots,
\end{array}\right.$$

où $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des fonctions arbitraires. Je dis qu'en dérivant une fois de plus et désignant par F_{n+1} une nouvelle fonction arbitraire, la solution obtenue

$$S_n(F_{n+1}) + \frac{t-t_0}{1!} S_{n+1}(F_{n+1}) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} S_{n+2}(F_{n+1}) + \ldots$$

n'est pas distincte des précédentes. Pour le voir, il suffit d'appliquer aux $n+1$ séries précédentes respectivement les opérateurs (P_n), $(P_{n-1}), \ldots, (P_1)$, P_0, puis de faire $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = F_{n+1}$ dans les n premières. Ajoutant ensuite, en tenant compte de (9), il vient un résultat identiquement nul. Et, comme les opérateurs (P) sont permutables aux opérateurs S, on voit que notre dernière série est une somme des séries (10) où les fonctions arbitraires F sont modifiées d'une certaine manière.

Cette démonstration se pourrait évidemment répéter indéfiniment.

Nous sommes donc arrivés en dernière analyse à déduire de la solution (1) les n solutions (10) dont la somme, plus généralement, est une fonction transcendante entière de t contenant n fonctions arbitraires.

3. *Exemples.* — Soit d'abord l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Posant $f = e^{\alpha x + \beta y}$, il vient l'équation caractéristique $\alpha - \beta = 0$, que je résoudrai par rapport à α. Donc $s_0 = 1$, $s_1 = \beta$, $s_2 = \beta^2$, ... et, par suite, en faisant pour simplifier $x_0 = 0$, il vient la solution

$$F(y) + \frac{x}{1!} F'(y) + \frac{x^2}{2!} F''(y) + \ldots,$$

qui, lorsque le choix de la fonction arbitraire $F(y)$ lui fait représenter $F(x+y)$, n'est autre que le développement taylorien de cette fonction arbitraire de $x+y$ que donnent les considérations élémentaires bien connues de la théorie des équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

Prenons maintenant l'équation bien connue de la théorie de la propagation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

L'équation caractéristique $\alpha^2 - \beta = 0$ résolue par rapport à α donne $s_0 = 2$, $s_{2i} = 2\beta^i$, $s_{2i+1} = 0$, d'où la solution

$$F(y) + \frac{x^2}{2!}F'(y) + \frac{x^4}{4!}F''(y) + \ldots$$

qui, dérivée par rapport à x, donne cette autre

$$\frac{x}{1!}\Phi(y) + \frac{x^3}{3!}\Phi'(y) + \frac{x^5}{5!}\Phi''(y) + \ldots.$$

Si l'on avait résolu l'équation caractéristique par rapport à β, on aurait trouvé la solution

$$\Psi(x) + \frac{y}{1!}\Psi''(x) + \frac{y^2}{2!}\Psi^{\text{IV}}(x) + \ldots.$$

Toutes trois sont données par M. P. Appell, dans le Mémoire intitulé : *Sur l'équation $r - q = 0$ et la théorie de la chaleur* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892, p. 187), et par M. H. Laurent (*Traité d'Analyse*, t. VI, p. 192). Si l'on prend pour fonctions arbitraires des polynomes, les séries ci-dessus se réduisent aussi à des polynomes, comme le remarque M. Appell. Les dérivées partielles de ces polynomes donnent d'autres polynomes qui sont encore des solutions. Les séries ci-dessus peuvent ne pas être convergentes. Ainsi la dernière ne peut représenter une fonction se réduisant à $\frac{1}{1-x}$ pour $y = 0$, car, pour cette valeur de $\Psi(x)$, elle est divergente, résultat donné par Mme Kowalevski. (P. Appell, *loc. cit.*, p. 188 et 206.)

Soit encore, comme exemple, l'équation de la propagation du son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

L'équation caractéristique $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ donne $\alpha = \pm\beta$, d'où $s_0 = 2$, $s_{2i} = 2\beta^{2i}$, $s_{2i+1} = 0$. On a donc la solution

$$F(y) + \frac{x^2}{2!}F''(y) + \frac{x^4}{4!}F^{\text{IV}}(y) + \ldots,$$

puis, par dérivation, par rapport à x, cette autre

$$\frac{x}{1!}\Phi(y)+\frac{x^3}{3!}\Phi''(y)+\frac{x^5}{5!}\Phi^{\mathrm{iv}}(y)+\ldots.$$

En remplaçant d'abord Φ par F, puis F par Φ et additionnant et retranchant, on aurait un développement pouvant représenter la solution bien connue $F(x+y)+\Phi(x-y)$. Soit enfin l'équation de la théorie du potentiel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

On a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0,$$

d'où

$$\alpha=\pm i\sqrt{\beta^2+\gamma^2},\qquad s_0=2,\qquad s_{2i}=2(-1)^i(\beta^2+\gamma^2)^i,\qquad s_{2i+1}=0,$$

d'où la solution

$$F(yz)-\frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)+\frac{x^4}{4!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)^{(2)}-\ldots,$$

où les exposants des parenthèses indiquent des puissances symboliques. Par dérivation, on a

$$\frac{x}{1!}\Phi(yz)-\frac{x^3}{3!}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{z^2}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^{(2)}-\ldots.$$

La somme de ces deux séries, si l'on choisit des polynomes pour les fonctions arbitraires F et Φ, nous donne tous les polynomes sphériques (P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 111; H. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 41). Le fait que les dérivées partielles d'un polynome sphérique sont aussi des polynomes sphériques est évident d'après les théories précédemment développées. On peut remarquer ici que le fait, pour les équations qui nous occupent, d'admettre des polynomes pour solutions n'est nullement le privilège de l'équation de Laplace ou de celle de la théorie de la propagation de la chaleur; il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les séries entières qui satisfont à ces équations aient pour coefficients des opérateurs aux dérivées partielles susceptibles d'annuler, lorsque leur ordre s'élève, des polynomes arbitraires d'ordre inférieur.

4. *Cas où l'équation caractéristique, relative à une équation d'ordre n, n'est pas du degré n.* — Dans tout ce qui précède, le coefficient P_0, du terme de degré le plus élevé de l'équation caractéristique, n'est pas nul, si bien que l'équation aux dérivées partielles contient toujours le terme $\frac{\partial^n f}{\partial t^n}$. D'après les théorèmes généraux de Cauchy et de Mme de Kowalevski, les solutions précédemment trouvées, qui contiennent n fonctions arbitraires et se peuvent réduire à des fonctions arbitraires, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, ont une existence dont la légitimité était pour ainsi dire assurée à l'avance (E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 17 et 23). Si P_0 ou, plus généralement, $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$ sont nuls, les choses vont changer et nos développements en séries entières ne subsisteront qu'avec une généralité moindre; en outre, les lois de formation des coefficients changent de nature d'une manière remarquable. Les fonctions symétriques s sont ici des fractions rationnelles en α, ayant pour dénominateurs des puissances de P_k et le développement (6) ne sera pas entier en α. Toutefois il sera possible de le multiplier par une puissance de P_k telle qu'il devienne entier jusqu'à un terme d'indice r arbitrairement choisi et, en transportant un tel développement dans l'intégrale (5), nous aurons une série où le coefficient de $\frac{(t-t_0)^r}{r!}$ pourra être considéré comme une fonction arbitraire et où les termes d'ordre inférieur, considérés à gauche du précédent, auront des coefficients que l'on déduira l'un de l'autre par des opérations fonctionnelles, analogues à celles qui se faisaient de gauche à droite dans les cas précédemment étudiés. Ce développement limité représentera asymptotiquement une solution toutes les fois que l'on pourra établir que, pour une valeur suffisamment grande de r, le reste de la série tend vers zéro. Ainsi, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - f = 0$$

admet, sous toutes les restrictions précédentes, la solution

$$F^{(r)}(y) + \frac{x}{1!}F^{(r-1)}(y) + \ldots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}F'(y) + \frac{x^r}{r!}F(y).$$

De telles anomalies sont déjà discutées par Cauchy et par Brisson, géomètre à peu près oublié aujourd'hui, si ce n'est justement par l'éloge qu'en fait Cauchy (*Œuvres complètes*, 2e série, t. VII, p. 198). Bien que le second cas méritât une étude tout aussi attentive que le premier, ce serait m'écarter trop de mon sujet que de m'arrêter ici davantage. J'ai seulement voulu montrer, par des exemples simples, comment les seules propriétés des opérateurs composant le premier membre d'une équation linéaire permettaient de déduire d'une solution très particulière d'autres solutions formant des classes très étendues. Nous allons maintenant généraliser ce qui précède pour des équations aux dérivées partielles à coefficients non constants.

II. — Équations aux opérateurs X.

5. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_r$ les r opérateurs :

$$(1) \qquad X_i(\ ) = \xi_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_{i2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{ir}\frac{\partial}{\partial x_r},$$

qui définissent les transformations infinitésimales d'un groupe continu simplement transitif. Suivant les notations en usage, j'écrirai X_iX_k pour $X_i[X_k(\ )]$ et (X_iX_k) pour $X_iX_k - X_kX_i$. Les opérateurs précédents déterminant par hypothèse un groupe, nous avons

$$(2) \qquad (X_iX_k) = \sum_s c_{iks}X_s,$$

les c_{iks} étant des constantes satisfaisant aux identités de Jacobi.

Nous pouvons imaginer que l'on forme une équation aux dérivées partielles avec les opérateurs X exactement comme les équations du Chapitre précédent étaient formées avec les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$. Par analogie, une telle équation pourrait s'appeler très justement *une équa-*

tion aux opérateurs X *à coefficients constants*. En nous tenant au second ordre, nous verrons facilement que sa forme la plus générale est

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}X_1^2+2\alpha_{12}X_1X_2+2\alpha_{13}X_1X_3+\ldots+2\alpha_{1r}X_1X_r \\ \qquad +\ \alpha_{22}X_2^2\ \ +2\alpha_{23}X_2X_3+\ldots+2\alpha_{2r}X_2X_r \\ \qquad\qquad +\ \alpha_{33}X_3^2\ \ +\ldots+2\alpha_{3r}X_3X_r \\ \qquad\qquad\qquad +\ldots+\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\ \alpha_{rr}X_r^2 \\ \qquad\qquad +\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_rX_r+\alpha f=0, \end{array}\right.$$

les α, α_i, α_{ik} étant de simples coefficients constants. Au cas où il semblerait que la généralité du premier membre serait augmentée en y faisant figurer X_kX_i en même temps que X_iX_k la relation (2) montrerait qu'il n'en est rien, l'un de ces produits ne différant de l'autre que par des termes du premier ordre. Cette remarque porte immédiatement à se demander si l'on ne pourrait pas encore simplifier le premier membre de (3) en utilisant la relation (2). Nous verrons qu'il y a précisément des choses importantes à faire en ce sens, mais je préfère montrer tout de suite quelles sont les propriétés de l'équation (3) qui sont indépendantes de tout arrangement des opérateurs.

Au groupe simplement transitif (1) correspond un groupe simplement transitif de même nature, ces deux groupes sont dits *réciproques*. Leurs transformations sont permutables et leurs opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ vérifient par suite les relations $X_iY_k = Y_kX_i$ ou, en abrégé, $(X_iY_k) = 0$. (S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, p. 380.) Ces deux groupes sont semblables, c'est-à-dire que l'on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables. Je rappelle, en renvoyant toujours à l'Ouvrage de Lie pour les démonstrations, que, le groupe (1) étant donné par ses opérateurs X, on détermine le groupe réciproque en cherchant d'abord toutes les intégrales distinctes du système complet :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=r}\xi_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_r)\frac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{k=r}\xi_{ik}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_r)\frac{\partial f}{\partial x'_k}=0, \\ \qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, r). \end{array}\right.$$

Ce système comprenant r équations à $2r$ variables admet $2r - r$, c'est-à-dire r intégrales distinctes. (E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 52. — S. Lie, *loc. cit.*, p. 88.) En égalant ces intégrales qui sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_r$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ à r constantes C_1, $C_2, \ldots, C_r$, on a r relations entre les x et les x' qui définissent les transformations finies du groupe réciproque cherché. On passé ensuite à ses transformations infinitésimales $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ au moyen d'une des méthodes élémentaires bien connues. (S. Lie, *loc. cit.*, p. 77.)

Le fait que les opérateurs Y sont permutables à tous les opérateurs X entraîne qu'ils sont permutables à l'opérateur défini par tout le premier membre de l'équation (3) et, par suite, ils changent les solutions de cette équation en d'autres solutions.

Il en est évidemment de même de leurs combinaisons linéaires telles que $E = e_1 Y_1 + e_2 Y_2 + \ldots + e_r Y_r$, les e étant des constantes, et de toutes les sommes de produits symboliques de telles combinaisons. En particulier, la série symbolique

$$e^{E} = f + \frac{1}{1!}E(f) + \frac{1}{2!}E^2(f) + \ldots$$

est une solution de l'équation (3) si la fonction f en est une. Or cette série représente la fonction f sur laquelle on a effectué les transformations finies du groupe défini par les r opérateurs Y. (S. Lie, *loc. cit.*, p. 76, et H. Poincaré, *Cambridge philosophical Transactions*, Vol. XVIII, dédié à Sir G. Stokes, p. 220. *Voir* aussi *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XV, 1901, p. 323). Donc les transformations de notre groupe réciproque changent une solution de l'équation (3) en une autre contenant les r constantes arbitraires C. Si l'on multiplie cette dernière solution par une fonction arbitraire des C, puis par les éléments différentiels $dC_1, dC_2, \ldots, dC_r$ et si l'on forme l'intégrale multiple correspondante prise entre des limites constantes mais arbitraires, nous nous élèverons à des solutions dépendant de fonctions arbitraires.

Tout ceci est trop intimement lié aux méthodes de Lie pour que je m'y arrête davantage; je tiens seulement à faire remarquer que le raisonnement précédent est calqué mot pour mot sur celui fait au

Chapitre précédent à propos des équations à coefficients constants au sens ordinaire de l'expression. Nous avions alors les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}$ d'un groupe de translations qui coïncidait avec son groupe réciproque.

En résumé, ce qui précède peut être considéré comme une généralisation des méthodes de Cauchy.

6. *Analogies avec les véritables équations à coefficients constants.* — Puisque les équations à coefficients constants admettent toutes des solutions du type

$$S = e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r},$$

que les opérateurs constituant le premier membre transforment en

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \alpha_1 S, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_2} = \alpha_2 S, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_r} = \alpha_r S,$$

il est naturel de se demander tout d'abord si des équations aux opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ bien déterminés n'admettraient pas, indépendamment de la forme du premier membre, un type général de solutions S, tel que

$$(5) \quad X_1(S) = \alpha_1 S, \qquad X_2(S) = \alpha_2 S, \qquad \ldots, \qquad X_r(S) = \alpha_r S.$$

Si de telles relations pouvaient avoir lieu, elles permettraient évidemment d'achever de déterminer la fonction S au moyen d'une équation algébrique, tout comme pour les équations à coefficients constants. En posant $\log S = U$, les équations (5) peuvent s'écrire

$$(6) \quad X_1(U) = \alpha_1, \qquad X_2(U) = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad X_r(U) = \alpha_r$$

et, si elles admettent une solution U, le système

$$\begin{aligned} T_1(U) &= X_1(U) + \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\ T_2(U) &= X_2(U) + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ T_r(U) &= X_r(U) + \alpha_r \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

doit admettre aussi une solution qui est $U - t$. Ces dernières équations forment un système de r équations à $r+1$ variables, première constatation compatible avec l'existence d'une solution mais seulement d'une. On a ensuite

$$(T_i T_k) = (X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s.$$

Or

$$\sum c_{iks} T_s = \sum c_{iks} X_s + \frac{\partial U}{\partial t} \sum c_{iks} \alpha_s,$$

si bien que, si l'on a

$$(7) \qquad \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} \alpha_s = 0,$$

les $(T_i T_k)$ sont à considérer comme exprimables en fonction linéaire des T et l'existence d'une solution est définitivement assurée. Reste à savoir comment on peut satisfaire au système (7). En général, il semble devoir contenir plus d'équations que d'inconnues sauf pour $r = 2$ et $r = 3$, cas qui sont les plus intéressants. Mais, à supposer ces équations compatibles, elles pourront laisser certains α_s, par exemple α_σ, α_τ, ..., indéterminés si tous les $c_{ik\sigma}$, $c_{ik\tau}$, ... sont nuls. Cela arrive quand le groupe $X_1, X_2, \ldots, X_r$ contient un ou plusieurs sous-groupes invariants. En écartant tout d'abord cette hypothèse, il résulte de l'homogénéité des équations (7) qu'elles ne peuvent donner pour les α_s que des valeurs de la forme $h_1\alpha$, $h_2\alpha$, ..., $h_r\alpha$, α étant une constante indéterminée et la seule qui puisse l'être, et les h étant des coefficients numériques invariables. En d'autres termes, les équations (6) peuvent s'écrire

$$X_1\left(\frac{U}{\alpha}\right) = h_1, \qquad X_2\left(\frac{U}{\alpha}\right) = h_2, \qquad \ldots, \qquad X_r\left(\frac{U}{\alpha}\right) = h_r,$$

$\dfrac{U}{\alpha}$ étant une fonction qui ne peut absolument contenir que les variables x.

Prenons maintenant le cas d'un sous-groupe invariant. Pour fixer les idées, supposons que l'ensemble des opérateurs $X_2, \ldots, X_r$ constitue un sous-groupe invariant dans le groupe $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Cela signifie que

$$(X_1, X_k) = c_{1k2}X_2 + c_{1k3}X_3 + \ldots + c_{1kr}X_r,$$

pour $k = 2, 3, \ldots, r$, et que $X_2, X_3, \ldots, X_r$ définissent, à eux seuls, un groupe à $r-1$ paramètres qui est le sous-groupe invariant en question. Donc tous les c_{ik1} sont nuls et, par suite, α_1 est une constante indéterminée. La solution U du système (6) dépendra donc de deux constantes arbitraires. On établirait de même que, si le sous-groupe invariant est $X_m, X_{m+1}, \ldots, X_r$, la solution U dépend de m constantes arbitraires; l'une de ces constantes peut être simplement multiplicative.

Pour en revenir au problème général, nous supposerons donc que l'on a déterminé une solution U du système (6) contenant au moins une constante arbitraire multiplicative, d'où une solution $S = e^U$ du système (5). Cette solution S substituée dans l'équation (3) nous conduira à une équation algébrique liant les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Si ces dernières se réduisent à une seule, le fait de l'assujettir à vérifier l'équation entraînera que la solution S ne contiendra plus rien d'arbitraire du tout.

Nous allons voir maintenant comment S, quel que soit le nombre de constantes arbitraires que renferme cette solution, est généralisée par les transformations du groupe Y réciproque de X. Si U est une fonction satisfaisant au système (6), $U - U'$ satisfait au système complet (4), U′ désignant une fonction absolument identique à U où les x sont remplacés par les x'. En d'autres termes $U - U'$ est une intégrale de (4) et, par suite, ne peut être autre chose qu'une fonction de r intégrales distinctes telles que celles considérées plus haut et égalées respectivement à des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_r$. Donc

$$U' = U + F(C_1, C_2, \ldots, C_r) \tag{8}$$

et, par suite, la solution $S = e^U$ de l'équation (3) est changée, par les transformations finies du groupe Y, en

$$e^{U+F(C_1, C_2, \ldots, C_r)}. \tag{9}$$

L'analogie de ce résultat avec celui trouvé pour les équations à coefficients constants du Chapitre précédent est évidente, mais il est essentiel de remarquer qu'elle ne se poursuit pas forcément jusque dans son utilisation. Dans le premier cas, nous avons eu :

$$U = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r,$$
$$F(C_1, C_2, \ldots, C_r) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_r C_r;$$

ce qui nous a conduits à la formule de Fourier et aux résultats habituels qui en découlent et dont l'utilité est incontestable. Dans le second, rien ne nous permet d'affirmer que la fonction

$$F(C_1, C_2, \ldots, C_r)$$

ne va pas se scinder en une somme de plusieurs termes dont certains seront complètement indépendants des α, et à ces termes correspondraient, dans la solution (9), des fonctions des C simplement multiplicatives. Ainsi, dans le cas où le groupe X ne contient aucun sous-groupe invariant et où le système (6) ne peut admettre qu'une solution de la forme $U = \alpha V(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, d'où, pour l'équation (3), une solution $e^{\alpha V}$ où α cesse d'être arbitraire comme devant satisfaire à une équation algébrique, la solution (9) ne contient d'autres constantes arbitraires que les C et celles-ci y forment un simple facteur tel que si l'on multiplie par dC_1, dC_2, ..., dC_r et intègre, tout revient à multiplier e^U par un facteur constant. Dans ce cas, la solution obtenue est à considérer comme inutile puisqu'elle ne contient rien d'arbitraire et que les méthodes précédentes ne peuvent la généraliser. Nous rencontrerons pareille singularité dans l'étude de l'équation d'Euler et Poisson, exemple qui d'ailleurs éclaircira ce qui précède.

7. Ces analogies plus ou moins nettes avec les équations à coefficients constants deviennent particulièrement remarquables dans le cas où toutes les constantes c_{iks} qui définissent la structure du groupe X sont nulles. Alors toutes les constantes α sont arbitraires et il existe un changement de variables ramenant l'équation (3) à une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Cela résulte du fait que les opérateurs X sont permutables et qu'on peut, en ce cas, les ramener aux opérateurs $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_r}$. (S. LIE, *Theorie der*

Transformationsgruppen, t. I, p. 339.) Les formules de transformation s'obtiennent en égalant à des constantes arbitraires les r intégrales distinctes du système complet

$$X_k(f) + \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{10}$$

J'ai donné une application géométrique assez intéressante de ces considérations dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, (t. XXXI, 1903, p. 47). Il s'agissait de la détermination des surfaces dont un système d'asymptotiques se projette sur le plan $y\mathrm{O}x$ suivant la famille de courbes définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}.$$

Le problème conduit à l'équation

$$A^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2AB \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + B^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad X^2(f) - Y(f) = 0,$$

si l'on pose

$$X(f) = A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Y(f) = X(A) \frac{\partial f}{\partial x} + X(B) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

En écrivant que ces deux opérateurs sont permutables, on trouve les conditions :

$$X^2(A) - Y(A) = 0, \qquad X^2(B) - Y(B) = 0.$$

Il faut donc que A et B soient des solutions de l'équation proposée pour qu'on puisse la ramener à la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

On peut prendre, en particulier,

$$A = a + cx + dy, \qquad B = b + ex + gy,$$

a, c, d, b, e, g étant des constantes. Donc toutes les familles de courbes définies par des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + ex + gy}{a + ex + gy}$$

peuvent être prises pour projections d'un système d'asymptotiques de certaines surfaces dont la connaissance dépend de l'intégration de l'équation (11) bien connue dans la Théorie de la chaleur. M. L. Bianchi avait déjà fait connaître un cas particulier de ces considérations en montrant que la détermination des surfaces dont un système d'asymptotiques est situé sur des cylindres de révolution de même axe, se ramène à l'intégration de l'équation (11) ([1]). On voit que l'on peut remplacer les cylindres de M. Bianchi par tous ceux dont les sections droites rentrent dans les familles de courbes définies par l'équation différentielle précédente. Pour plus de détails, notamment au point de vue géométrique, je renvoie à ma Note précitée.

8. *Réduction à la forme régulière d'une équation aux opérateurs* X. — Ainsi qu'on l'a déjà remarqué au début du Chapitre, on peut se demander si, au moyen des relations fondamentales (2), on ne pourrait pas ramener l'équation (3) à une forme plus simple. La chose est non seulement possible, mais très aisée en s'appuyant sur le Calcul des polynomes symboliques exposé par M. H. Poincaré dans son Mémoire *Sur les groupes continus* (*Cambridge philosophical Transactions*, t. XVIII, dédié à sir G. Stokes à l'occasion de son jubilé, 1900). M. Poincaré dit que des polynomes formés d'opérateurs tels que X sont *équivalents* quand on peut les ramener l'un à l'autre au moyen des relations (2) et qu'ils sont *réguliers* quand ce sont des sommes de puissances de combinaisons linéaires telles que

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_r X_r;$$

il démontre ensuite qu'un polynome quelconque est toujours équivalent à un polynome régulier.

([1]) E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 170.

Dans le cas particulier qui nous occupe, cette conclusion est à peu près évidente; le polynome symbolique que forme le premier membre de l'équation (3) peut se ramener à une somme de carrés symboliques et la régularisation peut encore s'éclaircir à l'aide d'une interprétation géométrique. On remarquera l'analogie avec la réduction à des sommes de carrés des formes quadratiques algébriques.

Dans l'espace général à r dimensions, prenons r axes rectangulaires d'origine O et r points dans ce même espace,

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_1(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1r}),\\ P_2(\beta_{21}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{2r}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ P_r(\beta_{r1}, \beta_{r2}, \ldots, \beta_{rr}); \end{array}\right.$$

les P désignent ces points, les parenthèses qui suivent contiennent les coordonnées de chacun.

Considérons tous les vecteurs OP_i et désignons leurs longueurs respectives par ρ_i. Nous avons, en désignant par la notation (ik) l'angle P_iOP_k,

$$\rho_k^2 = \beta_{k1}^2 + \beta_{k2}^2 + \ldots + \beta_{kr}^2,$$

$$\rho_i\rho_k\cos(ik) = \beta_{i1}\beta_{k1} + \beta_{i2}\beta_{k2} + \ldots + \beta_{ir}\beta_{kr}.$$

Avec ces notations, on peut écrire aisément l'identité

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} [\rho_1^2X_1^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(12)X_1X_2 + \ldots + 2\rho_1\rho_r\cos(1r)X_1X_r \\ \qquad + \quad \rho_2^2X_2^2 \quad + \ldots + 2\rho_2\rho_r\cos(2r)X_2X_r \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \rho_r^2X_r^2] \\ = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=r}(\beta_{1i}X_1 + \beta_{2i}X_2 + \ldots + \beta_{ri}X_r)^2 \\ \quad + [\rho_1\rho_2\cos(12)(X_1X_2) + \rho_1\rho_3\cos(13)(X_1X_3) + \ldots + \rho_1\rho_r\cos(1r)(X_1X_r) \\ \qquad\qquad + \rho_2\rho_3\cos(23)(X_2X_3) + \ldots + \rho_2\rho_r\cos(2r)(X_2X_r) \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \rho_{r-1}\rho_r(X_{r-1}X_r)]. \end{array}\right.$$

Le second membre de cette égalité se compose de la somme de carrés symboliques mise en évidence et d'un crochet qui est tout entier du premier degré d'après les relations (2). Quant au polynome triangulaire du premier membre, ses coefficients sont quelconques; on peut, par suite, l'identifier avec le polynome de même nature qui figure dans le premier membre de (3). Il est ainsi démontré que le premier membre de l'équation (3) peut se ramener à une somme de carrés symboliques suivie d'une forme linéaire des opérateurs X.

Considérons les relations d'identification

$$\alpha_{ii} = \rho_i^2, \qquad \alpha_{ik} = \rho_i \rho_k \cos(ik).$$

Si nous exprimons les seconds membres en fonction des β_{ik}, il y a évidemment surabondance de ces derniers éléments qui sont au nombre de r^2 alors que les α_{ik} ne sont qu'au nombre de $\frac{r(r+1)}{2}$. Il est facile de faire disparaître cette surabondance, ce qui d'ailleurs simplifie encore les choses. Les coefficients ρ_i^2 et $\rho_i\rho_k\cos(ik)$ restent évidemment les mêmes si l'ensemble de tous les vecteurs OP est considéré comme un système invariable pouvant tourner autour du seul point fixe O. Amenons donc le vecteur OP_1 sur l'axe Ox_1, puis, par rotation autour de cet axe, le vecteur OP_2 dans le plan Ox_1x_2, puis, par rotation dans l'espace à quatre dimensions, le vecteur OP_3 dans l'espace $Ox_1x_2x_3$ et ainsi de suite. Il n'y aura plus finalement dans l'espace à r dimensions que le dernier vecteur OP_r et les points P auront alors des coordonnées plus simples que précédemment et que donne le Tableau ci-dessous :

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{llllll} P_1 & (\beta_{11}, & 0, & \ldots, 0, & & 0), \\ P_2 & (\beta_{21}, & \beta_{22}, & \ldots, 0, & & 0), \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill,} \\ P_{r-1} & (\beta_{r-1,1}, & \beta_{r-1,2}, & \ldots, & \beta_{r-1,r-1}, & 0), \\ P_r & (\beta_{r1}, & \beta_{r2}, & \ldots, & \beta_{r,r-1}, & \beta_{rr}). \end{array} \right.$$

Les β_{ik} sont alors en même nombre que les α_{ik} et la généralité n'est évidemment diminuée en rien. Nous avons donc le résultat suivant : *Toute équation linéaire du second ordre aux opérateurs* $X_1, X_2, \ldots, X_r$ *d'un groupe continu simplement transitif peut être ramenée à* *la forme*

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &(\beta_{11}X_1+\ldots+\beta_{r1}X_r)^2\\ &\quad+(\beta_{22}X_2+\ldots+\beta_{r2}X_r)^2+\ldots\\ &\quad+(\beta_{rr}X_r)^2+\beta_1X_1+\ldots+\beta_rX_r+\beta f=0.\end{aligned}\right.$$

En empruntant la terminologie de M. Poincaré, je dirai que *cette équation est régularisée, par rapport aux opérateurs* X, *suivant les vecteurs* OP.

9. *Équations régularisables dans l'espace à moins de r dimensions.* — L'équation régulière précédente contient r carrés symboliques, mais il peut arriver, pour certaines formes des coefficients de l'équation aux dérivées partielles qu'elle représente, qu'elle en contienne moins. Géométriquement on pourra toujours interpréter cela en ramenant les r points P dans un espace à moins de r dimensions.

A ce point de vue, la plus simple de toutes les équations est celle qui se régularise dans l'espace à une dimension. Tous les vecteurs OP sont alors confondus suivant une seule et même droite et il n'y a plus dans le premier membre de l'équation (15) que le premier carré symbolique. Telle est, par exemple, l'équation à deux variables $X^2-Y=0$ rencontrée plus haut et qui déterminait une surface par la projection d'un système d'asymptotiques. En se reportant aux expressions (1) des opérateurs X, on voit facilement que, dans toute équation régularisable suivant une seule et même droite, les coefficients des dérivées partielles

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

sont respectivement de la forme

$$A_{ii}^2,\quad 2A_{ii}A_{kk},\quad A_{kk}^2,$$

les A étant des formes linéaires à coefficients constants des ξ.

Après ces équations viennent celles qui sont régularisables dans un plan. Dans le Tableau (14), les deux premières colonnes de β sont les seules qui ne soient pas nulles et le premier membre de (15) se réduit à la somme des deux premiers carrés. Dans les équations de cette nature, les dérivées partielles (16) sont respectivement

$$A_{1i}^2 + A_{2i}^2, \quad 2(A_{1i}A_{1k} + A_{2i}A_{2k}); \quad A_{1k}^2 + A_{2k}^2.$$

Plus généralement, soit une équation régularisable dans l'espace à m dimensions ($m < r$). Les coefficients des dérivées partielles (16) sont respectivement de la forme

$$\begin{gathered} A_{1i}^2 + A_{2i}^2 + \ldots + A_{mi}^2, \\ 2(A_{1i}A_{1k} + A_{2i}A_{2k} + \ldots + A_{mi}A_{mk}), \\ A_{1k}^2 + A_{2k}^2 + \ldots + A_{mk}^2, \end{gathered}$$

en posant

$$A_{ik} = \beta_{1i}\xi_{1k} + \beta_{2i}\xi_{2k} + \ldots + \beta_{ki}\xi_{rk}.$$

Pour $m = r$, on retrouve le cas général.

10. *Équations régularisables suivant des vecteurs orthogonaux.* — Si tous les vecteurs OP sont orthogonaux, on peut les considérer comme confondus avec les axes des coordonnées; il n'y a plus que les β_{ik} de la diagonale du Tableau (14) qui ne sont pas nuls et l'équation (15) prend la forme

$$(\beta_{11}X_1)^2 + (\beta_{22}X_2)^2 + \ldots + (\beta_{rr}X_r)^2 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_r X_r + \beta f = 0.$$

Si tous les β_{ii} sont égaux à 1, je dirai que l'équation est régularisée suivant des vecteurs orthogonaux unitaires. *Toute équation aux opérateurs* X *du type* (3) *peut être régularisée suivant des vecteurs orthogonaux unitaires.* Il suffit, en effet, de prendre pour nouveaux opérateurs les formes linéaires contenues dans les parenthèses du premier membre de (15); les deux groupes définis par les X ou par r formes linéaires à coefficients constants de ces mêmes opérateurs X ne sont pas distincts. Cette dernière réduction est certainement très avantageuse au point de vue de la simplicité de forme obtenue finalement pour le premier membre de l'équation, mais il faut observer que, au point de vue où nous nous sommes placés au début de ce Mémoire, cette simplicité importe moins que celle des opérateurs eux-mêmes.

11. *Régularisation d'une équation quelconque.* — Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, absolument quelconque, ce qui précède montre que l'on peut toujours réduire son premier membre à une somme de carrés symboliques d'opérateurs de la forme (1), somme suivie de termes du premier ordre formant un opérateur de même nature, car les expressions trouvées pour les coefficients des dérivées partielles (16) peuvent représenter des fonctions quelconques, mais il faut bien observer qu'alors les opérateurs, tels que (1), n'appartiendront pas forcément à un groupe. De plus, les choses pourront être compliquées encore par l'ensemble des termes du premier ordre, ensemble formant, en général, un opérateur distinct des précédents. Naturellement ces équations quelconques ne jouiront en rien des propriétés étudiées au début de ce Chapitre, mais je remarquerai cependant que la régularisation met en lumière certains points intéressants. Une équation à r variables se régularisera, en général, avec r carrés symboliques. Ainsi, une équation du second ordre, à deux variables, régularisée, contient, en général, deux carrés dans son premier membre, les deux carrés pouvant être remplacés facilement par un produit; on retrouve la forme donnée à l'équation générale du second ordre par Legendre et Imschenetsky (E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 32). Les méthodes de ces deux savants, celle de Laplace, ne s'étendent pas aux équations générales à plus de deux variables, mais si, parmi ces dernières, on considère la classe de celles qui se régularisent dans l'espace à deux dimensions, lesquelles ne contiennent que deux carrés, l'analogie avec les équations à deux variables subsiste. Je ne puis m'étendre ici plus longuement sur ces idées, mais la décomposition en carrés symboliques me paraît comparable à la décomposition des formes quadratiques algébriques.

Les équations régularisables à l'aide de nombres différents de carrés sont, à coup sûr, aussi séparées que les formes algébriques qui sont dans le même cas. La régularisation peut donc être la source de classifications analogues à celles de la théorie des caractéristiques.

12. *Applications des théories précédentes.* — Après les équations à coefficients constants, étudiées au Chapitre précédent, les plus simples seront celles formées d'opérateurs aussi simples que possible appartenant à un groupe continu simplement transitif. De tels groupes sont les groupes projectifs du plan dont les opérateurs sont de la forme

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

ξ et η étant du premier degré en x et y. De tels opérateurs formeront, comme on le voit facilement, des équations dont les dérivées du second ordre auront pour coefficients des formes du second degré en x et y, les dérivées du premier ordre ayant pour coefficients des formes du premier degré de ces mêmes variables. Réciproquement, des équations aux dérivées partielles de cette forme, lesquelles correspondent aux équations différentielles ordinaires admettant pour intégrale la série hypergéométrique, auront toujours certaines chances de pouvoir être considérées comme formées des opérateurs d'un groupe projectif, vu l'assez grande variété de formes que présentent ces groupes.

Voici un Tableau de groupes projectifs à deux paramètres; ce sont de véritables groupes à deux paramètres ou des sous-groupes tirés de groupes plus généraux.

On représente, suivant l'usage, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ par p et q.

Groupes dont l'une des constantes de structure est nulle.

1° $(XY)=\lambda X$.

X.	Y.	Structure.
p	$xp-yq$	$1,0$
q	$yq-xp$	$1,0$
p	$axp+byq$	$a,0$
q	$axp+byq$	$b,0$
xq	$axp+byq$	$b-a,0$
yp	$axp+byq$	$a-b,0$
$p+xq$	$xp+2yq$	$1,0$
q	$p+yq$	$1,0$
	$xp+(y-x)q$	$1,0$

2° $(XY) = \mu Y$.

X.	Y.	Structure.
xp	xq	0, 1
yq	yp	0, 1
xp	$x^2p + xyq$	0, 1
yq	$xyp + y^2q$	0, 1
$xp - yq$	$x^2p + xyq$	0, 1
$yq - xp$	$xyp + y^2q$	0, 1
$xp + 2yq$	$(x^2 - y)p + xyq$	0, 1
$xp + q$	xq	0, 1

Ces groupes sont empruntés à l'Ouvrage de S. Lie et G. Scheffers : *Vorlesungen über continuierliche Gruppen* (p. 288).

D'après un théorème général de Lie (*loc. cit.*, p. 435 : *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, p. 340), deux groupes simplement transitifs, ayant même structure, sont semblables, c'est-à-dire qu'on peut les ramener l'un à l'autre par un changement de variables.

Ainsi, dans la liste précédente, nous pouvons prendre deux groupes au hasard et les transformer l'un en l'autre. Soient, pour fixer les idées, p, $axp + byq$ à ramener à la forme xp, xq. Pour que les structures soient complètement identiques, il convient d'abord de les écrire

$$p, \quad xp + \frac{b}{a}yq, \quad 1, 0,$$

$$xq, \quad -xp, \quad 1, 0.$$

Nous avons ensuite (S. Lie, *loc. cit.*) à intégrer le système complet

$$\frac{\partial f}{\partial x} + x'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b}{a}y\frac{\partial f}{\partial y} - x'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

qui admet les deux intégrales distinctes $xx' - y' = C$, $y^a x'^b = C'^a$, d'où les formules de transformation

$$x' = \left(\frac{C'}{y}\right)^{\frac{a}{b}}, \quad y' = x\left(\frac{C'}{y}\right)^{\frac{a}{b}} - C.$$

Nous voyons donc que toutes les équations linéaires aux dérivées partielles formées des opérateurs d'un groupe simplement transitif du plan, pourront toujours être régularisées finalement à l'aide des opérateurs d'un groupe de même nature que l'on pourra prendre aussi simple que possible, notamment dans la liste des groupes projectifs.

S'il s'agissait non pas de groupes plans mais de groupes d'un espace plus général, on arriverait évidemment à des conclusions identiques, mais, dans la suite du présent Mémoire, ce sont les équations à deux variables qui nous fourniront des applications des théories précédentes.

III. — L'équation d'Euler et Poisson.

13. Il résulte de ce qui précède que les équations les plus simples, après les équations à coefficients constants proprement dites, sont celles dont le premier membre est formé d'opérateurs appartenant à un groupe projectif plan. En fait, la simplicité relative de telles équations a naturellement conduit les géomètres à s'occuper d'elles. On en a un bel exemple dans l'équation d'Euler et Poisson :

$$(1)\quad (x-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - n(x-y)\frac{\partial f}{\partial x} + m(x-y)\frac{\partial f}{\partial y} - pf = 0,$$

à laquelle M. G. Darboux a consacré de fort belles pages dans ses *Leçons sur la Théorie des surfaces* (t. II, p. 54), en se réclamant surtout de la méthode de Laplace et de résultats appartenant en propre à lui et à M. P. Appell.

Je vais reprendre cette étude par les méthodes du Chapitre précédent en m'efforçant surtout de séparer de l'équation toutes les propriétés qui ne lui appartiennent pas en propre, mais appartiennent aux opérateurs :

$$(2)\qquad X = (x-y)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = (x-y)\frac{\partial}{\partial y}$$

et qui, par suite, appartiendraient tout aussi bien à une équation de forme et d'ordre quelconques formée avec les mêmes opérateurs.

L'équation (1) s'écrit avec les opérateurs (2) :

$$(3) \qquad XY - nX + (m-1)Y - pf = 0.$$

En multipliant d'abord par 4, on la régularise facilement à l'aide de deux vecteurs de longueur nulle dirigés suivant les droites isotropes. On l'obtient ainsi sous la forme

$$(4) \quad (X+Y)^2 - (X-Y)^2 - (4n-2)X + (4m-2)Y - 4pf = 0.$$

Les opérateurs (2) forment un groupe dont les constantes de structure sont 1 et 1. On a, en effet, $(XY) = X + Y$. Ce groupe étant projectif, on peut remplacer ses opérateurs par d'autres définissant des groupes projectifs de même structure. Cherchons, par exemple, en nous laissant guider par la simplicité, à écrire l'équation d'Euler et Poisson avec les opérateurs xp, xq. Le changement de variables $x' = x - y$, $y' = x + y$ nous donne facilement

$$X = x'\frac{\partial}{\partial x'} + x'\frac{\partial}{\partial y'}, \qquad Y = -x'\frac{\partial}{\partial x'} + x'\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Supprimant les accents et portant dans (4), il vient

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(m - \frac{1}{2}\right)\left(-x\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) - pf = 0$$

ou, en développant et reprenant les notations ordinaires,

$$(5) \quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (m+n)x\frac{\partial f}{\partial x} + (m-n)x\frac{\partial f}{\partial y} - pf = 0.$$

Pour $m = n$, on reconnaît une forme spéciale de l'équation donnée par Euler (G. Darboux, *loc. cit.*, p. 56). Cette forme (5) étant obtenue, je préfère revenir à la forme habituelle et aux opérateurs (2), surtout pour ne pas m'écarter de la forme d'exposition adoptée par M. G. Darboux.

Déterminons d'abord des opérateurs permutables aux opérateurs (2).

Il nous faut intégrer le système complet

$$(x-y)\frac{\partial f}{\partial x}+(x'-y')\frac{\partial f}{\partial x'}=0, \qquad (x-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(x'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}=0,$$

auquel on trouve facilement les intégrales

$$\frac{x'-y'}{x-y}, \quad \frac{xy'-x'y}{x-y}$$

qui, égalées à des constantes arbitraires a et b, donnent les formules de transformation

$$x'=ax+b, \qquad y'=ay+b. \tag{6}$$

Ce sont les transformations finies du groupe réciproque de (2); on trouve alors immédiatement ses transformations infinitésimales :

$$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}, \qquad x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{7}$$

On vérifie facilement que ces deux opérateurs sont permutables aux opérateurs (2).

Il s'ensuit que *toute équation linéaire formée avec les opérateurs* (2), *quels que soient sa forme ou son ordre, a ses solutions changées en d'autres solutions par la transformation* (6) *et les opérateurs* (7). Pour l'équation d'Euler et Poisson, ce résultat a d'ailleurs été donné par M. G. Darboux (*loc. cit.*, p. 61) qui rappelle que Sophus Lie l'a également obtenu. Mais il est à démêler d'autres qui, au premier abord, paraissent de même nature. Ainsi, pour $p=0$, l'opérateur

$$x^2\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}+mx+ny$$

change toute solution de l'équation (1) en une autre, mais c'est là une propriété particulière à l'équation d'Euler et Poisson; elle n'est plus vraie pour une équation construite avec les opérateurs (2) assemblés au hasard. De même, l'élégante transformation finie de M. P. Appell est une propriété particulière à (1) pour $p=0$.

14. D'après ce que nous avons vu à la fin du n° **6**, l'équation qui nous occupe doit avoir une solution dont le type subsiste pour toute équation formée des opérateurs (2), les solutions du type contenant au moins une constante arbitraire qui est particularisée, quant à chaque équation particulière, au moyen d'une équation algébrique. D'après les généralités du n° **6**, ce type de solution est ici défini par l'exponentielle e^U, U étant solution du système

$$(x-y)\frac{\partial f}{\partial x}=\alpha_1, \qquad (x-y)\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha_2, \qquad \lambda\alpha_1+\mu\alpha_2=0;$$

λ et μ sont les constantes de structure de (2), donc 1 et 1, si bien qu'en posant $\alpha_1=-\alpha_2=\alpha$, on trouve la solution

$$U=\alpha\log(x-y),$$

d'où

$$e^U=(x-y)^\alpha.$$

La solution $(x-y)^\alpha$ appartient donc à toutes les équations linéaires formées des opérateurs (2). Dans chaque cas particulier, α est racine d'une équation algébrique qui est ici :

$$\alpha^2+(m+n-1)\alpha+p=0. \tag{8}$$

On vérifie immédiatement que, comme l'indique la théorie générale, la solution en question n'est pas généralisée par la transformation (6). D'ailleurs les opérateurs (7) ne la transforment pas non plus en une solution nouvelle. Partant de la solution $(x-y)^\alpha$ dans laquelle il est sous-entendu que α est racine de (8), il est naturel de chercher des solutions de l'équation (1) qui soient de la forme $(x-y)^\alpha\theta(x,y)$. La fonction θ est alors déterminée par une équation telle que

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial\theta}{\partial y}=0, \tag{9}$$

que j'appellerai, avec M. Darboux, l'équation $E(\beta,\beta')$ en désignant par $Z(\beta,\beta')$ une quelconque de ses solutions (G. Darboux, *loc. cit.*, p. 55). L'équation (8) nous montre immédiatement que, comme solution du type précédent, l'équation (9) admet $(x-y)^{1-\beta-\beta'}$, ce qui est un résultat bien connu.

15. *Sur l'application d'une méthode de Laplace généralisée par M. Picard.* — Il nous reste à partir d'une solution de (9), distincte de la précédente, pour qu'on puisse la généraliser par une transformation du groupe (6). Ici se pose alors la question générale de trouver une première solution particulière des équations qui nous occupent. Le procédé applicable à l'équation d'Euler et Poisson qui consiste à chercher une solution qui soit le produit d'une fonction de x seul par une fonction de y seul est peut-être le plus simple auquel on puisse avoir recours. Plus généralement, si l'on considère que les équations ici étudiées ont souvent des coefficients qui sont des formes linéaires de x et de y, il sera d'un grand secours dans de tels cas d'appliquer la méthode donnée par Laplace pour les équations différentielles ordinaires et étendue aux équations aux dérivées partielles par M. Picard. (*Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1891, p. 308). Cette méthode de M. Picard est fort intéressante à comparer avec celle développée dans le présent Mémoire, bien que toutes deux ne puissent s'appliquer toujours aux mêmes équations. En effet, la méthode de M. Picard s'applique à des équations à coefficients linéaires qui peuvent parfaitement ne pas être formées des opérateurs d'un groupe, seul cas étudié ici, mais d'autre part elle ne s'applique pas dans le cas de coefficients quadratiques alors que les équations de ce Mémoire peuvent en présenter de tels. Mais dans les deux cas on peut obtenir, de bien des manières, des solutions renfermant une fonction arbitraire (E. Picard, *loc. cit.*). Pour les équations aux opérateurs X, on peut, de toute solution contenant une fonction arbitraire, en déduire d'autres au moyen des opérateurs réciproques Y. Seulement rien n'indique que cela augmente toujours la généralité.

Pour en revenir à l'équation d'Euler et Poisson nous pouvons facilement en trouver des solutions particulières telles que

$$(10) \qquad x^{-\beta}y^{-\beta'}, \quad (y-x)^{1-\beta-\beta'}x^{\beta'-1}y^{\beta-1}$$

en raisonnant soit comme M. Darboux, soit comme M. Picard.

La première est d'une importance capitale, car on peut en déduire l'intégrale générale au sens de Riemann sans s'appuyer sur d'autres propriétés de l'équation que celles qui appartiennent aux opérateurs

(2) comme on le verra dans un instant. Tout d'abord notre première solution devient par la transformation (6)

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}.$$

Considérant a et b comme des fonctions d'une certaine variable u et $\varphi(u)$ désignant une fonction arbitraire, on conclut de là la solution

$$\int \varphi(u)(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\,du. \tag{11}$$

En raisonnant de même sur la seconde solution (10) et ajoutant à la précédente on aurait la formule à deux fonctions arbitraires donnée dans un cas particulier par Poisson et généralisée par M. Appell. Or cette formule est la source d'une foule de solutions; elle peut même donner celles déduites par M. Darboux, dans un ordre d'idées différent, de la méthode de Laplace. Ainsi soit u une variable imaginaire et prenons l'intégrale

$$\int \varphi(u)(x-u)^{-\beta}(y-u)^{-\beta'}\,du \tag{12}$$

le long d'un contour infiniment petit décrit autour du point singulier $u=y$ en supposant que β et β' soient des entiers positifs m et n. On obtient à un facteur constant près

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\frac{\varphi(y)}{(x-y)^m} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\,\partial y^{n-1}}\left[\frac{\varphi(y)}{x-y}\right].$$

En raisonnant de même pour le pôle $u=x$, on aurait une autre formule qui, avec la précédente, donnerait

$$Z(m,n)=\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\,\partial y^{n-1}}\left(\frac{X-Y}{x-y}\right),$$

X et Y étant respectivement fonctions de x seul et de y seul. (G. Darboux, *loc. cit.*, p. 65.)

Comme autre exemple observons d'abord avec M. Darboux que les limites constantes de l'intégrale (12) peuvent être remplacées par x

ou par y, si bien que l'intégrale

$$\int_x^\infty u^{\lambda+\beta+\beta'-1}(u-x)^{-\beta}(u-y)^{-\beta'}\,du$$
$$= x^\lambda \int_1^\infty v^{\lambda+\beta+\beta'-1}(v-1)^{-\beta}\left(v-\frac{y}{x}\right)^{-\beta'} dv$$

où λ est une constante arbitraire, est une solution. On reconnaît une intégrale définissant la série hypergéométrique (E. Picard, *Traité d'Analyse,* t. II, p. 228) et nous retrouvons la solution connue

$$x^\lambda F\left(\beta', -\lambda, 1-\beta-\lambda, \frac{y}{x}\right).$$

16. *Sur la recherche de l'intégrale générale d'après Riemann.* — La recherche de l'intégrale de Riemann qui est déterminée dans tout le plan quand on lui assigne des valeurs arbitraires sur les caractéristiques de l'équation nécessite d'abord la considération de l'équation adjointe

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\beta+\beta'}{(x-y)^2}u = 0$$

pour laquelle il faut trouver une solution se réduisant respectivement à

$$(14)\qquad \left(\frac{y-x_0}{y_0-x_0}\right)^{\beta'} \quad \text{et à} \quad \left(\frac{y_0-x}{y_0-x_0}\right)^{\beta}$$

pour $x = x_0$ et $y = y_0$, x_0 et y_0 jouant le rôle de constantes arbitraires dans cette solution qui doit satisfaire aussi à l'équation primitive, si l'on y considère au contraire x_0 et y_0 comme les variables. Sans revenir sur la savante analyse par laquelle M. Darboux résout ce problème, je veux simplement montrer que le résultat ne dépend au fond que de l'existence de la solution de laquelle nous sommes déjà partis. En effet, l'équation adjointe (13) est aussi une équation d'Euler et Poisson qui admet la solution $u = (x-y)^{\beta+\beta'}v$, si v satisfait à

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Or, nous pouvons prendre

$$\begin{aligned} v &= x^{-\beta'} y^{-\beta} \\ &= [(u-1)x - (ux_0 - y_0)]^{-\beta'} [(u-1)y - (ux_0 - y_0)]^{-\beta}, \end{aligned}$$

u, x_0, y_0 étant jusqu'ici des constantes, d'où la solution

$$\int u^{\beta-1} [u(x-x_0) - (x-y_0)]^{-\beta'} [u(y-x_0) - (y-y_0)]^{-\beta} \, du.$$

Pour limite supérieure de cette intégrale définie, on peut prendre l'infini positif et pour limite inférieure $\frac{x-y_0}{x-x_0}$, car β' se pouvant mettre avec l'approximation que l'on veut sous la forme $\frac{2p+1}{2q}$, p et q étant des entiers, ladite limite inférieure de l'intégrale sépare une partie réelle d'une partie purement imaginaire. Posant $u = \frac{1}{t}\frac{x-y_0}{x-x_0}$, on a

$$(x-y_0)^{-\beta'}(y-x_0)^{-\beta} \int_0^1 t^{-1-\beta} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{-\beta'} \left[\frac{1}{t} - \frac{(y-y_0)(x-x_0)}{(y-x_0)(x-y_0)}\right]^{-\beta} dt.$$

Cette solution v multipliée par $(x-y)^{\beta+\beta'}$ donne la solution u désirée. Pour $x = x_0$, $y = y_0$, elle se réduit à un facteur constant près aux expressions (14). Il resterait à vérifier que, considérée comme fonction de x_0 et y_0, elle satisfait à l'équation primitive, ce pourquoi je renvoie à l'ouvrage de M. Darboux.

Tous ces exemples montrent le grand parti que l'on peut tirer de solutions particulières dans la théorie des équations qui nous occupent.

IV. — Exemples divers. — Surfaces déterminées par la projection d'un système de lignes asymptotiques.

17. Les méthodes précédemment développées sont évidemment susceptibles de s'appliquer à beaucoup d'équations que l'on traitera comme l'équation d'Euler et Poisson, soit immédiatement, soit après un changement de variables ramenant, s'il y a quelque avantage à cela, les opérateurs du premier membre à d'autres opérateurs plus simples. Je développerai un exemple en ce sens à propos d'une équation parabolique. Nous avons déjà vu que la famille de courbes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} \tag{1}$$

pouvait être considérée comme la projection d'un système d'asymptotiques de toutes les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles

$$A^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2AB \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + B^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

ou

$$X^2(f) - Y(f) = 0,$$

si l'on pose

$$X(f) = A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Y(f) = X(A)\frac{\partial f}{\partial x} + X(B)\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{3}$$

A côté du cas d'intégrabilité précédemment étudié au n° **7**, cas où les opérateurs X et Y étaient permutables, nous allons étudier celui où ces mêmes opérateurs définissent un groupe dont les transformations ne sont pas permutables. On aura donc

$$(XY) = \lambda X + \mu Y,$$

λ et μ désignant des constantes. En écrivant que les opérateurs (3) réalisent une telle condition, il vient les relations

$$X^2(A) - Y(A) = \lambda A + \mu X(A),$$
$$X^2(B) - Y(B) = \lambda B + \mu X(B).$$

Elles forment un système d'équations non linéaires fort compliqué. Si l'on consent à altérer la symétrie, on gagne tout de suite beaucoup en simplicité en remarquant que la première équation admet la solution $A = 1$, si $\lambda = 0$. Reste alors la seconde

$$X^2(B) - Y(B) - \mu X(B) = 0,$$

ou

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y} + B^2\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \mu\left(\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial y}\right) = 0.$$

Donc si B est une solution quelconque de cette dernière équation nous pouvons appliquer les méthodes développées dans le présent Mémoire à l'équation linéaire

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + B^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

qui est alors formée avec deux opérateurs X et Y, tels que

$$(XY) = \mu Y.$$

Tous les groupes définis par cette relation peuvent se ramener par un changement de variables au groupe projectif très simple

$$X = \mu x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = x\frac{\partial}{\partial y}$$

qui y satisfait comme on le vérifie immédiatement.

Donc, quelle que soit la solution B satisfaisant à (4), l'équation (5) pourra toujours se ramener à la forme

$$\left(\mu x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ou, en développant,

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\mu^2 x}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Telle est donc l'équation que nous avons à étudier.

18. Pour trouver les opérateurs permutables à xp et xq, il nous faut intégrer le système complet

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + x'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0, \qquad x\frac{\partial f}{\partial y} + x'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

qui admet les intégrales

$$\frac{x'}{x}, \quad y' - \frac{x'}{x} y.$$

En les égalant à des constantes arbitraires a et b, nous avons les formules de transformation

$$(7) \qquad x' = ax, \qquad y' = ay + b,$$

qui sont les transformations finies du groupe réciproque de xp, xq. Pour les transformations infinitésimales de ce groupe réciproque, on trouve immédiatement les opérateurs

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Donc les transformations finies (7) et les opérateurs (8) changent toute solution de l'équation (6) en une autre solution. Ce résultat, qui subsiste évidemment pour toutes les équations linéaires aux opérateurs xp et xq, n'est pas distinct, en particulier, de celui relatif à l'équation d'Euler et Poisson mise sous la forme (5) du n° **13**.

L'équation (6) étant écrite avec des opérateurs aussi simples que possible, on peut se demander si, inversement, on ne peut lui donner une forme encore plus simple, quitte à employer des opérateurs un peu plus compliqués. Nous pouvons essayer le procédé de réduction indiqué par M. E. Goursat dans ses *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (t. II, p. 39). L'équation (6) admet les deux solutions évidentes $\log x$ et $x + \mu^2 y$. Faisons d'abord le changement de variables

$$u = \log x, \qquad v = y.$$

Les opérateurs xp et xq deviennent

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad e^u \frac{\partial f}{\partial v};$$

et l'équation (6) s'écrit alors

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{e^u}{\mu^2}\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Quant au changement de variables

$$u = x + \mu^2 y, \qquad v = y,$$

il transforme les opérateurs xp et xq en

$$(u - \mu^2 v)\frac{\partial f}{\partial u}, \quad (u - \mu^2 v)\left(\mu^2 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

et l'équation (6) en

$$\mu^2(u - \mu^2 v)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Ces formes réduites sont intéressantes, surtout la seconde qui, pour $\mu = 1$, nous donne encore un exemple simple d'équation formée avec les mêmes opérateurs que l'équation d'Euler et Poisson, mais aucune d'elles ne paraît présenter de plus grandes facilités d'intégration que la forme primitive. J'ai observé, au contraire, qu'il était utile, quant à la recherche d'une solution particulière, de remplacer x par $-\frac{x^2}{4}$. L'équation devient alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

et peut être considérée comme formée avec les opérateurs

$$x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{11}$$

Les transformations finies et infinitésimales (7) et (8) sont alors remplacées par

$$x' = ax, \qquad y' = a^2 y + b, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{13}$$

19. *Recherche d'une solution particulière. Application de la méthode de Laplace généralisée par M. Picard.* — On peut d'abord rechercher une solution de l'équation (10) en admettant qu'elle ait la forme XY, X étant fonction de x seul, Y fonction de y seul. En effet l'équation

$$X''Y + \frac{1}{x}X'Y + \frac{1}{\mu^2}XY' = 0$$

se scinde immédiatement en les deux suivantes :

$$(14) \qquad X'' + \frac{1}{x}X' + X = 0, \qquad Y' - \mu^2 Y = 0.$$

On reconnaît immédiatement dans la première une équation linéaire intégrable au moyen des transcendantes de Bessel (H. Laurent, *Traité d'Analyse*, t. V, p. 218).

D'ailleurs on vérifie sans peine que l'expression

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\alpha i x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha = \pi\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^6}{6!} + \ldots\right)$$

en est une solution.

La seconde équation (14) donnant $Y = e^{\mu^2 y}$, nous avons, pour (10), la solution particulière

$$e^{\mu^2 y}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha i x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha$$

que l'on peut, si on le désire, débarrasser de tout élément imaginaire en remplaçant x par $-ix$ et y par $-y$, substitutions évidemment permises d'après les formules (12). On obtient ainsi

$$(15) \qquad e^{-\mu^2 y}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha.$$

Comme je l'ai expliqué au Chapitre précédent, on pourrait aussi appliquer la méthode de Laplace généralisée par M. Picard (*loc. cit.*).

Cette méthode consiste à poser

$$f = \int\int e^{\alpha x} e^{\beta y} \psi(\alpha\beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

On a ensuite

$$
\begin{aligned}
x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \int e^{\alpha x}e^{\beta y}\alpha^2\psi(\alpha\beta)\,d\beta - \int\!\!\int e^{\alpha x}e^{\beta y}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha^2\psi)\,d\alpha\,d\beta,\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \int\!\!\int e^{\alpha x}e^{\beta y}\alpha\psi\,d\alpha\,d\beta;\\
\frac{x}{\mu^2}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\mu^2}\int e^{\alpha x}e^{\beta y}\beta\;\psi(\alpha\beta)\,d\beta - \frac{1}{\mu^2}\int\!\!\int e^{\alpha x}e^{\beta y}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\beta\psi)\,d\alpha\,d\beta.
\end{aligned}
$$

Additionnant, il faut pouvoir annuler tout le second membre. On déterminera d'abord la fonction ψ comme devant satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha^2\psi) - \alpha\psi + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\beta\psi}{\mu^2}\right) = 0$$

ou

$$\left(\alpha^2 + \frac{\beta}{\mu^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \alpha\psi = 0,$$

d'où

$$\psi = \frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{\mu^2\alpha^2+\beta}},$$

φ étant une fonction arbitraire. Si maintenant on imagine, pour fixer les idées, que les intégrations par partie par rapport à α aient été faites entre les limites -1 et $+1$, il nous reste à annuler

$$
\begin{aligned}
&\int e^{\alpha x}e^{\beta y}\left[\frac{\alpha^2\varphi}{\sqrt{\mu^2\alpha^2+\beta}} + \frac{\beta\varphi}{\mu^2\sqrt{\mu^2\alpha^2+\beta}}\right]d\beta\\
&= \frac{1}{\mu^2}(e^{x} - e^{-x})\int \varphi(\beta)e^{\beta y}\sqrt{\beta+\mu^2}\,d\beta.
\end{aligned}
$$

Donc, en suivant toujours le raisonnement de M. Picard, nous pouvons considérer β comme une variable imaginaire et dire que, *si l'on peut trouver une fonction $\varphi(\beta)$ et un contour* C *tel que l'intégrale*

$$\int_C \varphi(\beta)e^{\beta y}\sqrt{\beta+\mu^2}\,d\beta \tag{16}$$

soit nulle, l'intégrale double

$$\int_{-1}^{+1}\int_C e^{\alpha x}e^{\beta y}\frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{\beta+\mu^2\alpha^2}}\,d\alpha\,d\beta \tag{17}$$

est solution de (10).

Si, comme application, nous prenons $\varphi(\beta) = \frac{1}{\beta + \mu^2}$ et si le contour C est une circonférence infiniment petite entourant le point $\beta = -\mu^2$, l'intégrale (16) est nulle, comme on s'en aperçoit facilement, et (17) devient, à un facteur constant près,

$$e^{-\mu^2 y} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha.$$

On retrouve ainsi la solution (15).

20. *Généralisation de la solution particulière obtenue.* — Si dans la solution (15) on remplace x par x' et y par y', conformément aux formules (12), on obtient une nouvelle solution qui, à un facteur constant près, est

$$e^{-\mu^2 a^2 y} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha a x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha.$$

Multipliant par $F(a)\,da$, F étant une fonction arbitraire et intégrant entre des limites quelconques simplement assujetties à donner un sens à l'intégrale, nous avons la solution plus générale

$$(18) \qquad \int F(a) e^{-\mu^2 a^2 y} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\alpha a x}}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha\, da.$$

De telles expressions sont évidemment en nombre illimité, car toutes les solutions qui se déduisent de (18) en particularisant $F(a)$ peuvent évidemment être traitées à leur tour comme (15). Ainsi, si, dans la formule précédente, nous prenons la première intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ en faisant $F(a) = 1$, il est facile d'intégrer par rapport à a en partant de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

(A. Cauchy, *Œuvres complètes,* 2ᵉ série, t. VII, p. 280). On trouve ainsi

$$(19) \quad \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{\alpha^2 x^2}{4\mu^2 y}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{y}} \left[1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{2} \frac{x^2}{4\mu^2 y} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^4}{4^2 \mu^4 y^2} + \dots \right],$$

expression qui, comme on le vérifie facilement, est bien solution de (9). En posant $\frac{b}{a^2} = -c$, on déduit immédiatement de (19) la nouvelle formule

$$(20) \qquad \int \frac{\Phi(c)}{\sqrt{y-c}} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{\alpha^2 x^2}{4\mu^2(y-c)}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} dc,$$

$\Phi(c)$ étant cette fois la fonction arbitraire.

Cette dernière formule est intéressante ; l'une des limites constantes de la première intégrale pourrait être remplacée par y, car, lorsque c varie en passant par cette valeur, nous avons de part et d'autre une valeur réelle et une valeur purement imaginaire pour l'intégrale. Je me suis proposé d'autres questions laissées momentanément en suspens tant elles paraissent contenir de difficultés nouvelles, notamment celle d'appliquer à l'équation (10), pour de certains contours, la méthode de Riemann. En fait, d'ailleurs, rien n'autorise le seul essai d'appliquer à une équation parabolique des méthodes qui jusqu'ici ont été plutôt particulières aux équations hyperboliques. Toutefois il faut noter que, à l'aide d'un artifice des plus ingénieux, M. P. Appell a appliqué la méthode de Riemann à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

[*Sur l'équation* $r - q = 0$ (*Journal de Mathématiques*, 1892, p. 187)] composée d'opérateurs permutables, et ceci, dans une certaine mesure, autorise des recherches pour une équation qui, telle que (10), a un premier membre formé d'opérateurs appartenant à un groupe.

21. *Applications géométriques de ce qui précède.* — D'après ce que nous avons vu au n° **17**, à toute solution B de l'équation (4) correspond une famille de courbes

$$(21) \qquad \frac{dy}{dx} = \mathrm{B}$$

qui peut être considérée comme la projection d'un système d'asymptotiques de surfaces dont la connaissance dépend de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles (5) dont la forme diffère suivant celle de B, mais qu'un changement de variables convenable pourra toujours ramener identiquement à l'équation (9). Il semble fort peu commode de trouver des solutions de (4), si bien que les résultats ne seront ni aussi nombreux, ni aussi élégants que dans le cas (*voir* au n° 7) où l'équation (2), du présent Chapitre, se composait d'opérateurs permutables.

Cherchons d'abord une solution de (4) qui soit fonction de x seulement, si bien que la famille de courbes (21) s'obtiendra par la translation faite parallèlement à l'axe des y d'une des courbes la composant. On trouve immédiatement

$$\frac{dy}{dx} = ae^{\mu x} + b,$$

a et b étant des constantes. L'équation (2) est alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(ae^{\mu x} + b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (ae^{\mu x} + b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et est formée avec les opérateurs

$$(22) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + (ae^{\mu x} + b)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mu a e^{\mu x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

définissant un groupe dont les constantes de structure sont 0 et μ. Nous devons pouvoir les ramener aux opérateurs (11), ou plus exactement à

$$(23) \qquad \frac{\mu}{2}x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad -\frac{1}{4}x^2\frac{\partial f}{\partial y},$$

par un changement de variables dont la connaissance exige d'abord l'intégration du système complet

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (ae^{\mu x} + b)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mu}{2}x'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0,$$

$$\mu a e^{\mu x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{4}x'^2\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

On en trouve assez facilement les deux intégrales

$$\frac{e^{\mu x}}{x'^2}, \quad \frac{\mu}{4a}(y - bx) + \frac{e^{\mu x}}{x'^2}\left(\mu^2 y' - \frac{x'^2}{4}\right)$$

qui, égalées à des constantes arbitraires, donnent les formules de transformation

$$(24) \qquad x' = Ce^{\frac{\mu x}{2}}, \qquad y' = \left(\frac{C}{2\mu}\right)^2 \left[e^{\mu x} + \frac{\mu}{a}(bx - y) + C'\right].$$

On vérifie sans peine qu'elles transforment les opérateurs (22) en les opérateurs (23). Finalement, nous voyons qu'à toute solution $S(x, y)$ de l'équation (10) correspond, par les formules (24), une double infinité de surfaces $z = S(x', y')$ dont un système d'asymptotiques se projette suivant la famille de courbes

$$\frac{dy}{dx} = ae^{\mu x} + b,$$

qui contient notamment les courbes dont la sous-tangente est constante. Ces résultats peuvent être étendus par une transformation homographique.

22. On pourrait maintenant se proposer de rechercher d'autres solutions de l'équation (4); il y en a qui sont fonctions de y seul, d'autres qui sont le produit d'une fonction de x seul par une fonction de y seul; mais il serait certainement fastidieux de multiplier les exemples en ce sens.

Le but de ce Chapitre a surtout été de montrer comment, une équation telle que (2) étant donnée, on peut chercher les conditions permettant de la considérer comme formée avec les opérateurs d'un groupe simplement transitif, puis, dans les cas où cela est réalisé, de trouver un changement de variables aussi avantageux que possible pour sa simplification et finalement son intégration au moyen d'intégrales définies multiples contenant des fonctions arbitraires.