JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Complément au Mémoire intitulé « Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources »

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 10 (1904), p. 363-394.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__363_0>

Complément au Mémoire intitulé « Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources » (1);

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE. — § I. Objet de ce complément; équations du mouvement de la nappe liquide. — § II. Formules de deuxième approximation, dans le cas de vitesses presque horizontales. — § III. Petites dénivellations d'une masse aqueuse infiltrée, de profondeurs quelconques, avec ou sans écoulement au dehors. — § IV. Extinction graduelle du mouvement, dans une nappe infiltrée profonde et à bords verticaux, par propagation uniforme d'une onde ascendante.

§ I. — Objet de ce complément; équations du mouvement de la nappe liquide.

1. Dans mon Mémoire *Sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources,* j'ai supposé assez petites pour avoir leurs carrés et produits négligeables les pentes, tant de superficie que de fond, de ces nappes, de manière à pouvoir, quand la nappe est beaucoup plus longue et large que haute ou profonde, regarder partout comme horizontales, *à une première approximation,* les vitesses moyennes locales de ses diverses parties, ou comme verticales les surfaces d'égale charge φ auxquelles ces vitesses

(1) Inséré au commencement de ce Volume, p. 5 à 78.

d'écoulement sont perpendiculaires. Il résultait de là que la charge φ avait, en tous les points d'une verticale quelconque (x, y), même valeur qu'en son plus haut point *mouillé*, intersection de la verticale, (x, y), avec la *surface libre* souterraine, où φ égale l'altitude h, diminuée, par la tension capillaire des innombrables *ménisques* constituant cette surface libre, d'une petite quantité ζ, fonction, donnée en x et y, de la température et de la compacité du sol perméable. Je me propose ici de former des équations de mouvement plus générales, convenant au cas de pentes quelconques tant du *fond* (ou sous-sol imperméable), que de la surface libre souterraine, afin de voir, d'une part, dans l'hypothèse de petites pentes, ce qu'une deuxième approximation ajouterait ou modifierait aux résultats de la première, et, d'autre part, dans l'hypothèse de pentes de fond quelconques, les lois des lents mouvements dus à de petites dénivellations superficielles h.

2. Nous prendrons les deux axes rectangulaires des x et des y dans le plan horizontal mené par le *seuil* de la *source*, si l'on a ménagé, sur la partie du contour de la nappe infiltrée (vue en *plan*) où l'eau arrive à l'air libre, un écoulement assez rapide pour que la lame liquide ruisselant sur le seuil soit sans cesse d'épaisseur négligeable. Lorsque, au contraire, le liquide arrivé à l'air libre y formera une *nappe extérieure*, plus ou moins profonde, animée d'assez lents mouvements pour que la pression y varie, sur chaque verticale ou auprès, suivant la loi hydrostatique, nous prendrons comme plan des xy sa surface libre horizontale, que nous supposerons maintenue à niveau constant : il est clair que la charge φ, somme de la pression, évaluée en hauteur d'eau, et de l'altitude $(-z)$ en (x, y, z), se trouvera alors nulle dans la nappe extérieure et, par suite, sur toutes les portions de la surface du sol perméable qui seront contiguës à cette nappe extérieure, portions constituant les orifices qui relient celle-ci à la nappe infiltrée.

Il pourrait arriver aussi qu'il n'y eût pas d'orifice, ou que la nappe fût dépourvue d'écoulement; nous prendrions alors pour plan horizontal des xy celui où, dans l'équilibre final, la pression serait nulle (abstraction faite de la pression atmosphérique); et la charge φ y tendrait, par suite, vers zéro, comme quand un écoulement est possible.

Dans tous les cas où il y aura à tenir compte de la dépression capillaire ζ, nous admettrons, pour éviter d'inutiles complications, qu'aucune partie de la *nappe infiltrée* n'atteigne la *superficie libre* du sol, c'est-à-dire n'arrive au contact de l'air extérieur. Bref, la nappe infiltrée ne sera limitée alors que par la surface libre souterraine, par des parois et par la nappe extérieure. Car, s'il en était autrement, les points où elle arriverait à fleur de sol seraient le siège d'actions capillaires jusqu'à présent mal définies, et qui y rendraient le ruissellement de l'eau difficile, ce semble, à calculer ou à formuler.

Enfin, nous dirigerons vers le bas l'axe des ordonnées verticales z, qui croîtront, dans la nappe infiltrée, depuis la surface libre souterraine et sans cesse changeante ayant l'équation $z = -h$, jusqu'au fond *fixe* ou sous-sol (que nous supposerons, le plus souvent, imperméable) $z = H$, à profondeur H fonction donnée de x et de y.

3. Tout élément de volume rectangulaire $d\varpi = dx\,dy\,dz$, découpé idéalement dans la partie imbibée du sol, recevra, par unité de temps, à travers ses six faces et à partir de l'époque t, un afflux total de liquide exprimé, comme on sait, par

$$\left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}\right) d\varpi \quad ([1]).$$

Mais, la portion de $d\varpi$ accessible au liquide se trouvant occupée dès l'époque t, cet afflux total est nul; et l'on a

$$\text{(111)} \qquad \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire, vu les formules générales (1) des flux F (p. 12),

$$\text{(112)} \qquad \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0.$$

Telle sera donc l'*équation indéfinie* du problème, équation qui régit les variations, *actuelles* ou dans l'espace, de la charge φ, aux

[1] Nos notations seront celles du Mémoire principal et les numéros désignant les formules feront suite à ceux des formules mêmes de ce Mémoire.

divers points (x, y, z) de la nappe; le coefficient K des flux, fonction de la compacité et de la température du sol, y sera donné en x, y, z.

4. Cette équation étant du second ordre, il faudra, pour compléter la détermination de φ à chaque instant, y joindre une relation convenable, spéciale à chaque élément de la surface qui limite la nappe.

Occupons-nous, d'abord, de la surface commune à la nappe infiltrée et au sol filtrant. Une partie en sera généralement occupée par des *parois*, c'est-à-dire par des solides imperméables, principalement par le sous-sol, quand nous le supposons entièrement ou presque entièrement dépourvu d'orifices. Si l'on appelle $\frac{d\varphi}{dn}$, pour un élément quelconque de cette partie, la dérivée de la charge le long d'une normale dn aboutissant à la surface et issue d'un point intérieur infiniment voisin, le flux $K\frac{d\varphi}{dn}$ qui entre par cet élément sera donc nul. En particulier, sur le fond $z - H = 0$, où les cosinus directeurs de la normale dn ont entre eux mêmes rapports que les dérivées en x, y, z de $z - H$, c'est-à-dire que $-\frac{dH}{dx}, -\frac{dH}{dy}, 1$, la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ égalera, en abstrayant un facteur fini, $\frac{d\varphi}{dx}\frac{dH}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dH}{dy} - \frac{d\varphi}{dz}$, expression qu'il faudra ainsi annuler. On aura donc

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(aux parois)} & \frac{d\varphi}{dn} = 0, \\ \text{(au fond imperméable)} & \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dH}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dH}{dy}\frac{d\varphi}{dy}. \end{array} \right.$$

Le reste de la surface commune à la nappe infiltrée et au sol filtrant sera constitué par des ouvertures, ou *orifices*, aux divers points desquels nous admettons une distribution hydrostatique des pressions extérieures et, par suite, une hauteur nulle φ de charge. Nous y aurons, en conséquence, vu la petitesse des forces vives de filtration et des hauteurs de charge *perdues à la sortie*,

$$(114) \qquad \text{(aux orifices)} \quad \varphi = 0 \quad ([1]).$$

([1]) Si la surface de la nappe extérieure, au lieu d'être fixe et choisie comme

5. Il reste la surface libre souterraine, ou limite supérieure de la nappe, exprimée par l'équation $z = -h$, avec h fonction de x et de y donnée *initialement* et que nous supposerons, pour simplifier, n'avoir à chaque instant t qu'une valeur sur chaque verticale (x, y), mais dont les variations d'un instant à l'autre seront à déterminer. La pression intérieure (évaluée en hauteur de fluide) y étant $-\zeta$, la charge φ y devient $h - \zeta$, et s'y trouve connue dès que h l'est. On aura donc

(115) (à la surface supérieure $z = -h$) $\varphi = h - \zeta$.

Mais il faudra calculer le déplacement élémentaire, $\frac{dh}{dt}dt$, de chaque élément de la surface libre souterraine, situé sur toute verticale *fixe* (x, y), pour obtenir h d'instant en instant. A cet effet, nous appellerons σ la projection totale, sur le plan des xy, de cette surface supérieure $z = -h$, et $d\sigma$ celle de l'élément considéré. Celui-ci aura, dès lors, pour aire $\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$, si $\cos\gamma$ est le troisième des cosinus directeurs de la normale dn à l'élément, tirée *ici* vers l'intérieur de la nappe, ou faisant un angle aigu avec les z positifs. Ces trois cosinus directeurs seront $\frac{dh}{dx}\cos\gamma$, $\frac{dh}{dy}\cos\gamma$, $\cos\gamma$; de sorte que le flux, sortant, pendant l'instant dt, à travers l'élément plan *fixe* $\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$ du sol, ou qui vient transpirer au-dessus, sera $\left(K\frac{d\varphi}{dn}\right)\frac{d\sigma}{\cos\gamma}dt$, c'est-à-dire

$$K\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dh}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dh}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right)d\sigma\, dt.$$

A travers une petite partie quelconque, $\int\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$, de la surface telle qu'elle est à l'époque t, l'afflux ou apport correspondant total de liquide sera donc

$$(116)\qquad dt\int K\left(\frac{d\varphi}{dz} + \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dh}{dy}\frac{d\varphi}{dy}\right)d\sigma.$$

---

plan de repère, était variable, mais connue à chaque instant, le second membre zéro de cette relation (114) ferait place à une fonction donnée de t. L'on continuerait à reconnaître, comme ci-après (n° 7), la détermination complète du problème.

Or c'est, à d'insignifiants écarts près sur le contour, ce volume liquide qui aura surélevé les niveaux de $\frac{dh}{dt}dt$, et aura rempli la capacité libre, appelée μ par unité de volume apparent du terrain, comprise entre la surface considérée $\int \frac{d\sigma}{\cos\gamma}$, telle qu'elle est à l'époque t, et la nouvelle surface, relative à l'époque $t+dt$, si elle se trouve effectivement au-dessus. Appelons, pour fixer les idées, μ_0 ce que devient, aux points de la surface supérieure, la valeur de μ, partout fonction donnée de x, y, z; et, le volume terreux envahi par la nappe se composant de filets verticaux exprimés par $d\sigma\, dh$, auxquels correspondent les capacités $\mu_0\, d\sigma\, dh$ accessibles au liquide, l'afflux total (116) aura aussi la valeur

$$(116\ bis) \qquad dt \int \mu_0 \frac{dh}{dt} d\sigma.$$

Les fonctions sous le signe $\int$, continues par hypothèse, étant très sensiblement constantes dans le *petit champ* commun des deux intégrales (116) et (116 *bis*), seront égales entre elles. Par conséquent, la condition cherchée, propre à déterminer les déplacements élémentaires de la surface libre, est

$$(117) \quad \mu_0 \frac{dh}{dt} = \mathrm{K}\left(\frac{d\varphi}{dz} + \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dh}{dy}\frac{d\varphi}{dy}\right) \qquad (\text{pour } z = -h).$$

Si, au lieu de s'élever, la surface supérieure s'abaissait, ce serait à travers ses éléments tels qu'ils sont à l'époque $t+dt$, qu'on évaluerait l'afflux (alors négatif) y surgissant entre les époques t, $t+dt$; et l'on obtiendrait encore, évidemment, la formule (117) [1].

---

[1] On pourrait même, toujours, construire un peu plus bas ces éléments de la surface à travers laquelle surgissent les flux (116), modificatifs du niveau, savoir, à une petite distance verticale constante ε de la surface actuelle $z = -h$, juste assez au-dessous de cette dernière pour que les flux y acceptent la formule régulière $\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dn}$; car il semble difficile que des anomalies locales, toujours à craindre aux limites des nappes (note de la page 15), ne la mettent pas en défaut

6. On y arriverait aussi, dans tous les cas, même quand le fond se trouve percé d'orifices, en considérant la partie imbibée, sans cesse comprise de $z=-h$ à $z=\mathrm{H}$, d'un filet rectangulaire vertical de terrain, à section droite $d\sigma = dx\,dy$. Les deux flux qui sortent, par unité de temps, à travers les deux faces $(\mathrm{H}+h)\,dy$, $(\mathrm{H}+h)\,dx$, contiguës à l'arête (x, y), sont respectivement

$$dy\int_{-h}^{\mathrm{H}}\mathrm{F}_x dz,\quad dx\int_{-h}^{\mathrm{H}}\mathrm{F}_y dz,$$

tandis que les flux entrant dans le filet par les faces opposées ont les mêmes valeurs, accrues de leurs différentielles respectives en x et y. Enfin, la face inférieure donne accès à un flux, $\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dn}\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$, exprimé par

$$\left[\mathrm{K}\left(\frac{d\varphi}{dz}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\mathrm{H}}{dx}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)\right]_1 d\sigma,$$

ou par

$$\left(\mathrm{F}_z-\mathrm{F}_x\frac{d\mathrm{H}}{dx}-\mathrm{F}_y\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_1 d\sigma,$$

si l'on convient d'affecter de l'indice 1 les quantités qui doivent être prises à la limite supérieure $z=\mathrm{H}$ des intégrales. Or la capacité, $\mu_0\,d\sigma\frac{dh}{dt}$, envahie durant l'unité de temps par le liquide, à la partie supérieure du filet, vaudra l'excédent, pour ces cinq faces, des flux entrés sur les flux sortis; et l'on aura, en divisant par $d\sigma$,

$$(118)\quad \mu_0\frac{dh}{dt}=\frac{d}{dx}\int_{-h}^{\mathrm{H}}\mathrm{F}_x dz+\frac{d}{dy}\int_{-h}^{\mathrm{H}}\mathrm{F}_y dz+\left(\mathrm{F}_z-\mathrm{F}_x\frac{d\mathrm{H}}{dx}-\mathrm{F}_y\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_1.$$

Mais la différentiation complète, en x ou y, des deux intégrales

---

à la surface libre elle-même. On continuerait, alors, à égaler (sensiblement) les deux intégrales (116), (116 *bis*) et, par suite, leurs éléments; car, ajoutées au liquide, de hauteur apparente ε, compris, à l'époque t, au-dessus de la surface $z=-h+\varepsilon$, elles donneraient, à très peu près, deux expressions différentes du volume fluide qui s'y trouve à l'époque $t+dt$. L'équation (117) subsisterait donc.

définies figurant au second membre, donne en tout, si l'on indique respectivement par les indices 1 et 0 les quantités prises aux deux limites supérieure et inférieure (comme on vient de dire pour la première),

$$\int_{-h}^{\mathrm{H}}\left(\frac{d\mathrm{F}_x}{dx}+\frac{d\mathrm{F}_y}{dy}\right)dz+\left(\mathrm{F}_x\frac{d\mathrm{H}}{dx}+\mathrm{F}_y\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_1+\left(\mathrm{F}_x\frac{dh}{dx}+\mathrm{F}_y\frac{dh}{dy}\right)_0,$$

ou bien, par la substitution, sous le signe $\int$, du troisième terme de (111), transposé, à la somme des deux premiers, et par l'intégration en z,

$$\left(-\mathrm{F}_z+\mathrm{F}_x\frac{d\mathrm{H}}{dx}+\mathrm{F}_y\frac{d\mathrm{H}}{dy}\right)_1+\left(\mathrm{F}_z+\mathrm{F}_x\frac{dh}{dx}+\mathrm{F}_y\frac{dh}{dy}\right)_0.$$

La relation (118) devient dès lors identiquement (117), pourvu qu'on y remplace F_x, F_y, F_z par leurs valeurs (1) (p. 12).

7. Si les dénivellations h de la surface supérieure étaient données, à l'époque t, en fonction de x et de y, le système linéaire formé par l'équation indéfinie (112) et par les conditions respectives (113), (114), (115) aux diverses parties de la surface, déterminerait complètement, dans toute la nappe infiltrée, la charge φ. Car, supposé qu'il existât deux solutions distinctes, leur différence φ' vérifierait évidemment les équations

$$(119)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\dfrac{d\varphi'}{dx}\right)+\dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\dfrac{d\varphi'}{dy}\right)+\dfrac{d}{dz}\left(\mathrm{K}\dfrac{d\varphi'}{dz}\right)=0 \text{ partout,}\\ \dfrac{d\varphi'}{dn}=0 \text{ (aux parois), } \varphi'=0 \text{ (aux orif. et à la surf. supér.).}\end{array}\right.$$

Alors la première équation (119), multipliée par φ' et par l'élément de volume $d\varpi$, puis intégrée par parties, à la manière ordinaire, dans toute l'étendue imbibée ϖ du terrain, donnerait, vu l'annulation de φ' ou de sa dérivée en n aux diverses parties de la surface,

$$\int_{\varpi}\mathrm{K}\left(\frac{d\varphi'^2}{dx^2}+\frac{d\varphi'^2}{dy^2}+\frac{d\varphi'^2}{dz^2}\right)d\varpi=0,$$

relation exigeant, dans tout l'espace ϖ, la constance de φ' et, par suite, son annulation comme à la surface supérieure.

L'expression de φ, à l'époque initiale où sont données les dénivellations h, se trouve donc déterminée parfaitement; et, comme la relation (117) fait ensuite connaître pour cette époque, puis, de proche en proche, pour les instants suivants, la vitesse d'élévation ou d'abaissement de la surface libre sur chaque verticale (x, y), le problème des mouvements de la nappe infiltrée paraît bien mis complètement en équation.

§ II. — Formules de deuxième approximation, dans le cas de vitesses presque horizontales.

8. Supposons d'abord la nappe beaucoup plus étendue en longueur et largeur qu'en profondeur, sans orifice de fond, et à petites pentes très graduellement variables, soit de fond, soit de superficie; en sorte que, à une première approximation, les vitesses d'écoulement y soient horizontales, ou, la charge φ, indépendante de la coordonnée verticale z. De plus, admettons la constance, pour chaque verticale (x, y), des deux coefficients spécifiques K et μ_0, qui seront, dès lors, fonction seulement de x et de y. Si l'on appelle Φ la valeur moyenne de φ sur cette verticale, depuis $z = -h$ jusqu'à $z = \mathrm{H}$, *valeur fonction de x, y et t*, l'équation (112) y donnera donc, sensiblement,

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{1}{\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right].$$

Deux intégrations successives en z (après multiplication, chaque fois, par dz) depuis $z = z$ jusqu'à la limite $z = \mathrm{H}$ où $\frac{d\varphi}{dz}$ aura, d'après la seconde relation (113), la valeur approchée $\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}$, donneront

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi - \varphi_1 = &-\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)(\mathrm{H} - z) \\ &- \frac{1}{\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{(\mathrm{H} - z)^2}{2}, \end{aligned}\right.$$

formule permettant d'apprécier les petites variations de φ le long de la verticale (x, y). Or multiplions-la elle-même par $\frac{dz}{\mathrm{H}+h}$ et intégrons de $z=-h$ à $z=\mathrm{H}$, de manière que le premier terme donne précisément la valeur moyenne même Φ de la charge sur toute la partie mouillée de la verticale. Il viendra

$$(121)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi-\varphi_1= & -\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)\frac{\mathrm{H}+h}{2} \\ & -\frac{1}{\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{(\mathrm{H}+h)^2}{6}, \end{aligned}\right.$$

et, en faisant $z=-h$, $\varphi=\varphi_0$ dans (120), puis retranchant (120) de (121),

$$(122)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi-\varphi_0= & \left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)\frac{\mathrm{H}+h}{2} \\ & +\frac{1}{\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{(\mathrm{H}+h)^2}{3}. \end{aligned}\right.$$

Les deux relations (121) et (122) évaluent, comme on voit, les écarts respectifs des valeurs φ_0, φ_1 de la charge, aux extrémités de chaque verticale mouillée, d'avec la charge moyenne Φ.

Si l'unité de longueur est choisie comparable à l'épaisseur $\mathrm{H}+h$ de la nappe aqueuse, les dérivées de Φ en x et y seront, d'après ces formules, très petites comparativement à Φ, puisque l'on admet la petitesse des rapports de $\Phi-\varphi_0$, $\Phi-\varphi_1$ à Φ.

9. Maintenant voyons ce que devient exactement, lorsqu'on tâche d'y introduire Φ au lieu de φ, la condition spéciale (117), qui détermine le changement élémentaire des dénivellations h. Prenons cette condition sous la forme que nous savons être équivalente (118), réduite ici, par l'absence d'orifices de fond, à

$$(123)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_0\frac{dh}{dt} & =\frac{d}{dx}\int_{-h}^{\mathrm{H}}\mathrm{F}_x\,dz+\frac{d}{dy}\int_{-h}^{\mathrm{H}}\mathrm{F}_y\,dz \\ & =\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\int_{-h}^{\mathrm{H}}\frac{d\varphi}{dx}dz\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\int_{-h}^{\mathrm{H}}\frac{d\varphi}{dy}dz\right). \end{aligned}\right.$$

D'autre part, différentions par rapport à x et à y la formule

$$(\mathrm{H}+h)\Phi = \int_{-h}^{\mathrm{H}} \varphi\, dz,$$

qui définit Φ; ce qui donne

$$(\mathrm{H}+h)\frac{d\Phi}{d(x,y)} + \Phi\frac{d(\mathrm{H}+h)}{d(x,y)} = \int_{-h}^{\mathrm{H}} \frac{d\varphi}{d(x,y)}dz + \varphi_1\frac{d\mathrm{H}}{d(x,y)} + \varphi_0\frac{dh}{d(x,y)},$$

relations d'où se tireront les valeurs de $\int_{-h}^{\mathrm{H}} \frac{d\varphi}{d(x,y)}dz$ à porter dans (123). On aura ainsi

$$(124)\quad \begin{cases} \mu_0\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+h)\dfrac{d\Phi}{dx} + \mathrm{K}(\Phi-\varphi_1)\dfrac{d\mathrm{H}}{dx} + \mathrm{K}(\Phi-\varphi_0)\dfrac{dh}{dx}\right] \\ \qquad + \dfrac{d}{dy}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+h)\dfrac{d\Phi}{dy} + \mathrm{K}(\Phi-\varphi_1)\dfrac{d\mathrm{H}}{dy} + \mathrm{K}(\Phi-\varphi_0)\dfrac{dh}{dy}\right]; \end{cases}$$

et les formules approchées (121), (122) de $\Phi-\varphi_1$ et de $\Phi-\varphi_0$ permettront d'éliminer du second membre toute autre fonction inconnue que h et Φ. Comme, en outre, la condition (115) donne $\varphi_0 = h-\zeta$ et, par suite, à très peu près, dans les termes de deuxième approximation, $\mathrm{H}+h = \mathrm{H}+\zeta+\Phi$, la formule approchée (122) pourra s'écrire

$$(125)\quad \begin{cases} \zeta+\varphi_0 \quad \text{ou} \quad h = \zeta+\Phi - \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dx}\dfrac{d\Phi}{dx} + \dfrac{d\mathrm{H}}{dy}\dfrac{d\Phi}{dy}\right)\dfrac{\mathrm{H}+\zeta+\Phi}{2} \\ \qquad - \dfrac{1}{\mathrm{K}}\left[\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\dfrac{d\Phi}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\dfrac{d\Phi}{dy}\right)\right]\dfrac{(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)^2}{3}. \end{cases}$$

L'équation cherchée (de deuxième approximation) en Φ s'obtiendra donc en portant cette valeur de h et sa dérivée en t dans la formule (124), au second membre de laquelle les petites quantités $\Phi-\varphi_1$, $\Phi-\varphi_0$ auront été remplacées par leurs expressions (121), (122) (avec h réduit à $\zeta+\Phi$), et leurs facteurs $\frac{dh}{d(x,y)}$, réduits de même à $\frac{d(\zeta+\Phi)}{d(x,y)}$.

Bref, nous aurons, en Φ et h, un problème à *trois* variables indépendantes, x, y, t, *d'où se trouvera complètement éliminée la coordonnée verticale* z. Or, notre but, ici, était précisément cette élimination de z, immédiate seulement à la première approximation.

10. Pour arriver à des formules simples, supposons constantes la profondeur H du fond et la dépression capillaire ζ sous la surface. La relation (125) sera dès lors

$$(126)\quad h=\zeta+\Phi-\frac{(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)^2}{3\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right];$$

et l'équation (124) se trouvera, de son côté, réduite immédiatement par la destruction mutuelle de quatre termes dans le second membre, à

$$(127)\quad \mu_0\frac{dh}{dt}=\frac{d}{dx}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)\frac{d\Phi}{dx}\right]+\frac{d}{dy}\left[\mathrm{K}(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)\frac{d\Phi}{dy}\right],$$

c'est-à-dire à la forme simple déjà obtenue (p. 21) en première approximation ([1]).

([1]) Si l'on ne négligeait pas les pentes $\frac{d(\mathrm{H},\zeta)}{d(x,y)}$ soit du fond $z=\mathrm{H}$, soit de la superficie telle qu'elle est dans l'état final d'équilibre, avec son élévation ζ due à la capillarité, les quantités entre crochets de (124) deviendraient, tous calculs faits,

$$\mathrm{K}(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)\left[\frac{d\Phi}{d(x,y)}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\mathrm{H}}{dy}\frac{d\Phi}{dy}\right)\frac{d(\mathrm{H}-\zeta)}{d(x,y)}\right]$$
$$-\frac{(\mathrm{H}+\zeta+\Phi)^2}{6}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]\frac{d(\mathrm{H}-2\zeta)}{d(x,y)}.$$

A une première approximation, où Φ disparaîtrait devant $\mathrm{H}+\zeta$, elles se réduiraient à $\mathrm{K}(\mathrm{H}+\zeta)\frac{d\Phi}{d(x,y)}$ et, à une deuxième approximation, où l'on conserverait en outre le terme $\mathrm{K}\Phi\frac{d\Phi}{d(x,y)}$, il est clair que tous les autres termes s'effaceraient devant celui-là, pourvu que les pentes en question $\frac{d(\mathrm{H},\zeta)}{d(x,y)}$ fussent seulement comparables à celles, $\frac{d\Phi}{d(x,y)}$, de la superficie, considérée dans la principale partie *dynamique* Φ de son élévation h; car les uns, ceux où figurent

Comme Φ tend vers zéro, on peut le supposer devenu petit. Ne le négligeons toutefois que dans le facteur $(H+\zeta+\Phi)^2$ du dernier terme de (126), terme déjà très faible et qu'il est permis, sans inconvénient, d'altérer un peu par rapport à lui-même. Alors l'équation (126), différentiée en t, donne

$$(128)\quad \frac{dh}{dt}=\frac{d\Phi}{dt}-\frac{(H+\zeta)^2}{3K}\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d}{dx}\frac{d\Phi}{dt}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{d}{dy}\frac{d\Phi}{dt}\right)\right],$$

relation où l'on peut réduire dans le dernier terme (double), d'après

---

deux dérivées de H ou de ζ avec une de Φ, seraient comparables aux cubes des dérivées premières de Φ, tandis que les autres, les derniers et les plus grands, le seraient aux produits des dérivées premières de Φ par ses dérivées secondes, supposées beaucoup plus petites que Φ. Ainsi, l'équation (127) conserverait sa forme, même en deuxième approximation.

Voici comment on peut reconnaître que les carrés des dérivées premières de Φ en x et y seraient négligeables à côté des dérivées secondes, par suite de l'hypothèse faite que les dérivées successives de Φ sont de plus en plus faibles. Il est naturel d'admettre que toute dérivation en x ou en y de Φ et de ses dérivées produit un rapetissement, relatif, comparable à une certaine puissance, Φ^n, de Φ. Les dérivées premières de Φ seraient, dès lors, comparables à Φ^{1+n} et, les dérivées secondes, à Φ^{1+2n}. Donc, les carrés des dérivées premières atteindraient l'ordre de petitesse de Φ^{2+2n}, ou seraient comme les produits, par Φ, des dérivées secondes.

Il résulte de là que, dans l'hypothèse de $\frac{d(H,\zeta)}{d(x,y)}$ comparable à $\frac{d\Phi}{d(x,y)}$, l'équation (125) continue à se réduire à (126) et donne (128) ci-après. Dès lors, (127) prendrait encore la forme (129); car les différentiations en x et y de (128 *bis*), ou indiquées dans la formule remplaçant (128 *bis*) et qui a le facteur $H+\zeta$, à côté de K, sous un signe $\frac{d}{dx}$ ou $\frac{d}{dy}$, pourraient se faire comme si ce facteur $H+\zeta$ était constant, vu que sa dérivation produirait un rapetissement de l'ordre de $\frac{d\Phi}{d(x,y)}$, ou de Φ^{1+n}, tandis que celle des autres facteurs, comme est le facteur entre crochets de (128 *bis*), ne produit qu'un rapetissement de l'ordre de Φ^n.

On voit donc que l'équation (129) ci-après s'étend, comme (127), au cas de H et ζ, graduellement variables, sauf quand Φ est devenu tellement petit que ses dérivées disparaissent devant celles de H et de ζ. Mais, alors, le phénomène est, en quelque sorte, terminé ou évanoui, et sans intérêt.

cette relation même, $\frac{d\Phi}{dt}$ à $\frac{dh}{dt}$, puis remplacer $\frac{dh}{dt}$ par sa partie principale

$$(128\ bis)\qquad \frac{(\mathrm{H}+\zeta)}{\mu_0}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right]$$

résultant de (127). Enfin la substitution de cette valeur (128) de $\frac{dh}{dt}$ ainsi modifiée, dans (127), donne l'équation en Φ cherchée :

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_0\frac{d\Phi}{dt} &= (\mathrm{H}+\zeta)\left(\frac{d.\mathrm{K}\frac{d}{dx}}{dx}+\frac{d.\mathrm{K}\frac{d}{dy}}{dy}\right)\Phi \\ &+\left(\frac{d.\mathrm{K}\frac{d}{dx}}{dx}+\frac{d.\mathrm{K}\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2}+\frac{\mu_0(\mathrm{H}+\zeta)^3}{3\mathrm{K}}\left(\frac{d.\mathrm{K}\frac{d}{dx}}{dx}+\frac{d.\mathrm{K}\frac{d}{dy}}{dy}\right) \\ &\times\left(\frac{1}{\mu_0}\frac{d.\mathrm{K}\frac{d}{dx}}{dx}+\frac{1}{\mu_0}\frac{d.\mathrm{K}\frac{d}{dy}}{dy}\right)\Phi. \end{aligned}\right.$$

Si, par exemple, le terrain est homogène, ou que K, μ_0 soient constants, cette équation, divisée par K, devient

$$(130)\qquad \frac{\mu_0}{\mathrm{K}}\frac{d\Phi}{dt}=(\mathrm{H}+\zeta)\Delta_2\Phi+\Delta_2\left[\frac{\Phi^2}{2}+\frac{(\mathrm{H}+\zeta)^3}{3}\Delta_2\Phi\right].$$

Le second membre se réduit, en première approximation, à son terme $(\mathrm{H}+\zeta)\Delta_2\Phi$; ce qui donne bien alors l'équation du refroidissement d'une plaque homogène. Et l'on voit que la deuxième approximation ajoute à ce second membre, outre le terme non linéaire $\Delta_2\frac{\Phi^2}{2}$, que l'on connaissait déjà, un terme linéaire en $\Delta_2\Delta_2\Phi$, comparable au précédent quand $\Delta_2\Phi$ est de l'ordre de petitesse de Φ^2.

11. Si l'on posait $\mathrm{H}=0$ et $\zeta=0$, comme nous l'avons fait (au § VI du Mémoire principal) dans le cas d'un fond plat avec source au niveau de ce fond, l'équation (126), réduite à

$$h=\Phi-\frac{\Phi^2}{3\mathrm{K}}\left[\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\Phi}{dy}\right)\right],$$

donnerait

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} - \frac{\Phi}{3K}\Bigg[\Phi\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{d\Phi}{dt} \\ + 2\frac{d\Phi}{dt}\left(\frac{d.K\frac{d\Phi}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d\Phi}{dy}}{dy}\right)\Bigg], \end{aligned}\right.$$

où l'on substituerait à $\frac{d\Phi}{dt}$, dans les petits termes entre crochets, sa valeur de première approximation $\frac{dh}{dt}$, alors égale à

$$(132)\qquad \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2}$$

en vertu de (127). Et cette expression (131), ainsi transformée, de $\frac{dh}{dt}$, portée dans (127), conduirait à l'équation indéfinie en Φ :

$$(133)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_0\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2} \\ + \frac{2}{3K}\Bigg[\mu_0\frac{\Phi^2}{2}\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\left(\frac{1}{\mu_0}\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{1}{\mu_0}\frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2} \\ + \Phi\left(\frac{d.K\frac{d\Phi}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d\Phi}{dy}}{dy}\right)\left(\frac{d.K\frac{d}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d}{dy}}{dy}\right)\frac{\Phi^2}{2}\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Lorsque K et μ_0 sont constants, il vient, en divisant par K,

$$(134)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mu_0}{K}\frac{d\Phi}{dt} &= \Delta_2\frac{\Phi^2}{2} + \frac{2}{3}\left[\frac{\Phi^2}{2}\Delta_2\Delta_2\frac{\Phi^2}{2} + (\Phi\Delta_2\Phi)\Delta_2\frac{\Phi^2}{2}\right] \\ &= \Delta_2\frac{\Phi^2}{2} + \frac{2}{3}\left[\frac{\Phi^2}{2}\Delta_2\Delta_2\frac{\Phi^2}{2} - (\Delta_1\Phi)^2\Delta_2\frac{\Phi^2}{2} + \left(\Delta_2\frac{\Phi^2}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

12. Je n'essaierai pas de tirer parti de ces formules, les calculs de seconde approximation étant loin d'offrir, dans la question présente, l'intérêt qu'ils auraient, par exemple, dans une étude d'ondes régies approximativement par l'équation de d'Alembert ou des cordes vibrantes. En effet, les lentes déformations qu'éprouvent de telles ondes, déformations caractéristiques des phénomènes et dès lors importantes à considérer, sont données *uniquement* par la deuxième approximation; car l'équation de d'Alembert les annule. Mais, ici où la première approximation ramène, en général, le problème des mouvements de la nappe à celui du refroidissement d'une plaque et non à la question des cordes vibrantes, cette première approximation règle déjà, même dans le cas particulier, plus complexe, des équations (133) et (134), les altérations assez rapides du phénomène, et une approximation plus élevée ne peut y changer relativement que peu de chose ([1]).

§ III. — Petites dénivellations d'une masse aqueuse infiltrée, de profondeurs quelconques, avec ou sans écoulement au dehors.

13. Abandonnant l'hypothèse de la quasi-horizontalité des mouvements moyens locaux, supposons maintenant quelconques la profondeur H et les pentes du fond, mais petites les dénivellations h de la surface, ou plutôt leur partie *dynamique* φ_0, autre, d'après (115), que celle, ζ, due à la capillarité. La charge φ étant, dès lors, partout très petite, nous négligerons les carrés et produits de cette fonction ou de ses dérivées. Enfin, pour simplifier, nous supposerons constante, dans la dénivellation h, la partie ζ produite par l'action capillaire, afin de pouvoir prendre, pour surface finale d'équilibre de la nappe, un plan *horizontal*, $z = -\zeta$.

En raison de la continuité de φ, la valeur de cette fonction φ ou de ses dérivées partielles, sur chaque verticale (x, y) et au point où

([1]) Au moment où s'imprimait, vers le commencement de janvier, le Paragraphe XI de ces *Recherches*, consacré à leur application aux trois sources de Cérilly, d'Armentières et de la Dhuis, dont les deux premières appartiennent au bassin de la Vanne, M. Edmond Maillet calculait les débits d'été d'une troisième source de la Vanne, celle dite du *Miroir*, pour laquelle il obtenait, d'après les observations faites de 1886 à 1900, un coefficient de tarissement α égal à 0,05065. Cette quatrième source se classe donc dans le type de celles de a Dhuis et de Cérilly, qui se présentait théoriquement comme devant être le plus ordinaire.

passe actuellement la surface libre souterraine $z = -\zeta - \varphi_0$, pourra n'être pas distinguée de leur valeur au point (x, y) du plan horizontal $z = -\zeta$; car l'erreur entraînée par une telle substitution, étant de l'ordre du produit, par φ_0, de la dérivée en z de la fonction considérée, sera négligeable d'après l'hypothèse faite. Cela revient à *fixer* le champ où existe et où doit être obtenue la charge φ, dans les limites qu'il a effectivement pour t infini, ou pour φ évanouissant. Et ce sont bien les limites à adopter ici; car, par le fait même de la réduction convenue des équations à leurs parties linéaires en φ, on cherche la forme admissible pour φ dans le cas de valeurs initiales φ_0 infiniment petites, produits d'une fonction arbitraire de x et de y par une constante voisine de zéro.

14. La condition (115), ainsi devenue

$$h = \zeta + \varphi \qquad (\text{pour } z = -\zeta),$$

différentiée en t, donnera, comme vitesse $\frac{dh}{dt}$ d'exhaussement de la surface, la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ prise pour $z = -\zeta$. Et cette valeur portée, afin d'éliminer h, dans la relation (117), rendue linéaire par la réduction de son second membre au premier terme, la transformera en une relation capitale, régissant φ à la limite supérieure $z = -\zeta$ du champ, savoir

$$(135) \qquad \mu_0 \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{K} \frac{d\varphi}{dz} \qquad (\text{pour } z = -\zeta).$$

Celle-ci vient compléter la condition d'état initial, où h_0 désignera la valeur primitive de h et $f(x, y)$ la fonction arbitraire donnée $h_0 - \zeta$:

$$(136) \quad \varphi = h_0 - \zeta = f(x, y) \qquad (\text{pour } z = -\zeta \text{ et } t = 0).$$

Ces relations (135) et (136), en s'adjoignant aux équations (112), (113) et (114), déterminent complètement φ. Car, s'il existait deux fonctions différentes φ et $\varphi + \varphi'$ les vérifiant, leur différence φ' satisferait évidemment aux équations suivantes :

$$(137)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(K\dfrac{d\varphi'}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(K\dfrac{d\varphi'}{dy}\right) + \dfrac{d}{dz}\left(K\dfrac{d\varphi'}{dz}\right) = 0 \text{ (partout)}, \\ \text{(à la superficie } z = -\zeta) \quad K\dfrac{d\varphi'}{dz} = \mu_0 \dfrac{d\varphi'}{dt}, \\ \text{(sur le reste de la surface)} \quad \left(\dfrac{d\varphi'}{dn} \text{ ou } \varphi'\right) = 0, \end{cases}$$

et, enfin,

$$(138)\qquad (\text{pour } t = 0 \text{ et } z = -\zeta) \quad \varphi' = 0.$$

Or, la première équation (137), multipliée par φ' et par un élément de volume $d\varpi$, puis intégrée, par parties, à la manière ordinaire, dans toute l'étendue ϖ comprise entre le plan $z = -\zeta$ et les parois ou les orifices, donne immédiatement, grâce aux trois dernières relations (137) et en appelant $d\sigma$ les divers éléments de la surface supérieure, confondue avec sa projection σ sur le plan $z = -\zeta$,

$$-\int_\sigma \mu_0 \frac{d\varphi'}{dt}\varphi'\, d\sigma - \int_\varpi K\left(\frac{d\varphi'^2}{dx^2} + \frac{d\varphi'^2}{dy^2} + \frac{d\varphi'^2}{dz^2}\right) d\varpi = 0,$$

ou bien

$$(139)\qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma \frac{\mu_0}{2}\varphi'^2\, d\sigma + \int_\varpi K\left(\frac{d\varphi'^2}{dx^2} + \frac{d\varphi'^2}{dy^2} + \frac{d\varphi'^2}{dz^2}\right) d\varpi = 0.$$

Mais, d'après (138), le carré φ'^2 est nul initialement sur toute la surface σ; et, s'il cessait de l'être à un moment donné, ce serait pour rendre positive, ainsi que sa dérivée en t, l'intégrale de surface figurant au premier membre de la formule (139), lequel aurait alors tous ses éléments de même signe et ne pourrait pas s'annuler.

Donc $\varphi' = 0$; et la fonction φ qui satisfait aux équations (112), (113), (114), (135) et (136) du problème est unique.

15. Le mode de démonstration qui précède rappelle tout à fait celui par lequel on prouve que la question du refroidissement d'un corps est déterminée par son équation indéfinie et par les conditions ordinaires aux limites ou initiale. C'est que, en effet, le problème actuel est, analytiquement, identique à celui du refroidissement d'un corps athermane isotrope, pourvu de la conductibilité intérieure K, occupant même situation que la nappe aqueuse dans son état final de repos, avec surface maintenue à la température zéro, *aux orifices*, mais calorifiquement imperméable, *aux parois*, ainsi que dans le plan $z = -\zeta$, et dont, enfin, la capacité pour la chaleur serait nulle, sauf dans une couche supérieure mince où, très grande par unité de volume, elle aurait la valeur finie μ_0 par unité d'aire.

Car, alors, la relation (135) exprimerait bien l'échauffement de cette couche par le flux calorifique $K\frac{d\varphi}{dz}$ venu de l'intérieur, tandis que, dans le reste du corps, l'annulation de la capacité pour la chaleur réduirait l'équation indéfinie du refroidissement à celle, (112), des températures stationnaires ([1]).

16. Il est clair qu'une pareille condensation de toute la capacité calorifique du corps dans sa couche supérieure, tout en donnant un cas limite ou extrême de la question du refroidissement, n'est pas de nature à changer la formule générale de la *température* φ. Il y aura donc lieu de prendre pour φ la somme $\sum c\mathrm{UT}$ d'une infinité de *solutions simples*, produits de constantes arbitraires c, dépendant de l'état initial (136), par des facteurs U, T fonctions, respectivement, les premiers, des coordonnées x, y, z, les seconds, du temps t ([2]).

([1]) Si l'on remplaçait, dans (135), $\frac{d\varphi}{dt}$ par $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, les équations de notre problème des petits mouvements de la nappe infiltrée prendraient la forme de celles des ondes provoquées, à la surface du liquide pesant remplissant un bassin, par de rapides impulsions qu'on y exerce du dehors (*voir*, par exemple, mon Volume intitulé *Applications des potentiels, etc.*, p. 578 à 582). Aussi passe-t-on de la solution $\varphi = \sum c\mathrm{U}e^{-mt}$ de la question présente, à celle de la question de ces ondes, en remplaçant simplement les exponentielles e^{-mt} par les facteurs trigonométriques $\cos(t\sqrt{m})$.

([2]) On pourrait même, tout de suite, s'appuyant sur les démonstrations données à propos du problème du refroidissement, prendre $\mathrm{T} = e^{-mt}$. (*Voir* la XV^e de mes Leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie*

Les équations (112), (113), (114), vérifiées séparément par chaque solution simple, deviennent

$$(140)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(K\dfrac{dU}{dx}\right)+\dfrac{d}{dy}\left(K\dfrac{dU}{dy}\right)+\dfrac{d}{dz}\left(K\dfrac{dU}{dz}\right)=0, \\ (\text{aux orifices et aux parois})\ \left(U \text{ ou } \dfrac{dU}{dn}\right)=0, \end{cases}$$

tandis que la relation (135), vérifiée de même, prend la forme

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\frac{K}{\mu_0}\frac{1}{U}\frac{dU}{dz}\ (\text{pour } z=-\zeta).$$

Les deux membres étant indépendants, le premier, des deux coordonnées x et y, le second, du temps t, ont pour valeur une même constante $-m$. Par suite, d'une part, T est proportionnel à e^{-mt}, et l'on peut écrire

$$(141)\qquad \varphi=\sum c\, e^{-mt}U;$$

d'autre part, aux relations (140) s'adjoint, pour compléter la détermination de la forme de U et des *coefficients d'extinction* m des exponentielles, la condition spéciale

$$(142)\qquad K\frac{dU}{dz}=-m\mu_0 U\ (\text{pour } z=-\zeta).$$

17. Multiplions l'équation indéfinie en U, qui est la première (140), par l'élément $d\varpi$ du volume ϖ de la nappe et par une fonction continue U' de x, y, z, qui soit, ou la fonction U elle-même, ou la fonction analogue correspondant à une exponentielle $e^{-m't}$, autre que e^{-mt}; puis intégrons par parties comme on a fait ci-dessus pour établir la formule (139), en tenant compte des conditions aux limites (140), tant pour la fonction U' que pour la fonction U, et de la condition (142) pour la fonction U. Nous aurons

$$(143)\quad m\int_\sigma \mu_0 UU'\,d\sigma=\int_\varpi K\left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}\right)d\varpi.$$

---

avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière, t. I, p. 230 à 245.)

Si l'on fait $U' = U$ dans cette relation, il vient pour m le quotient de deux intégrales, l'une, de volume, l'autre, de surface, essentiellement positives; ce qui montre que *tous les nombres m possibles sont positifs*, ou que ce sont bien des *coefficients d'extinction*.

Si, au contraire, l'on fait U' différent de U et correspondant à un coefficient d'extinction m' autre que m, l'équation analogue à (143), mais en m' et non en m, retranchée de (143), donnera

$$(144)\quad (m - m')\int_\sigma \mu_0 UU'\,d\sigma = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_\sigma \mu_0 UU'\,d\sigma = 0.$$

On pourra donc appliquer la méthode d'élimination de Fourier au calcul des coefficients c affectant les diverses solutions simples, et qui dépendent de l'état initial (136). En effet, si nous appelons U_0 les valeurs des fonctions U à la superficie $z = -\zeta$, la condition (136) devient

$$(145)\qquad \sum cU_0 = f(x, y).$$

Or, en multipliant celle-ci par $\mu_0 U_0 d\sigma$, puis intégrant sur toute l'étendue σ de la surface supérieure, enfin, observant que les termes du premier membre de (145) autres que cU_0 pourront s'écrire $c'U'_0$ ou donneront lieu à l'intégrale $c'\int_\sigma \mu_0 U_0 U'_0\,d\sigma$, nulle en vertu de (144), l'on aura bien

$$(146)\qquad c\int_\sigma \mu_0 U_0^2\,d\sigma = \int_\sigma \mu_0 f(x, y)\,U_0\,d\sigma.$$

Et l'on en déduira le coefficient c quelconque d'amplitude, qui s'y trouve *séparé* de tous les autres.

18. Supposons maintenant la nappe aqueuse cylindrique ou prismatique, c'est-à-dire limitée par des bords verticaux, reliant la surface libre $z = -\zeta$ à un fond *horizontal* $z = H$. Et admettons, d'une part, que le coefficient K des flux soit le produit $k\kappa$ d'une fonction positive k de x et de y, par une fonction κ de z, également positive, égale à 1 à la surface supérieure $z = -\zeta$, et que le rapport $\frac{\mu_0}{k}$ soit constant; d'autre part, que le fond soit, tout entier, ou une paroi, ou un orifice, et que chaque bande verticale des bords se trouve aussi, de haut en bas, ou tout entière paroi, ou tout entière orifice.

Si alors on prend pour fonctions U les produits de facteurs V, dépendant de x et de y, par des facteurs, Z, dépendant de z seul et se réduisant à 1, comme $\varkappa$, à la surface supérieure, d'abord, l'équation indéfinie, déduite de la première relation (140), deviendra immédiatement

$$-\frac{1}{k\mathrm{V}}\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)\right]=\frac{1}{\varkappa\mathrm{Z}}\frac{d}{dz}\left(\varkappa\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right).$$

Et ses deux membres, indépendants, le premier, de z, le second, de x et de y, se réduiront à une même constante, que j'appellerai ν; de sorte que l'équation indéfinie se dédoublera, pour régir séparément U et Z, dans les deux suivantes :

$$(147)\qquad \frac{d}{dx}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)=-\nu k\mathrm{V},\qquad \frac{d}{dz}\left(\varkappa\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)=\nu\varkappa\mathrm{Z}.$$

L'on peut, pour fixer les idées, considérer la fonction V uniquement sur la surface supérieure σ, où x, y prennent toutes leurs valeurs et au contour de laquelle pourront alors être rapportées les conditions (140) concernant les parois et ouvertures verticales, à normales dn dirigées comme celles de ce contour. En effet, ces conditions, où il faudra faire $\mathrm{U}=\mathrm{VZ}$, seront

$$(148)\qquad \left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\text{ ou }\mathrm{V}\right)=0\quad(\text{sur le contour de }\sigma),$$

tandis que la relation d'état initial (145), où $\mathrm{U}=\mathrm{U}_0=\mathrm{VZ}_0=\mathrm{V}$, deviendra

$$(149)\qquad \sum c\mathrm{V}=f(x,y).$$

Or l'adjonction des relations (148) et (149) à la première équation (147) constitue précisément le système d'équations qui déterminerait la température v, mise sous la forme ordinaire $v=\sum c\,\mathrm{V}\,e^{-\nu t}$, dans une plaque à bases imperméables qui recouvrirait la surface σ et aurait, avec $f(x, y)$ pour température initiale, son contour en partie imperméable et en partie maintenu à zéro, pourvu que l'équation indéfinie de son refroidissement fût

$$(150) \qquad k\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(k\frac{dv}{dy}\right).$$

Donc, si nous admettons qu'on ait résolu ce problème de refroidissement, les fonctions V, les constantes ν, toutes positives, et les coefficients c d'amplitude, seront connus.

Cela posé, et l'intégration de la seconde équation indéfinie (147), en Z, introduisant deux constantes arbitraires, il restera, pour déterminer ces constantes et le coefficient corrélatif m d'extinction de l'exponentielle e^{-mt}, d'une part, les deux relations

$$(151) \quad Z = 1 \quad (\text{pour } z = -\zeta), \qquad \left(\frac{dZ}{dz} \text{ ou } Z\right) = 0 \quad (\text{pour } z = H),$$

dont la seconde résultera des troisième ou deuxième conditions (140) relatives au fond, et, d'autre part, une fois Z ainsi complètement défini, l'équation (142), devenue

$$(152) \qquad \frac{dZ}{dz} = -m\frac{\mu_0}{k} \quad (\text{pour } z = -\zeta);$$

d'où se tirera la valeur de m correspondant à chaque valeur de ν. Le problème sera donc résolu.

19. Supposons $\varkappa = 1$ ou K fonction uniquement de x et de y, comme au § II. Alors la seconde équation (147) admet les deux intégrales particulières $\operatorname{coh}(H\sqrt{\nu} - z\sqrt{\nu})$, $\operatorname{sih}(H\sqrt{\nu} - z\sqrt{\nu})$, dont l'une sera exclue par la relation (151) relative au fond $z = H$, savoir la seconde, si ce fond est une paroi, et la première, s'il est un orifice. En attribuant à l'intégrale particulière subsistante le coefficient convenable pour vérifier la première relation (151), l'on aura donc, dans ces deux cas respectifs d'un fond imperméable et d'un fond orifice,

$$(153) \quad Z = \text{soit} \quad \frac{\operatorname{coh}(H\sqrt{\nu} - z\sqrt{\nu})}{\operatorname{coh}(H\sqrt{\nu} + \zeta\sqrt{\nu})}, \qquad \text{soit} \quad \frac{\operatorname{sih}(H\sqrt{\nu} - z\sqrt{\nu})}{\operatorname{sih}(H\sqrt{\nu} + \zeta\sqrt{\nu})};$$

et l'équation (152) donnera enfin, pour calculer les coefficients d'extinction m, la formule

$$(154)\qquad m = \frac{K}{\mu_0}\sqrt{\nu}(\text{tah ou coth})(H\sqrt{\nu} + \zeta\sqrt{\nu}).$$

Si l'on y pose, pour abréger, $(H+\zeta)\sqrt{\nu} = \alpha$, cette expression de m sera proportionnelle à l'une des deux fonctions $\alpha\,\text{tah}\,\alpha$ ou $\alpha\,\text{coth}\,\alpha$. Or la dérivée de celle-ci en α est $\frac{\text{sih}(2\alpha) \pm 2\alpha}{2(\text{coh}\,\alpha \text{ ou } \text{sih}\,\alpha)^2}$, fraction positive comme α; car son numérateur, nul pour $\alpha = 0$, a sa propre dérivée par rapport à 2α, savoir $\text{coh}(2\alpha) \pm 1$, essentiellement positive. Donc m croît avec α, ou avec ν; et la plus petite valeur de ν donnera la plus petite de m, celle à laquelle correspond l'expression asymptotique, cUe^{-mt}, de φ.

20. Les résultats deviennent particulièrement simples quand la profondeur H est très grande; car, alors, tous les cosinus ou sinus hyperboliques figurant dans les formules (153) sont, du moins pour les valeurs modérées de z, ceux d'arguments considérables et se réduisent à des moitiés d'exponentielles. Il vient donc, vu que, d'ailleurs, dans (154), la tangente ou cotangente hyperbolique ne diffère plus sensiblement de 1,

$$(155)\qquad (\text{pour H très grand})\left\{\begin{array}{l} Z = e^{-(\zeta+z)\sqrt{\nu}}, \qquad m = \dfrac{K}{\mu_0}\sqrt{\nu}, \\ \varphi = \Sigma c V e^{-\sqrt{\nu}\left(\zeta+z+\frac{K}{\mu_0}t\right)}. \end{array}\right.$$

On voit que la charge φ ne dépend plus que des trois variables

$$x,\quad y;\quad z + \frac{K}{\mu_0}t,$$

ou que la relation (135), écrite

$$(156)\qquad \frac{\mu_0}{K}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

cesse d'être une condition spéciale à la surface supérieure, pour devenir, concurremment avec (112), une véritable équation indéfinie. Mais ce cas limite d'une nappe infiniment profonde mérite d'être traité plus simplement, et c'est par son étude que je terminerai le présent travail.

§ IV. — Extinction graduelle du mouvement dans une nappe infiltrée profonde et à bords verticaux, par propagation uniforme d'une onde ascendante.

21. Ne faisons pas tout de suite infinie la profondeur H. Supposons-la seulement constante, et, dans cette hypothèse, considérant l'équation indéfinie (112) en φ (où K, ici, ne dépend pas de z) à l'intérieur de la section horizontale, que nous appellerons σ, faite à un niveau z quelconque dans la nappe prismatique, multiplions (112) par $\varphi\, d\sigma$; puis intégrons dans toute l'étendue σ, en appliquant aux deux premiers termes l'intégration par parties. La condition $\left(\frac{d\varphi}{dn} \text{ ou } \varphi\right) = 0$ relative au contour de la section annulera partout la somme des deux termes intégrés; et nous aurons

$$-\int_\sigma K\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2}\right) d\sigma + \int_\sigma K\varphi \frac{d^2\varphi}{dz^2}\, d\sigma = 0,$$

ou bien, en remplaçant $\varphi \frac{d^2\varphi}{dz^2}$ par $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right) - \frac{d\varphi^2}{dz^2}$, multipliant par 2 et réduisant,

$$(157) \qquad \frac{d^2}{dz^2}\int_\sigma K\varphi^2\, d\sigma = 2\int_\sigma K(\Delta_1\varphi)^2\, d\sigma.$$

Cette équation montre que l'intégrale $\int_\sigma K\varphi^2\, d\sigma$ a sa dérivée seconde en z essentiellement positive, ou sa dérivée première en z,

$$2\int_\sigma K\varphi \frac{d\varphi}{dz}\, d\sigma,$$

croissante depuis la surface $z = -\zeta$ jusqu'au fond $z = H$. Cette dérivée première, étant visiblement nulle au fond, où disparaît soit la charge φ, soit le flux entrant $K\frac{d\varphi}{dz}$, se trouve donc négative quel que soit z; et, par suite, l'intégrale $\int_\sigma K\varphi^2\,d\sigma$ est décroissante de haut en bas. Comme sa valeur, essentiellement positive, ne lui permet de décroître en tout que dans une mesure finie, sa dérivée en z devra donc s'évanouir asymptotiquement aux grandes profondeurs z, si l'on fait H de plus en plus considérable.

Ainsi la fonction continue φ, à valeurs comparables sur toute l'étendue de σ, ne croît pas sans limite avec z, quelque grand que devienne H, puisque la moyenne (convenablement définie) de φ^2, à chaque niveau z, est tenue de diminuer quand z grandit.

22. Si la condition relative au fond est $\varphi = 0$, l'intégrale $\int_\sigma K\varphi^2\,d\sigma$ s'y annulera. Or cette intégrale, ayant sa dérivée en z évanouissante aux grandes profondeurs, s'annulera aussi, très sensiblement, aux niveaux z plus ou moins voisins du fond; et, comme tous ses éléments sont de même signe, l'on y aura, quand H croîtra sans limite, φ très petit, ou $\frac{d\varphi}{dz}$ tendant vers zéro.

De même, quand la condition au fond est $\frac{d\varphi}{dz} = 0$, la dérivée suivante $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$ y tend vers zéro, si H grandit indéfiniment. Car l'équation (112), où K ne dépend, par hypothèse, que de x et de y, différentiée en z, montre que $\frac{d\varphi}{dz}$, substitué à φ dans cette équation (112), y satisfait non moins que φ. Et l'on peut en dire autant de la condition relative au contour des sections σ, savoir $\frac{d\varphi}{dn}$ ou $\varphi = 0$: le symbole $\frac{d}{dn}$ y désignant $(\cos\alpha)\frac{d}{dx} + (\sin\alpha)\frac{d}{dy}$, avec α indépendant de z, la dérivation par rapport à z les transforme en $\left(\frac{d}{dn}\frac{d\varphi}{dz} \text{ ou } \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$.

On peut donc bien, dans le cas présent où le fond est une paroi, dire de $\frac{d\varphi}{dz}$ ce qu'on disait de φ quand le fond était un orifice.

D'après cela, l'expression $\frac{\mu_0}{K}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi}{dz}$, premier membre de (156), que j'appellerai ψ et qui, d'après (135), s'annule à la surface supérieure $z = -\zeta$, s'annulera aussi au fond, avec φ et $\frac{d\varphi}{dz}$, quand, H croissant indéfiniment, le fond sera un orifice. Et dans le cas où ce serait une paroi, la dérivée $\frac{d\psi}{dz}$ s'y annulera. D'ailleurs, même dans ce cas, φ et, par suite, $\frac{d\varphi}{dt}$ restent finis pour z infini; de sorte que l'expression ψ elle-même ne grandit pas sans limite. Ainsi, l'on aura toujours

$$(158) \qquad \text{(pour H et } z \text{ infinis)} \qquad \psi\frac{d\psi}{dz} = 0.$$

23. Cela posé, continuant à appeler ψ le premier membre de l'équation (156), évaluons l'expression

$$(159) \qquad \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\psi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\psi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{d\psi}{dz}\right),$$

analogue au premier membre de (112). Il viendra, vu que le rapport $\frac{\mu_0}{K}$ est supposé constant et le coefficient K des flux indépendant de z,

$$K\frac{d\psi}{dx} = \left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dz}\right)\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

puis

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\psi}{dx}\right) = \left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dz}\right)\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

L'on aura de même $\frac{d}{dy}\left(K\frac{d\psi}{dy}\right)$ et enfin

$$\frac{d}{dz}\left(K\frac{d\psi}{dz}\right) = K\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi}{dz}\right) = \left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dz}\right)\frac{d}{dz}\left(K\frac{d\varphi}{dz}\right).$$

L'expression (159) devient ainsi

$$\left(\frac{\mu_0}{K}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dz}\right)\left[\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{d\varphi}{dz}\right)\right],$$

c'est-à-dire zéro, en vertu de (112).

Donc la fonction ψ vérifie la même équation (112) que φ. Et elle satisfait également, sur le contour de chaque section horizontale σ, à la même condition que φ : car cette condition, $\left(\frac{d\varphi}{dn} \text{ ou } \varphi\right) = 0$, différentiée en t, donne $\left(\frac{d}{dn}\frac{d\varphi}{dt} \text{ ou } \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$; et l'on vient de voir (p. 388) que, d'autre part, $\left(\frac{d}{dn}\frac{d\varphi}{dz} \text{ ou } \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0$. L'on a bien, par suite,

$$(160) \qquad \left(\frac{d\psi}{dn} \text{ ou } \psi\right) = 0 \qquad \text{(sur le contour de } \sigma\text{)}.$$

L'on obtiendra en conséquence, pour ψ, à chaque niveau z, une relation analogue à (157), ou prouvant que l'intégrale $\int_\sigma K\psi^2\, d\sigma$ a sa dérivée première en z, $2\int_\sigma K\psi \frac{d\psi}{dz} d\sigma$, décroissante de haut en bas. Comme celle-ci, dans le cas d'une profondeur H infinie, est nulle au fond d'après (158), elle ne pourra qu'être, alors, négative à tous les niveaux; et la fonction essentiellement positive $\int_\sigma K\psi^2\, d\sigma$ ne pourra pas croître de la surface au fond. Or, l'équation (135) l'annule à la surface. Donc elle sera nulle partout, et l'on aura identiquement $\psi = 0$.

24. C'est bien dire que la relation (156) devient une équation indéfinie du problème, reliant directement la manière dont la charge φ varie avec t à la manière même dont elle variait initialement avec z. Son intégrale exprime, en effet, que φ dépend de z et de t uniquement par la variable intermédiaire $z + \frac{\mu_0}{K} t$. Donc, dès que les dénivellations données, pour $t = 0$, à la surface $z = -\zeta$, ont fait connaître partout la charge *initiale* $\varphi = F(x, y, z)$, déterminée, en tous les points (x, y, z) de la nappe, par les relations (112), (113), (114) et (115), ces charges résultent, à toutes les époques t ultérieures, de la formule

$$(161) \qquad \varphi = F\left(x, y, z + \frac{\mu_0}{K} t\right);$$

et l'état physique, les flux de transpiration, qu'elles entraînent, se propagent de bas en haut, sur chaque verticale, avec la vitesse ou *célérité* constante $\frac{\mu_0}{K}$. *Chaque état physique réalisé d'abord aux* *profondeurs z croissantes, vient se produire successivement à tous les niveaux supérieurs, jusqu'à la surface $z=-\zeta$, où il disparaît.* Et l'évanouissement graduel du phénomène, dans le temps, se fait, à chaque niveau z, comme il s'était fait initialement, dans l'espace, de ce niveau aux niveaux plus bas. Le mouvement s'éteint par la durée, comme par la profondeur.

Il est vrai que les équations (112), (113) et (114) doivent être vérifiées, par φ, à toute époque t et non pas seulement pour $t=0$. Mais, dès que la nappe cylindrique est supposée indéfinie vers le bas, avec évanouissement simplement asymptotique de φ pour $z=\infty$, ces équations (112) à (114), qui régiraient les températures *stationnaires* dans un cylindre géométriquement identique à la nappe et à génératrices ou imperméables ou maintenues à zéro *sur toute leur longueur*, sont autant satisfaites, *en chaque point* (x, y, z) de l'espace situé au-dessous du plan $z=-\zeta$, quand le cylindre a un mouvement ascendant arbitraire, que lorsqu'il est fixe. Et elles admettent ainsi pour intégrale, non seulement $\varphi=\mathrm{F}(x, y, z)$, mais aussi $\varphi=\mathrm{F}(x, y, z+\mathrm{T})$, où T désignerait une fonction quelconque du temps. C'est cette fonction arbitraire T, nulle, pour $t=0$, en raison de (115) où h est alors connu, que l'équation (135) a déterminée pour tous les instants ultérieurs (¹).

25. Il y a, du moins quand le coefficient K des flux est constant, des cas intéressants où la fonction F elle-même peut être exprimée non plus seulement en série de solutions simples, sous la forme

$$\Sigma c \mathrm{V} e^{-(\zeta+z)\sqrt{\gamma}},$$

mais en termes finis. C'est, d'abord, le cas où la dénivellation initiale φ_0 n'a des valeurs, $f(x, y)$, différentes de zéro, que sur une très petite fraction de la surface supérieure $z=-\zeta$, et loin de son contour; en sorte que la condition relative aux limites tant inférieure que latérales

(¹) Les résultats précédents ont été résumés dans trois Notes des 8, 16 et 22 août 1904 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. CXXXIX, p. 387, 417 et 441).

de la nappe puisse être censée se réduire à

$$\varphi = 0 \quad (\text{pour } x, y \text{ ou } z \text{ infinis}).$$

Alors le potentiel newtonien, $\int \frac{f(x_0, y_0)\,d\sigma}{r}$, d'une couche fictive de matière étalée sur le plan $z = -\zeta$, et ayant, au point quelconque (x_0, y_0) de ce plan, la valeur $f(x_0, y_0)$ par unité d'aire, potentiel où r désigne la distance du point quelconque (x, y, z) de la nappe à l'élément $f(x_0, y_0)\,d\sigma$ de la couche, permet de représenter simplement la charge initiale $F(x, y, z)$; car l'on a

$$(162)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_\sigma \frac{f(x_0, y_0)\,d\sigma}{r} \\ &= \frac{\zeta + z}{2\pi}\int_\sigma \frac{f(x_0, y_0)\,d\sigma}{[(\zeta + z)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

En effet, la fonction potentielle et, par suite, sa dérivée en z, nulles aux distances infinies de la couche supposée limitée, vérifient, en outre, à toutes les distances $\zeta + z$ de son plan autres que zéro, l'équation indéfinie (112), devenue $\Delta_2 \varphi = 0$; et, enfin, la dérivée en z de la même fonction potentielle se réduit, comme on sait, pour $\zeta + z$ infiniment petit, au produit de -2π par la densité superficielle $f(x, y)$, prise égale à φ_0, de la couche.

Un second cas est celui où la dénivellation initiale ne s'étend que sur une région de la surface supérieure encore petite relativement, mais voisine d'un côté vertical de la nappe constitué soit par une paroi, soit par un orifice. Il suffit alors d'imaginer la nappe latéralement indéfinie en tous sens, comme dans le cas précédent, et de calculer, dans (162), le potentiel $\int \frac{f(x_0, y_0)\,d\sigma}{r}$, pour une couche qui aurait encore la masse $f(x_0, y_0)$, par unité d'aire, sur la superficie $z = -\zeta$ *effective*, mais une masse égale à celle-là, *en valeur absolue*, au point du plan $z = -\zeta$ symétrique du point quelconque (x_0, y_0) de cette superficie, par rapport à la face verticale considérée, en attribuant, d'ailleurs, à cette masse géométriquement symétrique de la première, même signe qu'à celle-ci, si la face latérale en question est une paroi, et signe contraire, si elle est un orifice. Car les valeurs du potentiel total et, par suite, de sa dérivée en z, proportionnelle à φ, seront alors, évidemment, égales et de même signe de part et d'autre du plan vertical de symétrie, dans le premier cas, égales et de signe contraire, dans le second; de sorte que la condition correspondante

$$\left(\frac{d\varphi}{dn} \text{ ou } \varphi\right) = 0$$

se trouvera, vu la continuité de φ, vérifiée d'elle-même sur ce plan. Celui-ci pourra donc devenir soit une paroi, soit un orifice, dans la nappe censée d'abord indéfinie latéralement, sans que rien soit changé au phénomène.

26. On conçoit qu'en associant ainsi, aux valeurs effectives $f(x_0, y_0)$ de φ_0 sur la partie du plan horizontal $z = -\zeta$ où existe la nappe, certaines valeurs fictives sur *plusieurs* parties du même plan où elle ne s'étend pas, valeurs *symétriques* des premières (quant à leur distribution), par rapport aux bords verticaux effectifs, et prises soit avec mêmes signes, soit avec signes contraires, suivant qu'ils sont occupés par des parois ou par des orifices, l'on obtienne parfois, sur une partie en tout finie ou infinie du plan $z = -\zeta$, une couche fictive totale,

$$\int f(x_0, y_0)\, d\sigma,$$

offrant ces deux genres respectifs de symétrie par rapport à toutes les faces latérales de la nappe proposée. Et il est clair qu'alors la formule (162) continue à exprimer, en tous les points (x, y, z) de celle-ci, la charge initiale $\varphi = F(x, y, z)$.

Toutefois, quand la superficie $z = -\zeta$ de la nappe a plus de deux côtés ou en a de parallèles, que c'est, par exemple, un rectangle, ou un triangle équilatéral, etc., et que, par suite, la couche fictive totale $\int f(x_0, y_0)\, d\sigma$ offre une distribution périodique *sur une étendue* du plan $z = -\zeta$ *infinie dans les deux sens*, si, de plus, les faces latérales sont toutes des parois, ou que la nappe infiltrée, privée d'écoulement, ait son volume invariable, il y aura lieu (comme j'ai dit au n° **2**) de placer l'origine des z, de manière à annuler la valeur moyenne de la dénivellation initiale $\varphi_0 = f(x, y)$. Sans cela, le potentiel serait infini et la charge initiale (162) ne tendrait pas vers zéro dans les grandes profondeurs z (1).

Si l'on veut en arriver alors jusqu'aux valeurs numériques de φ, chacun des compartiments périodiques, égaux à la base supérieure de la nappe proposée, en lesquels se trouve divisé le plan $z = -\zeta$, donne une partie distincte de l'intégrale; et celle-ci devient ainsi une *série double*, plus ou moins convergente, dont le calcul peut être fort abrégé par des procédés spéciaux (2).

---

(1) On peut voir à ce sujet, dans le Tome II, p. 45, de ma *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière,* la discussion concernant le problème analogue de l'échauffement permanent d'un corps par des sources calorifiques extérieures, voisines de sa surface.

(2) J'ai exposé, au n° 316* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments,* p. 103* à 108*), ces procédés de réduction, qui ont été appliqués effectivement en novembre 1883, par Barré de Saint-Venant et M. Flamant, à la question des mouvements d'un liquide dans un vase prismatique, d'où ce liquide s'écoule par un petit orifice percé au milieu de la base (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. XCVII, p. 1027 et 1105). La solution de ce problème dépend d'un potentiel des vitesses complètement analogue au potentiel newtonien que nous considérons ici, comme je l'avais montré, dès 1873, au n° 202, p. 546, de mon *Essai sur la théorie des eaux courantes* (*Mémoires des Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris, t. XXIII).