JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAX MASON

Sur les solutions satisfaisant à des conditions aux limites données de l'équation différentielle $\Delta u + \lambda A(x, y)u = f(x, y)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 10 (1904), p. 445-489.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__445_0>

Sur les solutions satisfaisant à des conditions aux limites données de l'équation différentielle

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y).$$

PAR M. MAX MASON.

Introduction.

Dans la théorie de l'élasticité et dans celle de l'électricité, l'équation des vibrations stationnaires

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = 0 \tag{1}$$

ne le cède en importance qu'à l'équation potentielle. Le paramètre λ de l'équation doit être déterminé de façon qu'il existe une solution $u(x, y)$ qui s'annule à la frontière d'une région donnée sans être identiquement nulle (¹).

L'équation (1) est l'équation de Lagrange qui correspond au problème isopérimétrique. M. Weber (²) a prouvé (en supposant établi le principe de Dirichlet) l'existence d'une infinité de valeurs de λ pour lesquelles il y a une *fonction harmonique* solution du caractère demandé.

(¹) Voir *Ency. der math. Wiss.*, t. II, $A7_c$ (Sommerfeld).

(²) *Math. Ann.*, t. I, 1869, p. 1.

Schwarz [1] fut le premier à démontrer rigoureusement l'existence d'une telle valeur de λ; M. Picard [2] montra l'existence d'une autre. Enfin, la démonstration pour une infinité de valeurs fut donnée par M. Poincaré [3]. Dans ces trois cas, la méthode employée fut celle des approximations successives avec l'hypothèse que $A(x, y)$ ne change pas de signe dans le domaine considéré, et les propriétés de minimum des fonctions harmoniques autres que la première ne furent pas considérées.

L'objet de ce Mémoire est : 1° d'obtenir des théorèmes généraux d'existence pour les solutions de l'équation différentielle

$$\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y),$$

sous certaines conditions aux limites, par l'application de la méthode employée par M. Fredholm pour la solution de certaines équations fonctionnelles; 2° d'en déduire l'existence des fonctions harmoniques comme fonctions minima. Nous justifierons ainsi le principe de Dirichlet tel qu'il a été appliqué par M. Weber dans le problème isopérimétrique, de même que M. Hilbert [4] l'a justifié sous sa forme primitive. La démonstration de l'existence d'une infinité de fonctions harmoniques s'annulant sur la frontière et d'une infinité d'autres satisfaisant sur le contour à l'équation

$$u + \sum(u) \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

sera faite sans rien supposer sur le signe de $A(x, y)$. Dans la seconde Partie, nous nous occupons de l'existence des solutions doublement périodiques [5].

---

(1) *Fenn. Acta*, t. XV, 1885. — *Ges. Abh.*, t. I, p. 241.

(2) *C. R.*, t. CXVII, 1893, p. 502.

(3) *Rend. Pal.*, t. VIII, 1894, p. 57. Dans cet article, $A = 1$. — *Voir* aussi ZAREMBA, *C. R.*, t. CXXXII, 1901, p. 1549; *Krak. Abh.*, t. XLI, 1901, p. 242. — KORN, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*. Berlin, 1902.

(4) *Festschrift : Ueber das Dirichlet'sche Princip* (*Abh. der k. Gött. Gelehrtengesellschaft*. Berlin, 1901).

(5) J'ai considéré des questions analogues pour l'équation à une seule variable, dans *Math. Ann.*, t. LVIII, 1904, p. 528.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Sur la méthode de M. Fredholm.

M. Fredholm [1] a montré comment on peut déterminer une solution de l'équation fonctionnelle

$$(1)\qquad \varphi(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \psi(\xi, \eta),$$

où λ est un paramètre et où ψ, f sont des fonctions finies et intégrables pour les valeurs de leurs arguments comprises entre a et b. Cette méthode s'applique, avec une légère modification, au cas où f, sans rester fini, a la forme

$$f(\xi, \eta, x, y) = \mathrm{R}\log[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] + \mathrm{S},$$

où R et S sont des fonctions de x, y, ξ, η finies et intégrables.

Nous définirons *le déterminant* D *de* (1) par les équations [2]

$$\mathrm{D} = 1 + \sum_{h=2}^{\infty} d_h \lambda^h,$$

$$d_h = \frac{1}{h!}\int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} 0 & f(x_1y_1x_2y_2) & f(x_1y_1x_3y_3) & \dots & f(x_1y_1x_hy_h) \\ f(x_2y_2x_1y_1) & 0 & f(x_2y_2x_3y_3) & \dots & f(x_2y_2x_hy_h) \\ f(x_3y_3x_1y_1) & f(x_3y_3x_2y_2) & 0 & \dots & f(x_3y_3x_hy_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_hy_hx_1y_1) & f(x_hy_hx_2y_2) & f(x_hy_hx_3y_3) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$
$$\times\, dx_1 \dots dx_h\, dy_1 \dots dy_h.$$

---

(1) *Acta Math.*, t. XXVII, 1903, p. 365.

(2) Pour plus de simplicité, nous écrirons dans les déterminants $f(x_1y_1x_2y_2)$ au lieu de $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$, etc.

Nous appellerons *mineur d'ordre n de* D la fonction suivante de λ et des paramètres $\xi_i, \eta_i, \sigma_i, \tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n \\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n \\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n \\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n \end{pmatrix} = \sum_{h=0}^{\infty} \delta_h \lambda^{h+n},$$

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_a^b \cdots \int_a^b$$

$$\begin{vmatrix}
0 & f(\xi_1\eta_1\sigma_2\tau_2) & \ldots & f(\xi_1\eta_1\sigma_n\tau_n) & f(\xi_1\eta_1x_1y_1) & f(\xi_1\eta_1x_2y_2) & \ldots & f(\xi_1\eta_1x_hy_h) \\
f(\xi_2\eta_2\sigma_1\tau_1) & 0 & \ldots & f(\xi_2\eta_2\sigma_n\tau_n) & f(\xi_2\eta_2x_1y_1) & f(\xi_2\eta_2x_2y_2) & \ldots & f(\xi_2\eta_2x_hy_h) \\
\cdots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots \\
f(\xi_n\eta_n\sigma_1\tau_1) & f(\xi_n\eta_n\sigma_2\tau_2) & \ldots & 0 & f(\xi_n\eta_nx_1y_1) & f(\xi_n\eta_nx_2y_2) & \ldots & f(\xi_n\eta_nx_hy_h) \\
f(x_1y_1\sigma_1\tau_1) & f(x_1y_1\sigma_2\tau_2) & \ldots & f(x_1y_1\sigma_n\tau_n) & 0 & f(x_1y_1x_2y_2) & \ldots & f(x_1y_1x_hy_h) \\
f(x_2y_2\sigma_1\tau_1) & f(x_2y_2\sigma_2\tau_2) & \ldots & f(x_2y_2\sigma_n\tau_n) & f(x_2y_2x_1y_1) & 0 & \ldots & f(x_2y_2x_hy_h) \\
\cdots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots \\
f(x_hy_h\sigma_1\tau_1) & f(x_hy_h\sigma_2\tau_2) & \ldots & f(x_hy_h\sigma_n\tau_n) & f(x_hy_hx_1y_1) & f(x_hy_hx_2y_2) & \ldots & 0
\end{vmatrix}$$

$$\times\, dx_1\ldots dx_h\,dy_1\ldots dy_h.$$

Dans les formules de M. Fredholm la diagonale principale n'était pas formée par des zéros, mais par des quantités de la forme

$$f(\xi_i\eta_i\sigma_i\tau_i), \quad f(x_iy_ix_iy_i).$$

Ce changement a été proposé par M. Hilbert qui a montré qu'il laissait intactes celles des formules de M. Fredholm qui ne contiennent que D et ses mineurs *du premier ordre* et que les séries précédemment définies restent convergentes pour toute valeur de λ, même quand f a une singularité logarithmique [1]. Nous aurons l'occasion de nous servir des résultats qui concernent les mineurs d'ordre n; nous indiquerons donc brièvement les changements causés par cette modification dans le cas général. En suivant les méthodes de M. Fredholm, on obtient les identités suivantes :

---

(1) Conférences de M. Hilbert à Göttingen, hiver 1901-1902. *Voir* aussi Kellogg, *Dissertation*, Göttingen, 1902 et Andrae, *Dissertation*, Göttingen, 1903, où l'on étend au cas où l'équation fonctionnelle contient n variables la démonstration faite par M. Hilbert pour une seule variable.

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_1\ldots\xi_n \\ \eta_1\ldots\eta_n \\ \sigma_1\ldots\sigma_n \\ \tau_1\ldots\tau_n \end{matrix}\right\} + \lambda\int_a^b\int_a^b f(\xi_1, \eta_1, u, v)\,\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} u\ \xi_2\ldots\xi_n \\ v\ \eta_2\ldots\eta_n \\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n \\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n \end{matrix}\right\} du\,dv \\
&\qquad + \lambda^2\,\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_2\ldots\xi_n \\ \eta_2\ldots\eta_n \\ \sigma_2\ldots\sigma_n \\ \tau_2\ldots\tau_n \end{matrix}\right\}\int_a^b\int_a^b f(u, v, \sigma_1, \tau_1)\,f(\sigma_1, \tau_1, u, v)\,du\,dv \\
&\qquad = -\lambda\sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_1, \eta_1, \sigma_\nu, \tau_\nu)\,\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_2\ldots\xi_{\nu-1}\,\xi_\nu\ \ \xi_{\nu+1}\ldots\xi_n \\ \eta_2\ldots\eta_{\nu-1}\,\eta_\nu\ \ \eta_{\nu+1}\ldots\eta_n \\ \sigma_1\ldots\sigma_{\nu-2}\,\sigma_{\nu-1}\,\sigma_{\nu+1}\ldots\sigma_n \\ \tau_1\ldots\tau_{\nu-2}\,\tau_{\nu-1}\,\tau_{\nu+1}\ldots\tau_n \end{matrix}\right\} \\
&\qquad\quad - \lambda^2\sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_1, \eta_1, \sigma_\nu, \tau_\nu)\,f(\xi_\nu, \eta_\nu, \sigma_1, \tau_1)\,\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_2\ldots\xi_{\nu-1}\,\xi_{\nu+1}\ldots\xi_n \\ \eta_2\ldots\eta_{\nu-1}\,\eta_{\nu+1}\ldots\eta_n \\ \sigma_2\ldots\sigma_{\nu-1}\,\sigma_{\nu+1}\ldots\sigma_n \\ \tau_2\ldots\tau_{\nu-1}\,\tau_{\nu+1}\ldots\tau_n \end{matrix}\right\}.
\end{aligned}
\right.
\tag{2}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_1\ldots\xi_n \\ \eta_1\ldots\eta_n \\ \sigma_1\ldots\sigma_n \\ \tau_1\ldots\tau_n \end{matrix}\right\} + \lambda\int_a^b\int_a^b f(u, v, \sigma_1, \tau_1)\,\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n \\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n \\ u\ \sigma_2\ldots\sigma_n \\ v\ \tau_2\ldots\tau_n \end{matrix}\right\} du\,dv \\
&\qquad + \lambda^2\,\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_2\ldots\xi_n \\ \eta_2\ldots\eta_n \\ \sigma_2\ldots\sigma_n \\ \tau_2\ldots\tau_n \end{matrix}\right\}\int_a^b\int_a^b f(\xi_1, \eta_1, u, v)\,f(u, v, \xi_1, \eta_1)\,du\,dv \\
&\qquad = -\lambda\sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_\nu, \eta_\nu, \sigma_1, \tau_1)\,\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_1\,\xi_2\ldots\xi_{\nu-2}\,\xi_{\nu-1}\,\xi_{\nu+1}\ldots\xi_n \\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_{\nu-2}\,\eta_{\nu-1}\,\eta_{\nu+1}\ldots\eta_n \\ \sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_{\nu-1}\,\sigma_\nu\ \ \sigma_{\nu+1}\ldots\sigma_n \\ \tau_2\,\tau_3\ldots\tau_{\nu-1}\,\tau_\nu\ \ \tau_{\nu+1}\ldots\tau_n \end{matrix}\right\} \\
&\qquad\quad - \lambda^2\sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_\nu, \eta_\nu, \sigma_1, \tau_1)\,f(\xi_1, \eta_1, \sigma_\nu, \tau_\nu)\,\mathcal{D}\left\{\begin{matrix} \xi_2\,\xi_3\ldots\xi_{\nu-1}\,\xi_{\nu+1}\ldots\xi_n \\ \eta_2\,\eta_3\ldots\eta_{\nu-1}\,\eta_{\nu+1}\ldots\eta_n \\ \sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_{\nu-1}\,\sigma_{\nu+1}\ldots\sigma_n \\ \tau_2\,\tau_3\ldots\tau_{\nu-1}\,\tau_{\nu+1}\ldots\tau_n \end{matrix}\right\}.
\end{aligned}
\right.
\tag{3}
$$

Ces équations diffèrent de celles de M. Fredholm par l'addition des termes en λ^2, lesquels contiennent tous en facteurs des mineurs de D d'ordre $n-2$. Pour $n=1$, ces équations deviennent

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix} + \lambda\int_a^b\int_a^b f(\xi, \eta, u, v)\,\mathfrak{D}\begin{pmatrix}u\\ v\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix} du\,dv\\ &\quad = -\lambda^2\,\mathfrak{D}\int_a^b\int_a^b f(u, v, \sigma, \tau)\,f(\sigma, \tau, u, v)\,du\,dv,\end{aligned}\right.$$

$$(3')\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix} + \lambda\int_a^b\int_a^b f(u, v, \sigma, \tau)\,\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ u\\ v\end{pmatrix} du\,dv\\ &\quad = -\lambda^2\,\mathfrak{D}\int_a^b\int_a^b f(\xi, \eta, u, v)\,f(u, v, \xi, \eta)\,du\,dv.\end{aligned}\right.$$

Considérons d'abord le cas où λ n'est pas une racine de la fonction transcendante D. En introduisant le symbole fonctionnel S qui donne à l'équation (1) la forme

$$S_f\,\varphi(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta),$$

nous aurons

$$S_g\,\psi(\xi, \eta) = S_g S_f\,\varphi(\xi, \eta) = S_F\,\varphi(\xi, \eta),$$

où

$$F = g + \lambda f + \lambda\int_a^b\int_a^b g(\xi, \eta, s, t)\,f(s, t, x, y)\,ds\,dt,$$

pourvu que la fonction $g(\xi, \eta, x, y)$ satisfasse aux mêmes conditions de continuité que f. En particulier, on voit d'après (3') que F est identiquement nul lorsqu'on remplace g par

$$g_1(\xi, \eta, x, y) = -\frac{1}{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ x\\ y\end{pmatrix} - \lambda f(\xi, \eta, x, y)$$

et, par suite,

$$S_{g_1} S_f\,\varphi(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta).$$

Donc, s'il y a une solution de (1), elle est unique et donnée par la formule

$$\varphi = S_{g_1}\psi.$$

D'ailleurs, d'après (2′), cette expression satisfait bien à l'équation (1). On a donc le théorème suivant :

Si le paramètre λ *n'est pas racine de* D, *l'équation*

$$\varphi(\xi,\eta) + \lambda\int_a^b\int_a^b f(\xi,\eta,x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy = \psi(\xi,\eta)$$

admet une solution unique

$$\varphi(\xi,\eta) = \psi(\xi,\eta) - \lambda\int_a^b\int_a^b \left\{ \frac{1}{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ x\\ y\end{pmatrix} - \lambda f(\xi,\eta,x,y)\right\}\psi(x,y)\,dx\,dy.$$

Considérons maintenant le cas où D et ses mineurs d'ordre inférieur à n sont nuls pour la valeur de λ considérée quelles que soient les valeurs des variables ξ, η, σ, τ dont ils dépendent, mais où le mineur d'ordre n n'est pas identiquement nul [1]. Alors (2) et (3) deviennent

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n\\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n\\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n\\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n\end{pmatrix} + \lambda\int_a^b\int_a^b f(\xi,\eta,u,v)\;\mathfrak{D}\begin{pmatrix}u\;\xi_2\ldots\xi_n\\ v\;\eta_2\ldots\eta_n\\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n\\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n\end{pmatrix}du\,dv = 0,$$

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n\\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n\\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n\\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n\end{pmatrix} + \lambda\int_a^b\int_a^b f(u,v,\sigma_1,\tau_1)\,\mathfrak{D}\begin{pmatrix}\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n\\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n\\ u\;\sigma_2\ldots\sigma_n\\ v\;\tau_2\ldots\tau_n\end{pmatrix}du\,dv = 0.$$

---

[1] Pour chaque valeur de λ il existe un nombre fini n, tel que le mineur de D d'ordre n n'est pas nul. *Voir* FREDHOLM, *loc. cit.*, p. 371 ; sa démonstration s'applique ici sans modifications.

Ces identités sont celles mêmes de M. Fredholm et sa méthode appliquée sans modification conduit aux théorèmes suivants :

Il ne peut exister de solution non identiquement nulle de l'équation homogène

$$\varphi(\xi, \eta)+\lambda\int_a^b\int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy=0$$

que si λ *est racine de* D. *Si n est l'ordre du premier mineur de* D *qui ne s'annule pas pour cette valeur de* λ, *il y a exactement n solutions linéairement indépendantes, lesquelles sont de la forme* (¹)

$$\Phi_\nu(\xi, \eta)=\frac{1}{\mathfrak{D}\begin{Bmatrix}\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n\\ \eta_1\,\eta_2\ldots\eta_n\\ \sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n\\ \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_n\end{Bmatrix}}\,\mathfrak{D}\begin{Bmatrix}\xi_1\ldots\xi_{\nu-1}\,\xi\,\xi_{\nu+1}\ldots\xi_n\\ \eta_1\ldots\eta_{\nu-1}\,\eta\,\eta_{\nu+1}\ldots\eta_n\\ \sigma_1\ldots\sigma_{\nu-1}\,\sigma_\nu\sigma_{\nu+1}\ldots\sigma_n\\ \tau_1\ldots\tau_{\nu-1}\,\tau_\nu\tau_{\nu+1}\ldots\tau_n\end{Bmatrix}\qquad(\nu=1,\ldots,n).$$

Pour cette même valeur de λ, *il ne peut exister de solutions de l'équation à second membre*

$$\varphi(\xi, \eta)+\lambda\int_a^b\int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy=\psi(\xi, \eta)$$

que si la fonction $\psi(\xi, \eta)$ *satisfait aux n équations fonctionnelles*

$$\int_a^b\int_a^b \psi(x, y)\Psi_\nu(x, y)\,dx\,dy=0\qquad(\nu=1, 2, \ldots, n),$$

(¹) L'ensemble des fonctions Φ_ν est indépendant du choix des paramètres. L'introduction de nouvelles valeurs pour ces paramètres ne fait que changer chaque Φ en une combinaison linéaire des Φ_ν. *Voir* FREDHOLM, *loc. cit.*, p. 375.

où l'on a (1)

$$\Psi_\nu(x, y) = \frac{1}{\mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_n \end{pmatrix}} \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_{\nu-1}\ \xi_\nu\ \xi_{\nu+1} \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_{\nu-1}\ \eta_\nu\ \eta_{\nu+1} \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_{\nu-1}\ x\ \sigma_{\nu+1} \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_{\nu-1}\ y\ \tau_{\nu+1} \ldots \tau_n \end{pmatrix}.$$

Et alors, la solution la plus générale est

$$\varphi(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) - \lambda \int_a^b \int_a^b \left\{ \frac{1}{\mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \\ \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ \tau_1 \ldots \tau_n \end{pmatrix}} \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi\ \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta\ \eta_1 \ldots \eta_n \\ x\ \sigma_1 \ldots \sigma_n \\ y\ \tau_1 \ldots \tau_n \end{pmatrix} - \lambda f(\xi, \eta, x, y) \right\}$$

$$\times \psi(x, y)\, dx\, dy + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu(\xi, \eta),$$

où les c_ν sont des constantes arbitraires.

Dans la démonstration de la convergence des séries qui définissent D, on prouve (2) que l'on a, quel que soit l'entier positif h,

$$|d_h| < c' \frac{c^h (b-a)^{2h+c''}}{h^{\frac{h}{2}}}, \qquad c'' > 0,$$

où c, c' et c'' sont des constantes indépendantes de h et ne contenant que des puissances positives de $b - a$. On peut donc prendre $(b - a)$ assez petit pour qu'une valeur de λ quelconque, mais fixée à l'avance, ne soit pas racine de D. Nous pouvons donc énoncer encore cette proposition :

Étant donnée une valeur quelconque de λ, on peut prendre

(1) La note précédente s'applique aux Ψ_ν.

(2) ANDRAE, *loc. cit.*, p. 101.

$(b-a)$ assez petit pour que l'équation

$$\varphi(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b f(\xi, \eta, x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \psi(\xi, \eta)$$

ait une solution, et une seule.

II. — Théorèmes généraux d'existence pour le problème aux limites.

Nous établirons dans ce paragraphe l'existence d'une fonction $u(x, y)$ qui est continue dans une région Ω ainsi que ses dérivées premières, qui satisfait à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda \mathrm{A}(x, y) u = f(x, y)$$

et prend des valeurs données $\sigma(s)$ sur le contour S de Ω [1]. On admet que les fonctions A et f soient bornées et intégrables dans Ω et que $\sigma(s)$ soit une fonction continue de s, longueur de l'arc de S.

D'après le théorème de Green, on a

$$(2) \qquad \iint_{(\Omega)} (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy = -\int_{(\mathrm{S})} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds,$$

n étant la normale intérieure à S. Prenons pour u une solution [2] de (1), solution dont nous postulerons provisoirement l'existence. Et prenons pour v la fonction de Green $\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)$, solution de l'équation potentielle $\Delta v = 0$ dans la région Ω, qui admet la même singularité que $\log\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ et s'annule sur S. L'existence d'une telle fonction $\mathcal{G}$ a été prouvée par plusieurs méthodes. Appliquons la formule (2) à la région obtenue en excluant de Ω une aire circulaire

---

[1] On suppose la région Ω limitée et à connexion simple, son contour S étant formé d'un nombre fini d'arcs analytiques. On sait qu'on peut appliquer à une telle région les résultats de la théorie du potentiel.

[2] Nous emploierons le mot *solution* pour désigner une fonction qui satisfait à l'équation (1) en tout point de Ω. Cette définition implique la continuité des dérivées premières.

de rayon r, de centre (ξ, η). En passant à la limite pour $r = 0$, on obtient par une méthode bien connue

$$(3) \quad u(\xi, \eta) = \frac{-1}{2\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} \mathcal{G}(f - \lambda A u)\, dx\, dy,$$

en remplaçant les valeurs de u sur S par σ.

Inversement la théorie du potentiel montre que toute solution u de l'équation (3) satisfait à l'égalité

$$\Delta u = f - \lambda A u$$

[c'est-à-dire à l'équation (1)] et admet les valeurs aux limites $\sigma(s)$ (¹).

L'intégration de (1) sous les conditions aux limites données est donc ramenée à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$(4) \quad u(\xi, \eta) + \lambda \int_a^b \int_a^b \frac{A(x, y)}{2\pi} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, u(x, y)\, dx, y = F(\xi, \eta),$$

où $F(\xi, \eta)$ désigne la fonction connue

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} f(x, y)\, \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, dx\, dy,$$

et où nous avons étendu l'aire d'intégration à un carré de côté $(b - a)$ entourant Ω, $\mathcal{G}$ étant considérée comme nulle en dehors de Ω.

Or, (4) est une équation fonctionnelle de la forme considérée § I. Pour appliquer les résultats de M. Fredholm, il suffit de savoir à quelles conditions $F(\xi, \eta)$ est identiquement nul. Comme la représentation au moyen de la fonction de Green est unique, cela ne peut arriver que si l'on a

$$\sigma(s) \equiv 0, \qquad f(x, y) \equiv 0.$$

Les résultats du paragraphe précédent nous conduisent donc aux théorèmes suivants :

I. *Si $f(x, y)$ et $\sigma(s)$ ne sont pas à la fois identiquement nuls,*

(¹) *Voir* HARNACK, *Logarithmisches Potential.* Leipzig, 1887.

il existe, pour toute valeur du paramètre λ *autre que les racines de la fonction entière* D, *une solution et une seule de l'équation*

$$\Delta u + \lambda A(x,y)\, u = f(x,y)$$

qui prenne les valeurs aux limites $\sigma(s)$. *Cette solution est donnée par la formule*

$$u(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) - \lambda \iint_{(\Omega)} \left[\frac{1}{\mathfrak{D}} \mathfrak{D}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \frac{A(x,y)}{2\pi} \mathcal{G}(x,y,\xi,\eta) \right] F(x,y)\, dx\, dy.$$

II. *Il ne peut y avoir de solution nulle sur* S (*sans être identiquement nulle*) *de l'équation*

$$\Delta u + \lambda A(x,y)\, u = 0$$

que si le paramètre λ *est une racine de* D. *Si n est l'ordre du premier mineur* D *qui ne s'annule pas pour la valeur considérée de* λ, *il existe exactement n solutions linéairement indépendantes s'annulant sur le contour* S. *Ces solutions ont la même forme que les fonctions* $\Phi_\nu(x,y)$ *données dans le paragraphe précédent.*

Pour la même valeur de λ, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution de

$$\Delta u + \lambda A(x,y)\, u = f(x,y)$$

qui prenne des valeurs aux limites $\sigma(s)$ est que $f(x,y)$ et $\sigma(s)$ vérifient les conditions

$$\iint_{(\Omega)} F(x,y)\, \Psi_\nu(x,y)\, dx\, dy = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

où Ψ_ν a la forme donnée dans le paragraphe précédent. D'ailleurs, la fonction $f(\xi,\eta,x,y)$ de ce même paragraphe a ici la forme

$$f(\xi,\eta,x,y) = \frac{1}{2\pi} A(x,y)\, \mathcal{G}(x,y,\xi,\eta).$$

Dans les expressions de D et de ses mineurs, A peut être supprimé du déterminant et mis en facteur. En écrivant δ_h sous la forme

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_a^b \cdots \int_a^h \Delta(f)\, dx_1 \ldots dy_h,$$

nous aurons

$$\delta_h = \frac{A(\sigma_1, \tau_1)\ldots A(\sigma_n, \tau_n)}{h!\,(2\pi)^h}\int_a^b \cdots \int_a^b A(x_1, y_1)\ldots A(x_h, y_h)\,\Delta(\mathcal{G})\, dx_1 \ldots dy_h.$$

L'identité

$$\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) = \mathcal{G}(\xi, \eta, x, y)$$

montre que le déterminant $\Delta(\mathcal{G})$ reste invariant si l'on permute les paramètres ξ_i, η_i avec σ_i, τ_i, respectivement; en effet, on aurait seulement changé la position relative des lignes et des colonnes. Dès lors, revenant aux définitions de Φ_ν et de Ψ_ν, on voit facilement qu'il suffit de choisir, pour les valeurs des deux paramètres ξ_ν, η_ν de Ψ_ν, les paramètres σ_ν, τ_ν de Φ_ν, respectivement, pour avoir la relation

$$\frac{\Psi_\nu(x, y)}{A(x, y)} = \frac{\Phi_\nu(x, y)}{A(\sigma_\nu, \tau_\nu)}$$

ou

$$\Psi_\nu(x, y) = A(x, y)\, \Phi_\nu(x, y) \times \text{const.}$$

Les conditions trouvées précédemment pour F peuvent alors s'écrire

$$\iint_{(\Omega)} F(x, y) A(x, y)\, \Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

ou, puisque $\Delta\Phi_\nu + \lambda A \Phi_\nu = 0$:

$$\iint_{(\Omega)} F(x, y)\, \Delta\Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Appliquons le théorème de Green; puisque les Φ_ν s'annulent sur S, on aura

$$\iint\limits_{(\Omega)} [F(x,y)\Delta\Phi_\nu(x,y) - \Phi_\nu(x,y)\Delta F(x,y)]\,dx\,dy = -\int_{(S)} F\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial n}\,ds.$$

Mais la fonction

$$F(\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\Omega)} f(x,y)\,\mathcal{G}(x,y,\xi,\eta)\,dx\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}\,ds$$

satisfait dans Ω à l'équation

$$\Delta F = f,$$

et elle prend les valeurs σ sur S. Les conditions deviennent alors

$$\iint\limits_{(\Omega)} f(x,y)\,\Phi_\nu(x,y)\,dx\,dy - \int_{(S)} \sigma\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial n}\,ds = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

On a donc le théorème :

III. *Si λ a une valeur pour laquelle* D *et ses mineurs s'annulent jusqu'à l'ordre n exclusivement, il ne peut y avoir de solutions de*

$$\Delta u + \lambda A u = f$$

prenant les valeurs σ sur S, *que si f et σ satisfont aux conditions*

$$\iint\limits_{(\Omega)} f\Phi_\nu\,dx\,dy - \int_{(S)} \sigma\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial n}\,ds = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Dans ces égalités, les Φ_ν sont les n solutions linéairement indépendantes et nulles sur S de l'équation différentielle rendue homogène.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, les solutions ont la *forme*

$$u(\xi,\eta)=\mathrm{F}(\xi,\eta)-\lambda\iint_{(\Omega)'}\left\{\frac{1}{\mathfrak{D}\begin{Bmatrix}\xi_1\ldots\xi_n\\ \eta_1\ldots\eta_n\\ \sigma_1\ldots\sigma_n\\ \tau_1\ldots\tau_n\end{Bmatrix}}\mathfrak{D}\begin{Bmatrix}\xi\,\xi_1\ldots\xi_n\\ \eta\,\eta_1\ldots\eta_n\\ x\,\sigma_1\ldots\sigma_n\\ y\,\tau_1\ldots\tau_n\end{Bmatrix}-\lambda\frac{\mathrm{A}(x,y)}{2\pi}\mathcal{G}(x,y,\xi,\eta)\right\}$$

$$\times\,\mathrm{F}(x,y)\,dx\,dy+\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\Phi_\nu(\xi,\eta),$$

où les c_ν sont des constantes arbitraires.

Enfin, on transforme immédiatement le dernier énoncé du paragraphe précédent :

IV. *Pour une valeur donnée quelconque de λ, on peut prendre la région Ω assez petite pour qu'il existe dans Ω une solution et une seule de*

$$\Delta u+\lambda\mathrm{A}\,u=f$$

prenant les valeurs données σ sur S. Cette solution a la forme donnée dans le théorème I.

III. — Existence de la première fonction harmonique.

Nous avons montré qu'il existe une fonction harmonique, c'est-à-dire une solution de

$$(1)\qquad \Delta u+\lambda\mathrm{A}(x,y)\,u=0,$$

nulle sur le contour S d'un domaine Ω sans être identiquement nulle dans Ω, pour les seules valeurs $\lambda=\lambda_k$ racines d'une certaine fonction transcendante entière D. Nous allons prouver maintenant qu'il y a une infinité de racines de D et que les fonctions harmoniques correspondantes sont les solutions de certains problèmes de calcul des variations.

Considérons le problème suivant : *Rendre minimum l'intégrale*

$$J(u) = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

u désignant une fonction qui s'annule sur le contour S *de* Ω, *admet des dérivées secondes en tout point de* Ω *et satisfait à l'équation*

$$|K(u)| = 1$$

où

$$K(u) = \iint_{(\Omega)} A u^2\,dx\,dy.$$

L'existence d'une solution de ce problème n'est pas évidente, mais il y a certainement une limite inférieure finie λ_0 pour les valeurs de J sous les conditions imposées. Nous allons démontrer le théorème suivant :

La limite inférieure λ_0 *ou la valeur symétrique* $-\lambda_0$ *est une racine de* D *et la fonction harmonique de* (1) *correspondante est une solution du problème de minimum.*

D'après la définition de λ_0, il existe une série infinie de fonctions satisfaisant aux conditions du problème

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots,$$

telles que

$$(2) \qquad \lim_{h=\infty} J(U_h) = \lambda_0.$$

De plus, ces fonctions peuvent être choisies de façon que l'on ait

$$(2)' \qquad K(U_h) = \pm 1,$$

où le signe reste le même quel que soit h.

Définissons une suite de fonctions f_h par les expressions

$$(3) \qquad f_h = \Delta U \pm \lambda_0 A U_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

le signe $\pm$ restant le même que dans (2)'.

En multipliant (3) par U_h et intégrant dans Ω

$$\iint_{(\Omega)} U_h \Delta U_h \, dx\, dy + \lambda_0 = \iint_{(\Omega)} f_h U_h \, dx\, dy.$$

Appliquons la formule de Green; puisque les U_h s'annulent sur le contour S, on aura

$$\lambda_0 - J(U_h) = \iint_{(\Omega)} f_h U_h \, dx\, dy.$$

Et d'après (2)

$$(3)' \qquad \lim_{h=\infty} \iint_{(\Omega)} f_h U_h \, dx\, dy = 0.$$

Soit maintenant

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots,$$

une série indéfinie de fonctions continues dans Ω ainsi que leurs dérivées premières et secondes et nulles sur S. Écrivons pour abréger

$$(4) \qquad \Delta V_h \pm \lambda_0 A V_h = g_h,$$

en choisissant comme précédemment le signe $\pm$.

Alors, l'équation

$$(5) \qquad \lim_{h=\infty} \iint_{(\Omega)} U_h g_h \, dx\, dy = 0$$

sera vérifiée par toute série analogue de fonctions V_h, *pourvu que l'on ait, quel que soit* h,

$$(6) \qquad \left| \iint_{(\Omega)} V_h g_h \, dx\, dy \right| < B$$

où B est un nombre fixe indépendant de h.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait choisir parmi les couples U_h, V_h une série infinie de couples U'_h, V'_h pour lesquels on ait, quel que soit h,

$$(5)' \qquad \iint_{(\Omega)} U'_h g'_h \, dx\, dy \geqq \rho \qquad \text{ou} \qquad \leqq \rho,$$

p étant un nombre indépendant de h, positif dans le premier cas, négatif dans le second et g'_h étant la fonction déterminée par V'_h dans (4).

Considérons alors les fonctions

$$v_h = U'_h + c V'_h$$

où c est une constante. Elles satisfont à l'équation

$$\Delta v_h \pm \lambda_0 A v_h = f'_h + c g'_h$$

et s'annulent sur S. Multiplions cette équation par $v_h = U'_h + cV'_h$ et intégrons dans Ω; nous aurons, au moyen de la formule de Green,

$$\pm \lambda_0 K(v_h) - J(v_h) = \iint_{(\Omega)} [U'_h f'_h + c(U'_h g'_h + V'_h f'_h) + c^2 V'_h g'_h] \, dx\, dy.$$

Mais, puisque U'_h et V'_h s'annulent sur S,

$$\iint_{(\Omega)} (U'_h \Delta V'_h - V'_h \Delta U'_h) \, dx\, dy = \iint_{\Omega} (U'_h g'_h - V'_h f'_h) \, dx\, dy = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} &\pm \lambda_0 K(v_h) - J(v_h) \\ &\quad = \iint_{(\Omega)} U'_h f'_h \, dx\, dy + 2c \iint_{(\Omega)} U'_h g'_h \, dx\, dy + c^2 \iint_{\Omega} V'_h g'_h \, dx\, dy. \end{aligned}$$

Choisissons c de façon que ρc soit positif et assez petit pour que l'on ait

$$2c\rho > c^2 B, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |c| < \frac{2|\rho|}{B}.$$

En posant $\delta = 2\rho c - c^2 B$, nous déduirons de (6) et (5')

$$\pm\lambda_0 K(v_h) - J(v_h) \geqq \iint_{(\Omega)} U'_h f'_h \, dx\, dy + \delta.$$

D'ailleurs δ est une quantité positive indépendante de h; par suite, d'après (3)' nous pourrons prendre h assez grand ($h = H$), pour que

$$\pm\lambda_0 K(v_H) - J(v_H) > 0,$$

et alors

$$(7) \qquad \lambda_0 |K(v_H)| - J(v_H) > 0.$$

Posons

$$\frac{v_H}{\sqrt{|K(v_H)|}} = u;$$

nous aurons $|K(u)| = 1$. Dès lors u satisfait à toutes les conditions du problème de calcul des variations et, en divisant (7) par $|K(v_H)|$, nous aurons

$$\lambda_0 - J(u) > 0,$$

ce qui est incompatible avec la supposition que λ_0 soit la limite inférieure de l'intégrale J sous les conditions du problème. En conséquence, l'hypothèse (5)' est fausse et l'équation (5) doit avoir lieu sous la condition (6).

Pour prouver maintenant le théorème lui-même, supposons, au contraire, qu'aucun des deux nombres $\pm\lambda_0$ ne soit racine de D. Alors, d'après le théorème I du paragraphe II, il existe une solution V_h de chacune des équations

$$\Delta V_h \pm \lambda_0 A V_h = A U_h \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

laquelle s'annule sur S et prend la forme

$$V_h(x, y) = \iint \Gamma(\xi, \eta, x, y)\, A(\xi, \eta)\, U_h(\xi, \eta)\, d\xi\, a\eta$$

où (¹)

$$\Gamma(\xi, \eta, x, y)$$
$$= \frac{\pm \lambda_0}{2\pi} \int\int \left[\frac{1}{\mathbb{O}} \mathbb{O} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{Bmatrix} \pm \frac{\lambda_0}{2\pi} A(u, v) \mathcal{G}(u, v, x, y) \right] G(\xi, \eta, u, v)\, du\, dv$$
$$- \frac{1}{2\pi} \mathcal{G}(\xi, \eta, x, y).$$

Il nous faut montrer maintenant que les fonctions V_h satisfont à la condition (6). On a

$$\int\int V_h g_h dx\, dy$$
$$= \int\int\int\int A(\xi, \eta) U_h(\xi, \eta) A(x, y) U_h(x, y) \Gamma(\xi, \eta, x, y)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta.$$

Or on déduit de l'inégalité de Schwarz (²)

$$\left(\int\int V_h g_h dx\, dy\right)^2 \leqq \int\int\int\int \Gamma^2 dx\, dy\, d\xi\, d\eta \times \left(\int\int A^2 U_h^2 dx\, dy\right)^2.$$

Les fonctions V_h vérifieront donc (6) pourvu que l'expression

$$\int\int U_h^2 dx\, dy$$

soit bornée.

Or, il a été démontré (³) que toute fonction u satisfaisant à l'équation

$$\int\int u\, dx\, dy = 0$$

(¹) L'intégration est étendue à Ω dans cette équation et dans les suivantes.

(²) $\left(\int\int \varphi\psi\, dx\, dy\right)^2 \leqq \int\int \varphi^2 dx\, dy \int\int \psi^2 dx\, dy.$ (*Ges. Abh.*, t. I, p. 251.)

(³) POINCARÉ, *loc. cit.*, p. 70. *Voir* aussi KORN, *Abhandlung zur Potentialtheorie* (*Abh.* IV, 1902, p. 12; Berlin).

vérifie l'inégalité

$$\int\int u^2 dx\, dy < k\mathrm{J}(u)$$

où k est une constante finie dépendant seulement du domaine Ω. D'autre part, on a, si L est l'aire de Ω,

$$\int\int\left(\mathrm{U}_h - \frac{1}{\mathrm{L}}\int\int \mathrm{U}_h dx\, dy\right) dx\, dy = 0;$$

par suite, en prenant $u = \mathrm{U}_h - \frac{1}{\mathrm{L}}\int\int \mathrm{U}_h dx\, dy$,

$$\int\int \mathrm{U}_h^2 dx\, dy - \frac{1}{\mathrm{L}}\left(\int\int \mathrm{U}_h dx\, dy\right)^2 < k\mathrm{J}(\mathrm{U}_h).$$

De la condition $\lim \mathrm{J}(\mathrm{U}_h) = \lambda_0$, il résulte que les fonctions U_h satisferont à (6) pourvu que les quantités

$$\left|\int\int \mathrm{U}_h dx\, dy\right|$$

restent inférieures à une limite finie quel que soit h.

Mais puisque U_h s'annule sur le contour

$$\int\int \mathrm{U}_h dx\, dy = -\int\int x\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial x} dx\, dy,$$

et en désignant par X le maximum de $|x|$ dans Ω, on aura

$$\left|\int\int \mathrm{U}_h dx\, dy\right| < \mathrm{X}\int\int\left|\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial x}\right| dx\, dy < \mathrm{X}\int\int\left[1 + \left(\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial x}\right)^2\right] dx\, dy.$$

D'où

$$\left|\int\int \mathrm{U}_h dx\, dy\right| < \mathrm{X}\mathrm{L} + \mathrm{X}\mathrm{J}(\mathrm{U}_h)$$

et la fonction V_h vérifie (6).

Mais si la condition (6) est satisfaite, l'équation (5) doit être vérifiée et l'on a

$$\lim_{h=\infty}\int\int_{(\Omega)} \mathrm{U}_h \mathrm{A}\mathrm{U}_h dx\, dy = \lim_{h=\infty} \mathrm{K}(\mathrm{U}_h) = 0.$$

Or ceci est impossible, puisque l'on a $|K(U_h)| = 1$ quel que soit 1. Ainsi l'hypothèse faite sur λ_0 est inexacte et l'un des deux nombres $\pm\lambda_0$ est racine de D.

Il résulte du théorème II, paragraphe II, qu'il existe une fonction harmonique u_0 nulle sur S et solution de l'équation différentielle

$$\Delta u_0 \pm \lambda_0 A u_0 = 0.$$

Multiplions cette équation par u_0; en intégrant dans Ω au moyen de la formule de Green, on aura

$$\pm\lambda_0 K(u_0) = J(u_0),$$

ou, puisque $J(u_0) > 0$,

$$\lambda_0 |K(u_0)| = J(u_0).$$

Déterminons le facteur constant et arbitraire qui figure dans u_0 de façon que $|K(u_0)| = 1$.

Alors u_0 satisfera à toutes les conditions du problème de minimum et ce sera une solution de ce problème puisque

$$\lambda_0 = J(u_0).$$

Enfin $\pm\lambda_0$ est en valeur absolue la plus petite racine de D. Car s'il existait une racine λ' telle que $|\lambda'| < \lambda_0$, la fonction harmonique correspondante satisferait (avec une détermination convenable de son facteur constant) aux conditions du problème de minimum et donnerait à $J(u)$ la valeur $|\lambda'| < \lambda_0$, ce qui est impossible d'après la définition de λ_0.

En résumé, *la limite inférieure précédemment définie λ_0 ou sa valeur symétrique $-\lambda_0$ est une racine de* D *et la plus petite en valeur absolue. La fonction harmonique correspondante u_0 est la solution du problème de minimum.*

IV. — Existence d'une infinité de fonctions harmoniques.

Nous procéderons par induction. Admettons l'existence de n fonctions $u_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ qui, pour des valeurs de λ, égales en valeur absolue aux nombres respectifs λ_i, sont solutions harmoniques de

$$\Delta u + \lambda A u = 0.$$

Nous supposons de plus que chaque fonction u_i est la solution du problème

$$J(u) = \text{minimum}$$

où u s'annule sur S et satisfait aux équations

$$|K(u)| = 1, \quad K'(u_j, u) \equiv \iint_{(\Omega)} A u_j u \, dx\, dy = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, i-1).$$

Pour démontrer l'existence d'une $(n+1)^{\text{ième}}$ fonction u_n de cette série, considérons le problème

$$J(u) = \text{minimum}$$

pour les fonctions u nulles sur S et telles que

$$|K(u)| = 1, \quad K'(u_j, u) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Appelons λ_n la limite inférieure des valeurs prises par J sous ces conditions. Nous allons montrer que si $\lambda_n > \lambda_{n-1}$, $+\lambda_n$, ou $-\lambda_n$ est une nouvelle racine de D et que si $\lambda_n = \lambda_{n-1}$, il existe pour $\lambda = \lambda_n$ ou $\lambda = -\lambda_n$, une nouvelle fonction harmonique, solution de (1), linéairement indépendante des autres.

Choisissons une série de fonctions U_h satisfaisant aux conditions du nouveau problème de minimum et telles que

$$\lim_{h=\infty} J(U_h) = \lambda_n; \tag{2}$$

$$K(U_h) = \pm 1, \tag{2'}$$

le signe restant le même quel que soit h. Soit d'autre part

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots$$

une série infinie de fonctions satisfaisant aux conditions de continuité et s'annulant sur S.

Posons

$$\Delta U_h \pm \lambda_n A U_h = f_h$$
$$\Delta V_h \pm \lambda_n A V_h = g_h,$$

où les signes $\pm$ sont les mêmes que dans le second membre de $(2)'$.

On prouvera, comme dans le cas précédent, que

$$(5) \qquad \lim_{h=\infty} \iint_{(\Omega)} U_h g_h \, dx\, dy = 0,$$

pourvu que, en outre de la condition primitive

$$(6) \qquad \left| \iint_{(\Omega)} V_h g_h \, dx\, dy \right| < B,$$

les nouvelles conditions

$$(6)' \qquad K'(u_i, V_h) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

soient satisfaites.

En effet, il résulte de $(6)'$ que les fonctions

$$v_h = U_h + c V_h,$$

où c est une constante, satisfont à toutes les conditions du nouveau problème de minimum, sauf $|K(v_h)| = 1$, car elles s'annulent sur S et l'on a

$$K'(u_i, v_h) = K'(u_i, U_h) + c K'(u_i, V_h) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

puisque les u_h satisfont aux conditions du problème de minimum et que V_h satisfait à $(6)'$.

Alors on peut appliquer les méthodes du cas précédent sans modification et il en résulte l'équation (5).

Considérons d'abord le cas où $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. Si notre théorème n'était pas exact, $\pm \lambda_n$ ne serait pas racine de D. Alors il existerait (§ II), pour chaque valeur de h, une solution de

$$\Delta V_h \pm \lambda_n A V_h = A U_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

qui s'annulerait sur S.

De (7) et de

$$\Delta u_i \pm \lambda_i A u_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

il résulte (puisque u_i et V_h s'annulent sur S et que U_h satisfait aux conditions du problème de minimum) que l'on aura, quels que soient i et h,

$$\begin{aligned} &\pm(\lambda_n - \lambda_i)\iint_{(\Omega)} A u_i V_h \, dx\, dy \\ &= \iint_{(\Omega)} (V_h \Delta u_i - u_i \Delta V_h)\, dx\, dy + \iint A U_h u_i \, dx\, dy \\ &\qquad\qquad = -\int_{(S)} \left(V_h \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial V_h}{\partial n} \right) ds = 0. \end{aligned}$$

Dès lors, puisque l'on a $\lambda_n > \lambda_i$, quel que soit $i < n$, les V_h satisfont aux conditions (6)'. On voit, comme dans le cas précédent, qu'elles satisferont aussi à (6). Par conséquent l'équation (5) est vérifiée ou

$$\lim_{h=\infty} \iint_{(\Omega)} A U_h^2 \, dx, y = \lim_{h=\infty} K(U_h) = 0. \tag{8}$$

Mais ceci est impossible puisqu'on a, quel que soit h,

$$|K(U_h)| = 1.$$

Ainsi, $+\lambda_n$ ou $-\lambda_n$ est sûrement une racine de D pour $\lambda_n > \lambda_{n-1}$.

De plus, il en résulte qu'il y a une nouvelle solution harmonique u_n de (1) pour $\lambda = +\lambda_n$ ou pour $\lambda = -\lambda_n$; déterminons son facteur constant de façon que

$$|K(u_n)| = 1.$$

On déduira, comme précédemment, des équations

$$\left.\begin{array}{l}\Delta u_i \pm \lambda_i A u_i = 0 \\ \Delta u_n \pm \lambda_n A u_n = 0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}(i=0,1,\ldots,n-1),\\ \lambda_n > \lambda_i,\end{array}$$

que u_h satisfait aux équations

$$K'(u_j, u_n) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ainsi u_n satisfait aux conditions du problème de minimum et, puisqu'il donne à J la valeur λ_n, c'est la solution du problème. Notre théorème est complètement établi pour $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. De plus, d'après la définition de λ_n, il ne peut y avoir de racines de D dont la valeur absolue soit comprise entre λ_{n-1} et λ_n.

Considérons maintenant le cas où l'on aurait

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{n-r} \qquad (r \leqq n).$$

Il existera pour $\lambda = \lambda_n$ ou $\lambda = -\lambda_n$, une solution de (1), linéairement indépendante de $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-r}$. Sinon, d'après (2), D et ses mineurs seraient nuls pour $\lambda = \lambda_n$ ou $\lambda = -\lambda_n$ jusqu'à l'ordre n exclusivement. Alors il existerait (III, § II), pour chaque valeur de h, une solution V_h de

$$\Delta V_h \pm \lambda_n A V_h = A U_h, \tag{7}$$

s'annulant sur S, car les fonctions AU_h vérifient les conditions suffisantes

$$\iint_{(\Omega)} A U_h u_i \, dx \, dy = K'(u_i, U_h) = 0 \qquad (i = n-1, n-2, \ldots, n-r).$$

Ces solutions V_h ne sont pas déterminées d'une manière unique; elles ont la forme

$$V_h = W_h + \sum_{j=m-r}^{n-1} c_{hj} u_j,$$

où les c sont des constantes arbitraires.

Or on a, par hypothèse,

$$K(u_i) = 1, \qquad K'(u_i, u_j) = 0,$$

et, par conséquent, on peut déterminer les c de façon que

$$\iint_{(\Omega)} A u_i V_h \, dx \, dy = \iint_{(\Omega)} A u_i W_h \, dx \, dy \pm c_{hi} = 0$$

$$(i = n - 1, \ldots, n - r).$$

Donc les fonctions V_h satisfont aux conditions $(6)'$.

Comme précédemment, elles vérifient (6) et, par suite, (5) et (8); d'où la contradiction annoncée. Il y a donc une solution u'_n de (1) qui est linéairement indépendante de $u_{n-1}, \ldots, u_{n-r}$. Considérons alors la fonction harmonique

$$u_n = \sum_{j=n-r}^{n-1} c_j u_j + c_n u'_n,$$

et déterminons les rapports des coefficients par les équations

$$K'(u_i, u_n) = \pm c_i + c_n K'(u_i, u'_n) = 0 \qquad (i = n - 1, \ldots, n - r),$$

et leur facteur commun par la condition

$$|K(u_n)| = 1.$$

On verra, comme dans le cas $\lambda_n > \lambda_{n-1}$, que u_n vérifie les équations

$$K'(u_i, u_n) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n - r - 1),$$

puisque $\lambda_n > \lambda_{n-r-1}$. Ainsi u_n satisfait à toutes les conditions du problème de minimum et, puisqu'il donne la valeur λ_n à l'intégrale J, c'est la solution du problème.

En résumé, nous avons prouvé, en admettant l'existence de n fonctions harmoniques, l'existence d'une $(n+1)^{\text{ième}}$ et sa propriété de minimum. Il y a donc une série infinie de telles fonctions. Il faut observer qu'un nombre fini seulement de valeurs λ_i peuvent coïncider, car, pour toute valeur de λ, il n'y a qu'un nombre fini ou nul de mineurs de D qui soient nuls (¹). De plus, puisque $+\lambda_i$ ou $-\lambda_i$ sont des zéros de la fonction transcendante entière D, il ne peut y avoir de limite supérieure pour les valeurs λ_i. En définitive, nous obtenons ce théorème :

Il existe une série infinie de valeurs numériques λ_i du paramètre λ et de fonctions harmoniques u_i nulles sur S *et solutions de l'équation*

$$\Delta u_i \pm \lambda_i \mathrm{A}(x, y) u_i = 0.$$

La fonction u_i est solution du problème

$$\mathrm{J} = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = minimum,$$

et elle donne la valeur λ_i à l'intégrale J. *Il n'y a pas de limite supérieure finie pour les nombres λ_i* (²).

V. — Extension aux conditions aux limites généralisées.

Les théorèmes sur l'existence des solutions de

$$\Delta u + \lambda \mathrm{A} u = f,$$

qui satisfont, sur le contour S de Ω, à l'équation

$$u + \Sigma(s) \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma(s)$$

[où $\Sigma(s)$ et $\sigma(s)$ sont des fonctions continues données avec la condition $\Sigma(s) < 0$], peuvent être démontrés en remplaçant la fonction de Green employée (§ II) par la solution de Green de l'équation po-

---

(¹) *Voir* note (¹), p. 451.

(²) Si la fonction A change de signe dans Ω on peut remplacer la condition $|\mathrm{K}| = 1$ soit par $\mathrm{K} = 1$, soit par $\mathrm{K} = -1$. Dans le premier cas on arrive à des valeurs positives λ_i; dans le second cas à des valeurs négatives. L'ensemble des valeurs λ_i se compose donc, si A change de signe, d'une infinité de valeurs positives et d'une infinité de valeurs négatives.

tentielle qui satisfait, sur le contour, à la condition

$$G + \Sigma(s)\frac{\partial G}{\partial n} = 0.$$

L'existence d'une telle fonction a été prouvée dans le cas

$$\Sigma(s) < 0.$$

Sans aucun changement de méthode, on démontrera des théorèmes analogues à ceux du premier cas, les équations du § II *s'appliquant sous la même forme aux conditions aux limites généralisées.*

Les fonctions harmoniques pour ce problème sont les solutions, autres que zéro, de l'équation

$$\Delta u + \lambda A u = 0$$

qui satisfont sur S à la condition

$$u + \Sigma\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Il n'y a de telles solutions que si λ a pour valeur une racine de D, le déterminant D étant formé avec A et la fonction de Green généralisée.

Pour prouver l'existence d'une série infinie de fonctions harmoniques, on peut appliquer les méthodes des paragraphes 3, 4 avec une légère modification.

Considérons, pour cela, le problème de minimum

$$J(u) = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - \int_{(S)} \frac{u^2}{\Sigma} ds = \text{minimum}$$

sous la condition

$$|K(u)| = 1, \qquad \text{avec} \qquad K(u) \equiv \iint_{(\Omega)} A u^2 dx\,dy.$$

Sous l'hypothèse $\Sigma < 0$, il existe une limite inférieure déterminée λ_0 des valeurs de J vérifiant la condition. On peut donc déterminer une série de fonctions

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots$$

telles que

$$K(U_h) = \pm 1$$

(le signe $\pm$ restant le même quel que soit h), et que

$$\lim_{h=\infty} J(U_h) = \lambda_0.$$

De plus, nous pouvons supposer sans restriction que ces fonctions U_h satisfont sur S à la condition

$$U_h + \Sigma \frac{\partial U_h}{\partial x} = 0.$$

Car cette condition, n'affectant les valeurs de ces fonctions que dans une bande aussi étroite que l'on veut enserrant le contour, ne peut altérer la limite inférieure de J.

Définissons une série de fonctions f_h par les équations

$$f_h \equiv \Delta U_h \pm \lambda_0 A U_h$$

où le signe $\pm$ est le même que dans (2). Multiplions cette équation par U_h; en intégrant dans Ω, on aura

$$\lambda_0 - \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_h}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \int_{(S)} U_h \frac{\partial U_h}{\partial n}\, ds = \iint_{(\Omega)} f_h U_h\, dx\,dy,$$

ou, d'après les conditions aux limites,

$$\lambda_0 - J(U_h) = \iint_{(\Omega)} f_h U_h\, dx\,dy.$$

L'hypothèse que $\pm\lambda_0$ n'est pas racine de D conduit à une contradiction comme dans le paragraphe III, les équations restant encore valables. Il n'y a qu'une différence, à savoir dans la démonstration que les fonctions V satisfont à la condition (6). Nous avions utilisé au paragraphe III le fait que les fonctions s'annulent sur le contour. Actuellement, nous trouvons encore que les fonctions vérifient (6) pourvu que les valeurs des expressions

$$\left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right|$$

restent inférieures à une limite finie. Or

$$\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy = \int_{(S)} x\,U_h\,dy - \iint_{(\Omega)} x\frac{\partial U_h}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Donc, si X est le maximum de $|x|$ sur le contour

$$\left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right| < X\int_{(S)} |U_h|\,dy + X\iint_{(\Omega)}\left|\frac{\partial U_h}{\partial x}\right|dx\,dy,$$

$$\left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right| < X\int_{(S)} (U_h^2+1)\,dy + X\iint_{(\Omega)}\left[1+\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Dès lors, ces quantités restent inférieures à une limite finie, car on a

$$\lim_{h=\infty}\left\{\iint_{(\Omega)}\left[\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_h}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy - \int_{(S)}\frac{U_h^2}{\Sigma}\,ds\right\} = \lambda_0, \qquad \Sigma < 0.$$

On prouvera, sans autre changement, le théorème analogue à celui du paragraphe IV :

Il existe une série infinie de valeurs λ_i telles que, pour l'une des valeurs $\lambda = \pm\lambda_i$, l'équation

$$\Delta u + \lambda A u = 0$$

possède une solution u_i différente de zéro et satisfaisant sur le contour à la condition

$$u + \Sigma\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad \Sigma < 0,$$

La fonction u est la solution du problème

$$J(u) = \iint_{(\Omega)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy - \int_{(S)}\frac{u^2}{\Sigma}\,ds = minimum$$

sous les conditions

$$\left|\iint_{(\Omega)} \mathrm{A}u^2\,dx\,dy\right| = 1; \qquad \iint_{(\Omega)} \mathrm{A}u_j u\,dx\,dy = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, i-1).$$

Elle donne à l'expression J *la valeur* λ_i.

Il n'existe pas de limite supérieure finie pour les quantités λ_i (¹).

DEUXIÈME PARTIE.

LES SOLUTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

---

1. — Les solutions doublement périodiques de $\Delta u - u = f(x, y)$.

M. Picard (²) a démontré qu'il existe une fonction de la forme

$$\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) = \log\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \mathrm{R}(x, y, \xi, \eta)$$

[où R est continu ainsi que ses dérivées secondes dans un rectangle Ω de côtés a, b comprenant le point (ξ, η)] qui est doublement périodique avec les périodes a, b, et qui satisfait en tout point de Ω autre que (ξ, η) à l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} - \mathcal{G} = 0.$$

Nous pourrons appeler cette fonction la *fonction de Green doublement périodique* relative à l'équation

$$\Delta v - v = 0$$

pour les périodes a, b.

(¹) *Voir* la note (²), p. 472.

(²) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, 1900, p. 186. *Voir* aussi *Comptes rendus*, 25 janvier 1904, où M. Picard a proposé la question traitée dans la présente Note.

Faisant usage du théorème de Green exactement comme dans le cas d'une fonction de Green ordinaire, nous obtenons la relation

$$\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) = \mathcal{G}(\xi, \eta, x, y).$$

Ainsi $\mathcal{G}$ est doublement périodique en ξ, η aussi bien qu'en x, y, fait qui ressort, du reste, de la forme donnée par M. Picard à la fonction. De plus, $\mathcal{G}$ satisfait en tout point de Ω autre que $\xi = x$, $\eta = y$ à l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \eta^2} - \mathcal{G} = 0.$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} - \mathcal{G} = 0.$$

Considérons maintenant la fonction

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\, dx\, dy;$$

elle est doublement périodique avec les périodes a, b, et puisque

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} f(x, y) \log\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\, dx\, dy$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} R(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\, dx\, dy,$$

nous déduisons de l'équation aux dérivées partielles de R :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f(\xi, \eta) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\, dx\, dy,$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - u = f(\xi, \eta).$$

2. — Théorèmes généraux sur l'existence des solutions doublement périodiques de $\Delta u + \lambda u \mathrm{A}(x, y) = f(x, y)$.

Si $u(x, y)$ est une solution doublement périodique de

$$\Delta u + \lambda \mathrm{A}(x, y) u = f(x, y), \tag{1}$$

le théorème de Green nous conduira par des méthodes bien connues à la formule

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} \{f(x, y) - [1 + \lambda \mathrm{A}(x, y)] u(x, y)\} \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, dx\, dy,$$

où $\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)$ est la fonction considérée dans le dernier paragraphe. Inversement, si u est une solution de cette équation fonctionnelle, le même paragraphe nous apprend que $u(x, y)$ est une solution doublement périodique de

$$\Delta u - u = f - (1 + \lambda \mathrm{A}) u,$$

c'est-à-dire de l'équation (1). Par suite, les solutions doublement périodiques de (1) coïncident avec les solutions de l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = &-\frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} f(x, y) \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, dx\, dy \\ &-\frac{1}{2\pi} \iint_{(\Omega)} [1 + \lambda \mathrm{A}(x, y)] u(x, y) \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

La forme de cette équation diffère de celle qui se présente dans le premier problème aux limites, par le remplacement de $\lambda \mathrm{A}$ en $1 + \lambda \mathrm{A}$; différence qui n'est d'ailleurs nullement essentielle.

Si $\mathfrak{D}$ est le déterminant de l'équation fonctionnelle (déterminant qui est une fonction transcendante de λ), nous arriverons exactement comme dans la première Partie de ce travail, aux théorèmes suivants :

I. *Si λ n'est pas une racine de* D, *il existe une solution double-*

ment périodique et une seule de

$$\Delta u + \lambda A u = f.$$

II. *Si* λ *a une valeur pour laquelle* D *et ses mineurs d'ordre inférieur à* n *s'annulent, le mineur d'ordre* n *restant différent de zéro, il existe* n *solutions doublement périodiques linéairement indépendantes :* Φ_ν (*et* n *seulement*) *de l'équation*

$$\Delta u + \lambda A = 0.$$

Pour chacune des valeurs de λ considérées dans le théorème II, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution doublement périodique de l'équation non homogène est, comme dans le cas du premier problème aux limites, que la fonction

$$F(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Omega)} f(x, y)\, \mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)\, dx\, dy$$

satisfasse aux n équations

$$\iint_{(\Omega)} F(x, y)\, \Psi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le cas du premier problème aux limites, nous avions l'expression

$$\Psi_\nu(x, y) = \text{const.}\ \lambda A(x, y)\, \Phi_\nu(x, y);$$

en remplaçant λA par $1 + \lambda A$, nous aurons, dans le cas présent,

$$\Psi_\nu(x, y) = \text{const.}\ [1 + \lambda A(x, y)]\, \Phi_\nu(x, y),$$

et les conditions précédentes deviennent

$$\iint_{(\Omega)} F(x, y)\, [1 + \lambda A(x, y)]\, \Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0$$

ou

$$\iint F\Phi_\nu\, dx\, dy - \iint F\, \Delta\Phi_\nu\, dx\, dy = 0$$

lorsque $\lambda \neq 0$, puisque

$$\Delta\Phi_\nu + \lambda A \Phi_\nu = 0.$$

D'après le n° **1**, F est une solution doublement périodique de

$$\Delta F - F = f.$$

Nous aurons donc, en appliquant le théorème de Green, et puisque F et Φ_ν sont doublement périodiques :

$$\iint_{\Omega} [F \Delta\Phi_\nu - \Phi_\nu(f + F)]\, dx\, dy = \int \left(F \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial n} - \Phi_\nu \frac{\partial F}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Dès lors, les conditions précédentes prennent la forme

$$\iint_{(\Omega)} F \Phi_\nu\, dx\, dy - \iint_{(\Omega)} \Phi_\nu(f + F)\, dx\, dy = 0$$

ou

$$\iint_{(\Omega)} f(x, y)\, \Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire

$$\Delta u = 0,$$

il existe la solution $\Phi_1 = \text{const.}$, mais, comme on le sait, il n'y a aucune solution continue doublement périodique. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution doublement périodique de

$$\Delta u = f$$

prend la forme

$$\iint_{(\Omega)} F\, dx\, dy = 0.$$

Or

$$\Delta F - F = f,$$

et, puisque F est doublement périodique, nous tirons du théorème de

Green

$$\iint_{(\Omega)} \Delta F \, dx \, dy = \int \frac{\partial F}{\partial n} ds = 0.$$

La condition devient donc

$$\iint_{(\Omega)} f \, dx \, dy = 0$$

ou, puisque Φ_1 est constant,

$$\iint_{(\Omega)} f \Phi_1 \, dx \, dy = 0.$$

Nous arrivons donc, dans tous les cas, au théorème suivant :

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution doublement périodique de*

$$\Delta u + \lambda A u = f,$$

lorsque λ *a l'une des valeurs considérées au théorème II est que* f *satisfasse aux* n *équations*

$$\iint_{(\Omega)} f \Phi_\nu \, dx \, dy = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

où les Φ_ν *sont les solutions linéairement indépendantes de*

$$\Delta u + \lambda A u = 0,$$

pour cette même valeur de λ.

3. — Existence d'une suite infinie de solutions doublement périodiques de $\Delta u + \lambda A u = 0$.

Lorsque $\lambda = 0$, il existe la solution doublement périodique $u_0 = 0$. Nous procéderons par induction pour prouver l'existence d'une suite indéfinie de solutions doublement périodiques. Admettons l'existence de n telles solutions $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, pour les valeurs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de λ. Déterminons les facteurs constants arbitraires de ces solutions de telle façon que

$$|\mathrm{K}(u_i)| = 1 \qquad \text{où} \qquad \mathrm{K}(u_i) = \iint_{(\Omega)} \mathrm{A}\, u_i^2\, dx\, dy,$$

ce qui est possible, sauf quand $\mathrm{K}(u_i)$ est nul. On a dans ce cas, en multipliant

$$\Delta u_i + \lambda_i \mathrm{A}\, u_i = 0$$

par u_i, intégrant dans Ω et appliquant le théorème de Green :

$$\iint_{(\Omega)} u_i \Delta u_i\, dx\, dy = -\iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0.$$

Par suite,

$$u_i = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \lambda_i = \lambda_0 = 0.$$

Nous pouvons donc supposer que toutes nos solutions, sauf peut-être u_0, satisfont à la condition précédente.

Ajoutons les équations

$$u_i(\Delta u_j + \lambda_j \mathrm{A}\, u_j) = 0,$$
$$-u_j(\Delta u_i + \lambda_i \mathrm{A}\, u_i) = 0;$$

intégrons dans Ω et appliquons le théorème de Green; nous aurons

$$(\lambda_j - \lambda_i)\iint_{(\Omega)} \mathrm{A}\, u_j u_i\, dx\, dy = 0,$$

et, par suite, si $\lambda_j \neq \lambda_i$:

$$\mathrm{K}'(u_i, u_j) \equiv \iint_{(\Omega)} \mathrm{A}\, u_i u_j\, dx\, dy = 0.$$

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ les solutions qui correspondent à un certain nombre de valeurs égales du paramètre.

Nous pourrons prendre, à la place de Φ_2, la fonction

$$\Phi'_2 = c_{12}\Phi_1 + \Phi_2,$$

la constante c_{12} étant choisie de telle sorte que

$$K'(\Phi_1, \Phi'_2) = \pm c_{12} + K'(\Phi_1, \Phi_2) = 0.$$

A la place de Φ_3, nous pourrons prendre

$$\Phi'_3 = c_{13}\Phi_1 + c_{23}\Phi'_2 + \Phi_3,$$

les constantes étant choisies de façon que

$$K'(\Phi_1, \Phi'_3) = \pm c_{13} + K'(\Phi_1, \Phi_3) = 0,$$
$$K'(\Phi'_2, \Phi'_3) = \pm c_{23} + K'(\Phi_2, \Phi_3) = 0,$$

et ainsi de suite.

En définitive, nous pouvons supposer que les fonctions u_i satisfont, non seulement aux équations

$$|K(u_i)| = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

mais encore à

$$K'(u_i, u_j) = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ i \neq j).$$

Considérons maintenant le problème de minimum suivant. Il s'agit de rendre minimum l'intégrale

$$J(u) = \iint_{(\Omega)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

lorsque u possède des dérivées secondes continues par rapport à x et y en tout point du rectangle Ω et satisfait aux équations

$$|K(u)| = 1 \qquad \text{où} \qquad K(u) = \iint_{(\Omega)} A u^2\, dx\, dy,$$

$$K'(u_j, u) = \iint_{(\Omega)} A u_j u\, dx\, dy = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$u(\bar{x}, y) = u(\bar{x} + a, y) \qquad (\bar{y} \leqq y \leqq \bar{y} + b),$$
$$u(x, \bar{y}) = u(x, \bar{y} + b) \qquad (\bar{x} \leqq x \leqq \bar{x} + a);$$

où u_j sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles (solutions dont nous avons admis l'existence) et où les côtés du rectangle Ω sont désignés par

$$x = \bar{x}, \qquad x = \bar{x} + a; \qquad y = \bar{y}, \qquad y = \bar{y} + b.$$

Désignons par $|\lambda_n|$ la limite inférieure des valeurs de J sous ces conditions. Nous allons prouver qu'il existe, soit pour $\lambda = |\lambda_n|$, soit pour $\lambda = -|\lambda_n|$, une solution doublement périodique u_n de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda A u = 0,$$

u_n étant linéairement indépendant de $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.

D'après la définition de λ_n, il existe une suite indéfinie de fonctions $U_1, U_2, U_3, \ldots$ satisfaisant aux conditions du problème de minimum et telles que

$$(2) \qquad \lim_{h=\infty} J(U_h) = |\lambda_n|.$$

Nous pouvons même supposer sans restriction que ces fonctions vérifient les conditions

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}+a} \qquad (\bar{y} \leqq y \leqq \bar{y} + b),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}+b} \qquad (\bar{x} \leqq x \leqq x + a),$$

et que

$$K(u) = \pm 1,$$

avec le même signe quel que soit h.

Or on a, soit $|\lambda_n| > |\lambda_{n-1}|$, soit

$$|\lambda_n| = |\lambda_{n-1}| = \ldots = |\lambda_{n-r}|.$$

Dans ce dernier cas, $|\lambda_{n-r}| > 0$, car $u_0 =$ const. est la seule solution doublement périodique de $\Delta u = 0$. Dans les deux cas, le raisonnement employé dans le premier problème aux limites prouvera encore ici l'existence d'une solution u_n du genre annoncé pourvu que les quantités

$$\left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right|$$

restent inférieures, quel que soit h, à une limite fixe

$$(3)\qquad \left|\iint_{(\Omega)} U_h\,dx\,dy\right| \leqq B \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nous considérerons deux cas; supposons d'abord

$$\iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy = 0.$$

Alors on peut remplacer les fonctions U_h par $U_h + C_h$, où les C_h sont des constantes arbitraires, car

$$K(U_h + C_h) = K(U_h) + 2C_h \iint_{(\Omega)} A\,U_h\,dx\,dy + C_h^2 \iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy = K(U_h) = \pm 1$$

et

$$K'(u_j, U_h + C_h) = K'(u_j, U_h) + C_h \iint_{(\Omega)} A\,u_j\,dx\,dy = K'(u_j, U_h) = 0,$$

puisqu'on a

$$\iint_{(\Omega)} A\,u_j\,u_0\,dx\,dy = 0, \qquad u_0 = \text{const.}$$

Enfin

$$J(U_h + C_h) = J(U_h).$$

Les constantes C_h peuvent être choisies de façon que

$$\iint_{(\Omega)} (U_h + C_h)\,dx\,dy = 0,$$

et ces fonctions $U_h + C_h$ vérifient les conditions (3).

Il reste le cas où

$$\iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{A}\, dx\, dy \neq 0.$$

Si l'on a

$$\iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{U}_h\, dx\, dy = 0,$$

les conditions (3) sont satisfaites; sinon, en posant

$$\mathrm{W}_h = \frac{\mathrm{U}_h}{\displaystyle\iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{U}_h\, dx\, dy},$$

nous aurons

$$\operatorname*{limite}_{h=\infty} \mathrm{J}(\mathrm{W}_h) = \frac{|\lambda_n|}{\left[\displaystyle\iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{U}_h\, dx\, dy\right]^2},$$

$$\iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{W}_h\, dx\, dy = 1, \qquad \iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{A}\mathrm{W}_h\, dx\, dy = 0.$$

En résumé, nous pourrons choisir une suite infinie de fonctions prises, soit parmi les U_h et satisfaisant à (3), soit parmi les W_h et telles que

$$\operatorname*{limite}_{h=\infty} \mathrm{J}(\mathrm{W}_h) = 0.$$

La dernière hypothèse est impossible, puisque les équations

$$\iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{A}\, dx\, dy \neq 0,$$

$$\iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{W}_h\, dx\, dy = 1,$$

$$\iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{A}\mathrm{W}_h\, dx\, dy = 0,$$

$$\operatorname*{limite}_{h=\infty} \iint \left[\left(\frac{\partial \mathrm{W}_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{W}_h}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0,$$

$$\mathrm{W}_h(\bar{x}, y) = \mathrm{W}_h(\bar{x} + a, y) \qquad (\bar{y} \leqq y \leqq \bar{y} + b),$$

$$\mathrm{W}_h(x, \bar{y}) = \mathrm{W}_h(x, \bar{y} + b) \qquad (\bar{x} \leqq x \leqq \bar{x} + b),$$

sont incompatibles. Car, autrement, nous aurions, quels que soient x, y, x', y' dans Ω,

$$\lim_{h=\infty}\int_x^{x'}\int_y^{y'}\left(\frac{\partial W_h}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = 0, \qquad \lim_{h=\infty}\int_x^{x'}\int_y^{y'}\left(\frac{\partial W_h}{\partial y}\right)^2 dx\,dy = 0.$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz, on a, pour deux fonctions arbitraires φ, ψ,

$$\left[\int_x^{x'}\int_y^{y'}\varphi\psi\,dx\,dy\right]^2 \leqq \int_x^{x'}\int_y^{y'}\varphi^2\,dx\,dy \times \int_x^{x'}\int_y^{y'}\psi^2\,dx\,dy,$$

et, par suite,

$$\left[\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{\partial W_h}{\partial x}dx\,dy\right]^2 \leqq \omega\int_x^{x'}\int_y^{y'}\left(\frac{\partial W_h}{\partial x}\right)^2 dx\,dy,$$

$$\left[\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{\partial W_h}{\partial y}dx\,dy\right]^2 \leqq \omega\int_x^{x'}\int_y^{y'}\left(\frac{\partial W_h}{\partial y}\right)^2 dx\,dy,$$

où ω est l'aire de Ω. On a donc

$$\lim_{h=\infty}\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{\partial W_h}{dx}dx\,dy = \lim_{h=\infty}\int_y^{y'}[W_h(x',y)-W_h(x,y)]dy = 0,$$

$$(4)\quad \lim_{h=\infty}\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{\partial W_h}{\partial y}dx\,dy = \lim_{h=\infty}\int_x^{x'}[W_h(x,y')-W_h(x,y)]dy = 0.$$

Comme ces équations sont vérifiées, quels que soient x, y, x', y dans Ω, nous aurons

$$\lim_{h=\infty}\iint_{(\Omega)} A(x,y)[W_h(x',y)-W_h(x,y)]\,dx\,dy = 0,$$

ou, puisque

$$\iint_{(\Omega)} A(x,y)\,W_h(x,y)\,dx\,dy = 0,$$

$$\lim_{h=\infty}\iint_{(\Omega)} A(x,y)\,W_h(x',y)\,dx\,dy$$

$$= \lim_{h=\infty}\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b}\left[W_h(x',y)\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a}A(x,y)\,dx\right]dy = 0.$$

Intégrons par parties, nous aurons

$$\lim_{h=\infty}\left\{W_h(x', \bar{y}+b)\iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy \right.$$
$$\left. -\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b}\left[\frac{\partial W_h(x', y)}{\partial y}\int_{\bar{y}}^{y}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} A\,dx\,dy\right]dy\right\} = 0.$$

Mais la limite du second terme est zéro et, par suite, puisqu'on suppose

$$\iint_{(\Omega)} A\,dx\,dy \neq 0,$$

nous aurons

$$\lim_{h=\infty} W_h(x', \bar{y}+b) = 0.$$

D'autre part, l'équation (4) a lieu quels que soient (x, y), (x', y') dans Ω; en particulier, pour $y' = \bar{y}+b$, nous aurons

$$\lim_{h=\infty}\int_{x}^{x'}\left[W_h(x, \bar{y}+b) - W_h(x, y)\right]dx$$
$$= -\lim_{h=\infty}\int_{x}^{x'} W_h(x, y)\,dx = 0,$$

d'où

$$\lim_{h=\infty}\iint_{(\Omega)} W_h\,dx\,dy = 0.$$

Or, on a

$$\iint_{(\Omega)} W_h\,dx\,dy = 1,$$

quel que soit h; il est donc impossible de supposer qu'il existe parmi les U_h une série infinie de fonctions ne satisfaisant pas à la condition (3).

Cette condition étant vérifiée par toutes les fonctions U_h, exception faite de certaines en nombre fini ou nul, la démonstration se déroulera exactement comme dans le cas de la première condition aux limites.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Il existe une série infinie de valeurs λ_i du paramètre λ et de fonctions u_i partout finies, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, doublement périodiques avec les périodes a, b et satisfaisant à l'équation

$$\Delta u_i + \lambda_i \mathrm{A}(x, y) u_i = 0,$$

où A *possède les périodes a, b.*

La fonction $u_i (i \neq 0)$ est solution du problème

$$\mathrm{J} = \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = minimum,$$

sous les conditions

$$u(\bar{x}, y) = u(\bar{x} + a, y) \qquad (\bar{y} \leqq y \leqq \bar{y} + b),$$
$$u(x, \bar{y}) = u(x, \bar{y} + b) \qquad (\bar{x} \leqq x \leqq \bar{x} + a),$$
$$\left| \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} \mathrm{A} u^2\, dx\, dy \right| = 1, \qquad \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+b} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+a} \mathrm{A} u u_j\, dx\, dy = 0$$
$$(j = 0, 1, \ldots, i - 1),$$

et elle donne à l'intégrale J *la valeur* $|\lambda_i|$.

Il y a au plus un nombre fini de valeurs λ_i qui coïncident et $|\lambda_i|$ croît au delà de toute limite (1).

(1) Si A change de signe, l'ensemble des valeurs λ_i se compose d'une infinité de valeurs positives et d'une infinité de valeurs négatives. *Voir* la note (2), p. 472.