JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Rationalité d'une loi expérimentale de M. Parenty pour l'écoulement des gaz par les orifices

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 10 (1904), p. 79-84.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__79_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Rationalité d'une loi expérimentale de M. Parenty pour l'écoulement des gaz par les orifices;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

I. On sait que, dès 1839, de Saint-Venant et Wantzel ont constaté [1], dans l'écoulement de l'air à travers des orifices non capillaires, sous de fortes différences de pression, un mode de détente sensiblement identique à celui que Laplace avait reconnu se produire dans les vibrations sonores et que l'on a appelé depuis *adiabatique*, mode où chaque particule gazeuse, changeant de volume sans gain ni perte de chaleur par sa surface, exerce une pression p proportionnelle à la puissance, ρ^n, de sa densité ρ, dont l'exposant n est le rapport (1,4 environ) des deux capacités calorifiques du gaz à pression constante et à volume constant. Ils avaient, de plus, en acceptant l'hypothèse d'une section contractée invariable σ, au voisinage de laquelle (un peu après l'orifice) la *veine* pourrait être censée cylindrique sur une très petite longueur, démontré que le débit atteignait sa plus forte valeur possible dès que la pression d'*aval*, alors transmise à cette section σ, s'abaissait aux 53 centièmes environ de la pression p_0 d'*amont*, et constaté que, dès lors, l'écoulement se maintient invariable, ou ne dépend plus des abaissements ultérieurs de la pression

---

(1) *Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, déterminé par des différences de pression considérables*, au *Journal de l'École Polytechnique*, XXVII^e Cahier; 1839.

dans le réservoir d'aval; d'où ils avaient conclu la non-propagation de ces abaissements jusqu'à la section contractée.

En 1886, Hugoniot ([2]) a complété l'explication élémentaire de cette absence de propagation, en observant que la vitesse d'écoulement qui fournit le débit maximum égale précisément celle de propagation du son dans les tranches constituant la petite partie cylindrique de la veine; en sorte que l'onde *ascendante* qui tend à y propager vers la section contractée tout petit abaissement ultérieur de la pression d'aval, est emportée, avec la veine même, aussi vite qu'elle y progresse et ne parvient plus jusqu'à la section contractée.

II. Le principe de D. Bernoulli donne, dans cette question, pour la vitesse V d'écoulement à travers la section contractée σ où la pression est p et la densité ρ, vitesse due à l'abaissement $p_0 - p$ de la pression, à partir du réservoir d'amont (où la densité est ρ_0), la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{V^2}{2} &= \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^n} \int_{p=p}^{p=p_0} \frac{d.\rho^n}{\rho} \\ &= \frac{p_0}{\rho_0}\,\frac{n}{n-1}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1}\right] = \frac{p_0}{\rho_0}\,\frac{n}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Le carré de la masse gazeuse débitée dans l'unité de temps, égal, par unité d'aire de la section contractée, au produit $\rho^2 V^2$ ou $\rho_0^2\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} V^2$, est, dès lors,

$$(2)\qquad 2p_0\rho_0\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right].$$

Et son maximum correspond au rapport $\frac{p}{p_0}$ qui annule la dérivée en p de ce carré, savoir, à

$$(3)\qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

([2]) *Sur l'écoulement des fluides élastiques*, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CIII, 20 décembre 1886, p. 1253.

En y substituant $1,4$ ou $\frac{7}{5}$ à n, il vient donc, pour le rapport spécial de la pression p d'aval à celle d'amont p_0, au-dessous duquel l'écoulement devient invariable, par suite de la non-transmission jusqu'à σ des abaissements ultérieurs de cette pression p,

$$(4)\qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{7}{2}} = 0,5283.$$

Donc, jusqu'à ce que ce maximum soit atteint, *le débit, par unité d'aire de la section contractée,* sera la racine carrée de l'expression (2), où p désignera la pression *donnée* s'exerçant dans le réservoir d'aval; et, divisé par ρ_0, ou *réduit en volume de gaz à la pression* p_0 *du réservoir d'amont,* il *vaudra*

$$\sqrt{2\frac{p_0}{\rho_0}}\sqrt{\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}.$$

On peut l'écrire, par analogie avec la formule usuelle de l'écoulement des liquides,

$$K\sqrt{2gh_0},$$

si l'on appelle h_0 la hauteur $\frac{p_0}{\rho_0 g}$ de gaz, à la pression p_0, qui produirait statiquement cette pression, et si l'on pose

$$(5)\qquad K = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}.$$

Introduisons dans l'expression de K, au lieu du rapport $\frac{p}{p_0}$ des deux pressions d'aval et d'amont, la *détente relative* correspondante

$$\Delta = \frac{p_0 - p}{p_0}$$

du gaz; et nous aurons ce qu'on peut appeler le *coefficient théorique* *du débit par unité d'aire de la section contractée :*

$$(6)\qquad K=\sqrt{\frac{n}{n-1}\left[(1-\Delta)^{\frac{2}{n}}-(1-\Delta)^{\frac{n+1}{n}}\right]}\quad ([1]).$$

III. Comme la détente Δ n'excédera pas la fraction $1-0,528\ldots$, soit $0,47$ environ, les deux puissances $(1-\Delta)^{\frac{2}{n}}$, $(1-\Delta)^{\frac{n+1}{n}}$ peuvent être développées, par la formule du binome, en séries assez rapidement convergentes. Elles donnent immédiatement, pour leur différence, le produit de $\frac{n-1}{n}\Delta$ par la série

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&1-\frac{3}{2n}\Delta+\frac{7-5n}{2.3n^2}\Delta^2+\frac{(8-4n)(3n-2)-(n+1)(2n-1)}{2.3.4n^3}\Delta^3\\&+\frac{(8-4n)(3n-2)(4n-2)-(n+1)(2n-1)(3n-1)}{2.3.4.5n^4}\Delta^4\\&+\frac{(8-4n)(3n-2)(4n-2)(5n-2)-(n+1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{2.3.4.5.6n^5}\Delta^5+\ldots\end{aligned}\right.$$

On voit la loi générale de formation des termes non écrits explicitement.

Dédoublons, dans tous les termes qui suivent les trois premiers écrits, le facteur $8-4n$ en $7-5n$ et $n+1$. De plus, appelons ν, pour abréger, la différence $n-1$; ce qui permettra de remplacer au besoin les facteurs $3n-2$, $4n-2$, $5n-2$, ... par $2n-1+\nu$, $3n-1+\nu$, $4n-1+\nu$, ... Alors l'expression (7) deviendra

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&1-\frac{3}{2n}\Delta\\&+\frac{7-5n}{2.3n^2}\Delta^2\left[1+\frac{3n-2}{4n}\Delta+\frac{(3n-2)(4n-2)}{4.5n^2}\Delta^2+\frac{(3n-2)(4n-2)(5n-2)}{4.5.6n^3}\Delta^3+\ldots\right]\\&+\frac{n^2-1}{2.3.4n^3}\Delta^3\left[1+\frac{(2n-1+\nu)(3n-1+\nu)-(2n-1)(3n-1)}{5n\nu}\Delta\right.\\&\qquad\left.+\frac{(2n-1+\nu)(3n-1+\nu)(4n-1+\nu)-(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{5.6n^2\nu}\Delta^2+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Elle comprend, outre ses deux premiers termes, deux séries distinctes ayant en facteur, l'une, $\frac{7-5n}{2.3n^2}\Delta^2$, l'autre, $\frac{n^2-1}{2.3.4n^3}\Delta^3$.

([1]) Dans le cas d'un liquide, il faudrait faire ρ constant, ou n infini; ce qui donnerait $K=\sqrt{\Delta}$, conformément à la formule usuelle de l'Hydraulique.

Cela posé, attribuons à n sa valeur effective $\frac{7}{5}$ chez les gaz, valeur, pour le moins très approchée dans les cas de l'hydrogène, de l'air, etc., qui donne $7 - 5n = 0$. La première des deux séries disparaîtra; et la deuxième, affectée de son coefficient total dans (8), deviendra

$$(9) \qquad \frac{5\Delta^3}{7^3}\left(1 + \frac{27}{35}\Delta + \frac{27}{70}\Delta^2 + \frac{984}{7^4}\Delta^3 + \frac{5211}{7^5}\Delta^4 + \ldots\right).$$

Mettons-y pour Δ son maximum 0,47; nous aurons, comme plus forte valeur possible de cette série,

$$0{,}00151 \times (1 + 0{,}363 + 0{,}085 + 0{,}043 + 0{,}015 + \ldots),$$

c'est-à-dire un quatre-centième à peine d'unité, alors que l'ensemble, $1 - \frac{3}{2n}\Delta$, des deux premiers termes de l'expression (8) est environ 0,504 ou 200 fois supérieur. Et comme il faudra extraire finalement la racine carrée de l'expression (8), pour en porter dans (6) la valeur multipliée par $\sqrt{\frac{n-1}{n}\Delta}$ et par $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, l'erreur relative, entraînée par la suppression de cette série dans (8), se trouvera réduite de moitié et s'abaissera à un quatre-centième, bien au-dessous des erreurs d'observation.

IV. Donc, l'expression théorique (6) du coefficient K de débit équivaut *pratiquement*, du moins pour les gaz parfaits, à la formule très simple, *représentant l'ordonnée d'une ellipse presque circulaire*, où Δ serait l'abscisse,

$$(10) \qquad K = \sqrt{\Delta\left(1 - \frac{3}{2n}\Delta\right)} = \sqrt{\Delta\left(1 - \frac{15}{14}\Delta\right)};$$

et celle-ci est applicable pour toutes les valeurs possibles de la détente Δ entre le réservoir d'amont et la section contractée, c'est-à-dire sur la longueur d'un quart d'ellipse, depuis $\Delta = 0$ jusqu'à $\Delta = 0{,}47$ environ.

L'approximation très suffisante de cette formule ressort de ce fait, qu'on en déduit une dérivée de K^2 en Δ s'annulant, ou rendant K maximum, pour $\Delta = \frac{7}{15} = 0{,}467$, alors que la valeur exacte serait $\Delta = 1 - 0{,}528\ldots = 0{,}471\ldots$, c'est-à-dire, *pratiquement*, la même chose, mais, surtout, de ce que le maximum approché ainsi obtenu est $K = \sqrt{\frac{7}{30}} = 0{,}4830$, tandis que le maximum rigoureux de K est, d'après (3) et (5),

$$(11) \qquad \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{5^2\sqrt{70}}{2.6^3} = 0{,}4842,$$

c'est-à-dire plus grand d'environ sa quatre-centième partie seulement. On pouvait, d'ailleurs, s'y attendre, après l'évaluation donnée à la fin du n° III, qui indiquait déjà un pareil excédent, bien insensible, de la valeur exacte.

V. C'est par un calcul précis de nombreux résultats d'observation, accompagné de la représentation graphique, au moyen d'une courbe qui s'est trouvée être le quart d'une ellipse presque circulaire, des valeurs de K en ressortant, que M. Henri Parenty a été conduit à la formule (10), dans la question de l'écoulement non seulement des gaz, mais aussi de la vapeur d'eau, sur laquelle il a fait beaucoup d'expériences [1]. On voit que, du moins pour les gaz, cette formule si simple n'est qu'une excellente réduction de l'ancienne et belle formule théorique due à de Saint-Venant et Wantzel.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXIII, p. 184; 27 juillet 1891. *Voir* aussi, aux *Annales des Mines* (novembre 1902), son Mémoire intitulé *Observations sur les expériences de M. Rateau concernant le débit de la vapeur et leur concordance avec les formules de M. Parenty*. Observons, toutefois, que M. Parenty fait varier dans une certaine mesure, en sens inverse du coefficient m de contraction, notre coefficient constant $\frac{3}{2n}$, de manière à corriger le mieux possible l'hypothèse imparfaite, qu'implique la théorie, d'une contraction invariable pour chaque dispositif d'orifice. C'est, naturellement, dans le cas d'un orifice bien évasé, ou de m très voisin de 1, que la théorie s'applique le mieux. Pour un orifice en mince paroi, il prend $m = 0{,}632$ et porte jusqu'à près de 2,2 notre coefficient $\frac{3}{2n}$.