JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

**Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 10 (1904), p. 5-78.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__5_0>

# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


## *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources;*


PAR M. J. BOUSSINESQ.


### § I. — Constatation d'un régime, en dehors des époques de pluie, dans les sources drainant les nappes d'eau d'infiltration et, par suite, dans les nappes elles-mêmes : recherche théorique de ce régime; résultats obtenus.

1. L'observation régulière, qui se fait depuis plusieurs années, de l'état des sources alimentant d'eau potable nos grandes villes, commence à montrer que chacune de ces sources a ses débits successifs, durant la saison d'été où ne se renouvelle pas sensiblement par l'atmosphère la nappe des eaux d'infiltration qu'elle draine ([1]), représentés

([1]) L'ingénieur Dausse a remarqué judicieusement, il y a plus de soixante ans, que les pluies d'été ne profitent guère aux sources des terrains perméables; car à peu près par une *seule* courbe plane, où les temps figurent comme abscisses et les débits correspondants comme ordonnées. La différence existant, aux jours datés de même (au millésime près), entre les saisons estivales des diverses années, ne se manifesterait guère que par un déplacement, propre à chaque été, de l'origine des abscisses, déplacement dû à la disparité des pluies antérieures, quant à leur volume total et à sa distribution soit dans le temps, soit sur les diverses parties du bassin d'alimentation de la source. Ainsi, dès que l'observation effective, au commencement d'un été quelconque, ferait connaître le débit pour ce moment et, par suite, l'ordonnée spéciale dont le pied devrait être choisi comme origine des abscisses pour l'été en question, la courbe des débits fournie par l'observation des étés passés permettrait d'annoncer les débits suivants, savoir, tous ceux qui se produiraient aux divers jours de la saison débutante (1).

Ce fait tend à prouver que l'état de la source et, par suite, celui même de la nappe qui y débouche, ne tardent pas, une fois la période des pluies terminée, à *se régler* d'après la configuration du lit imperméable supportant la nappe aqueuse, la contexture du terrain perméable qu'elle pénètre et, enfin, d'après *son volume actuel total*, mais indépendamment des particularités de temps ou de lieu offertes par l'accession, à la nappe, des diverses parties de ce volume. Ainsi, comme dans tant d'autres phénomènes physiques, *lorsque leurs conditions sont devenues constantes*, et, spécialement, dans tous ceux qu'offrent les cours d'eau visibles, un *régime* tend à s'établir, et se

---

l'eau qui s'y trouve momentanément absorbée par le sol est, presque toujours, évaporée à peu près entièrement, avant d'avoir atteint la nappe aqueuse sous-jacente. Voir son Mémoire *De la pluie et de l'influence des forêts sur les cours d'eau*, au numéro de mars et avril 1842 des *Annales des Ponts et Chaussées*, p. 198 à 201.

(1) Cette idée d'une *courbe unique* des débits, pour chaque source drainant un sol perméable et considérée un certain temps après la dernière chute de pluie ayant fourni un apport à sa nappe d'alimentation, vient d'être énoncée, comme loi expérimentale, par M. Edmond Maillet, ingénieur des Ponts et Chaussées et lauréat de l'Institut. Elle était déjà en germe dans sa Note, du 12 mai 1902, *Sur la prévision des débits minima des sources de la Vanne* (*Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. CXXXIV, p. 1103).

réalise *assez vite*, où les circonstances initiales du phénomène ne figurent plus, si l'on considère seulement l'état *final*, qui serait, ici, le *tarissement* de la source, mais où elles figurent uniquement par un certain effet général ou d'ensemble, exprimé au moyen d'un *seul* paramètre, si l'on considère l'*état pénultième*, signalé par Fourier dans le refroidissement des corps et qui annonce, en la précédant de très loin, la cessation finale du phénomène. Ici, où l'écoulement se réglera en général, comme nous verrons, par la hauteur et par les *pentes* de la surface supérieure, *libre* quoique souterraine, de la nappe aqueuse, cette surface sera donc, *une fois le régime sensiblement établi*, entièrement déterminée pour chaque valeur de l'espace total qu'elle délimitera au-dessus du lit imperméable, c'est-à-dire, dès lors, par une quelconque de ses ordonnées verticales $h$, celle qui correspondra à un point $(x, y)$, choisi à volonté, du plan horizontal de repère tracé dans le terrain perméable où s'abaisse lentement cette surface libre.

**2.** J'établirai au paragraphe suivant, d'après les lois élémentaires de la filtration, bien connues, l'*équation indéfinie*, aux dérivées partielles, et les *relations définies*, se rapportant au contour de la nappe, qui régissent cet abaissement de la surface libre, quand les pentes tant *de fond* que *de superficie* ont de *petites* valeurs. Si l'équation indéfinie dont il s'agit était linéaire, on pourrait espérer obtenir tout au moins la forme générale de son intégrale et, par suite, y débrouiller l'expression asymptotique des ordonnées ou *altitudes* $h$ de la nappe, expression qui représenterait la figure de régime cherchée.

Mais cette équation aux dérivées partielles ne devient linéaire que dans l'hypothèse *d'eaux très basses*, c'est-à-dire d'une dénivellation de la nappe, entre son point le plus haut et la source, très petite comparativement à ses épaisseurs ou profondeurs totales; et, alors, le faible écoulement de liquide qui y subsiste vers la source est exactement pareil à l'écoulement de la chaleur dans une certaine plaque à faces imperméables, limitée au contour même de la nappe, rendu également imperméable, sauf à l'endroit où est la source et où l'on maintiendrait température nulle ([1]). Or tous les caractères observés du

---

([1]) En conséquence, cet écoulement se prolongerait, pour ainsi dire, sans fin, débit des sources se montrent bien, avec leur maximum de simplicité, dans ce cas extrême, auquel se trouve ainsi réduite la théorie à moins de faire des hypothèses particulières sur la configuration ou plane, ou courbe (et concave ou convexe), du sous-sol imperméable supportant la nappe aqueuse.

Les débits de la source y sont proportionnels à une simple exponentielle, $e^{-\alpha t}$, où figure un *coefficient de tarissement*, $\alpha$, fonction seulement de la configuration du fond et de deux constantes physiques, exprimant la perméabilité des terrains qui filtrent la nappe. De plus, les petites altitudes $h$ de la surface libre au-dessus du plan horizontal du seuil de la source, mesurées sur les diverses verticales fixes du terrain, que définissent les deux coordonnées horizontales $x, y$, y sont les produits d'une fonction déterminée de $x$ et de $y$, par une fonction du temps $t$ proportionnelle à la même exponentielle $e^{-\alpha t}$. Il y a donc *conservation*, jusqu'à tarissement, du mode d'écoulement établi, en ce sens que toutes les ordonnées $h$ de la surface libre gardent sans cesse leurs rapports mutuels, maintenant dès lors mêmes pentes *relatives* aux divers éléments de la superficie et aussi, par suite, mêmes vitesses relatives de filtration aux régions de la nappe sous-jacentes.

3. L'observation du débit des sources porte à penser que, pour des dénivellations $h$ considérables, très supérieures à celles dont il vient d'être question, et *initialement* arbitraires, l'écoulement se réglerait plus ou moins vite d'une certaine manière, la fonction $h$ tendant à y devenir presque indépendante des données initiales ou, une infinité d'intégrales particulières, à se *confondre* en une seule. Mais la forme de l'équation indéfinie du mouvement montre que ce *régime*, si la réunion ou *convergence* des intégrales s'opère réellement, ne consiste pas, du moins d'une manière générale, en un mode d'écoulement se *conservant*, où toutes les ordonnées $h$ s'abaisseraient sans altération

---

si une lente évaporation, que la théorie néglige, à la surface libre souterraine, n'abaissait pas à la longue le niveau jusqu'au-dessous du seuil de la source (à moins d'être compensée, de temps à autre, par un faible apport d'eaux pluviales).

de leurs rapports mutuels : en d'autres termes, *ces ordonnées n'y sont qu'exceptionnellement le produit d'une fonction des coordonnées par une fonction du temps.*

Le cas le plus simple où elles le soient, et où, par conséquent, le régime consiste en un mode d'écoulement qui se conserve, est celui d'une nappe aqueuse reposant sur un lit horizontal, avec rebord vertical tout autour, sauf à l'endroit de la source, où ce rebord est supposé manquer complètement. Alors la nappe se trouve toute en hauteur au-dessus du plan horizontal de repère ; et les ordonnées $h$ de la superficie, qui mesurent justement cette hauteur sur chaque verticale fixe $(x,y)$, sont en raison inverse des temps, $\tau = \tau_0 + t$, comptés à partir de l'origine la plus ancienne possible, antérieure, d'une quantité $\tau_0$ plus ou moins grande suivant les cas, à l'instant où le régime est censé avoir été atteint et d'où partent les valeurs, $t$, de la durée écoulée jusqu'aux divers moments du phénomène. Ce régime est très stable ; car, si l'on suppose que l'état initial donné en différât peu, les petits écarts existant entre le mode effectif d'écoulement et lui sont régis, aux instants successifs, par une équation, aux dérivées partielles, linéaire, qui, dans le cas, par exemple, d'une nappe cylindrique à génératrices horizontales et d'un terrain homogène, les fait évanouir comme l'inverse de la *quinzième* puissance du temps $\tau$. L'intégration de cette équation linéaire à coefficients variables, sous les conditions au contour existantes, offre de l'intérêt, à raison de la manière originale et presque intuitive dont s'y forment les *solutions simples*.

Quant aux débits de la source, ils y sont inversement proportionnels aux carrés des temps $\tau$.

4. Le cas précédent, d'un fond plat horizontal, peut être censé réalisé, dans un lit quelconque, lorsque la nappe aqueuse est donnée initialement assez haute pour que, même une fois le régime à peu près établi, ses pentes de superficie soient encore beaucoup plus fortes que ses pentes de fond, au point de rendre celles-ci comparativement négligeables. Il exprimerait donc les *premières phases* de l'écoulement *réglé* de toute nappe à pentes de fond modérées, relativement très haute.

Mais un autre cas, où le lit est soit *concave*, soit même *convexe*, se trouve admettre aussi un mode d'écoulement *se conservant;* et ce mode doit pouvoir, par suite, représenter *approximativement* l'écoulement effectif, une fois réglé, des nappes réelles dont les profondeurs H (positives ou négatives), sous le plan horizontal du seuil d'une source, croissent graduellement en valeur absolue quand on s'éloigne de ce seuil. C'est celui d'un lit où ces ordonnées fixes H, qui se comptent positivement de haut en bas, sont, au moins dans les circonstances les plus simples, proportionnelles aux précédentes ordonnées réglées $h$ de la superficie, qui se comptent de bas en haut. Alors celles-ci, $h$, gardent entre elles mêmes rapports mutuels de régime que dans le cas d'un fond plat; et elles varient comme la fonction du temps $\frac{k e^{-k\tau}}{1 - e^{-k\tau}}$, où $k$ est un coefficient mesurant le degré de concavité du fond.

Le débit de la source se trouve, en même temps, proportionnel à l'expression $\left(\frac{k}{1 - e^{-k\tau}}\right)^2 e^{-k\tau}$, qu'on peut écrire aussi $\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\frac{k\tau}{2}}{\operatorname{sih}\frac{k\tau}{2}}\right)^2$. C'est donc par celle-ci qu'il faudrait essayer de représenter, à un facteur constant près, le débit, pendant l'été, des sources à bassin d'alimentation le plus simple possible au point de vue des lois de l'écoulement. On verra, du reste, au n° **11**, que, pour la plupart des *très fortes sources,* comme sont généralement celles dont on amène l'eau dans les villes, l'expression du débit doit être plus simple encore, et se réduire sensiblement à la forme exponentielle $A e^{-\alpha t}$, que la précédente donne, il est vrai, mais seulement pour les valeurs assez grandes de $\tau$.

La stabilité du régime, à en juger par la rapidité avec laquelle tendent vers l'intégrale qui l'exprime les intégrales particulières voisines, est très grande dans le cas d'un lit concave; car les petits écarts qui les en séparent, régis par une équation aux dérivées partielles linéaire, s'évanouissent, pour $\tau$ grandissant, comme la *douzième* puissance de l'exponentielle $e^{-k\tau}$, du moins dans une nappe cylindrique filtrée par un terrain homogène. La stabilité existe encore, notable même, mais sans être, à beaucoup près, aussi accusée, dans le cas d'un lit convexe.

L'intégration de cette équation linéaire se fait au moyen de solutions simples qui sont des polynomes par rapport à une certaine variable remplaçant l'abscisse, avec coefficients fonctions du temps rationnelles en $e^{-k\tau}$.

C'est le seul exemple que je connaisse, en Physique mathématique, de solutions simples, faciles à obtenir, non réductibles au produit d'une fonction du temps par une fonction des coordonnées. Et le procédé qui les fournit n'est pas moins original, car je n'en connais, également, pas d'autre exemple.

## § II. — Équations du mouvement, pour une nappe aqueuse filtrée dans le sol et n'ayant que de faibles pentes tant de fond que de superficie.

5. Lorsqu'un sol perméable, reposant sur un sous-sol imperméable, a ses couches inférieures imprégnées d'eau, mais ses couches supérieures soumises à la pression atmosphérique constante de l'air superposé à l'eau, et que, d'ailleurs, celle-ci, occupant les interstices des grains sablonneux ou terreux des couches inférieures, c'est-à-dire une certaine fraction $\mu$ de leur volume apparent donnée pour chaque endroit $(x, y, z)$, se trouve animée, dans toute région un peu étendue, de lents mouvements *suivant une certaine direction générale* susceptible de changer peu à peu avec le temps $t$, les interstices contigus assez bien alignés, suivant cette direction générale, pour permettre un écoulement appréciable, deviennent des *tubes de transpiration*. Quant à l'eau emmagasinée entre deux tubes de transpiration voisins, dans les interstices dont les ouvertures sont disposées suivant les directions perpendiculaires, et qui, à peu près immobile, complète en quelque sorte la paroi des tubes, elle a, dans le mouvement, le rôle capital de transmettre la pression d'un tube à l'autre, et, par suite, de rendre solidaire dans tous l'écoulement.

Or on sait que, le long des chemins *perpendiculaires* à cet écoulement, la pression est régie par la loi hydrostatique, non seulement là où le liquide est ainsi en repos entre deux tubes, mais, même, à la traversée des filets fluides de chaque tube. Abstraction faite d'anomalies locales se neutralisant en moyenne, cette pression $p$ (que nous supposerons évaluée en hauteur de liquide) varie donc hydrostatiquement le long de tels chemins, dans toute l'étendue du liquide filtré par le sol. C'est dire que la *hauteur* $\varphi$ *de charge*, somme, en chaque point $(x, y, z)$, de $p$ et de l'altitude $\mathfrak{s}$ du point au-dessus d'un plan horizontal fixe de *repère*, y est constante. Donc *l'écoulement général se fait, partout, normalement à la famille de surfaces qui a pour équation* $\varphi =$ const. (1).

6. Dès lors, les deux premières lois de Hagen-Poiseuille donnent, comme on sait, pour le volume liquide débité dans l'unité de temps par l'unité d'aire de ces surfaces, en sens inverse de leur normale $d\mathrm{N}$ tirée en allant vers les charges $\varphi$ croissantes, le produit, $\mathrm{K}\frac{d\varphi}{d\mathrm{N}}$, d'un certain coefficient spécifique K, d'autant plus petit que la couche perméable est plus compacte, par le paramètre différentiel du premier ordre $\Delta_1 \varphi$ ou $\frac{d\varphi}{d\mathrm{N}}$ de la charge $\varphi$. Par suite, à travers l'unité d'aire d'un élément plan de direction quelconque, dont la normale $dn$ fait un angle donné $\gamma$ avec $d\mathrm{N}$, unité d'aire coupant les filets fluides qui traversent sa projection $\cos\gamma$ sur une surface contiguë $\varphi =$ const., le flux F de transpiration sera fourni par ces filets interceptés et aura la valeur $\mathrm{K}\frac{d\varphi}{d\mathrm{N}}\cos\gamma$.

Faisons-y figurer, au lieu de l'espacement normal $d\mathrm{N}$ de deux surfaces voisines d'égale charge, son expression, $dn\cos\gamma$, en fonction de leur espacement, $dn$, estimé suivant la normale même à l'élément plan; et la formule générale des flux de transpiration, spécifiée ensuite pour les trois éléments *principaux* (ou perpendiculaires respectivement aux $x, y, z$), sera

$$(1) \quad \mathrm{F} = \mathrm{K}\frac{d\varphi}{dn}, \qquad \mathrm{F}_x = \mathrm{K}\frac{d\varphi}{dx}, \qquad \mathrm{F}_y = \mathrm{K}\frac{d\varphi}{dy}, \qquad \mathrm{F}_z = \mathrm{K}\frac{d\varphi}{dz}.$$

(1) *Voir*, pour plus de développement de ces considérations et de celles qui suivent jusqu'aux formules fondamentales (1) des phénomènes de transpiration, la vingtième de mes Leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière* (t. I, p. 323 à 328).

7. Cela posé, n'attribuons que de *petites pentes* tant au sous-sol imperméable qu'à la surface supérieure, libre, de la nappe d'eau infiltrée dans le sol perméable, nappe d'une épaisseur généralement faible, comparativement à ses dimensions horizontales. Comme, par suite de cette faible épaisseur, le courant aura une direction à peu près commune, sur chaque verticale, depuis le fond jusqu'à la surface, les filets seront, partout, presque horizontaux comme ceux qui glissent sur le sous-sol; et les surfaces d'égale charge $\varphi$, auxquelles ils sont normaux, se confondront sensiblement avec des cylindres à génératrices verticales. La charge $\varphi$, en $(x, y, z)$ et à l'époque $t$, différera donc très peu de ce qu'elle est, en même temps, au point *mouillé le plus haut* de la verticale menée par $(x, y, z)$. Or, en ce point mouillé le plus haut, où $p$ s'annule (abstraction faite de la pression atmosphérique constante), $\varphi$ se réduit à l'altitude $\zeta$. Nous y appellerons celle-ci $h$; et ce sera l'ordonnée $z$ de la surface libre; car nous prendrons pour plan des $xy$ le plan horizontal de repère.

Nous supposerons, d'ailleurs, homogène sur chaque verticale le sol perméable; de sorte que les deux coefficients spécifiques $\mu$, K seront des fonctions (données) de $x$ et de $y$ seulement, ainsi que la profondeur H de la nappe au-dessous du plan fixe de repère (comptée positivement de haut en bas, négativement de bas en haut).

Découpons par la pensée, dans le sol perméable, un filet prismatique vertical, de section droite, rectangulaire, $d\sigma = dx\,dy$ sur le plan des $xy$: à l'époque $t$, sa longueur *mouillée* sera $\mathrm{H} + h$; et il contiendra le volume liquide $\mu(\mathrm{H} + h)\,d\sigma$. L'accroissement, $\mu \frac{dh}{dt}\,d\sigma\,dt$, de ce dernier, durant l'instant $dt$, proviendra de l'excédent des flux entrés par deux de ses faces latérales sur les flux sortis par les deux autres, s'il n'y a eu durant l'instant $dt$, à la surface supérieure, ni affluence d'eau de pluie ou condensation de vapeurs, ni évaporation appréciable (vu la difficulté d'accès de l'air sec extérieur).

Or observons que les deux faces $(\mathrm{H} + h)dy$, $(\mathrm{H} + h)dx$, contiguës à la première arête, $(x, y)$, du filet prismatique, laissent sortir les flux $\mathrm{F}_x(\mathrm{H} + h)dy\,dt$, $\mathrm{F}_y(\mathrm{H} + h)dx\,dt$, où $\mathrm{F}_x$, $\mathrm{F}_y$ peuvent être remplacés par leurs valeurs (1), avec $\varphi = h$; et que les deux faces opposées laissent entrer des flux de même forme, mais accrus, respectivement, de leurs différentielles en $x$ et en $y$.

Il viendra donc, pour régir l'ordonnée $h$ de la surface libre souterraine, fonction de $x$, $y$ et $t$ donnée *initialement* (ou pour $t = 0$), l'équation *indéfinie* du problème

$$(2) \qquad \mu \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dx}\left[K(H+h)\frac{dh}{dx}\right] + \frac{d}{dy}\left[K(H+h)\frac{dh}{dy}\right].$$

**8.** Il faut y joindre une condition *définie*, spéciale à chaque élément du contour de la projection $\sigma$ de la nappe liquide sur le plan des $xy$.

Une partie, $\chi$, de ce contour, sera dite *contour libre*. Nous admettrons que le sol perméable y ait été enlevé totalement et, le lit imperméable de la nappe, coupé ou arasé *à un niveau uniforme*, plus bas que la surface libre intérieure, de manière à constituer le *seuil d'écoulement* de la *source* dont on étudie les débits successifs : nous choisirons justement le plan horizontal de ce seuil pour plan des $xy$ ou de repère. En raison de la facilité qu'y trouve l'écoulement par rapport à sa lenteur dans la couche perméable, un instant suffira pour y rendre insensibles, comparativement aux dénivellations $h$, non seulement l'épaisseur de la lame d'eau débitée, mais, même, les hauteurs $h$ dans tout le voisinage, jusqu'aux points de la nappe souterraine où deviennent modérées ses pentes tant de fond que de superficie et où, par suite, s'applique l'équation (2), établie dans l'hypothèse de vitesses presque horizontales. La condition spéciale au contour libre sera donc, à très peu près, $h = 0$.

Nous appellerons $\chi_1$ le reste du contour, où nous admettrons, pour fixer les idées, que le lit imperméable se relève brusquement et verticalement, assez pour rendre invariable, en projection sur le plan des $xy$, cette partie $\chi_1$ ou *contour-paroi*, quelles qu'y soient les valeurs variables de $h$. Le fluide y circulant parallèlement au bord, le flux par unité d'aire, à travers tout élément plan vertical parallèle à $\chi_1$, sera insensible, même si l'on prend cet élément plan un peu dans l'intérieur, là où s'applique l'équation (2). Et l'on aura, en résumé, si $dn$ désigne une normale horizontale menée dans $\sigma$ à $d\chi$ ou à $d\chi_1$, les deux conditions ou relations définies :

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{(sur le contour libre } \chi) & h = 0, \\ \text{(sur le contour-paroi } \chi_1) & \dfrac{dh}{dn} = 0. \end{cases}$$

Quant au débit Q de la source, mesuré de même à travers une coupe verticale parallèle à $\chi$ et peu distante dans l'intérieur, il sera évidemment $K\frac{dh}{dn}(H+h)$ ou $K\frac{dh}{dn}H$, par unité de longueur du seuil, et vaudra en tout

$$(4)\qquad Q = \int_\chi KH\frac{dh}{dn}d\chi.$$

Il faudrait, toutefois, y laisser subsister $h$ à côté de H, si H s'évanouissait (au moins en moyenne) à l'approche du seuil, comme $h$, et que la pente superficielle $\frac{dh}{dn}$ s'y exagérât indéfiniment [1].

---

[1] La substitution, au contour réel, d'un contour fictif voisin situé à l'intérieur de la nappe, et où ne s'observent plus qu'à très peu près les circonstances propres aux diverses parties du contour réel, constitue un procédé d'approximation, ayant ici pour but d'éviter ou d'éliminer la considération, qui serait difficile et très diverse suivant les cas, de la *composante verticale* des vitesses, supposée négligeable dans l'équation indéfinie (2), mais qui, effectivement, ne l'est plus au contour, tout au moins près du seuil où *surgissent* les filets fluides. On fait donc, ainsi, abstraction de *perturbations locales* compliquées, se produisant à la limite de la nappe.

Il en est, du reste, de même, dans la plupart des questions de Physique mathématique : les *conditions définies* usuelles n'y traduisent, en général, que l'influence d'ensemble, ou dominante en chaque endroit, des circonstances extérieures, sur le corps ou le système considérés; et elles négligent à dessein une infinité de détails, tenant à leur agencement ou, comme on dit, au mode d'application des actions exercées du dehors. Les géomètres avaient déjà fait, explicitement, cette remarque dans la théorie de l'élasticité, notamment pour les forces de compression, de traction, de flexion, de torsion, etc., appliquées vers les extrémités des tiges et au contour des plaques : mais elle s'étend à bien d'autres phénomènes.

**§ III. — Lois du mouvement et débits de la source en temps de sécheresse, c'est-à-dire quand les pentes de superficie se trouvent beaucoup plus faibles que ne sont (du moins près du seuil de la source) celles du fond.**

**9.** Les équations (2) et (3) sont quelque peu accessibles sous certaines conditions, mais surtout dans les deux cas extrêmes d'un seuil ou très haut, ou très bas, c'est-à-dire de dénivellations $h$ soit négligeables par rapport aux profondeurs H de la nappe sous le seuil, soit, au contraire, très grandes en comparaison de ces profondeurs H.

Le premier cas, qui se présente en temps de sécheresse et avec un sous-sol concave, est de beaucoup le plus simple. Le binome $H + h$, dans (2), y est réductible à sa partie connue H; et le système (2), (3) d'équations, alors linéaire, est celui du problème classique du refroidissement d'une mince plaque plane, à bases $\sigma$ imperméables, limitée par un contour ayant sa partie $\chi$ maintenue à la température zéro, mais le reste, $\chi_1$, imperméable à la chaleur comme les bases. L'expression de $h$ s'y réduit plus ou moins rapidement à la solution simple *fondamentale* de Fourier, dont la forme est $CUe^{-\alpha t}$, avec C constante arbitraire dépendant de l'état initial et U, $\alpha$ quantités essentiellement positives, l'une, U, fonction de $x$ et de $y$, l'autre, $\alpha$, constante, exclusivement dépendantes, toutes deux, de la configuration géométrique du sous-sol et de la perméabilité du sol [1].

Le débit Q de la source est, par suite, d'après (4), proportionnel à $Ce^{-\alpha t}$. On peut y appeler *coefficient de tarissement* le coefficient $\alpha$ du temps $t$ dans l'exponentielle, analogue au *coefficient d'absorption ou d'extinction de la lumière* (mais dans l'espace ou pour une certaine épaisseur traversée) des milieux optiques opaques ou translucides. Il exprime, pour chaque ordonnée $h$ de la surface libre au-dessus

(1) On peut voir, sur ce sujet capital des propriétés de la solution simple fondamentale, dans le problème du refroidissement, les pages 252 à 255 du Tome I de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique, etc.*

du plan horizontal du seuil de la source, la *vitesse de décroissement* de son unité *actuelle* de longueur.

**10.** Quand, par exemple, $\mu$, K, H étant constants, le plan de la nappe se réduit, en outre, à une bande indéfinie, de largeur L, comprise entre deux bords $x = 0$, $x = L$, dont le premier est le contour libre $\chi$ et, le second, le contour-paroi $\chi_1$, avec circonstances initiales pareilles sur toute la longueur, la coordonnée $x$ figure seule dans les équations : on est ramené au problème du refroidissement d'une barre prismatique homogène, latéralement imperméable, de longueur L, ayant son extrémité $x = 0$ plongée dans la glace fondante et son autre extrémité, $x = L$, imperméable à la chaleur comme ses faces.

Alors on trouve immédiatement, pour la solution fondamentale et pour le débit $q = \mathrm{KH}\left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=0}$ par unité de longueur du seuil, les formules

$$(5)\quad \mathrm{U} = \sin\frac{\pi x}{2\mathrm{L}}, \qquad \alpha = \frac{\pi^2 \mathrm{KH}}{4\mu \mathrm{L}^2}, \qquad q = \frac{\pi \mathrm{KH}}{2\mathrm{L}} \mathrm{C} e^{-\alpha t} = \frac{\pi}{2}\mathrm{KH}\frac{h_m}{\mathrm{L}} = \frac{\pi}{2}\mathrm{KHI},$$

$h_m$ désignant la dénivellation $h$ maxima, celle $(\mathrm{C}e^{-\alpha t})$ qui se produit à la *ligne de faîte* $x = L$ de la bande, et, par suite, I désignant la *pente moyenne de superficie* de la nappe, quotient de $h_m$ par la largeur L. Le débit de la source vaut donc $\frac{1}{2}\pi = 1,5708$ fois celui, KHI (par unité de longueur du seuil), qui se produirait si la pente de superficie avait, près du seuil, sa valeur moyenne générale I relative à toute la nappe et à l'époque considérée $t$.

Quant au coefficient de tarissement, $\alpha$, il est, d'après la deuxième formule (5), proportionnel à la profondeur H de la nappe et inverse du carré de sa largeur L.

**11.** On peut qualifier de *bonne* une source dont le débit se conserve longtemps, c'est-à-dire dont le coefficient $\alpha$ de tarissement est très petit, et d'*également bonnes* deux sources où ce coefficient a la même valeur : la seconde formule (5) montre que la profondeur H (au-dessous des seuils), de leurs bassins respectifs d'alimentation, supposés de structure pareille, y est proportionnelle au carré $\mathrm{L}^2$ de la largeur ou étendue relative de ces bassins. De plus, si l'on y observe, au début, des dénivellations totales $h_m$ identiques, ces dénivellations $Ce^{-\alpha t}$ restent égales à toute époque; et les débits respectifs $q$ y sont sans cesse entre eux, d'après la troisième formule (5), comme les rapports correspondants $\frac{H}{L}$, ou $\left(\text{en abstrayant le facteur pareil } \frac{\sqrt{H}}{L}\right)$ comme les racines carrées $\sqrt{H}$ des profondeurs. Autrement dit, *la source à bassin d'alimentation le plus profond donne le plus grand débit*, les profondeurs étant comme les carrés des débits (par unité de longueur) simultanés.

Il en sera de même pour une forme quelconque du *plan* de la nappe et pour des profondeurs H quelconques, données en fonction de $x$ et de $y$, pourvu qu'on passe d'une nappe à l'autre et, par suite, d'une source à l'autre, en multipliant les dimensions horizontales de la première nappe, ou les coordonnées $x$, $y$ de ses divers points, par un même nombre $k$, et les profondeurs H correspondantes par son carré $k^2$. En effet, les équations qui régissent U et $\alpha$, savoir

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dx}\left(\mathrm{KH}\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{KH}\frac{d\mathrm{U}}{dy}\right)=-\mu\alpha\mathrm{U}, \\ (\text{sur } \chi) \quad \mathrm{U}=0, \qquad (\text{sur } \chi_1) \quad \frac{d\mathrm{U}}{dn}=0, \end{array}\right.$$

et où $dx$, $dy$, $dn$, H deviendront partout $k\,dx$, $k\,dy$, $k\,dn$, $k^2$H, continueront visiblement à être satisfaites par les mêmes systèmes de valeurs de U et de $\alpha$. L'expression de $h$ se conservera donc, dans le passage de la première nappe aux points homologues de la seconde; et les deux sources correspondantes seront *également bonnes*.

Les pentes de superficie $\frac{dh}{dn}$ varieront, de l'une à l'autre, avec les éléments linéaires $dn$, ou seront divisées par $k$; et les débits par unité de longueur, $\mathrm{KH}\frac{dh}{dn}$, se trouveront multipliés par $k$, ou, les débits élémentaires $\mathrm{KH}\frac{dh}{dn}d\chi$, qui ont le facteur linéaire horizontal $d\chi$ en plus, multipliés par $k^2$ et ainsi proportionnels aux profondeurs H. Tel sera donc aussi le rapport des débits Q totaux.

Cela posé, considérons, pour les deux sources également bonnes dont il s'agit, le rapport $\frac{h}{H}$, dont la petitesse comparativement à l'unité est supposée par la théorie actuelle; ce rapport y sera en raison inverse de H ou du débit total Q. Et si l'une des deux sources est *très forte,* c'est-à-dire pourvue d'un débit considérable, le rapport $\frac{h}{H}$ s'y trouvera incomparablement plus faible que dans l'autre, supposée de débit modéré. On pourra donc négliger, dans la première, les dénivellations $h$ comparativement aux profondeurs H, ou y employer des relations comme (5), bien avant de pouvoir le faire dans la seconde. Or les sources que l'on capte pour le service des grandes villes sont, en général, exceptionnellement fortes. Il doit donc arriver souvent que les formules simples de ce paragraphe leur soient applicables, même en dehors des temps de sécheresse, ou peu après la cessation des pluies. Leurs débits normaux de la période d'été admettraient ainsi l'expression approchée simple $Ae^{-\alpha t}$.

Tel paraît être, notamment, d'après une soigneuse étude de M. Maillet, le cas de la source de Cérilly, l'une des principales de la Vanne, qui alimentent Paris où elles sont amenées sur la rive gauche de la Seine.

Une autre de ces sources de la Vanne, celle d'Armentières, également étudiée par M. Maillet, semble devoir, quoique supérieure à celle de Cérilly pour le volume et la constance, exiger la formule moins simple de débit annoncée au n° **4**, et où l'inverse du carré d'un sinus hyperbolique remplace l'exponentielle décroissante, à moins (plutôt) que, pour une source *aussi forte, à longue évolution,* le *second* terme simple de la solution de Fourier ne reste sensible *plusieurs mois* et ne donne à Q la forme $Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$.

## § IV. — Influence, sur le débit, de petites pluies successives.

**12.** Supposons qu'une chute de pluie, uniforme sur tout le bassin, soit venue, à l'époque $\theta$, c'est-à-dire un certain temps $t - \theta$ avant l'époque actuelle $t$, alors que le terme principal ou asymptotique de $h$ était $CUe^{-\alpha\theta}$, ajouter presque instantanément à toutes les ordonnées $h$ un petit accroissement commun $\eta$.

Prenant l'état d'alors, $CUe^{-\alpha\theta} + \ldots + \eta$, comme nouvel état initial $h_0$, nous aurons, pour expression asymptotique de $h$ aux époques ultérieures, le produit de $Ue^{-\alpha(t-\theta)}$ par la nouvelle valeur, C′, de a constante arbitraire. Or, une méthode d'élimination due à Fourier, bien connue, montre que C′ sera le quotient, par le carré moyen de U sur toute l'aire $\sigma$, de la valeur moyenne du produit $U h_0$ sur la même aire, et que ce quotient vaudra, ici, $Ce^{-\alpha\theta} + \iota\eta$, si $\iota$ désigne le rapport de la valeur moyenne de U à celle de $U^2$ $\left(\text{soit, par exemple, } \frac{4}{\pi}\text{, dans le cas simple ci-dessus d'une bande indéfinie, où la valeur moyenne de } \sin\frac{\pi x}{2L} \text{ est } \frac{2}{\pi} \text{ et celle de son carré } \frac{1}{2}\right)$. Les valeurs ultérieures de $h$, asymptotiques ou relatives à $t$ assez grand, seront donc

$$(C + \iota\eta e^{\alpha\theta})e^{-\alpha t}.$$

Il est clair que d'autres accroissements uniformes analogues $\eta'$, $\eta''$, ..., survenus à des époques $\theta'$, $\theta''$, ... postérieures à $\theta$, ajouteront, de même, au coefficient de l'expression asymptotique ultérieure de $h$, de nouveaux termes $\iota\eta' e^{\alpha\theta'}$, $\iota\eta'' e^{\alpha\theta''}$, ...; en sorte que l'on aura, pour calculer les valeurs asymptotiques définitives de $h$, portant la trace de toutes les petites pluies venues de loin en loin alimenter la nappe, la formule

$$(6) \qquad h = U[Ce^{-\alpha t} + \iota\Sigma\eta e^{-\alpha(t-\theta)}].$$

Et le débit Q de la source, d'abord proportionnel à $Ce^{-\alpha t}$, le sera désormais à la somme

$$(7) \qquad Ce^{-\alpha t} + \iota\eta e^{-\alpha(t-\theta)} + \iota\eta' e^{-\alpha(t-\theta')} + \iota\eta'' e^{-\alpha(t-\theta'')} + \ldots.$$

A mesure que $t$ grandit, le terme correspondant à chacune des pluies successives s'évanouit peu à peu, comparativement à ceux qu'introduisent les pluies récentes, pourvu toutefois que celles-ci ne soient pas évaporées avant d'avoir atteint la nappe souterraine ([1]).

([1]) C'est ce qui, dans la saison d'été, leur arrive le plus souvent, comme il a été dit au n° 1.

## § V. — Mise en compte de la capillarité.

**13.** A une seconde approximation, il y aurait lieu de tenir compte de la réduction, que j'appellerai $\zeta$, éprouvée par la pression $p$ et par la charge $\varphi$, dans la nappe, à raison de la *tension superficielle* de l'eau sur chacun des innombrables *ménisques capillaires* constituant la surface libre souterraine, réduction uniforme et invariable, dans le cas d'un sol homogène, pour le moins autant que l'est, aux profondeurs supposées, la température elle-même, et fonction déterminée de $x$ et de $y$, au même degré d'approximation, dans un sol ayant sa structure variable d'une verticale à l'autre. On aurait donc, non plus $\varphi = h$, mais $\varphi = h - \zeta$; et il conviendrait de prendre $\varphi$, au lieu de $h$, comme inconnue; ce qui laisserait subsister entièrement, en $\varphi$, la forme de l'équation indéfinie (2), sauf la substitution, à la fonction donnée H, de la fonction analogue $H + \zeta$. Car la hauteur $H + h$ des volumes prismatiques élémentaires mouillés deviendrait $H + \zeta + \varphi$.

Il est visible que la relation spéciale au contour-paroi $\chi_1$ resterait aussi la même, ou serait $\frac{d\varphi}{dn} = 0$.

Mais la condition relative au contour libre $\chi$ serait généralement rendue plus complexe par l'intervention de l'action capillaire aux surfaces libres y existant. Il semble toutefois possible de supprimer cette intervention au moyen d'un certain dispositif d'orifice, savoir, en prolongeant vers le haut le sous-sol au-dessus du seuil, à part une fente horizontale allongée, de faible hauteur, mais *non capillaire*. Alors, la pression $p$ intérieure se trouvant sensiblement nulle à l'orifice, ou plus forte de $\zeta$ que sous la surface libre souterraine, l'écoulement sur le seuil exigera une altitude de celle-ci, dans le voisinage, excédant de $\zeta$ l'altitude du seuil; et la condition relative au contour libre $\chi$, ou concernant les parties, contiguës à $\chi$, de la nappe infiltrée, sera sensiblement $h = \zeta$, c'est-à-dire $\varphi = 0$.

Rien ne sera donc changé à la forme des équations du problème ni, par suite, à la solution, sauf toujours la substitution, partout, de $H + \zeta$ à H, jusque dans la hauteur de la section fluide intérieure, verticale et parallèle à $\chi$, fournissant le débit Q de la nappe.

### § VI. — Régime moins simple qui tend à s'établir en hautes eaux, quand les pentes du fond sont, au contraire, négligeables comparativement à celles de la surface.

**14.** — Après avoir étudié le cas simple de dénivellations $h$ très petites par rapport aux profondeurs H de la nappe sous le plan horizontal du seuil de la source, considérons le cas, opposé, où le fond imperméable se confondrait avec ce plan horizontal et où, par suite, H s'annulerait. On pourra effectivement, sans grande erreur, durant les périodes de fortes eaux, admettre qu'il en soit ainsi, quand la majeure partie de la nappe liquide se trouvera au-dessus du plan horizontal du seuil, sans que le sous-sol ait une forme très convexe.

Les équations (2) et (3) deviendront, en multipliant par 2 la première,

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} 2\mu\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\dfrac{d.h^2}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\dfrac{d.h^2}{dy}\right), \\ (\text{sur le contour libre } \chi)\ h = 0,\ (\text{sur le contour paroi } \chi_1)\ \dfrac{dh}{dn} = 0. \end{array}\right.$$

L'équation indéfinie n'étant pas linéaire, l'intégration générale de ce système paraît inabordable. Aussi nous bornerons-nous à lui chercher une solution particulière, celle qui exprimera la forme vers laquelle tend la surface libre, s'il lui arrive de se régler comme dans le cas précédent, c'est-à dire de garder très sensiblement, après une période préparatoire plus ou moins longue, d'invariables rapports entre toutes ses ordonnées $h$, ensemble décroissantes. Comme, d'une part, nous obtiendrons une telle solution, du moins pour les contours $\chi$, $\chi_1$ de nappe les plus simples, et que, d'autre part, l'expérience semble indiquer la réalisation assez rapide d'un même régime à partir d'états initiaux quelconques, ou, par suite, la convergence de *toutes* les intégrales particulières vers une *forme commune*, il est clair que la solution, relativement très simple, à laquelle nous parviendrons, ou exprimant un mode d'écoulement qui se conserve, ne pourra pas différer de l'intégrale de régime cherchée; car elle sera tenue de la reproduire finalement avec une approximation *indéfinie* et, cela, sans *aucune* altération de sa propre forme, puisqu'elle n'en éprouve pas. Nous démontrerons d'ailleurs sa stabilité, en faisant voir qu'elle est effectivement une sorte d'*asymptote*, à laquelle aboutissent *physiquement* très vite toutes les intégrales qui en différaient peu initialement.

**15.** Prenons pour état initial cette forme limite que nous appellerons $h_0$, censée acquise ainsi par la fonction $h$ au bout d'un certain temps; et, en comptant désormais $t$ à partir de la fin de ce temps choisie comme nouvelle origine, nous aurons pour $h$ le produit, $h_0 T$, de la fonction $h_0$ de $x$ et de $y$, par une fonction, T, à valeur *initiale* 1, du temps $t$ seul. Or, l'équation indéfinie ci-dessus, la première (8), divisée par $\mu T h$, c'est-à-dire par $\mu T^2 h_0$, devient alors

$$2\frac{T'}{T^2} = \frac{1}{\mu h_0}\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d.h_0^2}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d.h_0^2}{dy}\right)\right].$$

Ses deux membres, indépendants, le premier de $x$ et de $y$, le second de $t$, se réduisent nécessairement à une constante $-2\alpha$. L'on a donc, d'une part, grâce à une intégration immédiate,

$$(9) \qquad \frac{1}{T} = 1 + \alpha t, \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{1}{1+\alpha t}, \qquad h = \frac{h_0}{1+\alpha t},$$

et, d'autre part, pour déterminer, avec $\alpha$, la forme de $h_0$, le système d'équations

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left(K\dfrac{d.h_0^2}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(K\dfrac{d.h_0^2}{dy}\right) + 2\alpha\mu h_0 = 0, \\ (\text{sur le contour libre } \chi)\ h_0 = 0, \ (\text{sur le contour-paroi } \chi_1)\ \dfrac{dh_0}{dn} = 0. \end{array} \right.$$

Les flux $K\frac{dh}{dn}h$, ou $\left(Kh_0\frac{dh_0}{dn}\right)T^2$, à travers l'unité de longueur de coupes verticales quelconques faites dans la nappe, seront tous proportionnels à $T^2$. Par suite, le débit Q du seuil ou de la source décroîtra comme l'inverse du carré $(1+\alpha t)^2$.

**16.** — Pour fixer les idées, supposons que, $\mu$, K étant constants et la coordonnée $y$ disparaissant des équations, le plan de la nappe soit, comme au n° **10**, la bande, de longueur indéfinie et de largeur L, comprise entre le *seuil* rectiligne $x = 0$ et la *crête* parallèle $x = L$, *thalweg* et *faîte* où l'on aura ainsi, respectivement,

$$h_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dh_0}{dx} = 0.$$

En vue de simplifier nos équations, posons

$$\xi = \frac{x}{L}, \qquad \eta = \frac{h_0}{M}, \qquad \alpha = \frac{3c^2 KM}{2\mu L^2}, \tag{11}$$

formules où $\xi$, $\eta$ seront, pour tenir lieu de $x$ et de $h_0$, une nouvelle variable indépendante et une nouvelle fonction, croissantes toutes deux de 0 à 1, où, par conséquent, M est la valeur de $h_0$ pour $x = L$, et où, enfin, $c$ désigne une constante positive, convenablement choisie. Le système (10), dans lequel les dérivées pourront s'indiquer par des accents, deviendra

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2.\eta^2}{d\xi^2} + 3c^2\eta = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2\dfrac{d.\eta\eta'}{d\xi} + 3c^2\eta = 0, \\ (\text{pour } \xi = 0) \;\; \eta = 0, \quad (\text{pour } \xi = 1) \;\; \eta' = 0 \text{ et } \eta = 1. \end{array}\right. \tag{12}$$

Multiplions l'équation indéfinie par $\eta\eta'\,d\xi$ ou par $\eta\,d\eta$ et intégrons, en tenant compte des conditions relatives à $\xi = 1$. Nous aurons l'équation différentielle première du profil de la surface :

$$\eta^2\eta'^2 = c^2(1 - \eta^3); \tag{13}$$

d'où

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{c\sqrt{1-\eta^3}}{\eta}. \tag{13 bis}$$

Et une deuxième intégration, effectuée, après séparation des variables, à partir de la limite inférieure $\xi = 0$ où $\eta$ s'annule, donnera l'équation finie du même profil :

$$c\xi = \int_0^\eta \frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}}. \tag{14}$$

L'abscisse *proportionnelle* $\xi$ de la surface libre est donc une certaine intégrale elliptique de l'ordonnée *analogue* $\eta$. Enfin, comme $\xi$, $\eta$ atteignent en même temps leur limite supérieure 1, la constante $c$ a, d'après (14), la valeur

$$(15) \qquad c = \int_0^1 \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}}.$$

Pour la calculer, posons $\eta = \gamma^{\frac{1}{3}}$; ce qui, transformant l'expression de $c$ en $\frac{1}{3}\int_0^1 \gamma^{\frac{2}{3}-1}(1-\gamma)^{\frac{1}{2}-1}d\gamma$, donne l'intégrale eulérienne $\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, égale à $\frac{\frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{3}+\frac{1}{2})}$ ou à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{7}{6})}$, vu que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et que $\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)$. On a donc

$$(16) \qquad c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{7}{6})} = 0,86236 \text{ environ},$$

le calcul numérique s'effectuant, finalement, par la Table de Legendre pour les logarithmes décimaux de $\Gamma(n)$, dans l'intervalle des deux limites $n=1$ et $n=2$.

Il n'y a ainsi, pour l'équation de la nappe entre les deux coordonnées *relatives* $\xi$, $\eta$, qu'une forme *unique* (sans aucun paramètre variable) qui assure sa propre conservation aux diverses époques $t$. Et, en effet, l'on rend indépendante de la *donnée* M l'expression, $h_0\mathrm{T}$ ou

$$\mathrm{M}\eta\mathrm{T} = \frac{\mathrm{M}}{\alpha}\frac{\alpha\eta}{1+\alpha t},$$

de $h$, en l'écrivant, grâce à la dernière relation (11), $\frac{2\mu\mathrm{L}^2\eta}{3c^2\mathrm{K}}\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)^{-1}$, et en posant $\frac{1}{\alpha}+t=\tau$ ou reculant de $\frac{1}{\alpha}$, dans le passé, l'origine des temps $t$ que l'on désigne alors par $\tau$. Il vient, d'abord, pour la dénivellation $h$, et, ensuite, pour sa valeur maxima actuelle (correspondant à $\eta=1$) que nous dénommerons $h_m$, les formules

$$(17) \qquad h = \frac{2\mu\mathrm{L}^2}{3c^2\mathrm{K}}\frac{\eta}{\tau}, \qquad h_m = \frac{2\mu\mathrm{L}^2}{3c^2\mathrm{K}\tau}.$$

**17.** Ce résultat s'étend au cas plus général des équations (10).

Effectivement, on remarque, en divisant la première de ces équations par $\alpha^2$ et les deux autres par $\alpha$, qu'elles ne contiennent plus, au lieu de $h_0$ et de $\alpha$, que leur rapport mutuel $\frac{h_0}{\alpha}$. Appelons, par exemple, $\zeta$ ce rapport, fonction de $x$ et de $y$, que l'analogie avec le cas particulier traité ci-dessus porte à regarder comme unique, mais qui, de toute manière, est indépendante de la hauteur initiale M de la nappe : et, d'une part, $\zeta$ vérifiera les équations

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(K\dfrac{d.\zeta^2}{dx}\right)+\dfrac{d}{dy}\left(K\dfrac{d.\zeta^2}{dy}\right)=-2\mu\zeta, \\ (\text{sur le contour } \chi)\ \zeta=0, \quad (\text{sur le contour } \chi_1)\ \dfrac{d\zeta}{dn}=0; \end{cases}$$

d'autre part, la substitution à $t$ de la nouvelle variable $\tau$ pour exprimer le temps, donnera à la dernière relation (9), la forme

$$(19)\qquad h=\frac{\zeta}{\tau}.$$

La comparaison de cette formule à la première (17) montre que la fonction $\zeta$ y avait la valeur $\frac{2\mu L^2}{3c^2K}\eta$.

**18.** Il serait désirable d'obtenir l'expression de $\zeta$ pour des nappes moins spéciales qu'une simple bande indéfinie de largeur L, notamment pour une nappe de révolution autour de l'axe des $z$, adossée à un rebord ou *faîte* circulaire, et se déversant peu à peu sur un seuil ou *thalweg* concentrique à ce rebord. Comme alors $\mu$, K, $\zeta$ sont supposés dépendre seulement de la distance $r$ à l'axe, exprimée par $\sqrt{x^2+y^2}$, l'on a

$$K\frac{d.\zeta^2}{d(x,y)}=\frac{K}{r}\frac{d.\zeta^2}{dr}(x,y),$$

$$\frac{d}{d(x,y)}\left(K\frac{d.\zeta^2}{d(x,y)}\right)=\frac{(x^2,y^2)}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{K}{r}\frac{d.\zeta^2}{dr}\right)+\left(\frac{K}{r}\frac{d.\zeta^2}{dr}\right);$$

et l'équation indéfinie (18) devient

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(Kr\frac{d.\zeta^2}{dr}\right)=-2\mu\zeta$$

ou

$$d.\left(\mathrm{K}r\zeta\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = -(\mu\mathrm{K}r^2)\,d\left(\frac{2\zeta^3}{3}\right).$$

Or, on ne lui voit d'intégrale première formulable que *si le produit* $\mu\mathrm{K}r^2$ *est constant* : cas où il vient, en posant $\zeta = \frac{\mathrm{M}}{\alpha}\eta$, c'est-à-dire en appelant M la hauteur initiale $h_0$ maxima, qui se produit au faîte (où $\eta$ aura sa dérivée en $r$ nulle et vaudra dès lors 1),

$$\left(\mathrm{K}r\eta\frac{d\eta}{dr}\right)^2 = \frac{2\alpha}{3\mathrm{M}}(\mu\mathrm{K}r^2)(1-\eta^3)$$

ou

$$(20)\qquad \frac{\mathrm{K}}{\mu}\frac{d\eta^2}{dr^2} = \frac{2\alpha}{3\mathrm{M}}\,\frac{1-\eta^3}{\eta^2}.$$

En général, le rapport $\frac{\mathrm{K}}{\mu}$ sera le produit d'une de ses valeurs, que nous appellerons $\frac{\mathrm{K}_0}{\mu_0}$, par une fonction donnée, essentiellement positive, $\varpi(r)^2$, de la distance $r$ à l'axe, fonction où l'on peut faire $\varpi(r) > 0$. Cela posé, partis du thalweg pour cheminer le long d'un rayon en allant *vers le faîte*, introduisons, au lieu de $r$, une variable indépendante *positive* $\xi$, *d'abord nulle*, définie de proche en proche par l'équation différentielle

$$(21)\qquad \mathrm{L}\,d\xi = \frac{\pm dr}{\varpi(r)},$$

où l'on aura à choisir la longueur *constante* L de manière que $\xi$ atteigne la valeur 1, comme $\eta$, à l'instant même de l'arrivée au faîte. Si nous appelons $c$ la constante $\sqrt{\frac{2\mu_0\alpha\mathrm{L}^2}{3\mathrm{K}_0\mathrm{M}}}$, ainsi définie par une formule toute pareille à la troisième (11), la relation (20) deviendra identiquement, en $\eta$ et $\xi$, l'équation différentielle (13). Et, comme les conditions adjointes seront encore $\eta = 0$ pour $\xi = 0$, $\eta' = 0$ et $\eta = 1$ pour $\xi = 1$, l'équation finie entre $\xi$ et $\eta$ sera toujours (14), avec la valeur numérique (16) de la constante $c$.

Mais il ne faudra pas oublier que *cette extension, à une nappe de révolution, de l'intégrale obtenue pour une nappe cylindrique à* *génératrices horizontales, implique la constance du produit* $\mu K r^2$ *à toute distance* $r$ *de l'axe.*

Si, en particulier, le rapport $\frac{K}{\mu}$ des deux coefficients définissant la perméabilité du sol est invariable, ces deux coefficients physiques de la masse filtrante devront être inverses de la distance $r$ à l'axe, ou la *perméabilité* croître, à l'approche de l'axe, inversement à l'aire des cylindres circulaires verticaux constituant les sections d'écoulement, pour que les formules simples ci-dessus s'appliquent. Et comme l'on aura alors $\varpi(r) = 1$, L sera la largeur de la bande liquide annulaire, ou la distance du faîte au thalweg.

Du reste, le cas d'une bande rectiligne de longueur indéfinie, avec K, $\mu$ constants, se trouve compris dans celui-là; car il suffira, pour l'obtenir, de supposer infinis les deux rayons du faîte et du thalweg, sans que leur intervalle cesse d'être fini.

**19.** Reprenant un instant cette première hypothèse d'une nappe à fond rectangulaire de longueur indéfinie, j'appellerai A, par unité de longueur, le volume initial *apparent* (c'est-à-dire y compris la terre ou le sable interposés) de la nappe liquide. Il équivaut à l'aire de sa section verticale faite suivant les $x$. Or, décomposons cette section en minces bandes horizontales, de dimensions $L - x$ et $dh_0$, ou $L(1-\xi)$ et $M\,d\eta$. Elle aura pour valeur $\frac{LM}{c}\int_0^1 (c - c\xi)\,d\eta$; et il viendra, à raison de l'excédent de (15) sur (14), puis grâce à une intégration par parties évidente, dans laquelle s'annule le terme intégré,

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{LM}{c}\displaystyle\int_0^1 d\eta \int_\eta^1 \frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}} = \frac{LM}{c}\int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}} = \frac{2LM}{3c}\left(-\sqrt{1-\eta^3}\right)_0^1 = \frac{2LM}{3c}; \\ \text{d'où} \\ M = \dfrac{3c}{2}\dfrac{A}{L} = 1,2935\dfrac{A}{L}. \end{array}\right.$$

La crête de la nappe est donc, au-dessus du seuil, à une hauteur $h_m$ valant $1,2935$ fois la *hauteur moyenne,* quotient de l'aire ou du volume (A initialement) par la largeur L.

Si nous éliminons maintenant M, par la dernière formule (22), de l'expression (11) de $\alpha$, coefficient qui exprime ici la vitesse $-T'$, *initiale*, de décroissement des ordonnées $h$ par unité de leur longueur, il vient

$$(23)\qquad \alpha = \frac{9c^3}{4}\frac{KA}{\mu L^3} = 5,772\frac{KA}{4\mu L^3}.$$

Ce coefficient prend ainsi (à part le facteur numérique $9c^3$ ou $5,772$ remplaçant le carré plus grand $\pi^2$) la forme, (5), qu'il avait dans le cas d'une nappe profonde, étudié d'abord, où le volume apparent A, alors peu variable, égalait sensiblement le produit LH. Mais la fonction T, dans $h$, était $e^{-\alpha t}$, ou l'inverse de $e^{\alpha t}$ et non, comme ici, de $1+\alpha t$; en sorte que ce coefficient $\alpha$ de décroissement relatif s'appliquait à toutes les époques positives $t$ et méritait le nom de *coefficient de tarissement :* il ne s'applique ici qu'à l'instant $t=0$.

Le débit de l'unité de longueur de la nappe, à travers la section verticale d'abscisse $x$, est $K\frac{dh}{dx}h$, c'est-à-dire, d'après (17), $\frac{4\mu^2L^3}{9c^4K\tau^2}\eta\eta'$, ou $\frac{4\mu^2L^3}{9c^3K\tau^2}\sqrt{1-\eta^3}$ en vertu de (13 *bis*). Sur le seuil, où $\eta$ s'annule, on aura donc successivement, vu la seconde relation (17), pour ce débit, qui est alors celui de l'unité de longueur de la source alimentée par la nappe :

$$(24)\qquad q = \frac{4\mu^2L^3}{9c^3K\tau^2} = \frac{cKh_m^2}{L} = cKIh_m,$$

où I représente la *pente superficielle moyenne* de la nappe, quotient de la hauteur actuelle $h_m$ par la largeur L. On remarquera que cette expression de $q$ reviendrait à celle, $\frac{1}{2}\pi$KIH, du cas plus simple examiné précédemment et auquel s'applique la dernière formule (5), si l'on prenait ici, comme section H, la fraction $\frac{2c}{\pi}$ (les $\frac{549}{1000}$) de la section maxima $h_m$.

## § VII. — Stabilité de ce régime.

**20.** Il reste à s'assurer que la forme primitive, *arbitraire*, de la nappe *tend effectivement* à se régler, c'est-à-dire qu'un *véritable* *régime* existe; et il y aurait lieu aussi de voir quelles fractions ou de la hauteur, ou du volume, primitifs, qu'on peut supposer connus dans chaque cas, subsisteraient encore au moment où le régime pourrait être censé atteint, fractions équivalant précisément aux données M ou A des formules ci-dessus. Nous démontrerons seulement l'existence du régime ou, en d'autres termes, sa stabilité.

Supposons, à cet effet, que la forme initiale de $h$ présente, par rapport à une de celles, $h_0$, qui se conservent, d'assez faibles écarts pour permettre de négliger leurs carrés dans les calculs. Prenant le cas général des équations (8), (9), (18) et (19), soit $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ ce que seront devenus les écarts en question, ou ce que vaudra $h - h_0 T$, après un temps $t$ modéré, laissant encore $\varepsilon$ petit. Je n'appelle pas simplement $\varepsilon$ la différence $h - h_0 T$, mais je lui attribue cette forme, en apparence moins simple, pour que, dans le second membre de l'équation indéfinie (8), les expressions $K\frac{d.h^2}{d(x,y)}$, donnent, chacune, un seul terme où figure $\varepsilon$, terme qui sera en $\frac{d\varepsilon}{d(x,y)}$ et non, de plus, un terme en $\varepsilon$ non différentié, qui compliquerait notablement ce second membre.

Les expressions de $h$ et de $h^2$ seront alors respectivement, avec nos notations, l'une, $h_0 T + \frac{\varepsilon}{\zeta}$, l'autre, $h_0^2 T^2 + 2\frac{h_0}{\zeta} T\varepsilon$ ou $h_0^2 T^2 + 2\alpha T\varepsilon$; et l'équation indéfinie (8), divisée, après suppression des termes où ne figure pas $\varepsilon$, par $2\alpha T$, c'est-à-dire multipliée par $\frac{\tau}{2}$, sera

$$(25)\qquad \frac{\mu}{\zeta}\tau\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varepsilon}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\varepsilon}{dy}\right).$$

**21.** Si nous adoptons provisoirement comme variable indépendante, au lieu du temps $\tau$, son logarithme naturel $\log\tau$, que nous appellerons $\theta$, cette équation indéfinie en $\varepsilon$ deviendra

$$(26)\qquad \frac{\mu}{\zeta}\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varepsilon}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\varepsilon}{dy}\right).$$

Complétée par les deux relations définies, évidemment déduites de (3),

$$(27)\qquad \begin{cases} \varepsilon \;\; = 0 \text{ (sur le contour libre } \chi), \\ \dfrac{d\varepsilon}{dn} = 0 \text{ (sur le contour paroi } \chi_1), \end{cases}$$

elle nous ramène, comme dans le cas simple de dénivellations $h$ négligeables devant les profondeurs H, au problème du refroidissement d'une plaque plane, encore à bases $\sigma$ imperméables, avec contour $\chi$ maintenu à la température zéro et contour $\chi_1$ imperméable, mais d'une conductibilité, K, et d'une capacité calorifique, $\frac{\mu}{\zeta}$, tout autres qu'alors.

En appelant $\theta_0$ la valeur initiale, $\log\frac{1}{\alpha}$, de $\theta$, soient : $\mathrm{CV}e^{-\beta(\theta-\theta_0)}$ la solution simple *fondamentale* de ce nouveau problème de refroidissement; $e^{-\beta'(\theta-\theta_0)}$ l'exponentielle de la solution particulière (simple ou composée de plusieurs solutions simples) venant après la solution fondamentale; enfin, $\varepsilon_0$, la petite fonction de $x$ et de $y$ qui exprime les valeurs données de $\varepsilon$ pour $\theta = \theta_0$. Comme on pourra, en modifiant le coefficient $\alpha$ auquel sont proportionnelles les valeurs initiales de la solution *réglée* $h_0\mathrm{T}$, faire varier, pour l'état initial donné, les valeurs correspondantes $\varepsilon_0$, de quantités en raison directe du changement même de $\alpha$, rien n'empêchera de choisir $\alpha$ par la condition d'annuler l'intégrale $\int_\sigma \mathrm{V}\varepsilon_0\, d\sigma$, c'est-à-dire le coefficient C de la solution fondamentale. L'expression de $\varepsilon$ commencera donc au terme en $e^{-\beta'(\theta-\theta_0)}$, que l'on pourra, si W désigne, *dans chaque cas*, une fonction de $x$ et de $y$ généralement comparable à l'unité, écrire $\varepsilon_0 \mathrm{W} e^{-\beta'(\theta-\theta_0)}$ : ce sera l'expression asymptotique ou la partie principale de $\varepsilon$. Et la substitution, à $\theta - \theta_0$, de $\log\tau + \log\alpha$, ou de $\log(1+\alpha t)$, donnera

$$(28)\qquad \varepsilon = (\text{environ})\frac{\varepsilon_0 \mathrm{W}}{(1+\alpha t)^{\beta'}}.$$

**22.** Les petits *écarts* $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ tendront vers zéro, *comparativement à la partie principale de h*, qui est $h_0\mathrm{T}$, inverse de $1+\alpha t$, si l'exposant $\beta'$ excède 1. Or $\beta'$ est plus grand que $\beta$ et l'on reconnaît aisément que $\beta$ a la valeur 2.

Il résulte, en effet, de la remarque ci-dessus, touchant la possibilité de faire disparaître, de $\varepsilon$, le terme fondamental $CVe^{-\beta(\theta-\theta_0)}$, par un choix convenable du paramètre $\alpha$, que nous connaissons déjà, *implicitement*, une solution particulière des équations (26) et (27). Car, dans le problème à l'occasion duquel se sont présentées ces relations, les petits écarts, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, les plus simples qu'on puisse imaginer, d'avec une première forme *se conservant* $h_0 = \frac{\zeta}{\tau} = \zeta\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)^{-1}$, consistent dans l'excédent, sur cette première forme $h_0$, d'une autre *infiniment voisine se conservant aussi,* et obtenue par une variation infiniment petite $\delta\frac{1}{\alpha}$ du paramètre $\frac{1}{\alpha}$. Il vient ainsi, comme écarts $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, l'expression $-\zeta\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)^{-2}\delta\frac{1}{\alpha}$; ce qui donne $\varepsilon$ proportionnel à $\frac{\zeta^2}{(1+\alpha t)^2}$ ou à $\zeta^2 e^{-2(\theta-\theta_0)}$. Or, comme cette dernière expression *a même signe dans toute l'étendue de la nappe,* elle constitue bien la solution *fondamentale;* et l'on peut poser

$$(29) \qquad \beta = 2, \qquad V = \zeta^2.$$

Donc, l'exposant $\beta'$, au second membre de (28), excède 2; et la solution $h = h_0 T$ est stable.

**23.** Mais la simplicité de ces résultats invite à chercher les autres solutions simples du même problème de refroidissement, c'est-à-dire des équations (26) et (27) en $\varepsilon$. Si nous désignons par $CVe^{-\beta(\theta-\theta_0)}$ l'une quelconque d'entre elles, la relation indéfinie en V, que compléteront les conditions d'annulation de V ou de $\frac{dV}{dn}$ au contour, sera

$$(30) \qquad \frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right) = -\beta\frac{\mu}{\zeta}V.$$

Multiplions-la par $\zeta^2$ et retranchons-en, multipliée elle-même par V, l'équation analogue en $\zeta^2$, qui n'est autre que la première (18) (n° **17**). En appelant U le quotient de V par $\zeta^2$, ou posant

$$(31) \qquad V = \zeta^2 U,$$

il viendra immédiatement l'équation indéfinie en U :

$$(32)\qquad \frac{d}{dx}\left(K\zeta^4\frac{dU}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\zeta^4\frac{dU}{dy}\right)=-(\beta-2)\mu\zeta^3 U.$$

**24.** Comme c'est en fonction de $\zeta$, non de $x$ et de $y$, que la solution fondamentale s'est exprimée simplement, nous n'avons quelque espoir d'obtenir les fonctions U que si elles comportent de même une expression en $\zeta$ seul. Nous nous bornerons donc aux nappes pouvant être définies, à chaque instant, au moyen d'une seule *coordonnée*, $r$, $x$, ..., comme sont les nappes de révolution (n° **18**), cylindriques dans un cas extrême. Alors les dérivées $\frac{dU}{d(x,y)}$ deviendront $\frac{dU}{d\zeta}\frac{d\zeta}{d(x,y)}$; et les deux produits $K\zeta^4\frac{dU}{d(x,y)}$, dans (32), s'écriront $\left(\zeta^3\frac{dU}{d\zeta}\right)\left[\frac{K}{2}\frac{d.\zeta^2}{d(x,y)}\right]$. Cette équation (32), développée en y utilisant l'équation indéfinie (18), employant la notation $\Delta_1$ de Lamé pour le premier paramètre différentiel de $\zeta$, enfin, divisant par $\mu\zeta$, et transposant un terme, prendra ainsi la forme

$$(33)\qquad \frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^3\frac{dU}{d\zeta}\right)=\left(\zeta^3\frac{dU}{d\zeta}\right)-(\beta-2)\zeta^2 U.$$

Or elle ne devient, comme nous le désirons, une équation différentielle en U et $\zeta$, sans autre variable, que si l'équation indéfinie (18) en $\zeta$ admet une intégrale première reliant l'expression $\frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2$ à $\zeta$ seul. Nous avons trouvé (n° **18**) que, dans la nappe de révolution, cela a lieu seulement lorsque le produit $\mu K r^2$ est constant.

Admettons donc qu'il en soit ainsi. Alors, $\Delta_1\zeta$ se confondant avec $\pm\frac{d\zeta}{dr}$ et $\zeta$ égalant (n° **18**) $\frac{M}{\alpha}\eta$, d'une part, la formule (20) donne

$$(33\ bis)\qquad \frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2 \quad\text{ou}\quad \frac{M^2}{\alpha^2}\left(\frac{K}{\mu}\frac{d\eta^2}{dr^2}\right)=\frac{2M}{3\alpha}\frac{1-\eta^3}{\eta^2};$$

et, d'autre part, l'équation (33), multipliée par $\frac{3\alpha^2}{M^2}$, devient ensuite, grâce au dédoublement évident d'un terme,

$$(34)\quad \frac{2}{\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^3\frac{dU}{d\eta}\right)=2\eta\frac{d}{d\eta}\left(\eta^3\frac{dU}{d\eta}\right)+3\left(\eta^3\frac{dU}{d\eta}\right)-3(\beta-2)\eta^2 U.$$

Telle sera l'équation différentielle à intégrer, où l'on voit que la variable $\eta$ n'est autre que $\zeta$, au facteur constant près $\frac{M}{\alpha}$.

**25.** Si l'on met pour U une puissance, $\eta^\lambda$, de la variable, le premier membre sera proportionnel à $\eta^{\lambda-1}$ et, le second, à $\eta^{\lambda+2}$. Tous les termes sont donc, dans *chaque* membre en particulier, d'un même degré d'homogénéité : cas où l'on sait que l'équation différentielle s'intègre aisément, en séries procédant suivant des puissances ascendantes, entières ou fractionnaires, de $\eta$ (¹). Posons

$$(35) \quad \varphi(\lambda) = 2\lambda(\lambda+2), \qquad f(\lambda) = 2\lambda^2 + 7\lambda - 3(\beta - 2),$$

et nous trouverons comme intégrale générale la somme des deux intégrales particulières ci-après, multipliées respectivement par deux constantes arbitraires :

$$(36) \quad 1 + \frac{f(0)}{\varphi(3)}\eta^3 + \frac{f(0)}{\varphi(3)}\frac{f(3)}{\varphi(6)}\eta^6 + \frac{f(0)}{\varphi(3)}\frac{f(3)}{\varphi(6)}\frac{f(6)}{\varphi(9)}\eta^9 + \ldots,$$

$$(37) \quad \frac{1}{\eta^2} + \frac{f(-2)}{\varphi(1)}\eta + \frac{f(-2)}{\varphi(1)}\frac{f(1)}{\varphi(4)}\eta^4 + \frac{f(-2)}{\varphi(1)}\frac{f(1)}{\varphi(4)}\frac{f(4)}{\varphi(7)}\eta^7 + \ldots.$$

Ces deux séries ont la formule commune

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} &\eta^\alpha + \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha+3)}\eta^{\alpha+3} + \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha+3)}\frac{f(\alpha+3)}{\varphi(\alpha+6)}\eta^{\alpha+6} \\ &\quad + \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha+3)}\frac{f(\alpha+3)}{\varphi(\alpha+6)}\frac{f(\alpha+6)}{\varphi(\alpha+9)}\eta^{\alpha+9} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

où $\alpha$ annule le polynome $\varphi(\alpha)$ et admet, par conséquent, les deux déterminations $0$, $-2$.

Quelle que soit la valeur finie attribuée à $\beta$, paramètre unique figurant dans les deux polynomes du second degré $\varphi(\lambda)$, $f(\lambda)$, ou plutôt seulement dans le dernier, la suite infinie (38) est convergente,

(¹) *Voir*, par exemple, le Tome II (*Compléments*, p. 305*) de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*.

à la manière de la série, d'une forme bien connue,

$$(39)\qquad \text{const.} + \frac{\eta^3}{1^{\frac{3}{2}}} + \frac{\eta^6}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\eta^9}{3^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \frac{\eta^{3i}}{i^{\frac{3}{2}}} + \ldots;$$

car, dans (38), le rapport du $(i+1)^{\text{ième}}$ terme au précédent est

$$(40)\qquad \frac{f(\alpha+3i-3)}{\varphi(\alpha+3i)}\eta^3 = \frac{2(\alpha+3i)^2 - 5(\alpha+3i) - 3(\beta-1)}{2(\alpha+3i)(\alpha+3i+2)}\eta^3$$

ou bien, *sensiblement*, en divisant *haut et bas* par $2(\alpha+3i)^2$, ordonnant par rapport aux puissances négatives de $\alpha+3i$ et supposant finalement $i$ très grand,

$$(40\ bis)\qquad \left[1 - \frac{9}{2(\alpha+3i)} + \frac{3(7-\beta)}{2(\alpha+3i)^2} + \ldots\right]\eta^3 = \left(1 - \frac{3}{2i}\right)\eta^3,$$

précisément, sous la dernière forme, comme dans (39), où le rapport analogue est, exactement, du moins pour $i > 1$,

$$\left(1 - \frac{1}{i}\right)^{\frac{3}{2}}\eta^3.$$

**26.** Mais il faut tenir compte des conditions relatives aux deux contours $\chi$ et $\chi_1$, c'est-à-dire, respectivement, aux deux limites $\eta = 0$, $\eta = 1$.

Le produit $U\eta^2$, expression de V (à un facteur constant près), doit s'annuler pour $\eta = 0$, valeur de la variable qui annule la série (36), mais qui réduit (37), multipliée par $\eta^2$, à l'unité. Donc la constante arbitraire affectant (37) dans l'expression de U sera nulle; et il restera comme seule valeur possible de U, à un facteur constant près, la série (36).

Enfin, la dérivée $\frac{dV}{dr}$ doit devenir zéro à la limite $\eta = 1$, où la série (39) et, par suite, les séries (38), (36) sont encore convergentes. Comme, dans le produit $V = \eta^2 U$, la dérivée de $\eta$ en $r$ s'annule, d'après (20), à la limite $\eta = 1$, il faudra et il suffira que $\frac{dU}{dr}$, c'est-à-dire $\frac{dU}{d\eta}\frac{d\eta}{dr}$, s'y annule aussi, ou, encore d'après (20), que l'on ait

$$(41)\qquad \frac{dU}{d\eta}\sqrt{1-\eta^3} = 0 \quad (\text{à la limite } \eta = 1).$$

Or, la dérivée, en $\eta$, de la série (36) est la nouvelle série

$$(42)\qquad 3\frac{f(0)}{\varphi(3)}\eta^2+6\frac{f(0)}{\varphi(3)}\frac{f(3)}{\varphi(6)}\eta^5+9\frac{f(0)}{\varphi(3)}\frac{f(3)}{\varphi(6)}\frac{f(6)}{\varphi(9)}\eta^8+\ldots,$$

où le rapport du $i^{\text{ième}}$ terme au précédent devient très sensiblement, pour $i$ assez grand, en utilisant la première expression (40 *bis*) prise avec $\alpha$ nul, $\frac{i}{i-1}\left(1-\frac{3}{2i}+\frac{7-\beta}{6i^2}\right)\eta^3$, c'est-à-dire

$$(43)\qquad \left(1-\frac{1}{i}\right)^{-1}\left(1-\frac{3}{2i}+\frac{7-\beta}{6i^2}\right)\eta^3=\left(1-\frac{1}{2i}+\frac{4-\beta}{6i^2}\right)\eta^3,$$

et même $\left(\text{si l'on néglige les termes en } \frac{1}{i^2}\right)$ $\frac{2i-1}{2i}\eta^3$, comme dans la série

$$(44)\qquad (1-\eta^3)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\eta^3+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\eta^6+\ldots+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2i-1}{2i}\eta^{3i}+\ldots.$$

On voit ainsi que, $\eta$ tendant vers la limite 1, la dérivée (42) deviendra comparable à l'inverse de $\sqrt{1-\eta^3}$ et n'aura pas son produit par $\sqrt{1-\eta^3}$ évanouissant, *à moins qu'on ne choisisse* $\beta$, *de manière à annuler identiquement tous les termes de la série* (42) *à partir de l'un quelconque d'entre eux* [1]. Donc l'équation transcendante

---

[1] Pour apprécier et comparer de plus près les rapports des termes très éloignés correspondants dans les deux séries (42) et (44), on peut mettre la dernière expression (43) sous la forme très approchée $\frac{2i-1}{2i}\eta^3 e^{\frac{4-\beta}{6i^2}}$. Elle signifie que le rapport d'un terme au précédent, dans la série (42), est sensiblement le produit du rapport analogue dans la série (44) par l'exponentielle $e^{\frac{4-\beta}{6}\frac{1}{i^2}}$. Cela étant, si l'on compare, dans les deux séries, les termes éloignés, chacun à chacun, à partir des $i^{\text{ièmes}}$, les rapports successifs de ceux de la première série à ceux de la seconde égaleront tous le premier d'entre eux, multiplié par des exponentielles totales de la forme $e^{\frac{4-\beta}{6}\left[\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(i+2)^2}+\frac{1}{(i+3)^2}+\ldots\right]}$, où l'exposant de $e$ n'excédera jamais une valeur absolue assignable, aussi petite même qu'on le voudra, si l'on prend $i$ assez grand, puisque la série formée par les inverses des carrés entiers

donnant les racines $\beta$ est, ici,

$$(45)\qquad f(0)f(3)f(6)\ldots f(3i)\ldots = 0,$$

et toutes les valeurs de $\beta$ possibles sont celles qui annulent le facteur $f(3i)$, où $i$ désignerait un entier positif (ou, plutôt, *non* négatif) quelconque. Il viendra, vu la seconde formule (35),

$$(46)\qquad \beta = 2 + i(6i + 7), \text{ où } i \text{ aura toutes les valeurs } 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Quant aux fonctions U correspondantes, ce seront évidemment les *polynomes* en $\eta$, de degrés $3i$ de plus en plus élevés ou à variations de plus en plus rapides, auxquels la série (36) se trouvera ainsi réduite.

L'intégrale générale, formée par la somme de toutes les solutions simples, après leur multiplication par des constantes arbitraires, constituera bien une série infinie en $\eta^0, \eta^3, \eta^6, \ldots$ (à part le facteur $\eta^2$). Mais elle vérifiera néanmoins la condition spéciale à la limite $\eta = 1$, car les termes d'un degré très élevé n'y proviendront que des solutions simples d'un ordre très élevé aussi; et, vu la convergence de l'intégrale obtenue, du moins dans le cas d'un état initial *continu* en $\eta$, elles n'y figureront qu'avec des constantes arbitraires ou coefficients d'importance extrêmement faible, s'évanouissant à la limite.

**27.** L'hypothèse $f(0) = 0$, ou $i = 0$, redonne d'abord la solution simple fondamentale

$$\beta = 2, \qquad U = 1 \qquad \text{et} \qquad V = \eta^2.$$

Il faudra donc faire $i = 1$, pour avoir la solution simple suivante, celle où la valeur de $\beta$ est désignée par $\beta'$ et qui fournira l'expression asymptotique des petits écarts. L'on obtient

$$(47)\qquad \beta' = 15, \qquad U = 1 - \frac{13}{10}\eta^3;$$

---

est convergente. Ces rapports seront donc tous comparables, sinon presque égaux, au premier d'entre eux; et, pourvu que celui-ci ne soit pas nul, les deux séries se trouveront bien du même ordre de grandeur.

et la fonction correspondante $V = \eta^2 U$ présente un changement de signe unique entre les deux limites $\eta = 0$, $\eta = 1$.

Il en résulte, pour l'expression asymptotique $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ des petits écarts, vu la proportionnalité de $\zeta$ à $\eta$ et en appelant $c'$ une constante arbitraire, la formule

$$(48) \qquad \frac{\varepsilon}{\zeta} = (\text{sensiblement}) \frac{c'\eta}{(1+\alpha t)^{15}}\left(1 - \frac{13}{10}\eta^2\right).$$

Comparés, en un point quelconque de la nappe, à la *partie régularisée* $\frac{h_0}{1+\alpha t}$ de l'ordonnée $h$, les petits écarts s'évanouissent donc comme sa *quinzième puissance* et, par conséquent, très vite, quand le temps $t$ grandit.

**28.** Avant d'avoir intégré, ainsi qu'on vient de voir, dans le cas d'une nappe cylindrique ou de certaines nappes de révolution, le système (26), (27), j'avais pu obtenir de la manière suivante, pour la racine $\beta'$, deux *estimations* qui n'étaient pas très inexactes. *Assimilant $\zeta$ à une constante,* dans (26), et me bornant au cas d'une nappe cylindrique où la coordonnée $y$ n'a pas à figurer, j'avais considéré l'équation indéfinie (26), où $\mu$ et K sont supposés constants, sous les deux formes

$$(49) \qquad \frac{\mu}{\zeta}\frac{d\varepsilon}{d\theta} = K\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}, \qquad \mu\frac{d\varepsilon}{d\theta} = K\zeta\frac{d^2\varepsilon}{dx^2},$$

qui en font l'équation indéfinie du refroidissement de deux barres ayant, l'une, la conductibilité K et la capacité calorifique $\mu_1 = \frac{\mu}{\zeta} = \frac{\alpha}{M}\frac{\mu}{\eta}$, l'autre, la conductibilité $K_1 = K\zeta = K\frac{M}{\alpha}\eta$ et la capacité calorifique $\mu$. Et j'avais admis qu'on pût, quant à la rapidité d'extinction des diverses solutions simples, assimiler deux barres où soit $\mu_1$, soit $K_1$ seraient fonction de $x$ dans cette équation, au cas où leur valeur respective se réduirait à sa moyenne d'un bout à l'autre.

On est ainsi ramené au problème du refroidissement d'une barre homogène de longueur L, ayant une extrémité, $x = 0$, à la température zéro, et l'autre extrémité, $x = L$, imperméable à la chaleur, hypothèses donnant, pour former les solutions simples $e^{-\beta(\theta-\theta_0)}\mathrm{V}$, les formules

$$(50)\quad \mathrm{V}=\pm\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2\mathrm{L}},\quad \beta=\text{soit}\ \frac{(2i+1)^2\pi^2}{4\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{K}}{\mu_1},\quad \text{soit}\ \frac{(2i+1)^2\pi^2}{4\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{K}_1}{\mu}.$$

Les valeurs moyennes de $\mu_1$ et de $\mathrm{K}_1$ s'y écrivent d'ailleurs $\frac{\alpha\mu}{\mathrm{M}}\int_0^1\frac{d\xi}{\eta}$ et $\mathrm{K}\frac{\mathrm{M}}{\alpha}\int_0^1\eta\,d\xi$; ce qui, vu la valeur (11) de $\alpha$ (n° **16**), conduit à poser

$$(51)\qquad \beta=\text{soit}\ \frac{(2i+1)^2\pi^2}{6c^2\int_0^1\frac{d\xi}{\eta}},\qquad \text{soit}\ \frac{(2i+1)^2\pi^2}{6c^2}\int_0^1\eta\,d\xi.$$

Or, les deux valeurs moyennes de $\eta$ et de son inverse se calculent sans difficulté.

Nous connaissons déjà implicitement, par la formule (22), la première, quotient de l'aire A par le rectangle LM, et qui est $\frac{2}{3c}$.

Quant à la valeur moyenne de $\frac{1}{\eta}$, l'équation (14), différentiée, donne, en posant finalement $\eta=\gamma^{\frac{1}{3}}$,

$$(52)\quad c\int_0^1\frac{d\xi}{\eta}=\int_0^1\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}}=\frac{1}{3}\int_0^1\gamma^{\frac{1}{3}-1}(1-\gamma)^{\frac{1}{2}-1}d\gamma=\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6})}.$$

D'ailleurs, d'après (15), $c$ a, de même, pour valeur

$$\frac{1}{3}\int_0^1\gamma^{\frac{2}{3}-1}(1-\gamma)^{\frac{1}{2}-1}d\gamma\quad \text{ou}\quad \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right);$$

de sorte qu'il vient

$$(53)\qquad c=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{6})}=2\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{6})}.$$

Et la multiplication des deux formules (52), (53) donne, en appliquant trois fois la relation d'Euler $\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$,

$$(54)\qquad c^2\int_0^1\frac{d\xi}{\eta}=\frac{2\pi}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

Faisons en outre, puisqu'il s'agit de la *seconde* racine $\beta$, $i=1$, et les formules (51) nous conduiront, pour $\beta'$, aux deux estimations ou *appréciations de sentiment*

$$(55)\qquad \beta' = \text{soit } \frac{9\pi\sqrt{3}}{4} = 12{,}243, \qquad \text{soit } \frac{\pi^2}{c^3} = 15{,}389.$$

On voit qu'elles comprennent entre elles la valeur exacte 15, dont la seconde surtout, 15,389, ne s'écarte pas beaucoup.

## § VIII. — Extension du mode d'écoulement qui se conserve à certains cas de fonds courbes, concaves ou convexes, à pentes relativement fortes.

**29.** Il est intéressant de chercher s'il existe pour la base de la nappe aqueuse, c'est-à-dire pour le sous-sol imperméable, des formes courbes rendant possible, comme le fait sa forme plane horizontale, un mode d'écoulement *qui se conserve*, où l'ordonnée $h$ de la surface libre soit le produit d'une fonction $h_0$ des deux coordonnées horizontales $x$ et $y$ par une fonction T du temps $t$ seul. Nous désignerons celui-ci par $\tau$, en le comptant alors comme aux n$^{os}$ **16** et **17**, pour simplifier les formules, à partir d'une origine (toujours antérieure au début du phénomène) où la fonction T soit analytiquement infinie; et aussi, comme aux mêmes numéros, la fonction $h_0$ sera appelée $\zeta$, quand nous l'aurons divisée par le facteur constant rendant son équation caractéristique le plus simple possible.

Substituons donc $\zeta$T à $h$ dans la relation indéfinie (2) du problème (n° **7**), puis divisons les résultats soit par $\mu\zeta T^2$, soit par $\mu\zeta T$. Il viendra

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{d\frac{1}{T}}{d\tau} &= \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(KH\frac{d\zeta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(KH\frac{d\zeta}{dy}\right)\right]\frac{1}{T} \\ &\quad + \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dy}\right)\right], \\ \frac{d\log T}{d\tau} &= \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(KH\frac{d\zeta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(KH\frac{d\zeta}{dy}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dy}\right)\right]T. \end{aligned}\right.$$

Or, une différentiation en $\tau$ de ces deux équations isole l'une de l'autre les deux expressions

$$(57)\quad \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{KH}\frac{d\zeta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{KH}\frac{d\zeta}{dy}\right)\right],\quad \frac{1}{\mu\zeta}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\zeta\frac{d\zeta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\zeta\frac{d\zeta}{dy}\right)\right]$$

et les montre, séparément, fonctions de $\tau$ *seul*. Comme elles en sont effectivement indépendantes, elles ne pourront que se réduire à deux constantes, dont $-\alpha$ désignera provisoirement la seconde et $-k\alpha$ la première.

Mais $\alpha$ se réduit à 1 si l'on divise partout, dans la seconde expression (57), $\zeta$ par $\alpha$, ou si l'on appelle $\zeta\alpha$ ce qu'on appelait $\zeta$, afin d'extraire un facteur $\alpha$ de l'expression tout entière. Et alors, les conditions qui détermineront $\zeta$ concorderont exactement avec les relations (18) (n° **17**); de sorte que $\zeta$ sera la fonction de $x$ et de $y$ étudiée plus haut sous ce nom, fonction essentiellement positive dans les cas où nous l'avons calculée.

Cela posé, $k$ sera le rapport constant de la première des expressions (57) à la seconde; et l'on aura

$$(58)\qquad \frac{d}{dx}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}-k\zeta)\frac{d\zeta}{dx}\right]+\frac{d}{dy}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}-k\zeta)\frac{d\zeta}{dy}\right]=0.$$

Or, combinée avec les conditions $\left(\zeta \text{ ou } \frac{d\zeta}{dn}\right)=0$ sur le contour, cette équation revient à annuler partout soit la pente (proportionnelle à $\Delta_1\zeta$) de la surface libre, soit la différence $\mathrm{H}-k\zeta$, dans les deux cas, que nous considérons surtout, de nappes ou cylindriques à génératrices horizontales, ou de révolution autour de l'axe vertical des $z$.

En effet, dans le premier cas, où $\mu$, K, H et $\zeta$ peuvent être censés indépendants de $y$, l'équation (58) revient à poser

$$\mathrm{K}(\mathrm{H}-k\zeta)\frac{d\zeta}{dx}=\text{const.},\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad \mathrm{K}(\mathrm{H}-k\zeta)\frac{d\zeta}{dx}=0,$$

vu qu'il y aura toujours, ou sur un bord de la surface libre, s'il existe un contour-paroi, ou dans l'intérieur, si tout le contour est libre, c'est-à-dire constitué par le seuil horizontal des sources supposées, un plan tangent *horizontal* où s'annulera l'inclinaison $\frac{d\zeta}{dx}$. Et l'on aura partout soit $\frac{d\zeta}{dx} = 0$, c'est-à-dire une nappe sans pente superficielle *ni écoulement*, soit $H - k\zeta = 0$, c'est-à-dire $H = k\zeta$. Donc, si c'est un mode d'*écoulement* se conservant qui se réalise (ce qui seul nous intéresse ici), l'ordonnée H du fond sera, sur toutes les verticales, proportionnelle à la fonction $\zeta$, parfaitement déterminée, de $x$.

Dans le cas, un peu moins simple, d'une nappe de révolution autour de l'axe des $z$, cas où $\mu$, K, H, $\zeta$ ne dépendent de $x$ et de $y$ que par l'intermédiaire de la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ à l'axe, la substitution de $\frac{d\zeta}{dr} \frac{(x, y)}{r}$ à $\frac{d\zeta}{d(x, y)}$ donnera aisément à la relation (58) la forme

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r\mathrm{K}(\mathrm{H} - k\zeta) \frac{d\zeta}{dr} \right] = 0; \qquad \text{d'où} \qquad r\mathrm{K}(\mathrm{H} - k\zeta) \frac{d\zeta}{dr} = \text{const.};$$

et le fait de l'existence d'un plan tangent horizontal où s'évanouit la dérivée $\frac{d\zeta}{dr}$, dans toutes les nappes que nous considérons, obligera d'annuler encore la constante ou, par suite, soit la pente $\frac{d\zeta}{dr}$ de la surface libre, avec l'écoulement lui-même, soit l'expression $H - k\zeta$. Donc, l'hypothèse d'un mode d'écoulement se conservant exige l'égalité de H à $k\zeta$, c'est-à-dire, encore, la proportionnalité de l'ordonnée H du fond à celle, $h$, de la surface libre.

D'ailleurs, lorsque le coefficient $k$ de cette proportionnalité de H à $\zeta$ sera positif, le fond se trouvera concave, puisque les ordonnées H du fond se comptent de haut en bas à partir du plan des $xy$, contrairement aux ordonnées $h$ de la surface libre. Quand ce coefficient $k$ sera négatif, le fond sera, au contraire, convexe ou en relief; et la profondeur d'eau $H + h$, ou mieux alors $h + H$, sera l'excédent de $h$ sur la valeur absolue de H.

**30.** En général, pour un contour donné quelconque de la nappe, et la fonction correspondante $\zeta$ de $x$ et de $y$ étant censée obtenue, attribuons à la profondeur H, positive ou négative, existant sous le plan horizontal du seuil de la source, la formule

$$H = k\zeta + H_1. \tag{59}$$

L'équation (58), la seule à laquelle soit astreinte ici H (à part la condition admise de donner partout, dans l'intérieur du contour, à quelque distance du bord, des pentes de fond $\Delta_1 H$ modérées), deviendra, en $H_1$,

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\zeta}{dx}\cdot H_1\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\zeta}{dy}\cdot H_1\right) = 0.$$

Or cette relation exprime l'intégrabilité de la différentielle totale

$$(60) \qquad d\Phi = H_1 K\left(\frac{d\zeta}{dx}dy - \frac{d\zeta}{dy}dx\right),$$

qui, égalée à zéro, fournirait l'équation différentielle des *lignes de plus grande pente de la surface libre* $z = T\zeta$. Si donc $\varphi =$ const. est l'équation finie, censée obtenue, de ces *lignes de pente*, vues en projection sur le plan des $xy$ et invariables, par hypothèse, durant tout l'écoulement, la fonction $\Phi$ sera une fonction arbitraire de $\varphi$ ou pourra s'écrire $\Phi(\varphi)$; et l'on aura

$$-H_1 K\frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\Phi(\varphi)}{dx} = \Phi'(\varphi)\frac{d\varphi}{dx}, \qquad H_1 K\frac{d\zeta}{dx} = \Phi'(\varphi)\frac{d\varphi}{dy}.$$

Il en résulte

$$(61) \qquad H_1 = \frac{\Phi'(\varphi)}{K}\left(\frac{-\dfrac{d\varphi}{dx}}{\dfrac{d\zeta}{dy}} \text{ ou } \frac{\dfrac{d\varphi}{dy}}{\dfrac{d\zeta}{dx}}\right).$$

Ces deux expressions, élevées au carré et puis combinées par l'addition, terme à terme, de deux rapports égaux, donnent enfin, par une extraction de racines carrées, la formule plus symétrique

$$(61\ bis) \qquad H_1 = \frac{\pm\Phi'(\varphi)}{K}\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\zeta}.$$

Supposons, par exemple, la surface libre, de révolution autour de l'axe des $z$. On aura, comme lignes de niveau $\zeta =$ const., les cercles parallèles $r = \sqrt{x^2+y^2} =$ const., et, comme lignes de pente $\varphi =$ const., en projection sur le plan des $xy$, les rayons $r$ eux-mêmes, distingués les uns des autres par leur azimut $\theta$, ou ayant comme équation $\theta =$ const., c'est-à-dire arc tang $\frac{y}{x} =$ const. Ainsi, d'une part, K, $\zeta$ seront fonctions de $r$, et $\frac{d\zeta}{d(x,y)}$ vaudront $\frac{d\zeta}{dr}\frac{(x,y)}{r}$ ou $\frac{d\zeta}{dr}(\cos\theta, \sin\theta)$; mais, d'autre part, $\varphi$ sera arc tang $\frac{y}{x}$ et $\frac{d\varphi}{d(x,y)}$ s'écriront $-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}$, ou $-\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\cos\theta}{r}$. Les formules (61) deviendront donc

$$H_1 = \frac{\Phi'(\theta)}{K r \frac{d\zeta}{dr}}. \tag{62}$$

Elles donnent, en résumé, pour $H_1$, le quotient d'une fonction de $\theta$ généralement arbitraire (à cela près qu'elle admet effectivement la période $2\pi$) par la fonction, $\pm K r(\Delta_1 \zeta)$, de la distance $r$ à l'axe. Mais cet excédent, $H_1$, de la profondeur H, sur sa partie $k\zeta$ proportionnelle aux dénivellations $T\zeta$, s'annule quand la surface libre a un plan tangent horizontal $\left(\text{où est réduite à zéro la dérivée } \frac{d\zeta}{dr}\right)$; car, si l'on ne posait pas alors $\Phi'(\theta) = 0$, la profondeur $k\zeta + H_1$ serait infinie, par sa partie $H_1$, sous le point de contact de ce plan tangent horizontal.

Le même fait de l'annulation de $H_1$ se produira dans le cas général de la formule (61 *bis*), si la surface libre possède un *sommet* où aboutissent toutes les lignes de pente et où le plan tangent soit horizontal. Car, alors, $\Delta_1 \zeta$ s'y annulant et $\varphi$ y recevant néanmoins toutes ses valeurs, le paramètre différentiel $\Delta_1 \varphi$ s'y trouve infini. On devra donc avoir identiquement $\Phi'(\varphi) = 0$, pour que la partie $H_1$ de la profondeur reste finie, sous le sommet, comme l'autre partie $k\zeta$.

La fonction $\Phi'(\varphi)$ serait encore nulle, ce qui entraînerait l'annulation de $H_1$, si un plan horizontal était tangent à la surface libre *tout le long d'une courbe de contact* où aboutiraient les lignes de pente; car dans (61 *bis*), $\Delta_1 \zeta$, mais non $\Delta_1 \varphi$, s'y annulerait d'une manière continue.

On ne voit donc guère dans quelles circonstances pourrait subsister la partie $H_1$, non proportionnelle à $\zeta$, de la profondeur H.

**31.** Déterminons maintenant la fonction T, du temps $\tau$, entrant dans l'expression $h = \zeta T$ des dénivellations de toute nappe dont le mode d'écoulement se conserve. Les conditions au contour se trouvant satisfaites à raison des seconde et troisième relations (18), il suffira de vérifier l'équation indéfinie (2), qui nous a donné les deux (56). Or, grâce à l'égalité respective des deux expressions (57) à $-k$ et à $-1$, ces deux relations (56), devenues identiques, prennent la forme

$$(63)\quad T' = -T(k+T), \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{k}\right) = k\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{k}\right).$$

Intégrée de manière à rendre T infini ou $\frac{1}{T}$ nul (comme il est convenu) pour $\tau = 0$, cette équation donne

$$(64)\quad \frac{1}{T}+\frac{1}{k} = \frac{1}{k}e^{k\tau}, \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{ke^{-k\tau}}{1-e^{-k\tau}} = \frac{1}{\tau}\,\frac{\frac{k\tau}{2}e^{-\frac{k\tau}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{k\tau}{2}}.$$

L'exponentielle $e^{-k\tau}$ devant figurer sans cesse dans les formules suivantes, il y aura lieu de la représenter par une seule lettre et même, souvent, de la prendre, au lieu de $\tau$, comme variable indépendante. Elle sera désignée par $\psi$. Nous aurons donc

$$(65)\quad \left\{\begin{array}{l} \psi = e^{-k\tau}; \quad \text{d'où} \quad T = \dfrac{k\psi}{1-\psi}, \quad k+T = \dfrac{k}{1-\psi} \\ \text{et, aussi,} \\ \qquad\qquad \dfrac{d}{d\tau} = -k\psi\dfrac{d}{d\psi}. \end{array}\right.$$

Les fonctions T, $k+T$ seront essentiellement positives, car $k$ et $1-\psi$ changeront ensemble de signe. Par suite, la dérivée T', égale à $-T(k+T)$, sera négative; et T, $k+T$ décroîtront sans cesse, à partir de l'infini qui est leur valeur pour $\tau = 0$, en tendant respectivement vers les expressions asymptotiques $ke^{-k\tau}$, $k$, si $k$ est positif, $(-k)$, $(-k)e^{k\tau}$ si $k$ est négatif. On voit que, pour les petites valeurs du temps $\tau$, alors que $\psi$ est réductible à $1-k\tau$, les fonctions T, $k+T$ se confondent sensiblement avec l'inverse de $\tau$, comme cela devait être, d'après la formule (19) (n° **17**), au début de l'écoulement, où les courbures de la surface libre sont incomparablement plus accusées que celles du fond. L'écoulement s'y fait donc, à très peu près, comme il se ferait toujours si le fond était plat ou si, $k$ devenant infiniment petit, l'on avait, à toute époque,

$$1 - \psi = k\tau \qquad \text{et} \qquad T = \frac{1}{\tau}.$$

**32.** Le débit $K(H+h)\frac{dh}{dn}$, par unité de longueur, d'une coupe verticale faite idéalement dans le sol perméable, sera

$$KH\frac{d\zeta}{dn}T + K\zeta\frac{d\zeta}{dn}T^2.$$

Si l'on a partout $H = k\zeta$, comme il arrive au moins dans les cas simples, cette expression deviendra

$$\left(K\zeta\frac{d\zeta}{dn}\right)(k+T)T,$$

ou variera, avec le temps $\tau$, comme le produit $T(k+T)$, égal à la valeur absolue de la dérivée $T'$. Le débit de la source sera donc, aussi, proportionnel à $T(k+T)$, c'est-à-dire à l'expression

$$(66) \qquad \frac{k^2\psi}{(1-\psi)^2} = \frac{k^2 e^{-k\tau}}{(1-e^{-k\tau})^2} = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\frac{k\tau}{2}}{\operatorname{sih}\frac{k\tau}{2}}\right)^2.$$

Dans les cas, plus compliqués, où la formule (61) rendrait possible un certain excédent $H_1$ de H sur $k\zeta$, l'équation (58), multipliée par $d\sigma$ et intégrée à la manière ordinaire sur toute l'aire $\sigma$ de la nappe (vue en plan), donnerait néanmoins, en tenant compte de la condition $\frac{d\zeta}{dn} = 0$ sur le contour-paroi $\chi_1$,

$$(67) \qquad \int_\chi KH\frac{d\zeta}{dn}d\chi = k\int_\chi K\zeta\frac{d\zeta}{dn}d\chi.$$

Et alors le débit Q de la source, qui est successivement, en ne négligeant pas, dès l'abord, $h$ près du seuil,

$$Q = \int_\chi K(H+h)\frac{dh}{dn}d\chi = T\int_\chi KH\frac{d\zeta}{dn}d\chi + T^2\int_\chi K\zeta\frac{d\zeta}{dn}d\chi,$$

deviendrait, par la substitution du second membre de (67) au premier membre, et, vu enfin la dernière expression (66) du produit $T(k+T)$,

$$(68)\quad Q = \left(\int_\chi K\zeta\frac{d\zeta}{dn}d\chi\right)T(k+T) = \left(\int_\chi K\zeta\frac{d\zeta}{dn}d\chi\right)\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\frac{k\tau}{2}}{\operatorname{sih}\frac{k\tau}{2}}\right)^2.$$

Deux conséquences importantes résultent de cette formule.

La première consiste en ce que, le débit Q étant fini, alors que la dénivellation $T\zeta$, et, par suite, $\zeta$ tendent vers zéro à l'approche du seuil, la pente de superficie, proportionnelle à $\frac{d\zeta}{dn}$, devra, en compensation, y croître sans limite et ne pourra pas y garder les valeurs modérées qu'elle a dans l'intérieur. C'est le produit $2\zeta\frac{d\zeta}{dn}$, ou $\frac{d.\zeta^2}{dn}$, qui restera fini; de sorte que $\zeta^2$ sera, près du seuil, de l'ordre de la distance au seuil, ou, $\zeta$, comparable à la racine carrée de cette distance, comme il arrivait en effet (nº **16**) dans le profil (14) de surface libre que nous avons déterminé.

Le premier membre de la formule (67) montre alors que la profondeur H devra (même dans sa partie $H_1$ non proportionnelle à $\zeta$) tendre vers zéro à l'approche du seuil, ou y devenir comparable à l'inverse de la dérivée grandissante $\frac{d\zeta}{dn}$.

La deuxième conséquence est relative à la fonction du temps entrant dans l'expression de Q, $\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\frac{k\tau}{2}}{\operatorname{sih}\frac{k\tau}{2}}\right)^2$, *fonction dont l'inverse est le produit du carré du temps $\tau$ par le carré du rapport du sinus hyperbolique de l'argument $\frac{k\tau}{2}$ à cet argument lui-même. Quand le temps $\tau$ grandit, le débit de la source décroît sans cesse*, par chacun des deux facteurs de cette fonction; et, *pour une même valeur du* *temps* $\tau$, *il décroît aussi*, par le second facteur, celui où figure le coefficient $k$ de concavité, *quand le sous-sol devient plus courbe* ou qu'on fait grandir $k$ en valeur absolue (*abstraction faite*, bien entendu, *de la partie* $H_1$ *de la profondeur*, partie sans influence sur Q dans le mode d'écoulement qui se conserve). Ce débit est, d'ailleurs, le même, que le fond soit convexe ou concave, pourvu que ses courbures, *proportionnelles à* $k$, soient pareilles dans les deux cas.

Toutefois, pour que ces lois s'appliquent effectivement, quelque grand que devienne le temps $\tau$, il est nécessaire que, même pour $\tau$ infini, la profondeur $H+h$, ou $k\zeta+H_1+h$, ne soit nulle part négative. Il faut donc, si $k$ est positif, ou si $h$ tend vers zéro, que la partie $H_1$ de la profondeur ne s'abaisse nulle part au-dessous de $-k\zeta$; et si $k$ est négatif, ou si $h$ tend vers $-k\zeta$, que cette même partie $H_1$ ne devienne nulle part négative.

La fonction T et, par suite, l'altitude $h=\zeta T$ de la surface libre, considérées à une même époque $\tau$, mais pour deux valeurs de $k$ égales et contraires, l'une, $k'$, positive, l'autre, $-k$, négative, sont entre elles, d'après la dernière formule (64), comme $e^{-k'\tau}$ est à 1, ou, par conséquent, plus fortes pour $k$ négatif que pour $k$ positif. Ainsi, quand les débits ont mêmes valeurs, la surface libre se trouve plus élevée au-dessus d'un fond convexe qu'au-dessus d'un fond concave : les pentes de superficie et les vitesses d'écoulement y sont donc plus grandes, en compensation de profondeurs d'eau $h+H$ moindres (de $k'\zeta$), donnant lieu à des sections d'écoulement plus réduites.

### § IX. — Stabilité, dans ces cas, du régime obtenu, prouvée par un procédé d'intégration nouveau en Physique mathématique.

**33.** Mais pour savoir si la forme $h=\zeta T$ est encore stable, il faut étudier les expressions, qui en sont voisines, de la fonction $h$ de $x$, $y$ et $\tau$. Pour la raison donnée déjà au n° **20**, nous écrirons ces expressions non pas $\zeta T+\varepsilon$, mais bien

$$h=\zeta T+\zeta^{-\psi}\varepsilon=\frac{k\zeta\psi}{1-\psi}+\zeta^{-\psi}\varepsilon, \tag{69}$$

avec $\varepsilon$ fonction de $x$, $y$ et $\tau$ donnée initialement *très petite*. En outre, pour éviter une complication paraissant excessive, nous supposerons $H_1 = 0$, ou les ordonnées H du fond réduites au terme relativement simple $k\zeta$, que nous savons les exprimer en entier tout au moins dans les cas les plus intéressants. Il viendra

$$(H+h)\frac{dh}{d(x,y)} = \frac{k^2\psi}{(1-\psi)^2}\zeta\frac{d\zeta}{d(x,y)} + \frac{k\zeta^{1-\psi}}{1-\psi}\frac{d\varepsilon}{d(x,y)}.$$

Alors les relations (2) et (3) ($n^{os}$ **7** et **8**), débarrassées des termes où ne figure pas $\varepsilon$, deviennent, grâce, d'ailleurs, à la dernière formule (65),

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} &-\mu\psi(1-\psi)\frac{d.\zeta^{-\psi}\varepsilon}{d\psi} = \frac{d}{dx}\left(K\zeta^{1-\psi}\frac{d\varepsilon}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\zeta^{1-\psi}\frac{d\varepsilon}{dy}\right),\\ &\qquad\text{(au contour)}\quad \left(\varepsilon \text{ ou } \frac{d\varepsilon}{dn}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

Comme l'expression $-\psi\frac{d.\zeta^{-\psi}\varepsilon}{d\psi}$, ou $\frac{1}{k}\frac{d.\zeta^{-\psi}\varepsilon}{d\tau}$, se dédoublerait en $\frac{\zeta^{-\psi}}{k}\frac{d\varepsilon}{d\tau}$ et $\frac{1}{k}\frac{d.\zeta^{-\psi}}{d\tau}\varepsilon$, ces équations sont celles du refroidissement d'une plaque à faces rayonnantes, dont la conductibilité *intérieure*, $K\zeta^{1-\psi}$, la capacité calorifique, $\frac{\mu}{k}(1-\psi)\zeta^{-\psi}$, et la conductibilité *extérieure*, $\frac{\mu}{k}(1-\psi)\frac{d.\zeta^{-\psi}}{d\tau}$, *varieraient* avec $\psi$, c'est-à-dire *avec le temps* $\tau$.

On remarquera que le coefficient $k$ de concavité du sous-sol est absent du système (70). Donc, dans les nappes de même contour, à fond soit concave chez toutes, soit convexe chez toutes, les valeurs de $\varepsilon$ qui se produiront, pour des valeurs quelconques de $\psi$ ou du produit $k\tau$, à la suite de valeurs $\varepsilon_0$ initiales communes, correspondant à une même valeur $\psi_0$ de $\psi$, seront indépendantes des ordonnées $H = k\zeta$ du fond. Seulement, elles se succéderont d'autant plus lentement que la valeur absolue de $k$ sera plus petite, ou que $\tau$ devra plus varier pour faire éprouver au produit $k\tau$ et, par suite, à $\psi = e^{-k\tau}$, un changement donné.

Lorsque la valeur absolue de $k$ est soit très petite, soit très grande, le produit $k\tau$, pour tous les temps $\tau$ finis, est lui-même ou très petit, ou très grand. Dans le premier cas, la variable $\psi$ reste constamment voisine de l'unité, tandis que, dans le second, elle reste ou voisine de zéro, si $k$ est positif, ou très grande, si $k$ est négatif. Cette variable $\psi$ n'est donc alors à considérer que dans certaines régions du champ total de ses variations, régions fort restreintes même, du moins pour $k$ ou voisin de zéro, ou très grand. Voilà justement pourquoi les deux cas d'un sous-sol sans courbure (§ VII) et d'un sous-sol fortement concave, où $h$ se trouve négligeable devant H (§ III), ont été relativement faciles à traiter. Nous verrons (au n° **43**) qu'il s'y joint le troisième cas, d'un sous-sol fortement convexe.

**34.** La solution particulière la plus simple des équations (70) s'obtient en prenant la différence de deux formes voisines persistantes de $h$, savoir $\zeta T$ et $\zeta(T + \delta T)$, où l'on ferait, dans la variable $\tau$ de T, $\tau = \tau_0 + t$, et où le paramètre $\tau_0$ éprouverait l'accroissement élémentaire $\delta\tau_0$ au passage d'une forme à l'autre; ce qui revient à choisir, comme expression de $\zeta^{-\psi}\varepsilon$, le produit de $\zeta$ par la dérivée de T en $\tau_0$, identique à T' ou à $-T(k + T)$. Il vient ainsi, à un facteur constant près, si $\varepsilon_1$ désigne cette solution particulière, *de signe invariable*, ou, par conséquent, analogue à la solution *fondamentale* d'un problème ordinaire de refroidissement :

$$(71) \qquad \varepsilon_1 = \frac{\psi\zeta^{1+\psi}}{(1-\psi)^2}.$$

Et, en effet, la substitution de cette valeur dans les relations (70), devenues

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mu\psi(1-\psi)\dfrac{d.\zeta^{-\psi}\varepsilon_1}{d\psi} = \dfrac{d}{dx}\left(K\zeta^{1-\psi}\dfrac{d\varepsilon_1}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(K\zeta^{1-\psi}\dfrac{d\varepsilon_1}{dy}\right), \\ \qquad\qquad (\text{au contour}) \quad \left(\varepsilon_1 \text{ ou } \dfrac{d\varepsilon_1}{dn}\right) = 0, \end{array} \right.$$

les réduit identiquement à celles, (18), qui déterminent (n° **17**) la fonction $\zeta$ de $x$ et de $y$.

**35.** Cela posé, multiplions par $\varepsilon$ l'équation indéfinie (72) et retranchons les résultats, *membre à membre*, du produit, par $\varepsilon_1$, de l'équation indéfinie (70). Il viendra, en appelant $u$ le quotient de $\varepsilon$

par $\varepsilon_1$, ou posant

$$(73)\qquad \varepsilon = \frac{\psi\zeta^{1+\psi} u}{(1-\psi)^2},$$

l'équation indéfinie qui régit $u$ :

$$(74)\qquad -\mu\psi(1-\psi)\zeta^{2+\psi}\frac{du}{d\psi} = \frac{d}{dx}\left(K\zeta^{3+\psi}\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\zeta^{3+\psi}\frac{du}{dy}\right).$$

Bornons-nous, comme plus haut (n° **24**), au cas de nappes soit cylindriques, soit de révolution, où $u$ varie seulement avec $\zeta$ et $\tau$. Alors les produits $K\zeta^{3+\psi}\frac{du}{d(x,y)}$ deviennent $\left(K\zeta\frac{d\zeta}{d(x,y)}\right)\left(\zeta^{2+\psi}\frac{du}{d\zeta}\right)$; et la relation (74), divisée finalement par $\mu\zeta$, prend, vu (toujours) l'équation indéfinie (18) en $\zeta$, la forme

$$(75)\qquad -\psi(1-\psi)\zeta^{1+\psi}\frac{du}{d\psi} = \frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^{2+\psi}\frac{du}{d\zeta}\right) - \left(\zeta^{2+\psi}\frac{du}{d\zeta}\right).$$

**36.** Or, avec une nappe soit cylindrique, à coefficients K, $\mu$ constants, soit de révolution, mais vérifiant la relation $\mu K r^2 = \text{const.}$, $\zeta$ pourra, comme on a vu au n° **24**, à la formule (33 *bis*), être remplacé par une variable proportionnelle, $\eta$, croissante de zéro à 1, et $\frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2$, être remplacé de même par $\frac{2}{3}\frac{1-\eta^3}{\eta^2}$. L'équation indéfinie en $u$ (75), traitée comme l'a été (33), dans le n° **24**, pour donner (34), sera donc

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{2+\psi}\frac{du}{d\eta}\right)\\ &\quad = 2\eta\frac{d}{d\eta}\left(\eta^{2+\psi}\frac{du}{d\eta}\right) + 3\left(\eta^{2+\psi}\frac{du}{d\eta}\right) - 3\psi(1-\psi)\eta^{1+\psi}\frac{du}{d\psi}.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas extrême d'un fond plat, où $k$ est infiniment petit et où $\psi$, égal à $1 - k\tau$, reste à toute époque $\tau$ infiniment voisin de 1, le dernier terme de (76) devient $3\eta^2\tau\frac{du}{d\tau}$ ou $3\eta^2\frac{du}{d\theta}$; et $k$, $\psi$ s'éliminent à la fois de cette équation. Alors elle rentre dans celle du refroidissement de corps ayant leurs propriétés indépendantes du temps; et elle admet par conséquent les solutions simples, familières aux géomètres, formées en multipliant des fonctions du temps par des fonctions de $\eta$. Comme ces solutions se sont trouvées, au n° **25**, développables en deux séries distinctes, suivant des puissances ascendantes de $\eta$, et que, par suite, leur ensemble, c'est-à-dire l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles, s'est aussi développé de même, il y a lieu d'essayer si, avec $\psi$ maintenant quelconque, l'intégrale analogue, ou générale, de (76), ne serait pas encore développable, *par rapport à* $\eta$, en deux séries procédant suivant des suites ascendantes de ses puissances. Les calculs seront d'ailleurs faciles; car l'extrême ressemblance, quant à la variable $\eta$, des deux équations (34) et (76), montre qu'elles présentent, tant dans leurs premiers membres, comparés l'un à l'autre, que dans les seconds, comparés aussi, les mêmes genres respectifs d'homogénéité.

Cherchons donc à composer l'intégrale générale de (76) au moyen de deux séries de la forme

$$(77) \qquad u = A\eta^{\alpha} + B\eta^{\alpha+3} + C\eta^{\alpha+6} + D\eta^{\alpha+9} + \ldots,$$

mais avec coefficients A, B, C, D, ..., fonctions de $\psi$. Nous poserons, au lieu de (35),

$$(78) \quad \varphi(\lambda, \psi) = 2\lambda(\lambda + 1 + \psi), \quad F(\lambda, \psi) = \lambda(2\lambda + 5 + 2\psi),$$

formules qui, pour $\psi = 1$, se réduisent, l'une, à la première (35), et, l'autre, à la seconde (35), mais privée de son terme, en $\beta - 2$, qui provenait du dernier terme de (34) non pareil à celui de (76). Alors la substitution de la série (77) dans (76) conduira, par l'identification des termes semblables en $\eta$ dans les deux membres, d'abord, à prendre

$$(79) \quad \varphi(\alpha, \psi) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha = \text{soit zéro}, \quad \text{soit } -1 - \psi,$$

et, ensuite, à établir entre les fonctions A, B, C, D, ..., de $\psi$, le système d'équations différentielles linéaires

$$(80) \quad \begin{cases} \varphi(\alpha + 3, \psi)B = F(\alpha, \psi) \quad A - 3\psi(1 - \psi)A', \\ \varphi(\alpha + 6, \psi)C = F(\alpha + 3, \psi)B - 3\psi(1 - \psi)B', \\ \varphi(\alpha + 9, \psi)D = F(\alpha + 6, \psi)C - 3\psi(1 - \psi)C', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

comportant tout autant de constantes arbitraires qu'il y a de fonctions A, B, C, D, ..., savoir, leurs valeurs initiales, relatives à une valeur de $\tau$ ou de $\psi$ donnée.

Nous obtenons donc les *deux* séries prévues, aptes, ce semble, à constituer, par leur somme, l'intégrale générale de l'équation (76), du *second* ordre en $\eta$.

**37.** Mais cette intégrale générale se trouve astreinte, ici, à vérifier la condition propre à chacune des deux limites $\eta = 0$, $\eta = 1$. Or la condition, $\varepsilon = 0$, relative à la première limite, oblige à y annuler le produit $u\zeta^{1+\psi}$, ou, encore, le produit $u\eta^{1+\psi}$, qui s'y réduit en tout au coefficient A de la seconde série, celle où $\alpha = -1 - \psi$. Donc on aura, dans cette série, d'abord $A = 0$, puis, en vertu de (80), $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, ... Et il ne subsistera, pour exprimer $u$, que la première série, où $\alpha = 0$.

L'on aura ainsi pour $u$ une valeur de la forme

$$(81)\quad u = A + B\eta^3 + C\eta^6 + \ldots + G\eta^{3i-3} + I\eta^{3i} + J\eta^{3i+3} + \ldots,$$

avec A, B, C, ..., G, H, I, ..., fonctions de $\psi$ régies, d'après (80) et (78), par les équations différentielles

$$(82)\quad \left\{\begin{array}{l} 2(4+\psi)B = \qquad\qquad -\psi(1-\psi)A', \\ 4(7+\psi)C = (11+2\psi)B - \psi(1-\psi)B', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2i(3i+1+\psi)I = (i-1)(6i-1+2\psi)G - \psi(1-\psi)G', \\ 2(i+1)(3i+4+\psi)J = i\,(6i+5+2\psi)I - \psi(1-\psi)I', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

**38.** Il reste à vérifier la condition

$$\Delta_1 \varepsilon = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\varepsilon}{d(x,r)} = \frac{d\varepsilon}{d\eta}\frac{d\eta}{d(x,r)} = 0$$

à la seconde limite, $\eta = 1$. Or, la formule (20) (n° **18**) donne, pour la dérivée de $\eta$ près de cette limite, une quantité comparable à $\sqrt{1-\eta^3}$;

et, d'autre part, $\frac{d\varepsilon}{d\eta}$ est, vu (73), de l'ordre de $\frac{d}{d\eta}(\eta^{1+\psi}u)$, ou de l'ordre même de grandeur de $\frac{du}{d\eta}$. L'on devra donc avoir

$$(83)\qquad \text{(à la limite } \eta = 1\text{)}\qquad \frac{du}{d\eta}\sqrt{1-\eta^3} = 0.$$

Mais le cas particulier, déjà traité (n° **26**), d'une nappe à fond plat où $k$ est infiniment petit, et que nous venons de retrouver ici en étudiant la fonction plus générale $u$ au voisinage de la première valeur, 1, de $\psi$ (valeur qui correspond à $\tau = 0$), montre que la dérivée $\frac{du}{d\eta}$ devient, au moins alors, comparable, près de la limite $\eta = 1$, à l'inverse même de $\sqrt{1-\eta^3}$, *toutes les fois qu'on ne réduit pas la série à un simple polynome, par l'annulation de ses coefficients venant après l'un quelconque d'entre eux*, ou, pour plus d'exactitude, toutes les fois qu'on laisse une importance *assignable* aux termes éloignés, quelque grands que deviennent *leur éloignement, leur degré en* $\eta$.

Il faudra donc réduire le système (82) soit à sa première équation, en posant $B = 0$, soit aux deux premières, en posant $C = 0$, soit aux trois premières, en annulant le coefficient suivant D, etc. C'est ainsi que l'on approchera peu à peu, à un degré illimité, de la véritable intégrale, ou intégrale générale, du problème [1].

---

[1] Cela revient évidemment à satisfaire, *en toute rigueur,* aux équations tant indéfinies que définies ou concernant le contour, mais à ne vérifier qu'*imparfaitement à chaque instant du raisonnement,* vu le nombre *limité* de constantes dont on dispose *alors,* la condition relative à l'état initial. C'est seulement *à la limite,* ou grâce à une approximation de plus en plus grande, se réalisant à mesure que le polynome en $\eta$ adopté pour $u$ s'accroît de termes toujours plus élevés, mais de plus en plus faibles, et approche ainsi d'être une série convergente, que la condition d'état initial se trouve pleinement satisfaite.

Le procédé suivi rentre donc dans le mode d'interpolation, fréquemment employé en Physique mathématique, que j'ai signalé au n° 444* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 395*) et dont de beaux exemples, mais d'une autre sorte, ou se rapportant à des questions d'état permanent, dans lesquelles l'interpolation portait justement sur les conditions au contour, avaient été donnés par de Saint-Venant (même Tome, p. 422*).

Dans le premier cas, il vient $A' = 0$ ou $A = u = \text{const.}$, et la formule (73) redonne la solution simple fondamentale (71).

**39.** Dans le second cas, les deux premières équations (82) deviennent

$$\frac{B'}{B} = \frac{11 + 2\psi}{\psi(1-\psi)}, \qquad A' = -2\frac{4+\psi}{\psi(1-\psi)}B;$$

et elles donnent à un facteur constant près, vu qu'on peut y annuler, pour $\psi = 0$, A en même temps que B, si l'on fait abstraction de la solution *simple* précédente $u = \text{const.}$,

$$(84) \qquad B = -\frac{\psi^{11}}{(1-\psi)^{13}}, \qquad A = 2\int_0^{\psi}\frac{\psi^{10}(4+\psi)\,d\psi}{(1-\psi)^{14}}.$$

On voit bien qu'en n'y faisant pas annuler A pour $\psi = 0$, cette fonction A s'accroîtrait d'une constante arbitraire, et le polynome en A et B déduit de (81) comprendrait de plus la solution simple précédente $u = \text{const.}$

Pour les petites valeurs du produit $k\tau$, alors que $\psi$ est à peine différent de 1, les deux coefficients B, A exprimés par (84) sont très grands, de l'ordre de $(1-\psi)^{-13}$; et, par suite, l'expression correspondante (73) de $\varepsilon$ l'est, elle-même, de l'ordre de $(1-\psi)^{-15}$, comme l'indiquait implicitement la deuxième racine, $\beta' = 15$, obtenue au n° **27**. Mais, ici où $k$ n'est pas nul et où, si d'abord l'on suppose positif, pour fixer les idées, ce coefficient de concavité du sous-sol, $\psi$ tend vers zéro à mesure que $\tau$ grandit, B et A finissent par être sensiblement $-\psi^{11}$ et $\frac{8}{11}\psi^{11}$. On voit donc que la solution simple obtenue pour $u$, du troisième degré en $\eta$, et où les deux coefficients B, A ont signes contraires, donnera une valeur (73) de $\varepsilon$ s'évanouissant comme $\psi^{12}$, alors que la partie régularisée $\zeta T$ de $h$ sera, d'après la seconde formule (65), $\zeta k\psi$ et décroîtra comme $\psi$ seulement. Ainsi, des écarts $\zeta^{-\psi}\varepsilon$ exprimés, au facteur près $\zeta^{-\psi}$, par cette deuxième solution simple, s'atténueront, du moins dans le cas considéré d'une forme concave du sous-sol, comme le fait la *douzième* puissance de la partie réglée $\zeta T$ et, par conséquent, incomparablement plus vite qu'elle.

Or cette deuxième solution simple est, nous allons le prouver, bien moins rapide encore à s'évanouir que toutes les suivantes; de sorte que c'est elle qui, comme on pouvait le prévoir, donne la forme *asymptotique* ou la partie principale de petits écarts quelconques $\zeta^{-\psi}\varepsilon$. Donc ceux-ci tendent vite vers zéro *comparativement à la partie réglée;* et la solution régulière $\zeta T$ se trouve bien stable.

**40.** Pour la $(i+1)^{\text{ième}}$ solution simple, le dernier coefficient, qui est alors I, du polynome (81), résultera de la condition $J=0$, c'est-à-dire, d'après (82), de l'équation

$$(85)\qquad \frac{I'}{I}=i\frac{6i+5+2\psi}{\psi(1-\psi)};\qquad \text{d'où}\qquad I=\frac{\psi^{i(6i+5)}}{(1-\psi)^{i(6i+7)}},$$

à un facteur constant près.

Or un calcul assez simple montre que, dans cette solution *spéciale*, c'est-à-dire débarrassée des $i$ premières, que l'on obtiendrait en même temps par l'intégration complète des $i$ équations (82) en G, ..., C, B, A, le coefficient précédant I, savoir G, et, de proche en proche, tous les autres jusqu'à A, sont, aux deux limites $\psi=1$ et $\psi=0$, des mêmes ordres, soit de grandeur, soit de petitesse, que I, comme on l'a vu déjà ci-dessus pour A dans les formules (84).

En effet, l'équation en G' et G, par exemple, est de la forme

$$(86)\qquad G'-\frac{m+n\psi}{\psi(1-\psi)}G=-\frac{P+Q\psi}{\psi(1-\psi)}I,$$

avec $m$, $n$, P, Q constants et positifs. Elle donne, quand on supprime son second membre, G proportionnel à $\frac{\psi^m}{(1-\psi)^{m+n}}$, mais, prise avec son second membre, et sous la condition d'abstraire la solution précédente en rendant G le plus petit possible (en valeur absolue) pour $\psi$ voisin de zéro,

$$(87)\qquad G=-\frac{\psi^m}{(1-\psi)^{m+n}}\int_0^{\psi}\frac{P+Q\psi}{\psi(1-\psi)}I\frac{(1-\psi)^{m+n}}{\psi^m}d\psi.$$

On remarquera, effectivement, que, pour toute autre solution de l'équation (86), l'expression (87) de G s'accroîtrait d'une intégrale de cette équation (86) *prise sans second membre*, ou obtenue dans l'hypothèse $I = 0$. Un tel accroissement de G et, par suite, ceux qu'il rendrait possibles dans les coefficients précédents ..., C, B, A, correspondraient donc à des solutions $u$ d'un degré en $\eta$ inférieur à $3i$, solutions censées connues déjà, et dont on convient, comme il a été dit, de faire abstraction.

Or, pour $\psi$ ou très petit, ou très voisin de 1, la quantité sous le signe $\int$, dans (87), est, respectivement, ou de l'ordre de petitesse de $I\psi^{-m-1}$, ou de l'ordre de grandeur de $I(1-\psi)^{m+n-1}$. Et, alors, l'intégrale définie aura l'exposant de ses facteurs $\psi$, accru, au numérateur, d'une unité, mais l'exposant de ses dénominateurs $1-\psi$ diminué, au contraire, d'une unité. Cette intégrale définie serait donc soit de l'ordre de petitesse de $I\psi^{-m}$, soit de l'ordre de grandeur de $I(1-\psi)^{m+n}$. Et G atteindra précisément, dans les deux cas, l'ordre même ou de petitesse, ou de grandeur, de I.

La $(i+1)^{\text{ième}}$ expression particulière de $u$ devient, par conséquent, dans toutes ses parties (en $\eta^0, \eta^3, \eta^6, \ldots, \eta^{3i}$), comparable à la $i(6i+7)^{\text{ième}}$ puissance de l'inverse de $1-\psi$, quand $\psi$ tend vers l'unité, c'est-à-dire aux premiers instants du phénomène, et comparable à la $i(6i+5)^{\text{ième}}$ puissance de $\psi$ quand $\psi$ tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque, le sous-sol étant concave, ou $k$ positif, le temps $\tau$ devient très grand. La première de ces circonstances est bien d'accord avec la formule (46), obtenue pour le cas d'un fond plat, où $\psi$ reste indéfiniment voisin de 1.

**41.** Ainsi, quoique les coefficients de l'équation indéfinie varient maintenant avec le temps $\tau$, de véritables *solutions simples* continuent à exister, encore *distinguées les unes des autres* par leur *rapidité de variation avec* $\eta$ ou $\tau$ et, en particulier, *d'évanouissement* lorsque le temps $\tau$ grandit, *rapidité croissante avec leur numéro d'ordre* $1+i$.

Seulement, *elles ne sont plus le produit d'une fonction du temps par une fonction des coordonnées;* et leur allure est beaucoup moins régulière, ou plus difficile à saisir.

Quant à la solution générale, obtenue en faisant la somme de ces solutions simples après les avoir affectées de coefficients arbitraires, mais néanmoins évanouissants pour celles d'ordres très élevés (au moins dans tous les cas d'un état initial bien continu), il est clair que ce sera une série en $\eta^0$, $\eta^3$, $\eta^6$, ..., et que cette série, quoique infinie ou revenant à prendre une infinité d'équations (82), vérifiera la condition spéciale à la limite $\eta = 1$, en raison même de l'extrême petitesse des coefficients éloignés, ou de leur évanouissement à mesure que leur numéro d'ordre s'élève.

Il est digne de remarque que les solutions simples, au lieu d'être formées, comme à l'ordinaire, avant l'intégrale générale, se dégagent ici de cette intégrale générale (81), obtenue dès l'abord en série, et en soient extraites grâce à un choix, des constantes arbitraires qu'introduit l'intégration des équations (82), assez bien fait pour grouper, justement, *ensemble* tous les termes à variation *également* rapide avec le temps $\tau$ et en constituer ces solutions.

Près des deux limites $\psi = 0$, $\psi = 1$, tous les coefficients A, B, C, ..., I des termes d'une même solution simple deviennent, comme on vient de voir, proportionnels ou à la $i(6i+5)^{\text{ième}}$ puissance de $\psi$, c'est-à-dire de $e^{-k\tau}$, ou à la $i(6i+7)^{\text{ième}}$ puissance de l'inverse de $1-\psi$, c'est-à-dire de $\tau$. Et voilà pourquoi les solutions simples étaient les produits d'une fonction du temps par une fonction de $\eta$ ou des coordonnées, dans les deux cas extrêmes, traités d'abord (au moins implicitement), de $k$ ou très grand, ou infiniment petit, c'est-à-dire de dénivellations $h$ soit fort petites par rapport aux profondeurs H de la nappe sous le plan horizontal du seuil de la source, soit, au contraire, très grandes à côté de ces profondeurs H.

Chacun des coefficients A, B, C, ... garde, comme le dernier d'entre eux, I, donné par (85), un même signe pour toutes les valeurs de $\psi$. Car, dans l'expression (87) de G, les facteurs variables $\psi$, $1-\psi$, $P+Q\psi$, ... sont tous positifs, tant sous le signe $\int$ que hors du signe $\int$. On voit de plus, à raison du signe $-$ placé devant l'expression de G, que ces coefficients se trouveront alternativement positifs et négatifs.

**42.** Enfin, tous seront algébriques et rationnels en $\psi$; car leur formule sera analogue à celle, (87), de G, où I est donné par (85) avec un exposant de $\psi$ supérieur à $m$ et un exposant de $1-\psi$ supérieur à $m+n$. Or l'intégrale définie s'y décompose immédiatement en termes de la forme $\int_0^\psi \frac{\psi^\mu d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}}$, $\mu$, $\nu$ y désignant des exposants entiers et positifs dont le plus grand est $\nu$. Et le calcul de ces termes peut se faire comme il suit. Une intégration par parties donne d'abord

$$\nu\int_0^\psi \frac{\psi^\mu d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} \quad \text{ou} \quad \int_{\psi=0}^{\psi=\psi} \psi^\mu d\frac{1}{(1-\psi)^\nu} = \frac{\psi^\mu}{(1-\psi)^\nu} - \mu\int_0^\psi \frac{\psi^{\mu-1}d\psi - \psi^\mu d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}};$$

d'où

$$(\nu-\mu)\int_0^\psi \frac{\psi^\mu d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} = \frac{\psi^\mu}{(1-\psi)^\nu} - \mu\int_0^\psi \frac{\psi^{\mu-1}d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}}.$$

On abaisse ainsi l'exposant $\mu$ d'une unité, puis de 2, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à $\int_0^\psi \frac{d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}}$, dont la valeur est $\frac{1}{\nu(1-\psi)^\nu} - \frac{1}{\nu}$; et il vient finalement

$$\int_0^\psi \frac{\psi^\mu d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} = \frac{\text{un polynome } a + b\psi + c\psi^2 + \ldots + g\psi^\mu}{(1-\psi)^\nu} - a$$
$$= \frac{a + b\psi + c\psi^2 + \ldots + g\psi^\mu - a(1-\psi)^\nu}{(1-\psi)^\nu}.$$

Mais si l'on suppose que $\psi$ tende vers zéro, le dénominateur, sous le signe $\int$, se réduit presque à l'unité, et l'intégrale, devenue sensiblement $\frac{\psi^{\mu+1}}{\mu+1}$, a un développement, suivant les puissances ascendantes de $\psi$, qui commence par le terme $\frac{\psi^{\mu+1}}{\mu+1}$. Donc le polynome $a + b\psi + \ldots + g\psi^\mu$ est détruit en entier par les $\mu+1$ premiers termes du développement de $-a(1-\psi)^\nu$ et, le coefficient de $\psi^{\mu+1}$ devant être $\frac{1}{\mu+1}$, l'on a

$$a = (-1)^\mu \frac{1.2.3\ldots\mu}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu)}.$$

La formule définitive de l'intégrale sera dès lors

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\psi \frac{\psi^\mu d\psi}{(1-\psi)^{\nu+1}} = \frac{1}{\mu+1}\frac{\psi^{\mu+1}}{(1-\psi)^\nu}\Big(1 &- \frac{\nu-\mu-1}{\mu+2}\psi + \frac{\nu-\mu-1}{\mu+2}\frac{\nu-\mu-2}{\mu+3}\psi^2 \\ &- \frac{\nu-\mu-1}{\mu+2}\frac{\nu-\mu-2}{\mu+3}\frac{\nu-\mu-3}{\mu+4}\psi^3 + \ldots\Big). \end{aligned} \right.$$

**43.** Jetons enfin un coup d'œil sur le cas d'un sous-sol convexe, où l'on aurait $k < 0$, $\psi > 1$ et où, par suite, pour $\tau$ croissant de zéro à l'infini, $\psi$ grandirait de 1 à $\infty$. La valeur *finale* de $\psi$ serait donc $\infty$, au lieu de zéro. Aussi y aurait-il lieu de remplacer (87) par la formule

$$(89) \qquad G = -\frac{\psi^m}{(\psi-1)^{m+n}}\int_\psi^\infty \frac{P+Q\psi}{\psi(\psi-1)}\,I\,\frac{(\psi-1)^{m+n}}{\psi^n}\,d\psi,$$

qui en est l'équivalent quand on fait abstraction d'une intégrale particulière de l'équation (86) prise sans second membre, intégrale appartenant à la $i^{\text{ième}}$ solution simple, censée obtenue déjà.

On voit que *deux coefficients consécutifs*, G, I, *de la série* (81) *auront encore signes contraires dans chaque solution simple.*

Mais, pour $\tau$ ou $\psi$ très grands, $\psi - 1$ ne différera pas, *relativement*, de $\psi$; et il viendra

$$G = -\psi^{-n}\int_\psi^\infty QI\psi^{n-1}\,d\psi,$$

ou, en substituant à I sa valeur (85), devenue $(-1)^{i(6i+7)}\psi^{-2i}$ et faisant toujours abstraction, dans I, d'un facteur constant,

$$(90) \qquad G = -Q\psi^{-n}\int_\psi^\infty \frac{d\psi}{\psi^{2i-n+1}} = -\frac{Q\psi^{-2i}}{2i-n} = -\frac{Q}{2i-n}\,I.$$

Ainsi, les coefficients de la série (81) deviendront, pour $\tau$ très grand, du même ordre de petitesse que I, le dernier d'entre eux; savoir, comparables à la puissance $(2i)^{\text{ième}}$ de l'inverse de $\psi$, inverse $e^{k\tau}$ alors évanouissant.

L'expression correspondante $\zeta^{-\psi}\varepsilon$ des écarts, ou, vu (73), $\frac{\zeta\psi u}{(\psi-1)^2}$, deviendra, par suite, de l'ordre de $u\psi^{-1}$, ou de $(e^{k\tau})^{2i+1}$. Cet ordre de petitesse croît avec $i$ : il est celui de $e^{k\tau}$, pour $i = 0$, c'est-à-dire pour la solution fondamentale ou aussi, vu (65), pour $H + h$ dans le mode d'écoulement se conservant, et celui de $(e^{k\tau})^3$ pour $i = 1$, c'est-à-dire pour la solution simple donnant l'expression asymptotique des petits écarts à considérer, dans la question de stabilité du régime constitué par un tel mode d'écoulement.

Donc, en résumé, *lorsque le sous-sol est convexe*, ou $k$ négatif, *le* *mode d'écoulement qui se conserve est encore stable, mais beaucoup moins que dans le cas d'un sous-sol creux,* où les écarts s'évanouissaient comme $(e^{-k\tau})^{12}$.

Enfin, l'on voit que, pour un fond très *convexe*, où $k$, négatif, aurait une valeur absolue considérable, rendant $\psi$ très grand quand $\tau$ est modéré, les coefficients I, G, ..., C, B, A de chaque solution simple seraient tous proportionnels à $(e^{k\tau})^{2i}$. Les solutions simples deviennent ainsi, comme dans les deux autres cas limites d'un fond plat et d'un fond très concave, les produits d'une fonction du temps par une fonction des coordonnées. Cette fonction du temps est $e^{(2i+1)k\tau}$, alors qu'elle était $(e^{-k\tau})^{1+i(6i+5)}$ pour une nappe à fond très concave et $\tau^{-2-i(6i+7)}$ pour une nappe à fond plat (¹).

## § X. — Tentative de généralisation.

**44.** Serait-il possible d'étendre à des formes de la nappe, moins spéciales que celles d'un cylindre à génératrices horizontales, ou d'une figure de révolution (avec invariabilité du produit $\mu K r^2$), les résultats si simples et si précis qu'a donnés l'analyse précédente? Je n'ai, encore, guère eu le temps de le chercher; et ce qui suit n'est qu'une généralisation immédiate, mais un peu vague, de quelques-unes des idées mises en œuvre ci-dessus.

Comme les équations fondamentales (2) et (3) (nos **7** et **8**) ne contiennent pas explicitement le temps, $h$ est toujours de la forme

$$f(x, y, \tau),$$

c'est-à-dire

$$F(x, y, \tau_0 + t);$$

et l'on y satisfait aussi bien par

$$h = f(x, y, \tau)$$

(¹) Les principaux résultats contenus dans les §§ I à IX ont fait l'objet de quatre Notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris les 22 juin, 6, 13, 20 juillet 1903, et publiées aux *Comptes rendus* de ces jours (t. CXXXVI, p. 1511, et t. CXXXVII, p. 5, 101 et 153).

que par

$$f(x, y, \tau_0 + \delta\tau_0 + t) = f(x, y, \tau + \delta\tau_0) = h + \frac{dh}{d\tau}\delta\tau_0.$$

Cela posé, formons le système linéaire régissant la différence, $\delta h$, de deux intégrales particulières, infiniment voisines, qui vérifient (2) et (3). Il sera formé évidemment par l'équation, indéfinie, obtenue en prenant la variation $\delta$ de chaque terme de (2),

$$(91)\quad \mu\frac{d\delta h}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{KH}\frac{d\delta h}{dx} + \mathrm{K}\frac{d.h\delta h}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{KH}\frac{d\delta h}{dy} + \mathrm{K}\frac{d.h\delta h}{dy}\right),$$

et par les conditions au contour, déduites de même de (3),

$$(92)\qquad \left(\delta h \text{ ou } \frac{d\delta h}{dn}\right) = 0 \text{ (sur le contour).}$$

La remarque précédente montre que ces équations linéaires, en $\delta h$, admettent comme intégrale particulière l'expression $\frac{dh}{d\tau}\delta\tau_0$, ou, abstraction faite du facteur constant $\delta\tau_0$, la vitesse même de variation $\frac{dh}{d\tau}$ des dénivellations $h$ sur les diverses verticales $(x, y)$. Et, en effet, si l'on différentie en $\tau$ tous les termes de (2) et (3), puis qu'on pose dans les résultats, pour abréger, $\frac{dh}{d\tau} = v$, il vient

$$(93)\quad \begin{cases} \mu\frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{KH}\frac{dv}{dx} + \mathrm{K}\frac{d.hv}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{KH}\frac{dv}{dy} + \mathrm{K}\frac{d.hv}{dy}\right), \\ \text{(au contour)} \quad \left(v \text{ ou } \frac{dv}{dn}\right) = 0, \end{cases}$$

relations ne différant de (91) et (92) que par la substitution de $v$ à $\delta h$.

**45.** Supposons maintenant la nappe, et les données K, $\mu$, H, de formes telles, qu'une seule variable, dans *l'espace*, suffise (outre le temps $\tau$) à les définir, comme étaient soit l'abscisse $x$, soit la distance $r$ à l'axe, dans les cas de figures ou cylindriques, ou de révolution, que nous avons étudiées. Alors l'ordonnée de superficie, $h$, de la première nappe considérée, ordonnée à partir de l'extrémité de laquelle se comptent, sur chaque verticale, tous les petits écarts possibles $\delta h$, pourra être choisie, à chaque instant $\tau$, pour cette variable même; de sorte que $\delta h$ ne sera fonction de $x$ et de $y$, *à ce moment donné quelconque* $\tau$, que par l'intermédiaire de $h$. Changeant aussi de fonction inconnue dans (91) et (92), nous substituerons à $\delta h$ la quantité $\varepsilon$ définie par la formule

$$(94) \qquad \delta h = e^{-\int \frac{dh}{H+h}} \varepsilon,$$

de même qu'aux nos **20** et **33** nous avons appelé $\zeta^{-1}\varepsilon$ et $\zeta^{-\psi}\varepsilon$ les écarts; et, cela, encore afin de rendre monomes, dans (91), les expressions entre parenthèses. Nous aurons, en effet,

$$\mathrm{KH}\frac{d\,\delta h}{d(x,y)} = \mathrm{K}e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\left(\mathrm{H}\frac{d\varepsilon}{d(x,y)} - \frac{\mathrm{H}\varepsilon}{\mathrm{H}+h}\frac{dh}{d(x,y)}\right),$$

$$\mathrm{K}\frac{d.h\,\delta h}{d(x,y)} = \mathrm{K}e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\left(h\frac{d\varepsilon}{d(x,y)} + \varepsilon\frac{dh}{d(x,y)} - \frac{h\varepsilon}{\mathrm{H}+h}\frac{dh}{d(x,y)}\right),$$

formules d'où résultent bien, pour les deux parenthèses de (91), les expressions simples

$$\mathrm{K}(\mathrm{H}+h)e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\frac{d\varepsilon}{d(x,y)}.$$

L'équation indéfinie (91) deviendra donc

$$(95) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mu\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\varepsilon\right) \\ &\quad = \frac{d}{dx}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+h)e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\frac{d\varepsilon}{dx}\right] + \frac{d}{dy}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+h)e^{-\int \frac{dh}{H+h}}\frac{d\varepsilon}{dy}\right]. \end{aligned} \right.$$

En la complétant par les conditions au contour $\left(\varepsilon \text{ ou } \frac{d\varepsilon}{dn}\right) = 0$, on aura, en $\varepsilon$, les équations de refroidissement d'une certaine plaque à faces rayonnantes, dont la conductibilité *intérieure*, $\mathrm{K}(\mathrm{H}+h)e^{-\int \frac{dh}{H+h}}$, la conductibilité *extérieure*, $\mu\frac{d}{d\tau}e^{-\int \frac{dh}{H+h}}$, et la *capacité calorifique*, $\mu e^{-\int \frac{dh}{H+h}}$, varieraient avec $h$ et, par conséquent, tout à la fois avec la verticale $(x, y)$ et le temps $\tau$.

**46.** Nous connaîtrons à ce système, si $h$ est donné, la solution particulière où $e^{-\int\frac{dh}{H+h}}\varepsilon$ a la valeur $\frac{dh}{d\tau}$, c'est-à-dire $v$, et où $\varepsilon$ admet ainsi l'expression

$$(96)\qquad \varepsilon_1 = e^{\int\frac{dh}{H+h}}v.$$

Or, écrivant l'équation indéfinie (95) avec $\varepsilon_1$ à la place de $\varepsilon$, multiplions par $\varepsilon$ cette équation en $\varepsilon_1$; et, de l'équation même (95), multipliée par $\varepsilon_1$, retranchons les produits obtenus. Si nous appelons $u$ le quotient de $\varepsilon$ par $\varepsilon_1$, ou que nous posions

$$(97)\qquad \varepsilon = \varepsilon_1 u = e^{\int\frac{dh}{H+h}}vu,$$

il viendra, pour régir $u$, l'équation indéfinie

$$(98)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{d\tau} = {} & \frac{d}{dx}\left[K(H+h)v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dx}\right] \\ & + \frac{d}{dy}\left[K(H+h)v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dy}\right] \\ = {} & \frac{d}{dx}\left[K(H+h)\frac{dh}{dx}\cdot v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dh}\right] \\ & + \frac{d}{dy}\left[K(H+h)\frac{dh}{dy}\cdot v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dh}\right], \end{aligned}\right.$$

ou bien, en effectuant les différentiations comme aux n^os **24** ou **35**, puis éliminant par (2) les dérivées, en $x$ et $y$, de $h$, sauf dans $(\Delta_1 h)^2$, et divisant enfin par $K(H+h)(\Delta_1 h)^2$ :

$$(99)\qquad \frac{\mu v^2}{K(H+h)(\Delta_1 h)^2}e^{\int\frac{dh}{H+h}}\left(\frac{du}{d\tau}-\frac{du}{dh}\frac{dh}{d\tau}\right) = \frac{d}{dh}\left(v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dh}\right).$$

Mais imaginons qu'on se déplace d'un instant à l'autre, en suivant sans cesse chaque valeur de $h$ là où elle se produit, c'est-à-dire de manière que les coordonnées $x$, $y$ de l'observateur éprouvent sans cesse des accroissements $dx$, $dy$ vérifiant la relation

$$\frac{dh}{d\tau}d\tau + \frac{dh}{dx}dx + \frac{dh}{dy}dy = 0.$$

La différentielle de $u$ observée sera

$$du = \frac{du}{d\tau}d\tau + \frac{du}{dh}\left(\frac{dh}{dx}dx + \frac{dh}{dy}dy\right) = \left(\frac{du}{d\tau} - \frac{du}{dh}\frac{dh}{d\tau}\right)d\tau;$$

et, par suite, la différence $\frac{du}{d\tau} - \frac{du}{dh}\frac{dh}{d\tau}$ exprimera la dérivée de $u$ *constatée*, en quelque sorte, par l'observateur. Or, ce sera justement la dérivée *partielle* de $u$ en $\tau$, ou *calculée sans faire varier* $h$, si l'on convient d'adopter désormais $\tau$ et $h$ *pour variables indépendantes*, au lieu de $\tau$, $x$ et $y$. Ainsi, *dans ce système de variables* $\tau$ *et* $h$, l'équation aux dérivées partielles en $u$ aura la forme *binome*, déduite de (99),

$$(100)\qquad \left(\frac{\mu v^2}{K(H+h)(\Delta_1 h)^2}e^{\int\frac{dh}{H+h}}\right)\frac{du}{d\tau} = \frac{d}{dh}\left(v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}\frac{du}{dh}\right).$$

C'est l'équation des températures successives $u$ d'une barre se refroidissant, à faces latérales imperméables, qui aurait une conductibilité $v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}$ et une capacité calorifique, $\frac{\mu v^2}{K(H+h)(\Delta_1 h)^2}e^{\int\frac{dh}{H+h}}$, fonctions à la fois de l'abscisse $h$ et du temps $\tau$; car non seulement $v$, mais même H (dont la variable immédiate $x$, $r$, etc. serait maintenant remplacée par son expression en $h$ et $\tau$) dépendraient du temps $\tau$.

**47.** Dans le cas simple où $h$, H sont respectivement $T\zeta$, $k\zeta$, c'est-à-dire $\frac{k\psi}{1-\psi}\zeta$, $k\zeta$ [d'où il résulte

$$\zeta = \frac{1-\psi}{k\psi}h, \qquad e^{\int\frac{dh}{H+h}} = \zeta^\psi = \left(\frac{1-\psi}{k\psi}\right)^\psi h^\psi,$$

$$v = h\frac{T'}{T} = -h(k+T) = -\frac{kh}{1-\psi}, \qquad \varepsilon_1 = -\left(\frac{k}{1-\psi}\right)^{1-\psi}\frac{h^{1+\psi}}{\psi^\psi}\Bigg],$$

et où, $\frac{K}{\mu}(\Delta_1\zeta)^2$ ayant, d'après (33 *bis*) (n° **24**), la valeur $\frac{2(m^3-\zeta^3)}{3\zeta^2}$, avec $m$ maximum donné de $\zeta$ (lié à L), la fonction $\frac{\mathrm{K}}{\mu}(\Delta_1 h)^2$ est

$$\frac{2\mathrm{T}}{3}\,\frac{m^3\mathrm{T}^3-h^3}{h^2}=\frac{k\psi}{1-\psi}\,\frac{2}{3h^2}\left[\frac{m^3k^3\psi^3}{(1-\psi)^3}-h^3\right],$$

cette équation (100) devient, vu aussi que $\frac{d}{d\tau}=-k\psi\frac{d}{d\psi}$,

$$(100\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{mk\psi}{1-\psi}\right)^3\frac{2}{h^2}\frac{d}{dh}\left(h^{2+\psi}\frac{du}{dh}\right)\\&\quad=2h\frac{d}{dh}\left(h^{2+\psi}\frac{du}{dh}\right)-3\psi(1-\psi)h^{1+\psi}\frac{du}{d\psi}.\end{aligned}\right.$$

Comparée à l'équation très analogue (76) (n° **36**), elle a un terme de moins à son second membre, ce qui simplifie notablement celui-ci; mais, par contre, le premier membre se trouve affecté du nouveau coefficient $\left(\frac{mk\psi}{1-\psi}\right)^3$, fonction du temps. Son intégrale générale sera donc encore la somme de deux séries, de la forme

$$\mathrm{A}h^\alpha+\mathrm{B}h^{\alpha+3}+\mathrm{C}h^{\alpha+6}+\ldots,$$

avec A, B, C, ... fonctions de $\psi$, et $\alpha$ toujours égal soit à zéro, soit à $-1-\psi$. D'ailleurs, l'annulation obligée, pour $\zeta=0$ ou $h=0$, de la fonction $\varepsilon$, produit $\varepsilon_1 u$ proportionnel à $h^{1+\psi}u$, fera encore évanouir la seconde série et donnera pour $u$ la formule

$$u=\mathrm{A}+\mathrm{B}h^3+\mathrm{C}h^6+\ldots.$$

Mais celle-ci ne paraît devoir présenter aucun avantage sur (81), à raison de la présence explicite de $\psi$, dans le premier membre de (100 *bis*), d'une manière moins simple que dans celui de (76).

La nouvelle méthode, suggérée par l'équation (100), pour traiter le problème posé, ne semble donc pas conduire plus rapidement au résultat que la méthode directe suivie au § IX.

On remarquera que, dans le cas d'un fond plat, c'est-à-dire de $k$ infiniment petit, où $\psi=1$, elle donne à la première solution simple, $\varepsilon_1$, d'après une des formules ci-dessus, l'expression $\varepsilon_1=-h^2$, indépendante du temps. Mais, dans le même cas, elle a, comme on pouvait s'y attendre, le grave inconvénient de ne pas réduire les autres solutions simples à des produits d'une fonction du temps $\tau$ par une fonction de l'autre variable indépendante, qui est alors $h$.

**48.** L'équation indéfinie (98), multipliée soit par l'élément $d\sigma = dx\,dy$ de la projection horizontale $\sigma$ de la nappe, soit par $u\,d\sigma$, et intégrée à la manière ordinaire dans toute l'étendue de cette projection, donne immédiatement, en tenant compte des conditions au contour, les deux formules

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \mu v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}} \frac{du}{d\tau}\, d\sigma = 0, \\ &\int_\sigma \mu v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}} \frac{d\frac{u^2}{2}}{d\tau}\, d\sigma = -\int_\sigma K(H+h) v^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}} (\Delta_1 u)^2\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Les dérivées partielles de $u$ et de $\frac{1}{2}u^2$ en $\tau$ y sont, d'ailleurs, prises *sur place*, c'est-à-dire dans le système des variables $x$, $y$ et $\tau$. Mais je ne vois pas comment l'on pourrait tirer de ces formules des résultats simples, en dehors du cas particulier, étudié au § VII, d'un fond horizontal, cas où $H = 0$ et où $h$, $v$, $u$ ont les formes respectives

$$h = \frac{\zeta}{\tau}, \qquad v = -\frac{\zeta}{\tau^2}, \qquad u = \frac{U}{\tau^{\beta-2}},$$

produits de fonctions des coordonnées par des fonctions du temps. Dans ce cas particulier, les deux équations (101) deviennent immédiatement

$$(101\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &(\beta-2)\int_\sigma \mu\zeta^3 U\, d\sigma = 0, \\ &(\beta-2)\int_\sigma \mu\zeta^3 U^2\, d\sigma = \int_\sigma K\zeta^4 (\Delta_1 U)^2\, d\sigma; \end{aligned}\right.$$

et la seconde montre que la différence $\beta - 2$, rapport de deux intégrales à éléments positifs, est essentiellement positive elle-même, sauf quand on a

$$\Delta_1 U = 0, \qquad U = \text{const.}, \qquad \beta = 2,$$

tandis que la première prouve la nécessité, pour toute solution simple *différant de cette solution fondamentale où* $\beta = 2$, de changements de signe dans l'étendue $\sigma$ du plan de la nappe, puisque la valeur moyenne de l'expression $\mu\zeta^3 U$ s'y annule.

On peut en dire autant de la formule que donne la première de ces relations (101), quand on appelle $u$, dans (98), le quotient de deux solutions particulières quelconques $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ de l'équation indéfinie (95) et des conditions au contour qui lui sont adjointes, cas où l'équation (98) garde la même forme, sauf la substitution de $\varepsilon_1^2 e^{-\int\frac{dh}{H+h}}$ à $\varepsilon^2 e^{\int\frac{dh}{H+h}}$. Cette première relation (101) est donc alors

$$\int_\sigma \mu\varepsilon_1^2 e^{-\int\frac{dh}{H+h}} \frac{du}{d\tau} d\sigma = 0, \tag{102}$$

c'est-à-dire

$$\int_\sigma \mu e^{-\int\frac{dh}{H+h}} \left(\varepsilon_1 \frac{d\varepsilon}{d\tau} - \varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{d\tau}\right) d\sigma = 0. \tag{102 bis}$$

Toutefois, il importe d'observer, dans la démonstration, que le second membre de l'équation (98), modifié comme il est dit, donne alors l'intégrale de contour

$$\int K(H+h) e^{-\int\frac{dh}{H+h}} \varepsilon_1^2 \frac{du}{dn} d\chi,$$

à prendre non seulement à la limite de l'aire totale $\sigma$, mais encore le long des lignes intérieures (*de discontinuité*) où, $\varepsilon_1$ changeant de signe, le quotient $u$ devient *infini*. Heureusement, le produit $\varepsilon_1^2 \frac{du}{dn}$, ou $\varepsilon_1 \frac{d\varepsilon}{dn} - \varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{dn}$, y reste fini et, sans s'y annuler comme au contour proprement dit, a deux valeurs exactement contraires, sur un même élément $d\chi$, dans les deux régions y aboutissant. L'intégrale totale est donc encore nulle.

Mais il n'en serait plus de même, pour l'intégrale analogue, si l'on voulait généraliser pareillement la seconde équation (101). Car, alors, l'intégrale à prendre le long des lignes intérieures de discontinuité aurait un facteur $u$ de plus sous le signe $\int$, ou serait

$$\int K(H+h) e^{-\int\frac{dh}{H+h}} \left(\varepsilon_1 \frac{d\varepsilon}{dn} - \varepsilon \frac{d\varepsilon_1}{dn}\right) u \, d\chi.$$

La fonction sous le signe $\int$ devenant ainsi infinie, il n'y aura pas, comme on voit, une formule simple, à deux termes seulement, généralisée de la seconde (101).

Celle-ci n'est donc démontrée que sous la condition, vérifiée dans tous les cas traités ici, que la solution appelée $\varepsilon_1$ ait essentiellement même signe partout, à l'intérieur de l'aire $\sigma$, c'est-à-dire qu'on ait $v < 0$ dans (96), ou que la nappe (à ordonnée $h$), à partir de laquelle se comptent les petits écarts $\delta h$, s'abaisse, continuellement, *dans toute son étendue* (1).

---

(1) La démonstration de l'uniformité de signe (sans annulation à l'intérieur) de certaines solutions particulières, qu'on peut dès lors appeler *fondamentales*, dans le problème du refroidissement, démonstration donnée au n° **130** de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique, etc.* (t. I, p. 254), subsiste, sans aucun changement, quand la conductibilité intérieure, la conductibilité extérieure et la capacité calorifique deviennent fonction du temps, pourvu que la conductibilité *intérieure* et la *capacité* aient même signe, comme il arrive justement, ici, dans l'équation (95).

La présente discussion montre qu'il pourrait y avoir quelque intérêt à reprendre certains Chapitres de la *Théorie analytique de la chaleur* dans cette hypothèse de corps dont les propriétés calorifiques dépendraient ainsi du temps.

Je m'aperçois, par exemple, que la seconde équation (101), facile à étendre à tout corps de contexture symétrique (ou admettant un potentiel des flux de chaleur) et à surface ou intérieur rayonnants, démontre l'existence d'une expression asymptotique *unique* pour l'intégrale générale $\varepsilon$, c'est-à-dire la tendance de son quotient $u$ par la solution fondamentale $\varepsilon_1$ vers une valeur uniforme et constante. Car elle fait voir que, si le paramètre différentiel $\Delta_1 u$ conservait indéfiniment des valeurs sensibles, la dérivée en $\tau$ du carré $u^2$ garderait aussi, *indéfiniment*, sa valeur moyenne (convenablement définie) dans tout l'intérieur du corps, *négative et de grandeur notable;* ce qui est impossible, puisque ce carré ne peut pas s'abaisser au-dessous de zéro. Donc la seconde équation (101) implique bien que, pour $\tau$ assez grand, $\Delta_1 u$ tende vers zéro, ou $u$ vers une valeur C uniforme et, dès lors, invariable. D'où il suit que l'expression asymptotique de $\varepsilon$ sera nécessairement celle de $C\varepsilon_1$, ou, encore, qu'*il n'y a qu'une seule solution simple fondamentale distincte.*

La démonstration se précise, quand les propriétés calorifiques du corps deviennent indépendantes du temps et que $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ se réduisent à deux solutions simples. Car alors l'équation considérée prend une forme analogue à celle de la

C'est l'équation (102) qui rend possible la méthode d'élimination de Fourier (pour le calcul des coefficients arbitraires $c$ affectant les diverses solutions simples), quand $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$ sont les produits de fonctions *différentes*, $T, T_1$, du temps par des fonctions, $\wp, \wp_1$, de $\zeta$. Car, si l'on a $\varepsilon = T\wp$, $\varepsilon_1 = T_1\wp_1$, avec $\frac{T}{T_1}$ non constant; elle revient immédiatement à

$$\int_\sigma \mu e^{-\int\frac{dh}{H+h}} \wp\wp_1\, d\sigma = 0, \qquad \text{ou à} \qquad \int_\sigma \mu e^{-\int\frac{dh}{H+h}} \varepsilon\varepsilon_1\, d\sigma = 0.$$

Dès lors, l'intégrale générale en série

$$\delta h = e^{-\int\frac{dh}{H+h}} \Sigma c\varepsilon,$$

multipliée par $\mu\varepsilon\, d\sigma$ et intégrée sur toute la projection horizontale $\sigma$ de la nappe, donne simplement

$$\int_\sigma \mu\varepsilon(\delta h)\, d\sigma = c\int_\sigma \mu e^{-\int\frac{dh}{H+h}} \varepsilon^2\, d\sigma,$$

équation d'où se tire la valeur de $c$, pourvu que l'on substitue à $\varepsilon$ et à $\delta h$ leurs valeurs initiales, censées connues.

Pour revenir encore au cas général où $\varepsilon, \varepsilon_1$ ne sont plus des produits de la forme $T\wp$, $T_1\wp_1$, tout ce qu'on peut, ce semble, y déduire de simple, des relations (101) et (102), c'est que le rapport $u$ de deux solutions *distinctes* a sa dérivée par rapport au temps $\tau$ de signes variés aux divers points du plan $\sigma$ de la nappe, ou qu'il grandit dans certaines régions pendant qu'il diminue dans d'autres; et que le demi-carré $\frac{u^2}{2}$ du rapport de l'une quelconque, non fondamentale, de ces solutions, à une *solution fondamentale* (*de signe uniforme* sur toute l'aire $\sigma$), a sa dérivée analogue en $\tau$ négative sur une étendue $\int d\sigma$ notable, de

---

seconde (101 *bis*) et exige, comme on a vu après celle-ci, un évanouissement plus rapide pour $\varepsilon$ que pour $\varepsilon_1$, si $\Delta_1 u$ diffère de zéro.

Ainsi se trouve complétée et généralisée une question restée jusqu'ici, au moins partiellement, en suspens (voir ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique, etc.*, t. I, p. 255).

manière à décroître pendant que le temps $\tau$ grandit. En d'autres termes, les solutions particulières non fondamentales s'évanouissent plus vite que les solutions fondamentales. Quant au cas où $u$ désignerait le rapport de deux solutions *fondamentales toutes les deux*, ce rapport y tendrait, sans doute, assez vite vers une valeur constante, pour rendre négligeables, tout à la fois, $\Delta_1 u$ dans le second membre de la deuxième relation (101) et la dérivée en $\tau$ de $\frac{u^2}{2}$ dans le premier membre.

## § XI (¹). — Application de la théorie à deux sources de la Vanne étudiées par M. Edmond Maillet.

**49.** Au moment où se termine l'impression de la présente étude, M. Maillet vient de faire connaître le coefficient $\alpha$ de tarissement de la source de Cérilly, dont il est question au n° **11**, et qui a, durant le semestre d'été, des débits moyens compris, suivant les années, entre 150 litres et 200 litres environ par seconde. Ce coefficient vaut, à très peu près, 0,1066, lorsqu'on prend le mois pour unité de temps [2].

Quant à la source d'Armentières, pour le moins triple de celle de Cérilly, et dont il a été parlé également au n° **11**, M. Maillet représente ses débits Q, toujours en litres par seconde, durant la saison chaude, et les temps $t$ étant comptés de même en mois, au moyen de l'expression empirique, très approchée,

$$Q = 158,8 + \frac{740}{(1 + 0,12t)^2} \quad (^3). \tag{103}$$

---

(¹) Ajouté au Mémoire en décembre 1903, après le tirage des feuilles précédentes.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXXXVII, 30 novembre 1903, p. 947. On voit encore, dans la même Note, qu'il y aurait un coefficient $\alpha$ de tarissement également constant (valant 0,0380 d'après une Communication officieuse de M. Maillet), pour la source de la Dhuis, dont les débits d'été varient entre 270 litres et 170 litres, et qui alimente Paris comme celles de la Vanne, mais sur la rive droite de la Seine.

(³) Je dois la connaissance de cette formule, encore inédite, et des autres résultats d'observation, concernant la source d'Armentières, mentionnés ci-après, Abstraction faite du terme constant 158,8, elle rentrerait dans la formule que nous avons obtenue pour le cas d'un fond horizontal *contenant le seuil de la source;* et elle a été suggérée justement à M. Maillet par cette formule, à laquelle l'avaient conduit de son côté certaines considérations théoriques ([1]).

**30.** Mais ce terme constant 158,8 est beaucoup trop grand pour pouvoir être négligé. On pourrait, à la rigueur, l'expliquer en admettant que la source d'Armentières provient de la réunion de deux distinctes, dont la première, d'un coefficient de tarissement *insensible*, donnerait la partie *constante* du débit, tandis que la seconde, à bassin plat ayant son fond au niveau du seuil, fournirait la partie inverse de $(1 + 0,12\,t)^2$. Mais il semble naturel de recourir, de préférence, à l'autre explication, plus vraisemblable *a priori,* annoncée vers la fin du n° **11**. On n'est pas surpris, en effet, qu'une source aussi forte mette longtemps à se régulariser, et que plusieurs mois, sinon même

---

à une obligeante Communication de M. Maillet, qui a, d'ailleurs, fait porter ses études sur les deux sources de Cérilly et d'Armentières, de préférence à d'autres de la Vanne tout aussi fortes, parce que ces deux-là sont *les moins constantes* et semblaient, dès lors, les plus propres à manifester *les lois de variation* des sources du bassin. L'idée d'introduire le terme 158,8 dans la formule (103) lui est venue d'une relation approximative,

$$A = 1,52\,C + 158,8,$$

qu'il a constatée entre les deux débits minima (chaque année), A et C respectivement, des deux sources d'Armentières et de Cérilly. Cette relation approximative entre A et C conduirait, si l'on admet la simultanéité des minima annuels pour les deux sources et leur production au bout du temps $t = 6$, à faire correspondre à la formule (103), concernant la source d'Armentières, l'expression $Q = 312\,e^{-0,1066\,t}$, pour celle de Cérilly. Cette dernière expression paraît, néanmoins, un peu forte, et le coefficient 312 devrait s'y réduire à 280 environ. Il n'y a guère à cela de difficulté, la relation ci-dessus entre A et C n'étant donnée par M. Maillet, dans sa Note du 12 mai 1902 *Sur la prévision des débits minima des sources de la Vanne* (*Comptes rendus,* t. CXXXIV, p. 1103), que comme approchée *à un dixième près.*

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. CXXXVII, 27 octobre 1903, p. 676.

un semestre entier, soient nécessaires, après les pluies d'hiver, pour y faire évanouir ou, du moins, rendre insensible le second terme de la solution complète en série d'exponentielles, indiquée par le procédé d'intégration, dû à Fourier, de l'équation approximativement linéaire du mouvement. Alors, si $\beta$ est le coefficient d'extinction dans l'exponentielle affectant ce second terme simple, le débit prendra la forme binome

$$Q = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}. \tag{104}$$

Pour revenir à une hypothèse indiquée ci-dessus, mais l'appliquer dans des conditions moins particulières, il ne serait pas, non plus, improbable que, toujours à raison de son gros volume, la source d'Armentières fût *multiple*, c'est-à-dire résultât de la jonction de plusieurs sources, à bassins d'alimentation contigus. L'écoulement, en temps de sécheresse, s'y expliquerait alors par la superposition de tous les systèmes de solutions simples convenant à ces bassins respectifs, avec réduction plus ou moins rapide de chaque système à son terme fondamental; et l'on aurait ainsi pour Q une expression encore de la forme $Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + \ldots$.

Au fond, ce cas est compris dans le précédent, dont rien n'oblige à restreindre la généralité; car plusieurs bassins à débouché commun peuvent être regardés comme constituant un bassin plus général, pourvu du moins que leurs *seuils d'écoulement* se trouvent, comme nous l'avons admis (n° **8**), à un même niveau; et le terme fondamental propre à la *deuxième* source partielle, celle dont le coefficient $\beta$ de tarissement viendrait, quant à la petitesse, aussitôt après $\alpha$, ne serait alors autre que le second terme de la solution de Fourier pour la source totale.

**51.** Raisonnons dans les hypothèses les plus simples, en vue de nous y borner si leur confrontation avec les faits prouve qu'elles suffisent. Or ces hypothèses sont celles d'une source *unique*, avec profondeur H et largeur L de son bassin d'alimentation *constantes*, comme au n° **10**. Les coefficients d'extinction $\alpha$, $\beta$, ... des exponentielles successives se trouvent alors proportionnels à la suite des carrés impairs $1, 9, \ldots, (2i+1)^2, \ldots$; et l'on a $\beta = 9\alpha$. Il est, de plus, probable que $\alpha$ diffère peu du plus faible décroissement mensuel *relatif* de Q, constaté à la fin des semestres d'été, décroissement reconnu, par M. Maillet, égaler 0,0366 ou, sensiblement, 0,037, en se bornant à trois décimales. Il y a donc lieu d'essayer les valeurs

$$\alpha = 0{,}037, \qquad \beta = 9\alpha = 0{,}333.$$

Nous déterminerons enfin A et B, dans (104), par les deux conditions que cette formule (104) donne la valeur initiale convenue 898,8 et, en outre, la même valeur moyenne que (103) dans l'intervalle pour lequel les deux formules doivent être employées, c'est-à-dire, sensiblement, entre les deux limites $t = 0$, $t = 6$. Or, en multipliant (103) et (104) par $dt$, puis intégrant de zéro à $t$ et divisant par $t$, il vient, comme expressions de ces deux moyennes,

$$(105) \qquad 158{,}8 + \frac{740}{1 + 0{,}12\,t}, \qquad A\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t} + B\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta t},$$

où il faudra faire $t = 6$, $\alpha = 0{,}037$, $\beta = 0{,}333$. La première étant alors 589,03, et, d'ailleurs, l'expression initiale de Q se réduisant, dans (104), à $A + B$, nous aurons donc en A et B les deux équations

$$A + B = 898{,}8, \qquad \frac{1 - e^{-0{,}222}}{0{,}222}A + \frac{1 - e^{-1{,}998}}{1{,}998}B = 589{,}03.$$

Leur résolution, avec l'aide d'une Table de logarithmes à cinq décimales, donne $A = 431{,}32$ et $B = 467{,}46$.

Ainsi, l'expression, à deux exponentielles, qu'il s'agit de contrôler, sera

$$(106) \qquad Q = 431{,}3\,e^{-0{,}037\,t} + 467{,}5\,e^{-0{,}333\,t}.$$

Il en résulte :

| | Pour $t = 0$ | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ | $t = 4$ | $t = 5$ | $t = 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q =$ | 898,8 | 750,7 | 640,7 | 558,1 | 495,4 | 446,9 | 408,8; |

tandis que la formule empirique (103) prend les valeurs, à peine différentes,

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q =$ | 898,8 | 748,7 | 640,1 | 559,6 | 496,6 | 447,9 | 408,9. |

D'après une remarque de M. Maillet, touchant la légère imperfection de la formule (103) aux environs de $t=1$, où elle se trouverait être un peu trop faible, l'expression (106) paraîtrait préférable; elle serre, en tout cas, de fort près les résultats observés. Or elle deviendrait encore plus précise, si l'on y faisait subir à $\alpha$, $\beta$, A, B de *petites* corrections, par rapport auxquelles l'équation (104) pourrait être censée linéaire, et si l'on déterminait ces corrections de manière, d'une part, à laisser égale à 898,8 la valeur initiale, d'autre part, à rendre, par exemple, nul en moyenne l'écart de la formule d'avec les résultats observés, dans chacun des trois intervalles compris respectivement entre $t=0$ et $t=2$, $t=2$ et $t=4$, $t=4$ et $t=6$. Mais on voit que de pareilles corrections seraient superflues, au moins actuellement.

**52.** Le second coefficient, B, de la formule paraît donc bien être, pour la source d'Armentières, un peu supérieur au premier, A. Une telle circonstance semble indiquer, dans la nappe d'alimentation de cette source, considérée vers la fin de la saison d'hiver ou le début de la saison d'été, au moment où le débit Q passe par la valeur 898,8, une forme bombée à une certaine distance de la ligne de faîte, c'est-à-dire vers le milieu, plutôt que sur le faîte même du bassin; de manière qu'après avoir ôté, des ordonnées $h$, d'abord croissantes et ensuite, peut-être, décroissantes, de $x=0$ à $x=L$, le premier terme de leur développement en série trigonométrique, terme partout positif et proportionnel à $\sin\frac{\pi x}{2L}$, l'on ait un excédent se rapprochant de la forme du second terme de la série, d'abord positif puis négatif, où le facteur fonction de l'abscisse $x$ est $\sin\frac{3\pi x}{2L}$.

Il est aisé de voir, en effet, comment varie *initialement*, à partir du thalweg de la source où $x=0$, en allant vers le faîte où $x=L$, l'ordonnée superficielle $h$, supposée ainsi de la forme

$$(107)\qquad h = C\left(e^{-\alpha t}\sin\frac{\pi x}{2L} + c\,e^{-9\alpha t}\sin\frac{3\pi x}{2L}\right).$$

Le débit Q, ou $Ae^{-\alpha t}+Be^{-9\alpha t}$, se trouvant proportionnel à la pente $\frac{dh}{dx}$ de superficie pour $x = 0$, l'on aura

$$c = \frac{B}{3A} = \frac{467,5}{3.431,3} = 0,3613;$$

et l'ordonnée *initiale h* variera, du thalweg au faîte, comme l'expression

$$(108) \qquad \sin\frac{\pi x}{2L} + c\sin\frac{3\pi x}{2L} = \sin\frac{\pi x}{2L} + 0,3613\sin\frac{3\pi x}{2L}.$$

Or celle-ci, partie de zéro, atteint successivement, d'abord, son maximum, puis, finalement, un minimum, pour les deux valeurs respectives de la variable $\frac{\pi x}{2L}$ qui annulent la dérivée

$$(109) \quad \cos\frac{\pi x}{2L} + 3c\cos\frac{3\pi x}{2L} = 12c\left(\cos^2\frac{\pi x}{2L} - \frac{9c-1}{12c}\right)\cos\frac{\pi x}{2L},$$

c'est-à-dire qui donnent

$$(110) \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\frac{\pi x}{2L} = \left(\text{soit } \sqrt{\frac{9c-1}{12c}}, \text{ soit zéro}\right), \\ \text{ou} \quad \frac{\pi x}{2L} = (\text{soit } 43^\circ 53',5, \text{ soit } 90^\circ). \end{array}\right.$$

Le premier de ces deux arcs est la fraction 0,4877 du second $\frac{\pi}{2}$. Donc le *sommet* de la nappe se trouve, initialement, aux 49 centièmes environ de la largeur L, à partir du thalweg. Le rapport de son altitude $h$ à l'altitude analogue de la nappe sur le faîte est celui des deux valeurs correspondantes, 0,9631 et $1-c$ ou 0,6387, de l'expression (108), rapport très peu différent de $\frac{3}{2}$. Ainsi, la nappe aqueuse paraît présenter, à l'époque $t = 0$, c'est-à-dire au début de la saison sèche, un renflement fort sensible vers le milieu de sa largeur.

**53.** C'est, probablement, dans la constitution *variée* de la couche superficielle du sol, sur le bassin d'alimentation dont il s'agit, ou dans la diversité des cultures existant en ses multiples régions, qu'il faut chercher l'explication de cette particularité. En effet, eu égard à la grande étendue que doit avoir le bassin en question, une variété du sol et des cultures plus accentuée que sur celui de la source de Cérilly n'y est pas invraisemblable; et, si, grâce à une telle hétérogénéité (pouvant n'être que superficielle), l'évaporation y est rendue plus active, ou, encore, le ruissellement instantané des pluies vers les rivières plus accusé, près de la ligne de faîte que vers le milieu du bassin, l'affluence des eaux pluviales à la nappe aqueuse souterraine sera notablement plus grande en ce milieu du bassin qu'au voisinage du faîte. Dès lors, la nappe affectera, au début de la saison sèche, c'est-à-dire à la fin des périodes pluvieuses, cette forme convexe au centre, qui rend prédominant dans le débit Q le second terme simple de l'intégrale.

Il resterait toutefois à expliquer comment un pareil effet est assez bien réglé, pour qu'une courbe *unique* des débits convienne, à peu près, *toutes les années,* ou pour que les deux termes de la formule (104) aient sensiblement, entre eux, un rapport constant au moment où le débit total passe par la valeur choisie $898^{l},8$. Car, sans cela, la formule des débits contiendrait, *comme paramètre variable d'un été à l'autre,* le rapport $\frac{B}{A}$ [1].

**54.** Quoi qu'il en soit de cette nouvelle question et de la réponse à y faire, l'exemple des deux sources de Cérilly et d'Armentières [2] tend bien à montrer, conformément à l'opinion émise au n° **11**, que, pour les sources *importantes des terrains perméables, le bassin d'alimentation est très profond au-dessous de leurs seuils.* Or, cette circonstance justifierait la réduction de l'équation du mouvement à la forme linéaire de celle de la chaleur, et l'emploi des solutions en

---

[1] L'hypothèse d'une courbe unique des débits, pour cette source d'Armentières, est, en tout cas, assez approchée; car M. Maillet n'a pas relevé, entre la formule empirique (103) et les débits d'été observés depuis 1887, des écarts excédant une vingtaine de litres, c'est-à-dire environ 3,5 pour 100 du débit moyen.

[2] On peut y ajouter celui de la Dhuis, d'après une note de la page 71.

série d'exponentielles $e^{-mt}$, même en dehors des temps de sécheresse et du semestre d'été, mais à la condition d'y tenir compte des affluences de pluie par la méthode exposée au § IV.

---

## *ERRATA.*

A la page 18, la conservation des valeurs de $h$, quand on multiplie H par $k^2$ et $x$, $y$, $dx$, $dy$, $dn$ par $k$, résulte plus directement, et tout aussi simplement, de l'équation indéfinie (2), devenue linéaire, que des équations mêmes de cette page 18.

A la page 20, ligne 1, *rétablir* l'accent (′) de la lettre C, enlevé par la presse.

A la page 26, dernière ligne, *rétablir* de même $\frac{d.\zeta^2}{dr}$.

A la page 33, ligne 16, *au lieu de* comme nous le désirons, *lire* à moins d'éliminations compliquées.

A la page 37, ligne 18, *au lieu de* faible, *lire* faibles.

A la page 48, ligne 17, *au lieu de* $-k$, *lire* $-k'$.

A la page 49, ligne 15, l'expression indiquée de la conductibilité extérieure devrait être diminuée de la dérivée en $\tau$ de la capacité, pour que cette dernière pût, multipliée par la température $\varepsilon$, *figurer*, au premier membre, *sous le signe de différentiation en* $\tau$, *comme elle doit normalement le faire*. Car la capacité est, à proprement parler, le coefficient qui, en multipliant la température, donne la quantité de chaleur par unité ou de volume, ou (ici) de surface, savoir, cette quantité dont la différentielle en $\tau$ égale justement la chaleur gagnée d'un instant à l'autre par la même unité ou de volume, ou de surface, et à laquelle correspondent les autres termes de l'équation. Il s'agit là seulement, il est vrai, de questions de mots, mais non sans importance pour la clarté du discours.

Aux pages 63, ligne 3 en remontant, et 65, ligne 9 en remontant, il y aurait lieu à une observation analogue.