JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. D'ADHÉMAR

Sur une classe d'équations aux dérivées partielles, du second ordre, du type hyperboliques, à 3 ou 4 variables indépendantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 10 (1904), p. 131-207.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__131_0>

Sur une classe d'équations aux dérivées partielles, du second ordre, du type hyperbolique, à 3 ou 4 variables indépendantes ;

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

PRÉFACE.

Les équations aux dérivées partielles peuvent être étudiées à deux points de vue : ou bien l'on cherche une intégrale contenant *tout l'arbitraire possible* (1) : c'est le PROBLÈME DE CAUCHY, et l'on regarde alors, en général, tous les éléments comme *analytiques* (développables en série de Taylor); ou bien l'on cherche une intégrale définie par des *conditions données* sur une *frontière donnée :* c'est le problème de la Physique mathématique, le PROBLÈME DANS LE DOMAINE RÉEL, et les éléments ne sont pas forcément analytiques.

Ce Mémoire est consacré à l'étude du PROBLÈME RÉEL pour les équations :

$$A(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + fu + h$$

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces* (Gauthier-Villars), t. II, p. 97. — E. GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles* (Hermann).

et

$$B(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots + h,$$

les a, b, ..., h étant des fonctions des variables indépendantes.

L'équation

$$A(u) = f(x, y, z)$$

a été étudiée, à ce point de vue de détermination d'une intégrale par ses valeurs sur une surface, par M. *Volterra* (¹), professeur à l'Université de Rome.

Le Mémoire de M. Volterra est d'une lecture difficile, mais il suffit de lire les pages 182-184, puis 185-193, pour saisir son *idée fondamentale,* qui se rattache à la méthode de *Green* pour le problème de Dirichlet, et à la méthode de *Riemann* pour les équations du type :

$$\text{(H)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + d.$$

Les équations (H), dites *hyperboliques,* admettent pour *caractéristiques* les parallèles aux *bissectrices des axes* (²). M. Volterra a reconnu intuitivement que les cônes Λ parallèles au cône

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

jouent le rôle de *caractéristiques* pour l'équation

$$A(u) = f,$$

et cela plusieurs années avant que M. J. Beudon, au point de vue du problème de Cauchy, ait étendu la définition des caractéristiques au cas des équations à *plus de deux variables* indépendantes.

Pour l'équation de Laplace, l'analogue de Λ est un point, et il existe des différences profondes entre les équations à caractéristiques

(¹) *Acta mathematica,* t. XVIII, 1894.

(²) Ém. Picard, *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1899 et *Cours de la Sorbonne,* 1899, a insisté sur la disposition nécessaire des données par rapport à ces droites.

réelles, dites *hyperboliques*, et les équations à caractéristiques *imaginaires*, dites *elliptiques* ([1]).

Nous traitons donc ici du *Problème réel* pour des équations à *caractéristiques réelles*.

Tout d'abord j'ai mis en relief la notion de *conormale* ([2]), et l'idée et le mot ont été adoptés, de suite, par MM. Hadamard ([3]) et Coulon ([4]).

Par là j'*évite les longs calculs* de M. Volterra et, en second lieu, je détermine les *surfaces privilégiées*, c'est-à-dire celles qui sont susceptibles de *déterminer une intégrale* avec *moins* de données que les surfaces ordinaires, et cela tout *intuitivement*.

Ces surfaces sont les plans à 45° sur le plan xOy, ou les cônes Λ, pour (A), comme pour (H) les bissectrices sont les *droites privilégiées*.

Ce Mémoire se divise tout naturellement en trois Parties dont je résume ici le contenu :

Première Partie : *Étude du problème intérieur pour* $A(u) = f$.

Soit une surface S découpée *intérieurement* par un cône Λ^0. M. Volterra obtient la valeur de u au sommet du cône Λ^0 en fonction des valeurs de u et des dérivées premières sur S. J'ai repris ceci : il faut donner, sur S, l'*intégrale* et sa *dérivée conormale*. J'ai étudié quelles sont les *formes acceptables* pour les surfaces S.

J'ai établi la *réciproque difficile* et d'un haut intérêt : si le point A, sommet de Λ^0, s'approche indéfiniment de S, la valeur de u en A tend vers la valeur donnée sur S au point (1), point limite des positions de A.

Dans le cas où la surface S est une *surface privilégiée*, un cône Λ^1, *j'ai commencé l'étude de cette réciproque*. Il se présente les plus grandes difficultés et, à cette heure, l'étude n'est pas encore complètement terminée. Elle devra être l'objet d'un Mémoire ultérieur.

([1]) R. d'Adhémar, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1901.

([2]) R. d'Adhémar, *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 11 février 1901.

([3]) *Leçons sur la propagation des ondes* (Hermann), 1903, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1903.

([4]) *Thèse* (Hermann), 1902.

Deuxième Partie : *Étude du problème extérieur* pour

$$A(u) = f(x, y, z).$$

Ici la surface S, qui porte les données, a la forme d'un *cylindre* d'axe Oz au point de vue de l'*Analysis situs* et l'on considère sa section *extérieure* à un cône Λ^0.

M. Volterra a donné la formule de l'intégrale et, ici encore, j'ai simplifié. Mais cette formule *ne représente la solution que si la solution existe!*

En effet, M. Volterra a trouvé *une condition fonctionnelle* très complexe à laquelle doivent satisfaire les données sur S.

J'ai trouvé de *nouvelles conditions fonctionnelles* et j'ai montré que le problème, en général, est *impossible*. Si l'on a une solution, cette solution véritable satisfera à des identités remarquables. Il semble difficile de préciser davantage, à cette heure.

Troisième Partie : *Extensions diverses*.

Plusieurs problèmes, extensions de celui de M. Volterra, ont été étudiés et résolus récemment. Considérons d'abord les équations :

$$\Delta^{p,1}(u) = \sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t).$$

Pour ces équations M. Tedone (1) a résolu, sans peine, le *problème intérieur* et aussi le *problème extérieur pour $p = 2n$*. Personne n'avait réussi pour le problème extérieur lorsque p est *impair*. J'y suis arrivé pour $p = 3$ (2). Bien entendu, l'on retrouve une *accumulation de conditions* pour les données dont il ne semble pas que l'on puisse dire grand'chose. En général, le problème est impossible.

(1) *Annali di Matematica*, 1898.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 16 décembre 1902.

Considérons maintenant les équations étudiées par M. J. Coulon [1]

$$\Delta^{p,q}(u) = \sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \sum_1^q \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = f(x, y).$$

L'on connaît les beaux résultats de M. Picard, par les *approximations successives* dans le cas de deux variables indépendantes, pour les types *elliptiques* et *hyperboliques* (et dans le cas de deux variables, tous les types se ramènent à ces deux-là ou au type *parabolique*).

J'ai tenté d'intégrer :

$$\Delta^{p,q}(u) = \sum_1^p a_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + \sum_1^q b_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + hu + f.$$

Mais, *après ma Note* [2], a paru la Thèse de M. Coulon. Pour p et q *supérieurs* à *un*, l'on n'a plus affaire qu'au *problème extérieur* et l'on retrouve les *conditions*. Ma solution était formelle, par suite. Mais, *pour* $q = 1$, *j'ai intégré l'équation dont le second membre est linéaire* par rapport aux dérivées premières.

Ainsi donc la méthode d'approximation de M. Picard, aussi bonne pour le *problème réel* que pour le *problème de Cauchy*, est encore féconde pour certaines équations, du type hyperbolique, à plus de deux variables indépendantes.

Je n'ai pas abordé l'étude des *systèmes d'équations du type hyperbolique*. M. Hadamard a fait l'extension aux systèmes de la notion de caractéristique [3], introduite par M. Beudon. Mais il n'y a plus l'*analogue* de la conormale et je n'aurais pu que répéter MM. Volterra et Tedone.

L'on peut, pour les systèmes de M. Volterra, mettre un second membre linéaire par rapport aux dérivées premières et intégrer en usant des approximations comme je le fais pour $\Delta^{p,1}(u)$.

Je dois citer, relativement aux équations du type hyperbolique, les

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 mars 1900.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 16 février 1902, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1901.

(3) J. Beudon, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1897, et J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*. Hermann, 1903.

travaux de Cauchy, Poisson (1), M. Boussinesq, M. Poincaré, Riemann (2), M. Darboux (3), M. Picard (4), M. Le Roux (5), Kirchhoff (6), M. Hadamard (7), etc.

Pour les approximations, on doit citer d'abord les mémorables écrits de M. Picard (8), puis M. Zaremba (9), M. F. Le Roy (10), M. Delassus (11), etc.

Il y a là une méthode fondamentale également féconde dans la théorie (12) des *équations fonctionnelles* et dans la théorie des *équations différentielles*, et qui permet de ne pas rester exclusivement dans le domaine analytique qui est un domaine restreint.

C'est sous l'influence de l'enseignement de M. Picard que j'ai entrepris ce travail et je dois beaucoup à ses conseils très bienveillants et à ses encouragements pour les quelques résultats que je donne ici, et que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences les 11 février 1901, 16 février 1902, 16 décembre 1902 (13).

---

(1) *Voir* le Cours de M. P. Duhem, *Sur l'Hydrodynamique*. Hermann.

(2) *Œuvres*, traduction française, Gauthier-Villars.

(3) *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II.

(4) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1899, et *Cours professé à la Sorbonne*, printemps 1899.

(5) *Journal de Mathématiques*, 1900, et *Thèse* (*Annales de l'École Normale*, 1897).

(6) *Zur Theorie der Lichstrahlen* (*Kaiserliche Akademie*, 1882).

(7) *Leçons*. Hermann, 1903.

(8) *Journal de Mathématiques*, 1890 et 1893. *Traité d'Analyse*, t. III, et supplément au Tome IV des *Leçons* de M. Darboux.

(9) *Journal de Mathématiques*, 1895.

(10) *Thèse* (*Annales de l'École Normale*, 1898).

(11) *Thèse* (*Annales de l'École Normale*, 1898).

(12) Mémoires de M. Picard (*Acta mathematica*, t. XVIII et XXIII), etc.

(13) Pour les renseignements bibliographiques détaillés, *voir* la *Thèse* de M. J. Coulon.

On pourra être étonné que je ne cite pas avec plus de détails les travaux de Kirchhoff, par exemple, si importants; mais c'est que M. Volterra est le seul géomètre qui ait étudié les équations (A) au point de vue qui est celui de ce Mémoire.

INTRODUCTION.

UNE FORMULE FONDAMENTALE. LA NOTION DE CONORMALE.

1. Soit une surface *fermée* Σ, soit W le volume intérieur, soient α, β, γ les cosinus de la *normale extérieure* en un point, soient u et v des fonctions de x, y, z, admettant des dérivées des deux premiers ordres; représentons, d'autre part, par le symbole A l'opération

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

et par le symbole D_n l'opération

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}-\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

La même méthode qui donne la célèbre *formule de Green*, fondamentale dans la Physique mathématique, donnera

$$\iiint_{(W)}[u\mathrm{A}(v)-v\mathrm{A}(u)]\,d\tau=\iint_{(\Sigma)}[u\mathrm{D}_n(v)-v\mathrm{D}_n(u)]\,d\omega.$$

Mais ceci, on peut le dire, est banal. C'est la forme employée par M. Vito Volterra dans son Mémoire [1] et par M. Joseph Coulon dans sa première *Note* [2] du 19 mars 1900. J'ai indiqué, dans ma *Note* [3] du 11 février 1901, que D_n n'est pas un pur symbole schématique, mais une *dérivée véritable* suivant la direction qui a pour cosinus : α, β, $-\gamma$. Cette direction, symétrique de la normale exté-

[1] *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (*Acta mathematica*, t. XVIII, 1894).

[2] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

[3] *Ibid.*

rieure par rapport au plan xy, je l'ai désignée sous le nom de CONORMALE.

Ainsi D_n s'écrira $\frac{d}{dN}$ et l'on aura la *formule fondamentale :*

$$(G) \quad \iiint_{(W)} [uA(v) - vA(u)]\,d\tau = \iint_{(\Sigma)} \left[u\frac{dv}{dN} - v\frac{du}{dN}\right] d\omega.$$

2. Considérons un plan à 45° sur l'horizon (xy) ou une surface polyédrale de plans de cette espèce, ou une surface enveloppe de tels plans, par exemple un cône dont les *génératrices* soient à 45°. Pour toutes ces surfaces l'on *voit* que la direction conormale est située sur la surface même, d'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Pour ces surfaces* privilégiées, *le fait de donner sur elles la valeur d'une fonction détermine la valeur de la dérivée conormale de cette fonction; en particulier, si une fonction est* nulle *sur une surface privilégiée, il en est de même de sa dérivée conormale.*

Dans sa *Note* [1] du 15 juillet 1901, M. J. Coulon a étendu ce théorème à l'équation générale du type hyperbolique à trois variables. Dans sa *Thèse* [2], il a fait un usage constant de mon théorème en voulant bien adopter aussi la désignation de conormale.

Les surfaces que j'appelle *privilégiées,* d'après ce théorème tout intuitif, font partie des *Multiplicités caractéristiques* de M. J. Beudon [3], dont l'étude a été poursuivie par M. J. Hadamard [4].

Ces préliminaires posés, nous pouvons aborder l'étude de la méthode de M. Volterra.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

(2) *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* Paris, Hermann.

(3) *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXV.

(4) Leçons professées au Collège de France en décembre 1900 et Leçons publiées chez Hermann, déjà citées.

PREMIÈRE PARTIE.

PROBLÈME INTÉRIEUR.

CHAPITRE I.

INTÉGRATION DE $A(u) = F(x, y, z)$, LORSQUE LA SURFACE QUI PORTE LES DONNÉES EST DÉCOUPÉE INTÉRIEUREMENT D'UNE MANIÈRE UNIQUE PAR TOUT CÔNE A AXE VERTICAL ET DONT LES GÉNÉRATRICES SONT INCLINÉES A 45°.

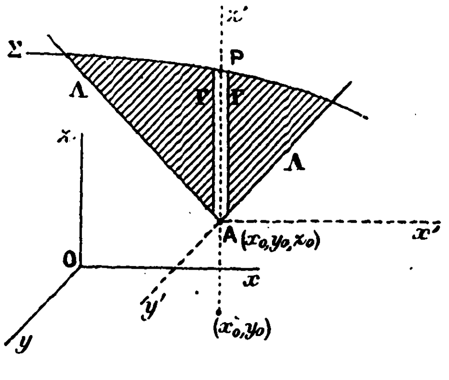
Principe de la méthode d'intégration.

1. Considérons la formule (G) et cherchons une fonction $V(x, y, z)$ telle que

$$A(V) \equiv 0,$$

telle que V soit *nulle* sur un cône Λ à 45°, de sommet A.

Fig. 1.



Nous sommes alors certain que, sur Λ, l'on a

$$\frac{dV}{dN} = 0.$$

d'après notre théorème.

(MM. Volterra et Coulon étaient obligés de faire un calcul pour s'en assurer.)

En plus, $V(x, y, z)$ sera *infinie* sur l'axe vertical Az'.

Dans ces conditions, si l'on applique la formule (G) au volume marqué par des hachures, si u et $\frac{du}{dN}$ sont donnés sur Σ, la formule (G) se réduira à une intégrale simple étendue de A en P égalée à un terme connu.

Une inversion donnera $u(A)$.

Intégration.

Soit A : (x_0, y_0, z_0), soient

$$z' = z - z_0, \qquad x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0,$$

$$r^2 = x'^2 + y'^2;$$

soit

$$\theta = \frac{z'}{r} > 1.$$

Cherchons une fonction $V = \varphi(\theta)$. L'on a

$$A(V) \equiv \frac{1}{r^2}\left[(\theta^2 - 1)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \theta\frac{d\varphi}{d\theta}\right] = 0,$$

$$V = \varphi = \log\left[\frac{z'}{r} + \sqrt{\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 1}\right],$$

V est bien *nulle* sur le cône Λ, qui a pour équation

$$\frac{z'}{r} = 1.$$

Soit $r = \varepsilon$ l'équation du cylindre vertical Γ, de rayon infiniment petit. La formule (G) donne

$$-\iiint_{(W)} V F(x, y, z)\, d\tau = \iint_{(\Sigma+\Gamma)} \left(u\frac{dV}{dN} + V\frac{du}{dN}\right) d\omega.$$

Or

$$\iint_{(\Gamma)} V\frac{du}{dN} d\omega = \iint_{(\Gamma)} V\frac{du}{dN}\, \varepsilon\, d\alpha\, dz$$

(α étant l'angle polaire) et comme

$$\lim_{\varepsilon=0}(\mathrm{V}\times\varepsilon)=0,$$

ce terme est nul à la limite.

Puis, sur Γ, l'on a

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{N}}=-\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial r}=\frac{z'}{r\sqrt{z'^2-r^2}},$$

et u est fonction de z seul. On a donc

$$\lim_{r=0}\iint_{(\Gamma)}u\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{N}}d\omega=\lim_{r=0}\iint\frac{z'}{r\sqrt{z'^2-r^2}}u(x_0,y_0,z)r\,d\alpha\,dz$$
$$=2\pi\int_{z_0}^{z_1}u(x_0,y_0,z)\,dz.$$

D'où

$$-\iiint_{(\mathrm{W})}\mathrm{VF}\,d\tau-\iint_{(\Sigma)}\left(u\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{N}}-\mathrm{V}\frac{du}{d\mathrm{N}}\right)d\omega=-\mathrm{J}_{\mathrm{A}}=2\pi\int_{z_0}^{z_1}u(z)\,dz.$$

Par inversion,

$$2\pi u(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial\mathrm{J}_{\mathrm{A}}}{\partial z_0}.$$

Et c'est, établie plus rapidement, la formule donnée par M. Volterra [formule (2) de la page 183)].

2. L'énoncé du théorème (p. 184) manque de clarté en ce qu'il y est question de dérivée *normale*. Nous énoncerons ainsi le THÉORÈME DE M. VOLTERRA :

Si un cône à 45°, ayant un point A *pour sommet, découpe d'une manière unique et intérieurement une surface* Σ, *sur laquelle sont données les valeurs de l'intégrale et de sa dérivée conormale, l'on peut obtenir la valeur de l'intégrale en ce point* A.

Ce qui a été dit dans l'Introduction (n° **2**) donne le complément suivant :

THÉORÈME COMPLÉMENTAIRE. — *Pour toute portion de la surface* Σ

qui a le caractère de surface privilégiée, *le fait de donner la valeur de l'intégrale est nécessaire et suffisant.*

Ces surfaces privilégiées jouent, dans l'intégration de $A(u) = F$, le rôle que jouent les droites caractéristiques $x \pm y = \text{const.}$ dans l'intégration de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \Phi(x, y),$$

rôle mis en lumière, d'une manière immédiate et sans aucune hypothèse sur la nature, analytique ou non, des fonctions, par M. E. Picard, dans une courte *Note* (1).

La forme du terme connu

$$J_A = \iiint_{(W)} VF\, d\tau + \iint_{(\Sigma)} \left(u \frac{dV}{dN} - V \frac{du}{dN} \right) d\omega$$

montre que l'intégrale $u(x_0, y_0, z_0)$ peut être regardée comme la somme de deux intégrales, la première satisfaisant à

$$A(u) = 0,$$

avec les *conditions imposées* sur Σ; la deuxième satisfaisant à

$$A(u) = F(x, y, z),$$

avec des données *nulles* sur Σ. Mais lorsque nous connaissons ainsi la forme analytique de $u(x_0, y_0, z_0)$, *il nous reste encore un travail important* à faire.

L'on ne peut, en effet, *affirmer* a priori *la réciproque* du théorème qui vient d'être énoncé. M. Volterra *n'a pas étudié l'intégrale et ses dérivées*, et c'est ce que nous devons faire maintenant afin

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1899. *Voir* aussi les *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, par G. Darboux.

de *reconnaître si l'intégrale trouvée* est une *solution* du problème, c'est-à-dire si sa valeur au point (x_0, y_0, z_0) tend vers la valeur donnée u_1, lorsque le point (x_0, y_0, z_0) tend à se confondre avec le point (1) de Σ (où la valeur donnée est u_1).

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE ET DE SES DÉRIVÉES, LES DONNÉES A LA FRONTIÈRE ÉTANT NULLES.

L'on peut faire cette étude *directement* en partant de la *définition* même de la dérivée; c'est ce que je montrerai tout d'abord en obtenant une forme explicite de $u(x_0, y_0, z_0)$. L'on pourrait faire de même pour les dérivées, et l'on rencontre des études intéressantes d'*infiniment petits;* mais c'est *long* et, pour l'étude complète, je prendrai un autre point de départ.

1. *Étude directe* [1] *de l'intégrale.* — L'on a :

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial J_A}{\partial z_0},$$

si l'on convient d'écrire

$$J_A = \iiint_{(Abc)} F(x, y, z) V_A \, d\tau.$$

J'affecte la lettre V de l'indice A pour bien montrer que la fonction auxiliaire V varie avec le point A (x_0, y_0, z_0).

Nous devons évaluer la dérivée $\frac{\partial J_A}{\partial z_0}$.

Donnons pour cela à z_0 un accroissement infiniment petit dz_0. A vient en A' et l'on a

$$J_{A'} = \iiint_{(A'b'c')} F(x, y, z) V_{A'} \, d\tau.$$

[1] Communiqué à la *Société mathématique de France*, juin 1901.

La dérivée cherchée est

$$\frac{J_{A'} - J_A}{dz_0}.$$

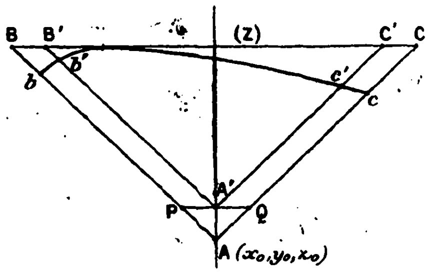
Évaluons

$$J_{A'} - J_A = -H.$$

On a évidemment

$$J_A = \iiint_{(A'b'c')} FV_A \, d\tau + \iiint_{(AA'bb'cc')} FV_A \, d\tau.$$

Fig. 2.



Considérons d'abord la deuxième intégrale; V_A ayant un *signe constant*, l'on peut faire sortir F de l'élément différentiel (théorème de la moyenne); nous avons donc à calculer

$$\iiint V_A \, d\tau,$$

le volume d'intégration étant le volume compris entre les deux cônes.

Comme, d'ailleurs, on a

$$V_A > 0,$$

nous augmenterons l'intégrale en augmentant le volume, c'est-à-dire en remplaçant S par le *plan horizontal le plus élevé* qui ait un point commun avec S (il peut être tangent à S, il peut ne l'être pas).

Application systématique du *théorème de la moyenne*, emploi de ce plan horizontal *majorant*, voilà d'ailleurs *la marche constamment suivie* dans ces recherches.

Calculons donc

$$\iiint_{(AA'BB'CC')} V_A \, d\tau.$$

Le volume se décompose naturellement en deux parties : APQ et BB′PA′QCC′, mais la fonction V_A jouit d'une propriété remarquable. Pour tout *volume conique régulier* l'on a

$$\iiint V_A \, d\tau = \iiint d\tau.$$

Donc notre intégrale relative au volume APQ est égale à $\frac{\pi}{3}\overline{AA'}^3$ et, comme $\overline{AA'} = dz_0$, elle est du *troisième ordre*.

Évaluons l'intégrale relative à BB′PA′QCC′. Soit

$$\int_{z_0+dz_0}^{Z} dz \int_0^{2\pi} d\hat{a} \int_{z-z_0-dz_0}^{z-z_0} \log\left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1}\right] r\,dr$$

(Z est la cote du plan majorant).

Or

$$\begin{aligned}
&\int \log\left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1}\right] r\,dr \\
&= \left\{\frac{r^2}{2}\log\left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1}\right]\right\} - \frac{z-z_0}{2}\left\{\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Ici, en prenant pour r les limites voulues : $z - z_0$ et $z - z_0 - dz_0$, l'on a

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{(z-z_0-dz_0)^2}{2}\log\left[\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0}\right)^2 - 1}\right] \\
&+\frac{z-z_0}{2}\sqrt{2(z-z_0)dz_0 - dz_0^2}.
\end{aligned}\right.$$

L'intégrale relative à l'angle polaire $\hat{a}$ donne 2π (constante sans importance). Il reste à intégrer cette dernière expression par rapport à z.

Intégrons, par parties, le premier terme. L'on obtient [1]

$$-\frac{1}{6}(Z - z_0 - dz_0)^3 \log\left[\frac{Z - z_0}{Z - z_0 - dz_0} + \sqrt{\left(\frac{Z - z_0}{Z - z_0 - dz_0}\right)^2 - 1}\right]$$

$$+\int_{z_0+dz_0}^{Z} \frac{(z - z_0 - dz_0)^3}{6} \frac{-dz_0}{(z - z_0 - dz_0)\sqrt{2(z - z_0)\,dz_0 - dz_0^2}}\,dz,$$

il faut ajouter l'intégrale du deuxième terme

$$+\int_{z_0+dz_0}^{Z} \frac{z - z_0}{2}\sqrt{2(z - z_0)\,dz_0 - dz_0^2}\,dz.$$

Laissons le terme tout intégré et réunissons les deux intégrales précédentes; cela donne, pour élément différentiel,

$$\frac{1}{6\sqrt{2(z - z_0)\,dz_0 - dz_0^2}}\left\{3(z - z_0)[2(z - z_0)\,dz_0 - dz_0^2] - (z - z_0 - dz_0)^3\,dz_0\right\}.$$

Les termes en dz_0^2 et dz_0^3 dans le crochet donnent naissance à des termes en $dz_0^{\frac{3}{2}}$ et $dz_0^{\frac{5}{2}}$ qui ne jouent aucun rôle puisque, pour avoir la dérivée, on divisera par dz_0, et il reste à considérer

$$\int_{z_0+dz_0}^{Z} \frac{5}{6} \frac{(z - z_0)^2\,dz_0}{\sqrt{2(z - z_0)\,dz_0 - dz_0^2}}\,dz = \frac{5}{\sqrt{2}\,6}\sqrt{dz_0}\int_{z_0+dz_0}^{Z} \frac{(z - z_0)^2\,dz}{\sqrt{z - z_0 - \frac{dz_0}{2}}}.$$

Ici encore nous n'avons à conserver que

$$\frac{5}{6\sqrt{2}}\sqrt{dz_0}\,\frac{2}{5}(Z - z_0)^{\frac{5}{2}},$$

le reste étant d'ordre $\frac{3}{2}$ au moins en dz_0.

---

[1] En effet, le *terme soustractif* de la partie intégrée est *nul*, car, si l'on pose

$$z - z_0 - dz_0 = \varepsilon,$$

l'on doit avoir

$$\varepsilon = (z - z_0)^{1+h}.$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon=0}\left\{\varepsilon^3 \log\left[\frac{z - z_0}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{z - z_0}{\varepsilon}\right)^2 - 1}\right]\right\} = 0.$$

Nous obtenons en somme

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\, dz_0^{\frac{3}{2}} \\ \quad -\frac{1}{6}(Z-z_0-dz_0)^3 \log\left[\frac{Z-z_0}{Z-z_0-dz_0}+\sqrt{\left(\frac{Z-z_0}{Z-z_0-dz_0}\right)^2-1}\right] \\ \quad +\frac{\sqrt{2}}{6}(Z-z_0)^{\frac{5}{2}}\sqrt{dz_0}. \end{array}\right.$$

Développons en série, en posant $u = Z - z_0$,

$$\left\{\left(\frac{1}{1-\frac{dz_0}{u}}\right)^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\left\{1 + \frac{3}{4}\frac{dz_0}{u} + \frac{23}{32}\left(\frac{dz_0}{u}\right)^2 + \ldots\right\},$$

$$\frac{1}{1-\frac{dz_0}{u}} + \left\{\left(\frac{1}{1-\frac{dz_0}{u}}\right)^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{2}\sqrt{\frac{dz_0}{u}} + \frac{dz_0}{u} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\right)^3$$
$$+\left(\frac{dz_0}{u}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}.23}{32}\left(\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\right)^5 - \ldots.$$

Or

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots.$$

D'où, pour le logarithme, ce développement :

$$\sqrt{2}\sqrt{\frac{dz_0}{u}} + \frac{dz_0}{u} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\right)^3 + \ldots - \left[\frac{dz_0}{u} + \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{dz_0}{u}}\right)^3 + \ldots\right].$$

Si l'on multiplie par $-\frac{1}{6}(u - dz_0)^3$ et que l'on tienne compte du troisième terme en $\sqrt{dz_0}$, l'on voit que l'on a en facteur $(dz_0)^{\frac{5}{2}}$ dans la somme des deuxième et troisième termes. Tenant compte du premier $\lambda(dz_0)^{\frac{3}{2}}$, l'on obtient en somme, μ étant *fini* quel que soit dz_0,

$$J_A = \mu(dz_0)^{\frac{3}{2}} + \iiint_{(A'b'c')} FV_A\, dx\, dy\, dz.$$

Le second terme est seul à conserver et l'on a

$$H = \iiint_{(A'b'c')} F(x,y,z)[V_A(x,y,z) - V_{A'}(x,y,z)]\, d\tau.$$

Remarquons maintenant que l'on peut écrire :

$$V_A(x, y, z) = V_{A'}(x, y, z + dz_0),$$

d'où

$$\begin{aligned} &V_A(x, y, z) - V_{A'}(x, y, z) \\ &\quad = V_{A'}(x, y, z + dx_0) - V_{A'}(x, y, z) = dz_0 \frac{\partial V_{A'}(x, y, z)}{\partial z} \quad (^1). \end{aligned}$$

Lorsque dz_0 s'approche de zéro, A′ vient en A, $V_{A'}$ devient V_A, et l'on a

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint_{(Abc)} F \frac{\partial V_A}{\partial z} d\tau = \iiint_{(Abc)} F \frac{\partial V_A}{\partial z_0} d\tau,$$

résultat assez surprenant par sa simplicité.

D'ailleurs $\frac{\partial V_A}{\partial z}$ ayant un signe constant, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2\pi u(x_0, y_0, z_0) &= -F(\xi, \eta, \zeta) \iiint_{(Abc)} \frac{\partial V_A}{\partial z} d\tau \\ &= -F(\xi, \eta, \zeta)\theta_A \iiint_{(ABC)} \frac{\partial V_A}{\partial z} \delta\tau, \end{aligned}$$

ou enfin

$$u(x_0, y, z_0) = -F(\xi, \eta, \zeta)\theta_A \tfrac{1}{2}(Z - z_0)^2 \qquad (0 < \theta_A < 1).$$

2. *Étude de l'intégrale d'après une formule d'Ostrogradski.* — Comme nous le disions, il serait assez long d'étudier directement les dérivées de

$$u(x_0, y_0, z_0).$$

(1) Pour être rigoureux on ne peut appliquer cette formule que dans une région où $V_{A'}$ et $\frac{\partial V_{A'}}{\partial z}$ soient *finis*.

Or la première fonction est *infinie* sur la verticale passant par A′ et la deuxième est *infinie* sur le cône A′B′C′. On isolera donc la verticale par un petit *cylindre vertical* et le cône A′B′C′ par un *cône* ou un *hyperboloïde* intérieur à ce cône. Dans les petits volumes ainsi isolés, on remplacera $(V_A - V_{A'})$ par $2V_{A'}$ et l'on verra que l'*influence* de ces volumes infiniment petits est *nulle*.

Nous allons donc reprendre tout ceci en faisant usage d'une formule, convenablement interprétée (¹), d'Ostrogradski.

Établissons, d'après M. C. Jordan (²), la formule d'Ostrogradski, simplifiée pour notre usage. Soit

$$I = \iiint_{W(\lambda)} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

le champ d'intégration W, comme φ, dépend d'un paramètre λ.

$$I + \Delta I = \iiint_{(W+\Delta W)} (\varphi + \Delta\varphi)\, dx\, dy\, dz.$$

Nous voulons calculer

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \lim \frac{\Delta I}{\Delta \lambda}.$$

Pour cela, amenons les deux intégrales à avoir *même* champ d'intégration. Nous y arriverons en faisant correspondre à tout point (x, y, z) de $(W + \Delta W)$ un point (X, Y, Z) de W par les formules :

$$\begin{aligned} x &= X + \xi, \\ y &= Y + \eta, \\ z &= Z + \zeta, \end{aligned}$$

avec la condition que la transformation vaille pour passer d'une frontière à l'autre. ξ, η, ζ sont des fonctions *infiniment petites* assujetties à cette seule condition.

Alors

$$I + \Delta I = \iiint_{(W)} \Psi\, J\, dX\, dY\, dZ,$$

(¹) Note de l'auteur dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1902.

(²) *Cours d'Analyse*, 2ᵉ édition, t. III, p. 530. Paris, Gauthier-Villars.

J étant le jacobien,

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\xi}{\partial X} & \frac{\partial\xi}{\partial Y} & \frac{\partial\xi}{\partial Z} \\ \frac{\partial\eta}{\partial X} & 1+\frac{\partial\eta}{\partial Y} & \frac{\partial\eta}{\partial Z} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial X} & \frac{\partial\zeta}{\partial Y} & 1+\frac{\partial\zeta}{\partial Z} \end{vmatrix},$$

Ψ étant la fonction $\varphi+\Delta\varphi$ exprimée en X, Y, Z.

On a

$$J = 1+\frac{\partial\xi}{\partial X}+\frac{\partial\eta}{\partial Y}+\frac{\partial\zeta}{\partial Z}+\text{inf. petit.}$$

Or

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(X,Y,Z)+\xi\frac{\partial\varphi}{\partial X}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial Y}+\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\ldots$$

et

$$\Delta\varphi(x,y,z)=\Delta\varphi(X,Y,Z)+\ldots=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda+\ldots.$$

Donc

$$\Psi J=\varphi(X,Y,Z)+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda+\left[\frac{\partial}{\partial X}(\varphi\xi)+\frac{\partial}{\partial Y}(\varphi\eta)+\frac{\partial}{\partial Z}(\varphi\zeta)\right]+\ldots;$$

Enfin, l'on a

$$(1)\quad \Delta I=\iiint_{(W)}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda+\frac{\partial}{\partial X}(\varphi\xi)+\frac{\partial}{\partial Y}(\varphi\eta)+\frac{\partial}{\partial Z}(\varphi\zeta)\right]dX\,dY\,dZ;$$

c'est la formule cherchée. Appliquons-la. Soit

$$W = Abc.$$

Pour avoir la dérivée par rapport à z_0, faisons

$$\lambda = z_0,\qquad \Delta\lambda=\Delta z_0=\overline{AA'}.$$

Alors

$$W+\Delta W = A'b'c'.$$

Soient S″ et S′ les surfaces obtenues en *abaissant* S respectivement de Δz_0^2 et $\Delta z_0^2+\Delta z_0$,

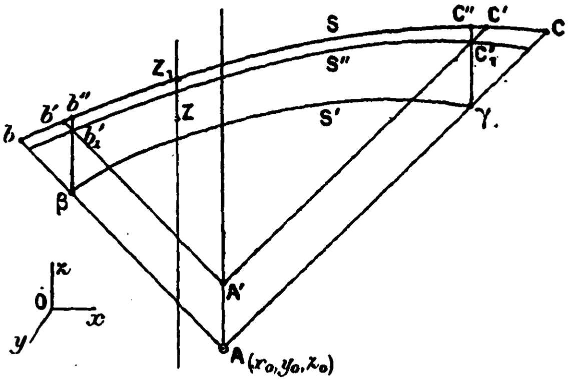
$$\text{vol. } A'b'c=\text{vol. } A'b'_1c'_1+\text{vol. }(b'c',\, b'_1c'_1),$$

nous ferons correspondre $A'b'_1c'_1$ à $A\beta\gamma$ de W par les formules

$$\xi\equiv 0,\qquad \eta\equiv 0,\qquad \zeta\equiv\Delta z_0=\text{const.}$$

Puis nous ferons correspondre $(b'c', b'_1c'_1)$ à $(bc, \beta\gamma)$ de W ou, aux

Fig. 3.



infiniment petits d'*ordre supérieur* près : $(b''c'', b'_1c'_1)$ à $(b''c'', \beta\gamma)$ par les formules

$$\xi\equiv 0,\qquad \eta\equiv 0,\qquad \zeta=(Z_1-Z)\frac{\Delta z_0}{\Delta z_0+\Delta z_0^2},$$

Z_1 étant la cote d'intersection de la verticale du point avec S.

La formule (1) donne ainsi

$$\Delta I=\iiint_{(Abc)}\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\Delta z_0\,d\tau+\iiint_{(A\beta\gamma)}\Delta z_0\frac{\partial\varphi}{\partial Z}\partial\tau$$
$$+\iiint_{(bc,\beta\gamma)}\frac{\partial}{\partial Z}\left[\varphi(Z_1-Z)\frac{\Delta z_0}{\Delta z_0+\Delta z_0^2}\right]d\tau.$$

La deuxième intégrale donne une intégrale de surface

$$\Delta z_0\iint_{(\text{cône }A\beta\gamma+\text{surf. }\beta\gamma)}\varphi\,dX\,dY.$$

La troisième intégrale donne, de même, une intégrale de surface étendue à bc qui est nulle, puisque alors $Z_1 - Z = 0$ et une intégrale étendue à $\beta\gamma$

$$-\iint_{(\text{surf.}\,\beta\gamma)} \varphi\, \Delta z_0\, dX\, dY,$$

puisque, sur $\beta\gamma$, l'on a

$$Z_1 - Z \equiv \Delta z_0 + \Delta z_0^2.$$

Nous obtenons, en somme, en remplaçant maintenant X, Y, Z par x, y, z,

$$\Delta I = \Delta z_0 \left\{ \iiint_{(\mathrm{A}bc)} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\, d\tau + \iint_{(\text{cône}\ \mathrm{A}bc)} \varphi\, dx\, dy \right\},$$

formule fondamentale dont nous allons poursuivre l'application.

3. *Expression de* $u(x_0, y_0, z_0)$. — Posons $\varphi = \mathrm{F}\mathrm{V}_\mathrm{A}$, φ étant *nul* sur le cône, nous avons de suite

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \iiint_{(\mathrm{A}bc)} \mathrm{F} \frac{\partial \mathrm{V}_\mathrm{A}}{\partial z_0}\, d\tau,$$

expression obtenue directement (n° 11).

4. *Expression de* $\dfrac{\partial}{\partial z_0}\left\{ u(x_0, y_0, z_0) \right\}$. — Soit posé ici $\varphi = \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}_\mathrm{A}}{\partial z_0}$, on a

$$2\pi \Delta u(x_0, y_0, z_0) = \Delta z_0 \left\{ \iiint_{(\mathrm{A}bc)} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\mathrm{F} \frac{\partial \mathrm{V}_\mathrm{A}}{\partial z_0} \right) d\tau + \iint_{(\text{cône}\,\mathrm{A}bc)} \mathrm{F} \frac{\partial \mathrm{V}_\mathrm{A}}{\partial z_0}\, dx\, dy \right\}.$$

La formule ne doit pas être appliquée *brutalement*, mais, l'élément différentiel devenant *infini* sur le cône Abc,

$$(z - z_0)^2 - r^2 - 0,$$

je regarderai ce cône comme la limite, pour $\varepsilon = 0$, de l'hyperboloïde

$$(z - z_0)^2 - \rho^2 = \varepsilon^2.$$

D'ailleurs, $\frac{\partial V_A}{\partial z_0}$ et $\frac{\partial^2 V_A}{\partial z_0^2}$ ayant toujours le même signe dans le domaine intérieur au cône, nous pouvons d'abord faire sortir F de l'intégrale; ensuite *majorer* en remplaçant S par H, le plan horizontal *le plus haut*, de côté Z, *ayant un point commun avec* S. On a

$$\left|\iiint_{(Abc)}\right| < \left|\iiint_{(ABC)}\right|,$$

$$\begin{aligned}\iiint_{(ABC)} \frac{\partial^2 V}{\partial z_0^2} d\tau &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{z_0}^{Z} dz \int_0^{\rho} \frac{-(z-z_0)}{[(z-z_0)^2-r^2]^{\frac{3}{2}}} r\,dr \\ &= 2\pi \int_{z_0}^{Z} (z-z_0)\left[\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{[(z-z_0)^2-\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right] dz \\ &= 2\pi \int_{z_0}^{Z} dz - \frac{2\pi}{\varepsilon}\int_{z_0}^{Z}(z-z_0)\,dz.\end{aligned}$$

Pour le cône, nous avons encore

$$\left|\iint_{(Abc)}\right| < \left|\iint_{(ABC)}\right|.$$

Nous considérerons le cône comme la limite de l'hyperboloïde

$$(z-z_0)^2-\rho^2=\varepsilon'^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial z_0} = \lim\left(-\frac{1}{\varepsilon'}\right) \qquad \text{et} \qquad \iint dx\,dy = -\pi(Z-z_0)^2$$

(puisque la normale extérieure fait, avec Oz, un angle obtus).

En somme

$$\begin{aligned}2\pi\Delta u = \Delta z_0 \Big\{ &\theta_A F(\xi, \eta, \zeta)\left[2\pi(Z-z_0) - \frac{\pi}{\varepsilon}(Z-z_0)^2\right] \\ &+ \theta'_A F(\xi', \eta', \zeta')\frac{\pi}{\varepsilon'}(Z-z_0)^2\Big\},\end{aligned}$$

avec $0 < \theta_A < 1$, $0 < \theta'_A < 1$ (puisque l'on a remplacé Abc par ABC), (ξ, η, ζ) étant un certain *point moyen* du volume Abc et (ξ', η', ζ') un *point moyen* de la surface du cône Abc.

Choisissons ε et ε' tels que les *deux infinis se détruisent* et il reste

$$\frac{\partial}{\partial z_0} u(x_0, y_0, z_0) = \theta_A F(\xi, \eta, \zeta)[Z - z_0]$$

(Z est la cote du *plan majorant* H). Mais le fait de prendre ainsi les deux infiniment petits ε et ε' tels que les deux termes infinis se détruisent peut paraître artificiel et laisse subsister un doute. Je vais donc montrer autrement que le coefficient de Δz_0 est bien *fini*.

On a

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(F \frac{\partial V}{\partial z_0}\right) = \frac{\partial V}{\partial z_0} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(F \frac{\partial V}{\partial z_0}\right),$$

car, évidemment,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z_0}; \qquad \frac{\partial F}{\partial z_0} \equiv 0,$$

d'où $\displaystyle\iiint_{(Abc)}$, premier terme du coefficient de Δz_0, est égale à

$$\iiint_{(Abc)} \frac{\partial V}{\partial z_0} \frac{\partial F}{\partial z} d\tau - \iiint_{(Abc)} \frac{\partial}{\partial z}\left(F \frac{\partial V}{\partial z_0}\right) d\tau$$
$$= \iiint_{(Abc)} \frac{\partial V}{\partial z_0} \frac{\partial F}{\partial z} d\tau - \iint_{(\text{cône}\,Abc + \text{surf.}\,bc)} F \frac{\partial V}{\partial z_0} dx\,dy.$$

Le coefficient de Δz_0 est donc

$$\iiint_{(Abc)} \frac{\partial V}{\partial z_0} \frac{\partial F}{\partial z} d\tau - \iint_{(bc)} F \frac{\partial V}{\partial z_0} dx\,dy,$$

et l'on voit bien que les deux intégrales infinies sur le cône Abc se détruisent.

On peut, d'ailleurs, en majorant les deux intégrales ci-dessus, retrouver la forme de la dérivée relative à z_0.

5. *Expression de* $\dfrac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, y_0, z_0)$. — Pour obtenir la dérivée en x_0, ou en y_0, nous emploierons la même formule d'Ostrogradski, adaptée d'une manière un peu différente. S étant la surface qui porte les données (nulles), S′ et S″ seront les surfaces résultant d'une translation parallèle à ox et égale respectivement à $(\Delta x_0 + \Delta x_0^2)$ et à Δx_0^2.

Il est inutile de tout répéter, soit

$$J = \iiint_{(Abc)} \varphi \, d\tau.$$

L'on trouve

$$\Delta J = \Delta x_0 \left\{ \iiint_{(Abc)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} d\tau + \iint_{(\text{cône } Abc)} \varphi \, dy \, dz \right\},$$

$$\Delta J = \Delta x_0 \left\{ \iiint_{(Abc)} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(F \frac{\partial V}{\partial z_0} \right) d\tau + \iint_{(\text{cône } Abc)} F \frac{\partial V}{\partial z_0} dy \, dz \right\}.$$

L'on verrait, comme au n° **4**, que le coefficient de Δx_0 est *la partie finie* de l'intégrale de volume, car il y a deux termes infinis sur le cône Abc qui se détruisent exactement. Mais, si l'on remarque que l'on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \partial z_0} = \frac{-r \cos \alpha}{[(z - z_0)^2 - r^2]^{\frac{3}{2}}},$$

l'on constate que cette fonction est *négative* à droite du plan parallèle à zoy passant par A, *positive* à gauche de ce plan. Il faut donc appliquer séparément le théorème de la moyenne dans chaque région, en même temps que l'on majorera par le plan H de cote Z.

Donc

$$\iiint_{(Abc)} F \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial V}{\partial z_0} \right)$$
$$= F(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \iiint_{(Agc)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) d\tau + F(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \iiint_{(Agb)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) d\tau;$$

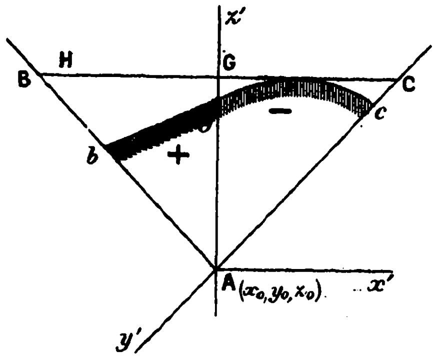
en majorant, nous prendrons les intégrales dans les volumes AGC et AGB qui, par la formule de Green, donnent des intégrales de surface :

1° Dans le plan AG, on a $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$;

2° Sur le cône ABC, on a des termes infinis dont, on l'a vu, il n'y a pas à tenir compte;

3° Nous avons enfin des intégrales étendues au cercle BC :

Fig. 4.



Pour la première

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha \int_0^{Z-z_0} \frac{-(Z-z_0)}{r\sqrt{(Z-z_0)^2-r^2}}\, r\, dr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha (Z-z_0)[\arc\sin(0) - \arc\sin(1)] = -\pi[Z-z_0],$$

et pour la seconde, les limites pour α seront $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, d'où

$$+\pi[Z-z_0];$$

en somme

$$2\pi\Delta u(x_0, y_0, z_0) = \Delta x_0.\pi[Z-z_0][\theta_{A,2}F(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) - \theta_{A,1}F(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)]$$

(les deux coefficients θ sont compris entre 0 et 1, égaux à 1 lorsque bc se confond avec BC) Enfin

$$\frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\theta_{A,2}.F_2 - \theta_{A,1}.F_1}{2}[Z-z_0].$$

Il est bien assuré que nous avons une expression analogue pour $\frac{\partial}{\partial y_0} u(x_0, y_0, z_0)$, par symétrie.

Remarque. — L'on peut calculer les trois *dérivées secondes;* l'on trouve, pour chacune,

$$\theta.F(\xi, \eta, \zeta),$$

θ ayant une limite supérieure facile à évaluer.

6. Conclusion. — Il résulte de tout ce qui précède que l'intégrale et ses dérivées premières prennent les valeurs données *zéro* lorsque (x_0, y_0, z_0) vient sur S si $(Z - z_0)$ tend vers *zéro*, lorsque A se rapproche indéfiniment de S. Ceci a lieu s'il y a *unicité de section* de S par tout cône Λ et si les *plans tangents* de S *sont inclinés à moins* de 45° sur le plan *xoy*.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE, LES DONNÉES N'ÉTANT PAS NULLES A LA FRONTIÈRE.

Nous devons maintenant prendre $A(u) = 0$ avec des données *non nulles* sur S.

L'on peut faire d'abord une remarque du plus haut intérêt.

Comme dans le cas de l'équation hyperbolique à deux variables, cas traité par M. Picard [1], il faut d'abord qu'il y ait *unicité de section* de S par tout cône Λ.

Ceci *exclut* les surfaces S présentant certaines ondulations dans leur forme. Mais, en plus, l'on constate immédiatement ceci, c'est que les surfaces S ne doivent avoir *aucun plan tangent incliné à plus de* 45° sur le plan *xoy*. Sinon, en effet, soit un point A *infiniment voisin* d'un point (1) de S, le cône Λ du point A découperait dans S une aire *finie* et donc, certainement, la valeur de u en A ne dépendrait pas seulement de la valeur u_1 [2].

Réservons donc, pour l'instant, le cas où les données seraient

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1899. *Voir* aussi : J. Hadamard, *Note sur l'intégrale résiduelle* (*Soc. math. de France*, 1901.

[2] Par exemple l'*on ne peut prendre* pour S la surface étudiée par M. Volterra (p. 217), savoir : une portion de *cylindre vertical* limitée supérieurement par un *plan horizontal*.

portées par un cône Λ^1 et étudions l'intégrale à la frontière. Cette étude étant difficile nous prendrons d'abord pour S *un plan* P.

1. *Étude de l'intégrale à la frontière pour des données quelconques portées par un plan.* — Par rapport à des axes passant par A, soit

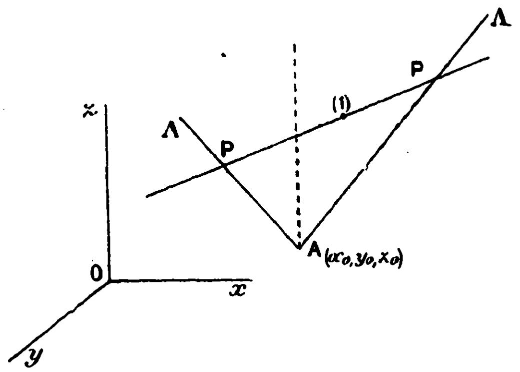
$$z' = ax' + by' + q$$

l'équation du plan P portant les données. L'on sait que l'on a

$$a^2 + b^2 < 1,$$

parce que le plan P doit avoir une inclinaison sur le plan horizontal moindre que 45°.

Fig. 5.



Nous étudierons donc $u(x_0, y_0, z_0)$ lorsque le point $A(x_0, y_0, z_0)$ vient sur P.

L'on voit que lorsque A s'approche d'un point (1) de P, *q tend vers zéro*. Ceci est fondamental à remarquer.

Reprenons la formule qui donne l'intégrale

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int\left(u\frac{dV}{dN} - V\frac{du}{dN}\right)d\sigma\right\},$$

le champ d'intégration étant l'aire de P intérieure à Λ.

Soit, en général,

$$I = \int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

L'on verra (IIe Partie, Chapitre I, n° 3) que l'on a

$$\Delta I = \int\int \left[\Delta\varphi + \frac{d}{dx}(\varphi\xi) + \frac{d}{dy}(\varphi\eta)\right] dx\, dy.$$

Comme les deux derniers termes donnent une intégrale étendue au *bord* de l'aire

$$\int \varphi . \chi . dl,$$

l'on voit que si φ *s'annule* sur le bord, l'on obtient la dérivée de I en dérivant la fonction φ sous le signe; mais si la fonction φ *ne s'annule pas* sur le bord, en particulier si elle devient *infinie,* il n'y a *aucun intérêt à scinder en deux parties l'intégrale* ΔI.

Donc

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = J_2 + J_1$$

en posant

$$J_2 = \int\int \frac{du}{dN} \frac{d\sigma}{\sqrt{(z - z_0)^2 - r^2}},$$

$$J_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int u \frac{dV}{dN} d\sigma\right\} = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int u_1 \frac{dV}{dN} d\sigma + \int\int (u - u_1) \frac{dV}{dN} d\sigma\right\},$$

u_1 désignant *la constante, valeur donnée* de u en (1) sur P. Mais la formule de M. Volterra représente l'intégrale du problème, *si elle existe.*

Ceci nous donne aussitôt une *identité importante :*

$$2\pi u_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int u_1 \frac{dV}{dN} d\sigma\right\}.$$

Nous allons donc prouver que J_2 d'une part, et d'autre part

$$J_3 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int (u - u_1) \frac{dV}{dN} d\sigma\right\},$$

tendent vers zéro, lorsque A tend vers (1).

Étude de J_2.

2. En désignant par $(\varphi)_M$ une valeur moyenne de la fonction φ dans un champ, l'on a

$$J_2 = \left(\frac{du}{dN}\right)_M \iint \frac{d\sigma}{R},$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$R = \sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}.$$

Or l'intégrale $\iint \frac{d\sigma}{R}$ est facile à évaluer (1); elle contient q en facteur.

Donc J_2 *s'annule* avec q.

Voici un premier résultat obtenu.

Étude de J_3.

3. On a

$$\frac{dV}{dN} = \frac{-1}{R}\left[\cos(n, z) + \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\right].$$

Ici $\cos(n, z) = K = \text{const.}$ et $dx\,dy = K\,d\sigma$.

Représentons par $\frac{\Gamma}{R}$ la quantité

$$-\frac{dV}{dN}.$$

J_3 est, à une constante multiplicative près, J_4

$$J_4 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\iint (u - u_1)\frac{\Gamma}{R}\,dx\,dy\right\}$$

Il faut voir que J_4 tend vers zéro lorsque A tend vers (1).

---

(1) L'on se sert des hyperboloïdes $(z-z_0)^2 - r^2 = \mu^2$ et l'on a une intégrale simple en μ.

D'après la forme trouvée pour ΔI, en remarquant que

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + b\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

nous avons

$$\frac{\partial I}{\Delta z_0} = \int\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} + \frac{1}{\Delta z_0}\xi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Delta z^0}\eta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + b\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{1}{\Delta z_0}\varphi\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right] dx\,dy.$$

Ici $\varphi = (u - u_1)\frac{\Gamma}{R}$, d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} = (u - u_1)\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (u - u_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\Gamma}{R}\frac{\partial u}{\partial x}$$

et deux expressions semblables pour $\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Écrivons $J_4 = J_5 + J_6$

$$J_5 = \int\int(u - u_1)\left[\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma}{R}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{a\xi + b\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{1}{\Delta z_0}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\Gamma}{R}\right] dx\,dy,$$

$$J_6 = \int\int\left[\frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a\xi + b\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial z}\right]\frac{\Gamma}{R}\,dx\,dy.$$

4. *Considérons* J_6,

$$\frac{\Gamma}{R} = \frac{K}{R} + \frac{1}{R}\frac{z - z_0}{r}\cos(n, r).$$

Le premier terme $\frac{K}{R}$ donne une partie de J_6, qui tend vers *zéro* avec q. En effet les quantités

$$\frac{\xi}{\Delta z_0}, \quad \frac{\eta}{\Delta z_0}$$

sont *finies* et *les dérivées de u sont supposées finies sur la surface* P, et l'on a vu que

$$\iint \frac{d\sigma}{R}$$

tend vers *zéro* avec q.

Considérons le deuxième terme de $\frac{\Gamma}{R}$ et ne gardons sous le signe d'intégration que

$$\frac{1}{R}\frac{z-z_0}{r},$$

qui a un signe constant.

Sur le plan P on a

$$\frac{z-z_0}{r} = m + \frac{q}{r} < 1 + \frac{q}{r}$$

($m = a\cos\omega + b\sin\omega$ et $|m| < 1$ parce que $a^2 + b^2 < 1$).

Il reste donc à considérer

$$\iint \left(1+\frac{q}{r}\right)\frac{1}{R} r\,dr\,d\omega.$$

Ceci comprend d'abord

$$\iint \frac{d\sigma}{R},$$

qui tend vers *zéro* avec q; puis

$$q\iint \frac{dr\,d\omega}{R}.$$

Il faut montrer que l'intégrale placée devant q reste *finie*.

Écrivons

$$R = \sqrt{(z-z_0)^2 - r^2} = \frac{q}{\sqrt{1-m^2}}\sqrt{1-u^2},$$

en posant

$$u = \frac{r(1-m^2) - mq}{q}$$

ou

$$du = \frac{1-m^2}{q}dr.$$

Laissant d'abord ω constant (c'est-à-dire $m = a\cos\omega + b\sin\omega = \text{const.}$), nous avons une intégration en u

$$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

entre les limites $u = 1$, $u = -m$. Cette intégrale est *finie*.

Puis il faut intégrer en ω et, comme on a $1 - m^2 \neq 0$, cette intégration donne encore un nombre *fini*.

Donc J_6 tend vers *zéro* lorsque A tend vers le point (1).

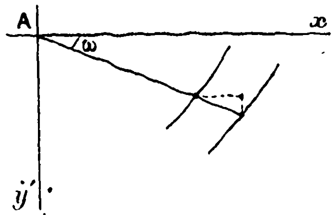
5. *Considérons* J_5.

Prenons d'abord le dernier terme

$$\int\int(u-u_1)\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}}{\Delta z_0}\frac{r}{R}r\,dr\,d\omega.$$

Jusqu'ici nous n'avons nullement fixé les variations de ξ et η, qui

Fig. 6.



sont simplement astreints à coïncider à la frontière avec les variations de l'x et de l'y de la frontière.

Nous pouvons poser

$$\xi = \rho\cos\omega, \qquad \eta = \rho\sin\omega$$

et prendre ρ *identiquement nul* dans l'aire, *sauf* dans une couronne touchant le bord de l'aire et intérieure à l'aire, comme cela a été indiqué déjà.

ρ contient, en tous cas, Δz_0 en facteur, de sorte que $\frac{1}{\Delta z_0}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)$ est *fini* comme $\frac{\xi}{\Delta z_0}$ et $\frac{\eta}{\Delta z_0}$.

Dans ces conditions, le dernier terme de J_5 donne *zéro* lorsque q tend vers *zéro*; et ceci résulte de l'étude de J_6. Prenons ce qui reste de J_5, soit

$$J_7 = \iint (u - u_1)\left[\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) + \frac{a\xi + b\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{R}\right)\right] dx\,dy;$$

$$\frac{\Gamma}{R} = \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2 - r^2}}\left[K + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\right];$$

$$\cos(n, r) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}(a\cos\omega + b\sin\omega),$$

$$\cos\omega = \frac{x - x_0}{r}, \qquad \sin\omega = \frac{y - y_0}{r},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{R}\right) = -\Gamma\frac{-(z - z_0)}{R^3} - \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K}{R}\right)\cdot\cos\omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K}{R}\right)\cdot\sin\omega.$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K}{R}\right) = K\frac{r}{R^3},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{R}\frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\right] &= \frac{1}{R}\frac{z - z_0}{r}\frac{\partial}{\partial x}[\cos(n, r)] \\ &\quad + \frac{1}{R}\cos(n, r)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z - z_0}{r}\right) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\frac{r}{R^3}\cos\omega + \frac{1}{R}\cos(n, r)\frac{-(z - z_0)}{r^2}\cos\omega \\ &\quad + \frac{1}{R}\frac{z - z_0}{r}\frac{\partial}{\partial x}[\cos(n, r)].\end{aligned}$$

D'après la forme de $\cos(n, r)$ ses dérivées x et y contiennent $\frac{1}{r}$ en facteur.

L'on a

$$\cos(n, r) = \frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}(a\cos\omega + b\sin\omega),$$

$$a\cos\omega + b\sin\omega = \frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)}{r},$$

$$\xi\frac{\partial}{\partial x}[\cos(n, r)] + \eta\frac{\partial}{\partial y}[\cos(n, r)]$$
$$= \rho\left[\cos\omega\frac{\partial}{\partial x} + \sin\omega\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{m}{r} - \frac{m}{r} = 0.$$

Le coefficient de $(u - u_1)$ dans J_7 est donc

$$\left[\Gamma\frac{z-z_0}{R^3} - \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r}\right]\left(1 - \frac{\rho}{\Delta z_0}m\right)$$
$$+ \frac{\rho}{\Delta z_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K}{R}\right)(\cos^2\omega + \sin^2\omega)\right.$$
$$+ \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\frac{r}{R_3}(\cos^2\omega + \sin^2\omega)$$
$$- \frac{z-z_0}{R}\frac{\cos(n, r)}{r^2}(\cos^2\omega + \sin^2\omega)$$
$$\left. + \frac{1}{R}\frac{z-z_0}{r}\frac{m-m}{r}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{R^3}\left[K + \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\right]\left[(z-z_0) - \frac{\rho}{\Delta z_0}m(z-z_0)\right]$$
$$+ \frac{1}{R^3}\left[K + \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\right]\frac{\rho}{\Delta z_0}r$$
$$- \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r}\left(1 - \frac{\rho}{\Delta z_0}m\right) - \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r^2}\frac{\rho}{\Delta z_0}(z-z_0),$$

ou bien

$$\frac{1}{R^3}\left[K + \frac{z-z_0}{r}\cos(n, r)\right]\left[(z-z_0) - \frac{\rho}{\Delta z_0}m(z-z_0) + \frac{\rho}{\Delta z_0}r\right]$$
$$- \frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r}\left(1 - \frac{\rho}{\Delta z_0}m\right) + \frac{1}{R}\frac{\rho}{\Delta z_0}\frac{1}{r^2}(z-z_0)[-\cos(n, r)].$$

Représentons les trois termes ci-dessus par H_1, H_2, H_3 et reportons-nous aux valeurs de J_5 et J_6 dont J_4 est la somme. Posons

$$H_4 = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\Delta z_0} \frac{r}{R}.$$

D'après ce qui a été dit, nous avons l'identité

$$2\pi u_1 = \frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ \int\int u_1 \frac{dV}{dN} d\sigma \right\};$$

d'où

$$\text{const.} = \int\int (H_1 + H_2 + H_3 + H_4)\, d\sigma,$$

puisque, si l'on fait $u = 1$, tous les termes de J_6 disparaissent.

Or *les parties de cette intégrale relatives* à H_2, H_3, H_4 *ont un sens*, c'est-à-dire que les portions d'intégrales voisines de l'axe $r = 0$ et voisines du cône $z - z_0 = r$ donnent *zéro* à la limite quand on fait évanouir l'aire entourant la ligne singulière.

Donc il en est de même pour

$$\int\int H_1\, d\sigma.$$

6. Ayant constaté *ce fait fondamental* qu'il ne serait pas facile de mettre directement en évidence, il nous sera aisé de montrer que

$$\int\int (u - u_1)(H_1 + H_2 + H_3 + H_4)\, d\sigma$$

tend vers *zéro* lorsque A vient vers (1) [ou lorsque $(u - u_1)$ tend vers *zéro*, puisque la fonction est *continue*].

En effet, si u admet des dérivées premières finies, ce qui a été supposé, le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$u - u_1 = r.\psi,$$

ψ étant une fonction finie.

Il résulte des études précédentes que

$$\int\int \psi.r(H_2 + H_3 + H_4)\, r dr\, d\omega$$

tend vers *zéro* avec q.

Il reste à étudier

$$\iint (u - u_1) \mathrm{H}_1 \, d\sigma.$$

Décomposons le champ en trois parties :

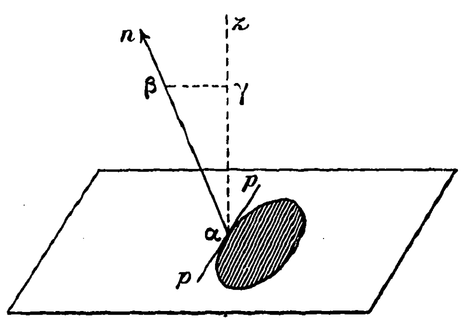
1° D_1, petite aire autour de l'axe : $r = 0$;

2° D_2, petite aire autour du cône, $z - z_0 = r$;

3° D_3, aire restante où H_1 reste *fini*.

Dans D_1 écrivons $u - u_1 = r.\psi$ et nous trouvons *zéro* pour l'intégrale lorsque D_1 s'évanouit.

Fig. 7.



Dans D_2 l'élément différentiel a un signe constant, car on a

$$\frac{z - z_0}{r} - 1 = \varepsilon$$

et

$$|\cos(n, r)| < \mathrm{K} = \cos(n, z),$$

puisque

$$(n, z) < 45^\circ,$$

d'où

$$\overline{\beta\gamma} < \overline{\alpha\gamma},$$

d'où

$$\mathrm{K} + \frac{z - z_0}{r} \cos(n, r) > 0 ;$$

d'ailleurs on a

$$1 - m > 0,$$

d'où

$$\frac{\rho}{\Delta z_0} [r - m(z - z_0)] > 0,$$

d'où

$$z - z_0 + \frac{\rho}{\Delta z_0}[r - m(z - z_0)] > 0.$$

L'élément de H_1 est positif. Donc nous pouvons mettre $(u - u_1)_M$ hors du signe d'intégration et nous avons encore une intégrale qui tend vers *zéro* lorsque D_2 s'évanouit.

Enfin, dans D_3, il y a une partie où l'élément est *négatif*, mais cette partie n'atteint pas le bord, d'après ce qui a été vu.

La partie négative, ombrée sur la figure, est tout entière à droite de la ligne pp du plan horizontal et à angle droit avec la normale.

Pour chaque région on peut faire sortir $(u - u_1)_M$ du signe d'intégration et à la limite, puisqu'on aura

$$\lim(u - u_1)_M = 0.$$

On trouvera en somme, *à la limite*, la valeur *zéro* pour

$$\iint (u - u_1) H_1 \, d\sigma.$$

7. Conclusion. — La convergence est établie pour des données quelconques portées par un plan incliné de moins de 45°.

Il suffit de modifier très peu tout ce qui précède pour établir la convergence lorsque la surface S portant les données est *quelconque* avec plan tangent toujours incliné de moins de 45° et unicité de section par tout cône Λ.

L'on pourrait, de la même manière, étudier la *dérivée conormale*.

Pour la convergence de u à la frontière, il fallait que la fonction donnée u admette des *dérivées premières finies;* pour la convergence de $\frac{du}{dN}$ il faudra que u admette des *dérivées secondes finies*.

Tout est changé si la surface S est un cône Λ à 45°. Abordons l'étude de ce cas relativement auquel nous avons un théorème intéressant.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE A LA FRONTIÈRE LORSQUE LA FRONTIÈRE EST UN CÔNE CARACTÉRISTIQUE.

Ici, on l'a vu, si la surface des données est le cône A', de sommet Ω,

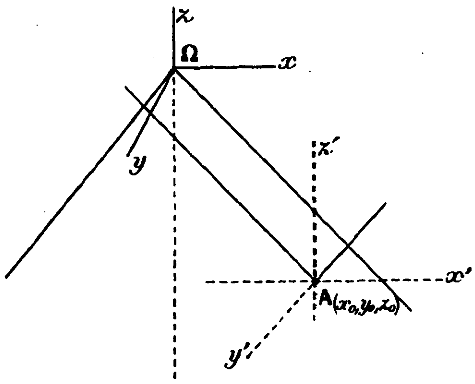
$$x^2 + y^2 = z^2,$$

le fait de donner u sur le cône détermine la valeur de $\frac{du}{dN}$ *sur le cône.*

PREMIÈRE SECTION.

On donne u non nul sur le cône.

Fig. 8.



Il faut, comme précédemment, examiner l'expression

$$\iint \frac{du}{dN} \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\iint (u - u_1)\frac{dV}{dN}\, d\sigma\right\}$$

et voir *si elle tend vers zéro* lorsque le point $A(x_0, y_0, z_0)$ se rapproche du point (1) situé sur le cône Ω, u_1 étant la valeur donnée de u au point (1).

1. Écrivons encore $\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2} = R$ et étudions l'intégrale

$$J_1 = \iint \frac{d\sigma}{R}$$

étendue à l'aire découpée sur le cône Ω par le cône ayant son sommet en A.

Grâce à la symétrie, nous pouvons transformer l'intégrale de surface en *intégrale simple* avec la variable μ qui définit l'hyperboloïde

$$(z-z_0)^2 - r^2 = \mu^2.$$

L'hyperboloïde de paramètre μ et le cône Ω se coupent suivant l'ellipse

$$\left.\begin{array}{c}(z_0^2 - x_0^2)x'^2 + (z_0^2 - y_0^2)y'^2 - 2x_0 y_0 x'y' \\ -2ux_0x' - 2uy_0y' - u^2\end{array}\right\} = 0.$$

L'on a posé

$$\lambda^2 - \mu^2 = 2u,$$
$$\lambda^2 = z_0^2 - x_0^2 - y_0^2.$$

L'aire de l'ellipse, à un facteur constant près, est

$$\left|\frac{\Delta}{\delta^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

Or

$$\Delta| = u^2 z_0^4,$$
$$\left|\delta^{\frac{3}{2}}\right| = |z_0^3|.\lambda^3.$$

D'où, à une constante multiplicative près,

$$\sigma = \frac{z_0 u^2}{\lambda^3},$$

$$d\sigma = \frac{z_0}{\lambda^3} u du = \frac{z_0}{\lambda^3}(\lambda^2 - \mu^2)\mu d\mu.$$

Ainsi, l'on a

$$\mathrm{CJ}_1 = z_0 \left[\int_0^\lambda \frac{d\mu}{\lambda} - \int_0^\lambda \frac{\mu^2 d\mu}{\lambda^3}\right] = z_0\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

Or ce qui marque que le point A vient sur le cône Ω, c'est que λ tend vers *zéro*. Puisque λ n'intervient pas dans l'intégrale J_1, *celle-ci ne* *tend pas vers zéro lorsque le point* A *se rapproche de la surface des données.*

C'est l'*inverse* de ce qui arrivait avec une surface quelconque. Nous prévoyons que le *problème de la convergence* va se présenter avec une surface privilégiée, *d'une manière toute nouvelle.*

L'on a donc ce résultat, par le théorème de la moyenne :

$$J_2 = \int\int \frac{du}{dN}\frac{d\sigma}{R}$$

tend vers

$$\left(\frac{du}{\partial N}\right)_M C_1 z_0$$

lorsque A vient en (1); z_0 étant la cote de A, C_1 une constante et $\left(\frac{du}{dN}\right)_M$ une valeur moyenne de $\frac{du}{dN}$ sur la génératrice du cône Ω qui passe par (1).

2. Étudions maintenant

$$J_3 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int (u - u_1)\frac{dV}{dN}d\sigma\right\} = \frac{-\partial}{\partial z_0}\left\{\int\int (u - u_1)\frac{\Gamma}{R}d\sigma\right\},$$

où l'on a posé

$$\Gamma = \cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r).$$

Suivons pas à pas l'étude analogue faite avec une surface quelconque.

L'équation du cône Ω est

$$- z = r_1$$

(nous conservons la lettre r pour la distance polaire au point A), d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{r_1} = -\cos\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{r_1} = -\sin\theta.$$

$-\cos\theta$ et $-\sin\theta$ remplaceront a et b dans les dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$. Le terme $(a\xi + b\eta)$ devient

$$-(\cos\theta.\xi + \sin\theta.\eta).$$

Or

$$\xi = \rho\cos\omega; \qquad \eta = \rho\sin\omega,$$

donc

$$(a\xi + b\eta)$$

devient

$$-\rho\cos(\omega - \theta) = \rho m_1.$$

Nous aurons m_1 à la place de m, mais m_1 étant *un cosinus,* l'on a toujours

$$|m_1| < 1,$$

inégalité importante à noter.

J_3 donne donc d'abord un terme J_4 qui contient $\frac{\Gamma}{R}$ en facteur dans l'élément différentiel

$$-J_4 = \int\int\left[+\frac{\xi}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\rho m_1}{\Delta z_0}\frac{\partial u}{\partial z} + (u - u_1)\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}}{\Delta z_0}\right]\frac{\Gamma}{R}d\sigma.$$

La partie entre crochets est *finie* si la fonction donnée u et ses premières dérivées sont *finies*. L'on a donc

$$|J_4| < C(\Gamma)_M\int\int\frac{d\sigma}{R}.$$

Or ceci tend vers *zéro* lorsque A vient sur le cône, car Γ devient *nul,* comme on le voit sur la figure,

$$\cos(n, z) = \cos\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{z - z_0}{r} = 1,$$

$$\cos(n, r) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}.$$

Or

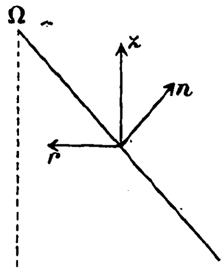
$$\Gamma = \cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r} \cos(n, r).$$

Donc

$$J_3 = J_4 + J_5$$

et J_4 devient *nul* quand A vient sur le cône.

Fig. 9.



5. Étudions J_5 :

$$-J_5 = \int\int (u - u_1) \left[\frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\Gamma}{R} \right) + \frac{\xi}{\Delta z_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Gamma}{R} \right) + \frac{\eta}{\Delta z_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Gamma}{R} \right) + \frac{\rho m_1}{\Delta z_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma}{R} \right) \right] d\sigma.$$

L'on a, sur tout le cône,

$$\cos(n, z) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

la dérivée est nulle.

Évaluons

$$\cos(n, r).$$

Les cosinus de n sont

$$\frac{x}{r_1\sqrt{2}}, \quad \frac{y}{r_1\sqrt{2}}, \quad \frac{-z}{r_1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} \cos(n, r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\omega \cos\theta + \sin\omega \sin\theta) \\ &= \frac{m_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}. \end{aligned}$$

Les dérivées en z ou en z_0 sont *nulles* et il est inutile de calculer les dérivées en x ou en y parce que l'on a ρ en facteur. Or ρ étant *nul* sur l'axe vertical de A, les puissances négatives de r ne peuvent empêcher la convergence.

En somme nous avons, pour coefficient de $(u - u_1)$,

$$\frac{1}{R^3}\left[\cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r)\right]\left[(z - z_0) - \frac{\rho}{\Delta z_0}m_1(z - z_0) + \frac{\rho}{\Delta z_0}r\right],$$
$$-\frac{1}{R}\frac{\cos(n, r)}{r}\left(1 - \frac{\rho}{\Delta z_0}m_1\right),$$
$$+\frac{1}{R}\frac{\rho}{\Delta z_0}\frac{1}{r^2}(z - z_0)[\lambda_1\cos\omega + \lambda_2\sin\omega - \cos(n, r)].$$

Par le même raisonnement qui a été fait pour le cas d'une surface quelconque, l'on voit que les intégrales contenant $\frac{1}{R^3}$, comme celles contenant $\frac{1}{R}$, *ont un sens*. L'on a

$$|m_1| < 1,$$

d'où

$$(z - z_0) - \frac{\rho}{\Delta z_0}m_1(z - z_0) + \frac{\rho}{\Delta z_0}r > 0$$

et

$$\cos(n, r) = m_1\frac{\sqrt{2}}{2},$$

d'où

$$\cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r) > 0$$

sur le bord du cône Λ^0, puisque, sur tout le cône Ω, l'on a :

$$\cos(n, z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et, sur le bord du cône Λ^0 de sommet A :

$$\frac{z - z_0}{r} = 1$$

D'ailleurs ρ est *identiquement nul*, sauf *au voisinage de ce bord.*

Donc $-J_5$ se réduit à deux termes, celui en

$$\frac{1}{R^3}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{z-z_0}{r}\cos(n,r)\right]$$

et celui en

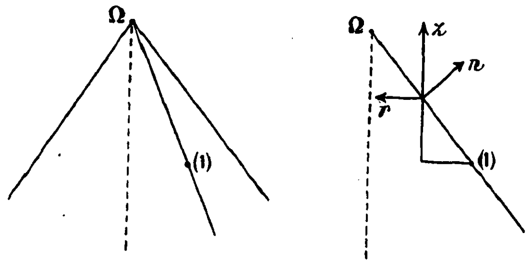
$$-\frac{1}{R}\frac{\cos(n,r)}{r}.$$

Le premier terme donne une intégrale J_6 qui se réduit à *zéro* lorsque A vient sur le cône Ω en (1), car on a, à la limite,

$$\frac{z-z_0}{r}=1,$$

$$\cos(n,r)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Fig. 10.



Donc enfin J_5 se réduit à

$$J_7=\iint(u-u_1)\frac{1}{R}\frac{\cos(n,r)}{r}\,d\sigma.$$

4. Conclusion. — Il faut, *pour la convergence*, que l'on ait, *lorsque* A *vient en* (1),

$$\lim J_8=0$$

avec

$$J_8=\iint\left[\frac{du}{dN}+\frac{u-u_1}{r}\cos(n,r)\right]\frac{d\sigma}{R}.$$

Je ne saurais dire si ceci est vérifié quelle que soit la fonction donnée (continue).

J'abandonne cette question pour l'instant, car l'on voit à quel point le maniement de J_8 est difficile :

Le champ d'intégration devient *nul* (étant infiniment petit du premier ordre);

L'élément d'intégration devient *infini*, d'une manière particulièrement difficile à manier.

L'on peut esquisser une vérification pour le cas où la *donnée* serait

$$u = z,$$

mais l'on ne voit pas bien, sur ce cas particulier, quel est le mécanisme général.

La vérification serait immédiate pour le cas suivant : donnée constante le long d'une génératrice du cône. Mais alors, la continuité de la donnée exigerait que la région du sommet du cône soit remplacée par une portion de surface autre et se raccordant avec le cône.

DEUXIÈME SECTION.

u est nul sur le cône, $F(x, y, z)$ *n'est pas nul.*

Nous devons revenir sur le cas de l'équation $A(u) = F$ avec la *donnée u nulle* pour le cas de la surface privilégiée.

Ici $(Z - z_0)$ ne tend pas vers *zéro* quand (x_0, y_0, z_0) vient sur le cône de sommet Ω.

D'après le théorème de la moyenne il suffit d'examiner l'intégrale

$$\iiint_{(\text{vol. } Abc)} \frac{\partial V}{\partial z_0} d\tau$$

ou

$$J = \iint_{(\text{aire } bc)} V\, d\sigma.$$

L'on a vu que

$$\text{aire}\, bc = K.z_0.\lambda,$$

si l'on a posé

$$\lambda = \sqrt{z_0^2 - x_0^2 - y_0^2}.$$

Isolons la verticale de A par un cylindre de rayon ε. Dans la portion restante de l'aire (bc), l'on a, si $|z_0| < H$,

$$V < \log\left(\frac{H}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{H^2}{\varepsilon^2} - 1}\right),$$

$$J < \log\left(\frac{H}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{H^2}{\varepsilon^2} - 1}\right).H.K.$$

Conclusion. — L'on voit que J tend vers *zéro*, c'est-à-dire que $u(x_0, y_0, z_0)$ tend vers *zéro*, valeur donnée, lorsque A vient sur le cône : il suffit de faire décroître convenablement λ lorsque l'on fait décroître ε; par exemple, l'on peut prendre $\lambda = \varepsilon$.

DEUXIÈME PARTIE.

PROBLÈME EXTÉRIEUR.

CHAPITRE I.

1. Les conclusions de la première Partie montrent clairement que le problème intérieur n'est résoluble que pour certaines formes de la surface des données. Imaginons, par exemple, que cette surface soit une sphère.

Menons par le centre un cône à 45°. Dans la région intérieure au cône, inférieure ou supérieure, l'on se trouve dans les conditions exigées par le problème intérieur; il n'en va plus de même pour les points intérieurs à la sphère et extérieurs au cône.

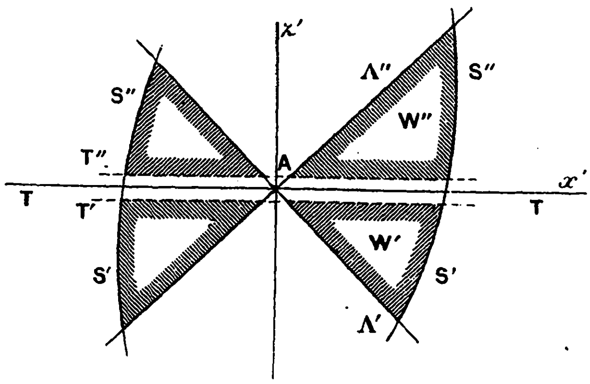
Nous devons donc étudier *l'intégration de* $A(u) = F(x, y, z)$, *lorsque la surface qui porte les données est analogue, au point de vue de l'*Analysis situs, *à un cylindre à axe vertical et est découpée* extérieurement *par le cône à 45° et à axe vertical.*

D'où cette désignation de « Problème extérieur ».

2. *Principe de la méthode d'intégration.* — L'idée de M. Volterra ne consiste plus, comme pour le problème intérieur, à trouver une sorte de fonction de Green et à faire une inversion d'intégrale, mais bien à revenir à une sorte de problème de Dirichlet dans le plan horizontal T passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$.

Pour cela, l'on appliquera la formule (G) au volume limité par S et par le cône Λ (extérieurement) avec une fonction auxiliaire V discontinue au passage par le plan T, c'est-à-dire l'on appliquera deux fois la formule (G) : 1° au volume W″ limité par le plan T″ de cote $(z_0 + \varepsilon)$; 2° au volume W′ limité par le plan T′ de cote $(z_0 - \varepsilon)$.

Fig. 11.



Comme nous aurons à faire plusieurs dérivations d'intégrales (dérivations que M. Volterra semble faire *intuitivement*), je vais donner, de suite, la théorie rigoureuse de ces dérivations.

3. *Adaptations diverses de la formule d'Ostrogradski.* — I. Nous aurons d'abord à dériver, par rapport à z_0, une intégrale de surface étendue à l'aire du plan T limitée par S

$$I = \iint_{(\text{aire } T, S)} \varphi \, dx \, dy = \iint_{(T,S)} \varphi \, r \, dr \, d\alpha.$$

Soient donc C la courbe d'intersection de S avec le plan T : $z = z_0$, et C_1 la courbe d'intersection de S avec le plan : $z = z_0 + \Delta z_0$.

Soit C′ la projection de C_1, nous allons prendre un contour C″ voisin de C et à une distance BD infiniment petite par rapport à DD′ et nous aurons à établir une correspondance sur un rayon vecteur fixe, entre les points de $\overline{BD'}$ et les points de $\overline{BD}$.

Pour cela, nous donnerons à r la variation ρ (I^{re} Partie, Chap. I, n° **2**)

$$\begin{cases} \rho \equiv 0, & \text{en B,} \\ \rho = DD' = \Delta z_0 . \cot(N, z), & \text{en D;} \end{cases}$$

ce qui donne, pour x :

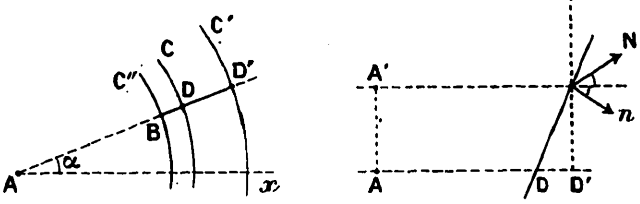
$$\xi = \rho \cos\alpha;$$

pour y :

$$\eta = \rho \sin\alpha;$$

$$\Delta I = \iint_{(\text{aire C})} \Delta\varphi . dx\, dy + \iint_{(\text{aire C}-\text{C}'')} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\eta) \right\} dx\, dy.$$

Fig. 12.



La seconde intégrale se réduit à

$$\int_C \varphi . \Delta z_0 . \cot(N, z) . (dy \cos\alpha - dx \sin\alpha)$$
$$= \Delta z_0 \int_C \varphi . \cot(N, z)\, dl,$$

l étant l'élément de longueur de C.

Finalement,

$$\frac{\partial I}{\partial z_0} = \iint_{\text{aire C}} \frac{\partial\varphi}{\partial z_0} dx\, dy + \int_C \varphi \cot(N, z)\, dl.$$

4. II. Nous avons ensuite à dériver, par rapport à z_0, une intégrale *de surface* étendue, par exemple, à la surface BC découpée extérieurement dans S par le cône A.

Soit $\overline{AA'} = \Delta z_0$. L'aire découpée BC devient B'C'.

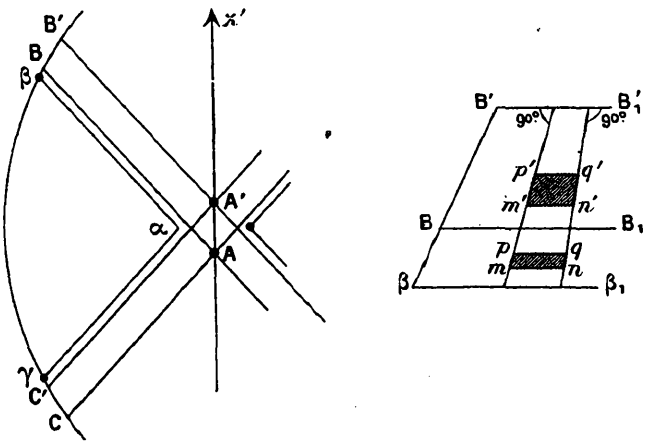
Par une surface de révolution $\alpha\beta\gamma$ située à une distance d'ordre supérieur à 1 en Δz_0 des deux nappes coniques, nous isolons une surface $\beta\gamma$ dont tous les points se correspondent à eux-mêmes. Puis, il faut faire correspondre les points de $B'\beta$ à ceux de $B\beta$ et ceux de $C'\gamma$ à ceux de $C\gamma$.

Soient $mn = dl$, $mp = d\lambda$, $(mnpq) = dl\,d\lambda$ et $d\lambda = K.dz$.

Pour $(m'n'p'q')$, dl est le même et λ éprouve une variation ρ :

$$\rho = 0 \quad \text{en } \beta, \qquad \rho = K\Delta z_0 \quad \text{en B};$$

Fig. 13.



ce qui donne, pour la deuxième intégrale et pour la partie supérieure BB_1,

$$\int_{(BB_1)} dl \int_\beta^B \frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi\rho)\,d\lambda = \int_{(BB_1)} \varphi\,dl.K\Delta z_0.$$

Or

$$K = \frac{1}{\sin(N, z)},$$

d'où

$$\Delta z_0 \int_{(BB_1)} \varphi \frac{1}{\sin(N, z)}\,dl.$$

Pour la courbe CC_1, l'on trouve, de la même manière,

$$-\Delta z_0 \int_{(CC_1)} \varphi \frac{1}{\sin(N, z)}\,dl,$$

en tout :

$$\Delta \mathrm{I} = \Delta z_0 \left[\iint\limits_{(\text{aire } \mathrm{BB_1\,CC_1})} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\omega + \int_{(\mathrm{BB_1})} \frac{\varphi}{\sin(\mathrm{N}, z)} dl - \int_{(\mathrm{CC_1})} \frac{\varphi}{\sin(\mathrm{N}, z)} dl \right],$$

et la partie entre crochets donne donc

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial z_0}.$$

5. III. Pour la même translation de CAB en C′A′B′ nous aurons à dériver une intégrale *de volume*.

Toujours de même l'on trouve

$$\Delta \mathrm{I} = \Delta z_0 \left[\iint\limits_{(\text{surf. AB})} \varphi \, dx \, dy - \iint\limits_{(\text{surf. AC})} \varphi \, dx \, dy + \iiint\limits_{(\text{vol. ABC})} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau \right].$$

Cela fait, nous pouvons intégrer, d'après M. Volterra.

6. *Intégration.* — Cherchons une solution V″ de l'équation

$$\mathrm{A}(\mathrm{V}) = 0$$

qui soit nulle sur le cône supérieur Λ″ et de la forme

$$f(\theta) + [\log r]\, g(\theta),$$

où l'on a posé

$$\theta = \frac{z - z_0}{r} < 1.$$

L'on trouve

$$\mathrm{V}'' = c + \int_0^\theta \log(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} + \log r (\arcsin \theta + c'),$$

il faut prendre

$$c = - \int_0^1 \log(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} = - q, \qquad c' = - \frac{\pi}{2}.$$

[Nous trouverons (IIe Partie, Chap. II, n° 3) la valeur numérique q qui n'est pas utile en ce moment.]

La formule (G) donne alors, puisque l'on a $A(u) = F$,

$$-\iiint_{(W'')} V'' F \, d\tau = \iint_{(S'')} \left(u \frac{dV''}{dN} - V'' \frac{du}{dN}\right) d\omega + \iint_{(T)} \left(u \frac{\partial V''}{\partial z} - V'' \frac{\partial u}{\partial z}\right) d\omega.$$

De même, soit V' nulle sur Λ';

$$V' = + q + \int_0^\theta \log(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} + [\log r]\left(\arc\sin\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

l'on a

$$-\iiint_{(W')} V' F \, d\tau = \iint_{(S')} \left(u \frac{dV'}{dN} - V' \frac{du}{dN}\right) d\omega + \iint_{(T)} \left(V' \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial V'}{\partial z}\right) d\omega.$$

Ajoutons les membres de ces deux égalités :

$$-\int_{(W'')} - \int_{(W')} - \int_{(S'')} - \int_{(S')} = \iint_{(T)} (V' - V'')_T \frac{\partial u}{\partial z} d\omega = 2 \iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) \frac{\partial u}{\partial z} d\omega.$$

Cette dernière intégrale est donc connue en fonction de z_0 et des données.

Nous avons donc

$$\iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) \frac{\partial u}{\partial z} d\omega = J_1.$$

Il suffit de dériver par rapport à $z = z_0$ pour arriver au but.

D'après le n° 3, l'on a

$$\frac{\partial J_1}{\partial z_0} = \iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} d\omega + \int_{(C)} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) \cot(N, z) \frac{\partial u}{\partial z} dl,$$

u et ses dérivées étant donnés sur S, l'intégrale de surface est connue :

$$\iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\, d\omega = J_2.$$

Or

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + F,$$

d'où

$$\iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\Delta u\, d\omega = J_2 + \iint_{(T)} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) F\, d\omega = J_3.$$

Mais ν étant *la normale extérieure à la courbe plane* C, l'on a (problème de Dirichlet)

$$\iint_{(T)} \Delta u\, d\omega - \int_C \frac{du}{d\nu}\, dl = 0,$$

$$\iint_{(T)} \log r \Delta u\, d\omega + \int_C \left[u \frac{d}{d\nu}(\log r) - \log r \frac{du}{d\nu}\right] dl = 2\pi u(x_0, y_0, z_0).$$

Ceci donne :

$$J_3 = q\int_C \frac{du}{d\nu}\, dl + \frac{\pi}{2}\left[2\pi u(x_0, y_0, z_0) - \int_C \left(u\frac{d}{d\nu}\log r - \log r\frac{du}{d\nu}\right) dl\right],$$

d'où

$$\pi^2 u(x_0, y_0, z_0) = J_3 - q\int_C \frac{du}{d\nu}\, dl + \frac{\pi}{2}\int_C \left(u\frac{d}{d\nu}\log r - \log r\frac{du}{d\nu}\right) dl = J_4,$$

J_4 est *connu*, donc u aussi, si l'on donne, sur S, les valeurs de u et de *toutes* ses dérivées.

L'intégration est achevée, en principe, mais nous devons tout exprimer plus explicitement pour montrer que $\frac{du}{dN}$ intervient seul.

7. Calculons donc $\frac{\partial J_1}{\partial z_0}$.

Or

$$-\frac{J_1}{2} = \int_{W''} + \int_{W'} + \int_{S'} + \int_{S}.$$

Pour alléger l'exposition, supposons $u = 0$ sur S, ce que l'on peut toujours obtenir par une différence d'intégrales.

1° *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{W''}$. — D'après le n° 5, c'est

$$\iiint\limits_{W''} F\frac{\partial V''}{\partial z_0}d\tau - \iint\limits_{(T)} V''_T F\,d\omega = \iiint\limits_{W''} + \iint\limits_{(T)}\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)F\,d\omega.$$

2° *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{W'}$. — C'est le même résultat, car il y a double changement de signe pour l'intégrale de surface.

3° *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\iint\limits_{S''} - V''\frac{du}{dN}d\omega$. — D'après le n° 4 c'est

$$\iint\limits_{S''} - \frac{\partial V''}{\partial z_0}\frac{du}{dN}d\omega - \int_C - V''\frac{du}{dN}\frac{1}{\sin(N, z)}dl.$$

4° *Expression de* $\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{S'}$. — De même on obtient

$$\iint\limits_{S'} - \frac{\partial V'}{\partial z_0}\frac{du}{dN}d\omega + \int_C - V'\frac{du}{dN}\frac{1}{\sin(N, z)}dl.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
-2\frac{\partial J_1}{\partial z_0} = \int_{(W''+W')} F\frac{\partial V''}{\partial z_0}d\tau - \int_{(S''+S')}\frac{du}{dN}\frac{\partial V''}{\partial z_0}d\omega \\
+ 2\int_T\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)F\,d\omega \\
- 2\int_C\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{du}{dN}\frac{1}{\sin(N, z)}dl;
\end{aligned}$$

alors, posant $W = W' + W''$ et $S = S' + S''$,

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{\partial J_1}{\partial z_0} - \int_C\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\cot(N, z)\frac{\partial u}{\partial z}dl \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\int_{(W)} F\frac{\partial V}{\partial z_0}d\tau - \int_{(S)}\frac{du}{dN}\frac{\partial V}{\partial z_0}d\omega\right\} - \int_T\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)F\,d\omega \\
&\quad + \int_C\left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left[\frac{1}{\sin(N, z)}\frac{du}{dN} - \frac{\cos(N, z)}{\sin(N, z)}\frac{\partial u}{\partial z}\right]dl.
\end{aligned}$$

Le crochet se réduit, dans l'intégrale curviligne, à [1]

$$\frac{du}{d\nu},$$

enfin, donc

$$J_3 = -\frac{1}{2}\left\{\int_W F\frac{\partial V}{\partial z_0}d\tau - \int_S \frac{du}{dN}\frac{\partial V}{\partial z_0}d\omega\right\} + \int_C \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{du}{d\nu}dl,$$

$$J_4 = -\frac{1}{2}\left\{\int_W - \int_S\right\},$$

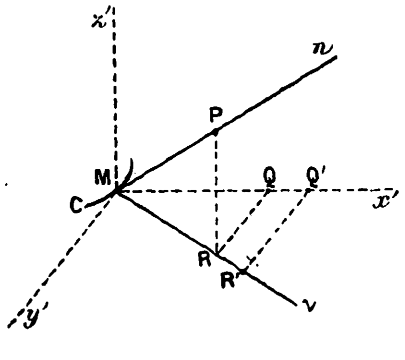
---

(1) Soit M un point de la courbe C, Mν la normale à C, Mn la normale à la surface S. Soit $\overline{MP} = 1$, on a

$$\alpha = \overline{MQ}, \qquad \beta = \overline{QR}, \qquad \gamma = \overline{RP}$$

(α, β, γ sont les cosinus de Mn).

Fig. 13 *bis*.



Soient a, b les cosinus de Mν, on a

$$a = \overline{MQ'}, \qquad b = \overline{Q'R'} \qquad (\overline{MR'} = 1),$$

d'où

$$a = \frac{\alpha}{\sin(n, z)} = \frac{\alpha}{\sin(N, z)}, \qquad b = \frac{\beta}{\sin(N, z)}.$$

Or $\cos(N, z) = -\gamma$, d'où

$$\frac{1}{\sin(N, z)}\left[\frac{du}{dN} - \cos(N, z)\frac{\partial u}{\partial z}\right] = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{d\nu}.$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
u(x_0, y_0, z_0) &= -\frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_W - \int_S\right\} \\
&= +\frac{1}{2\pi^2}\iiint_{(W)} \frac{1}{\sqrt{r^2-(z-z_0)^2}} \log\left[\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\right] F\, d\tau \\
&\quad -\frac{1}{2\pi^2}\iint_{(S)} \frac{1}{\sqrt{r^2-(z-z_0)^2}} \log\left[\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\right] \frac{du}{dN}\, d\omega.
\end{aligned}
$$

C'est la formule donnée par M. Volterra (p. 193), sauf que, si nous n'avions pas choisi la donnée *u nulle* sur S, nous aurions, en plus, un terme

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left\{\iint_{(S)} u f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)\, d\omega\right\},$$

que l'on ne peut mettre sous une forme simple parce qu'il se présenterait des intégrales curvilignes dont l'élément différentiel est *infini*.

8. Conclusion. — *Cette intégration exige donc la donnée de u et* $\frac{du}{dN}$ *et l'unicité de la section extérieure de* S *par* Λ.

Il est encore des surfaces *privilégiées*.

Mais *l'intégrale prend-elle la valeur donnée à la frontière? Ceci entraîne des conditions de possibilité* et M. Volterra a montré la présence *d'autres conditions encore*.

L'intégration précédente appelle donc quelques remarques fondamentales.

Jusqu'ici elle n'est que *formelle :*

Si l'intégrale existe, elle est *représentée* par la formule obtenue, mais *la formule peut ne pas représenter une véritable intégrale* du problème extérieur.

CHAPITRE II.

CONDITIONS D'EXISTENCE DE L'INTÉGRALE DANS LE PROBLÈME EXTÉRIEUR. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER.

Soit donc $A(u) = F(x, y, z)$ avec des données extérieures.

En prenant des différences d'intégrales, nous pouvons supposer

$$u = 0 \text{ sur } S,$$
$$F \equiv 0.$$

1. *La condition de M. Volterra.* — Pour obtenir l'intégrale, M. Volterra emploie une fonction V qui se réduit à

$$K + K' \log r$$

dans le plan horizontal T.

Dans l'aire découpée par ce plan dans le volume W il a alors à appliquer *la formule ordinaire de Green.*

De même, soit une fonction V, *nulle* sur le cône, se réduisant à

$$K = \text{const.}$$

dans le plan T.

L'application à la même aire de la formule ordinaire de Green donnera *zéro* d'un côté et une fonction des données de l'autre, d'où une *condition imposée aux données.*

La fonction V, intégrale de $A(V) = 0$, sera, dans W'',

$$V'' = \arc\sin \frac{z - z_0}{r} - \frac{\pi}{2},$$

dans W'

$$V' = \arc\sin \frac{z - z_0}{r} + \frac{\pi}{2},$$

et alors *la même marche exactement* que celle suivie pour intégrer donne

$$0 = \iint_{(S)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} \frac{du}{dN} d\omega - \iiint_{(W)} \frac{F}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} d\tau$$

(Mémoire de M. Volterra, p. 188).

Cette condition de M. Volterra, *qu'il ne commente aucunement*, se simplifie si nous prenons $F \equiv 0$ et devient

$$(C_1) \qquad 0 = \iint_{(S)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} \frac{du}{dN} d\omega.$$

Je l'appellerai une *condition mobile* puisquelle doit être réalisée pour toute aire (S) découpée par un cône Λ ayant son sommet en un point quelconque du volume W, en particulier pour toute aire (S_0) relative à un cône Λ ayant son sommet en un point $\mathcal{A}$ de S.

2. *La condition de l'auteur.* — Au moment où j'abordai cette étude, je proposai [1] une autre manière de trouver une condition mobile. Toute intégrale de $A(u) = 0$, soit $\psi(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ *nulle* sur le cône Λ et *exempte* de *singularités* à l'extérieur de ce cône donne, par l'application de la formule fondamentale de l'Introduction, une condition.

Mais j'ai été amené à reconnaître que la fonction ψ, que j'ai donnée, avait une dérivée *discontinue*, en sorte qu'elle n'est pas utilisable, et, à défaut de recherches plus profondes sur une équation de Laplace, je me borne à signaler cette idée : on pressent que ψ peut exister et qu'une condition peut donc exister [2].

Mais il y a encore autre chose, dont M. Volterra ne s'est point préoccupé.

Il faut que l'intégrale prenne la valeur donnée à la frontière, et ceci me donne, dans les conditions où je me suis placé, et où il faut se placer pour pouvoir faire une discussion, (S_0) étant l'aire relative à un point frontière $\mathcal{A}$,

$$(C_2) \qquad 0 = \iint_{(S_0)} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} \log\left[\frac{r^2 - (z - z_0)^2}{r}\right] \frac{du}{dN} d\omega,$$

---

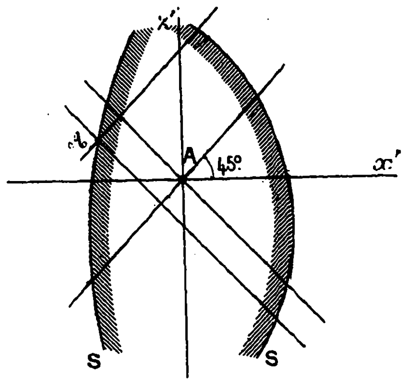
(1) *Comptes rendus*, 11 février 1901.

(2) L'existence effective de ψ paraît résulter d'une remarque énoncée dans la *Thèse* de M. Le Roux.

c'est encore une *condition mobile*, mais relative seulement aux points $\mathcal{A}$, et non, comme la précédente, aux points A et $\mathcal{A}$.

Avant d'aborder la comparaison des deux conditions, je vais montrer, sur un exemple simple, qu'elles peuvent parfois être *compatibles*.

Fig. 14.



3. *Sur un cas particulier du problème extérieur.* — Supposons les données portées par un *cylindre* à axe vertical et *invariables* pour une même génératrice. Soit α l'angle polaire qui caractérise une génératrice, l'on donne :

$$u = 0$$

sur le cylindre,

$$\frac{du}{dN} = f(\alpha) = \text{dérivée } \textit{normale} \text{ extérieure.}$$

Il est clair alors qu'il suffit d'examiner les conditions C_1 et C_2 dans une section droite.

La condition (C_1) donne

$$\iint \frac{1}{\sqrt{r^2 - (z - z_0)^2}} f(\alpha) \mathrm{R}\, d\alpha\, d(z - z_0) = 0;$$

r étant le rayon vecteur, par rapport à A, d'un point de la circonférence de la section droite, l'on voit que, pour une même génératrice, $\frac{z - z_0}{r} = u$ varie de -1 à $+1$.

Donc (C_1) devient

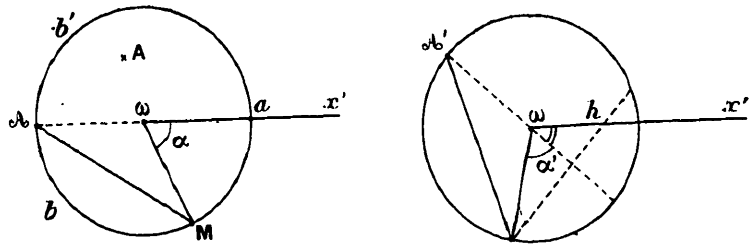
$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 0$$

ou

$$(\mathfrak{F}) \qquad \int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

ceci quel que soit le point A dans l'aire de la section droite. Donc ici la *condition mobile* (C_1) se résout en *la seule condition fonctionnelle* qui précède [1].

Fig. 15.



Envisageons la condition (C_2) et supposons d'abord $\mathcal{A}$ dans le prolongement de $\omega x'$ (*fig.* 15), alors on a

$$r = \mathcal{A}M = 2R\cos\frac{\alpha}{2},$$

et M doit parcourir successivement les demi-circonférences $ab\mathcal{A}$, $ab'\mathcal{A}$.

D'ailleurs

$$\log\left[\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\right] = \log 2R + \log\cos\frac{\alpha}{2} + \log(1-u^2).$$

Donc $C_2(\mathcal{A})$ donne :

$$\iint\left[\log 2R + \log\cos\frac{\alpha}{2} + \log(1-u^2)\right]\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} R f(\alpha)\,d\alpha = 0.$$

---

[1] Et qui a une signification physique : u étant un *potentiel des vitesses*, elle exprimerait que le *flux total* à travers la circonférence est *nul*.

Il y a trois termes; le premier et le troisième nous donnent l'équation ($\mathcal{F}$).

[L'on a d'ailleurs, en faisant

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = dv,$$

$$\int_0^1 \log(1-u^2)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos v)\,dv = 2\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} \qquad \text{(Euler)},$$

et

$$\int_{-1}^{+1} = 2\int_0^1 = 2\pi\log\frac{1}{2}.$$

mais cette valeur numérique est sans importance.]

Le second terme, au contraire, donne du nouveau, savoir :

$$\int_0^\pi f(\alpha)\log\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha + \int_0^\pi f(2\pi-\alpha)\log\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = 0$$

ou

$$\int_0^\pi [f(\alpha)+f(2\pi-\alpha)]\log\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = 0.$$

Supposons maintenant que le point $\mathcal{A}$ ait une position quelconque $\mathcal{A}'$, caractérisée par l'angle h (*fig.* 99), la condition devient, quel que soit h entre 0 et 2π,

$$\int_0^\pi [f(\alpha'+h)+f(2\pi-\alpha'+h)]\log\cos\frac{\alpha'}{2}\,d\alpha' = 0.$$

En un mot, la condition mobile C_2 se réduit à ceci : *l'intégrale*

$$(\mathcal{G}) \qquad \mathfrak{z} = \int_0^\pi [f(x+y)+f(2\pi-x+y)]\log\cos\frac{x}{2}\,dx$$

doit être nulle quel que soit y *entre* 0 *et* 2π.

4. Je vais montrer, par l'intuition géométrique, que ceci est possible.

Soit, d'une manière plus générale,

$$z = \int_a^b \varphi(x, y)\, dx.$$

L'on veut que z soit *nul quel que soit* y.

Soit $\Phi(x, y)$ une fonction telle que

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

On s'imposera en plus que la surface

$$\zeta = \Phi(x, y),$$

contienne deux droites parallèles à Oy de même cote, d'ailleurs quelconque, dans les plans

$$x = a, \qquad x = b;$$

z sera bien nul, quel que soit y.

Il faut, bien entendu, que Φ renferme y, c'est-à-dire que la surface ne soit pas un cylindre. Φ renferme un très grand arbitraire, donc φ aussi, et il reste à résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x + y) + f(2\pi - x + y) = \frac{\varphi(x, y)}{\log \cos \frac{x}{2}}.$$

f contient une part d'arbitraire comme φ et l'on imposera, en plus, à f la condition :

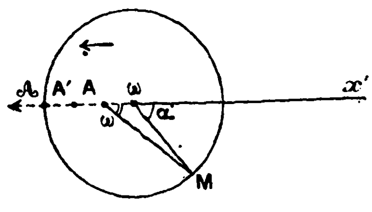
$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

L'on voit, sur ce cas simple, que les conditions de M. Volterra et de l'auteur peuvent bien être remplies en même temps, et même ici la condition (C_2) contient la condition (C_1).

5. *Sur un cas particulier* (suite). *Étude de la dérivée conormale.* — Nous allons étudier la dérivée conormale dans le cas du cylindre portant des données constantes sur une même génératrice. Pour simplifier, prenons seulement un point particulier, le point $\mathcal{A}$ sur $\omega x'$. En ce point l'on a

$$\frac{d}{d\mathrm{N}} = -\frac{\partial}{\partial x_0}.$$

Fig. 16.



Le point $\mathcal{A}$ peut être regardé comme la limite vers laquelle tend un point A.

Étudions la dérivée de l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int\int\frac{1}{\sqrt{r^2-(z-z_0)^2}}\log\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\frac{du}{d\mathrm{N}}d\omega$$

pour un déplacement $\overline{\mathrm{AA}'}$.

L'on trouve, comme toujours, d'abord la même intégrale avec, *sous le signe, la fonction dérivée*, puis deux intégrales curvilignes. Ces deux dernières *se détruisent* lorsque la donnée est la même sur une même génératrice; cela est facile à reconnaître et je n'y insisterai pas.

Il reste donc

$$+\frac{\mathrm{R}}{2\pi^2}\int\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}d\alpha\, dz'.$$

L'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x_0} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right].$$

Pour évaluer $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\right)_{\mathcal{A}}$ et $\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)_{\mathcal{A}}$ nous prendrons les *limites* respectives de

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_0}\right)_A \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)_A,$$

L'équation de la circonférence en α et $r = \overline{AM}$ s'obtient ainsi :

$$r\cos\omega = x_0 + R\cos\alpha,$$

$$r\sin\omega = R\sin\alpha,$$

d'où

$$r^2 = x_0^2 + R^2 + 2x_0 R\cos\alpha,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)_A = -\frac{x_0 R\sin\alpha}{r},$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)_{\mathcal{A}} = -\frac{R^2\sin\alpha}{2R\cos\frac{\alpha}{2}} = -R\sin\frac{\alpha}{2};$$

de même

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_0}\right)_A = \frac{x_0 + R\cos\alpha}{x_0 R\sin\alpha},$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_0}\right)_{\mathcal{A}} = \frac{R(1+\cos\alpha)}{R^2\sin\alpha} = \frac{1}{R}\cot\frac{\alpha}{2};$$

alors on a

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)_{\mathcal{A}} = \frac{1}{R}\cot\frac{\alpha}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2-(z-z_0)^2}}\log\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}f'(\alpha) \right.$$
$$- R\sin\frac{\alpha}{2}f(\alpha)\left[\frac{2}{r^2(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{r^2(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{r^2-(z-z_0)^2}{r}\right]\right\}$$

$\left(\text{l'on pose toujours } \frac{z-z_0}{r} = u\right)$.

Ainsi

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_{\mathcal{A}} = \frac{R}{2\pi^2}\int\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)_{\mathcal{A}} d\alpha\, dz',$$

d'où les 4 intégrales, à $\frac{1}{2\pi^2}$ près,

$$I_1 = \int\int \cot\frac{\alpha}{2} f'(\alpha)[\log r + \log(1-u^2)]\, d\alpha \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$I_2 = \int\int \cos\frac{\alpha}{2} f(\alpha) \frac{1}{2R\cos\frac{\alpha}{2}} d\alpha \frac{du}{(\sqrt{1-u^2})^3},$$

$$I_3 = \int\int \cos\frac{\alpha}{2} f(\alpha) \frac{1}{2R\cos\frac{\alpha}{2}} d\alpha \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$I_4 = \int\int \frac{1}{2R} f(\alpha)[\log r + \log(1-u^2)]\, d\alpha \frac{du}{(\sqrt{1-u^2})^3}.$$

Mais, u variant de -1 à $+1$, les intégrales en u, dans I_2 et I_4, n'*ont pas de sens*.

La présence des conditions ($\mathfrak{F}$) et ($\mathfrak{G}$) *les élimine*, fort heureusement.

Les conditions étaient donc bien nécessaires pour la convergence de la dérivée conormale. Comme, d'ailleurs, I_3 est *nul* en vertu aussi des conditions, il resterait à étudier la première intégrale et à montrer que l'on a bien

$$\frac{1}{2\pi^2} I_1 = f(\pi).$$

Or

$$\log r = \log 2R + \log\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi; \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\log(1-u^2)\, du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi \log\frac{1}{2}.$$

On devrait avoir

$$(\mathfrak{K}) \quad \left\{ \begin{aligned} f(\pi) = {} & \frac{\log 2R}{2\pi} \int_0^\pi [f'(\alpha) - f'(2\pi - \alpha)] \cot\frac{\alpha}{2}\, d\alpha \\ & + \frac{\log\frac{1}{2}}{\pi} \int_0^\pi [f'(\alpha) - f'(2\pi - \alpha)] \cot\frac{\alpha}{2} \log\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

6. Conclusion. — En général, l'on peut dire que *les deux conditions,* celle de M. Volterra, celle de l'auteur, peuvent ou non être compatibles.

Peut-être, même, la convergence de la dérivée conormale à la frontière conduit-elle à *une nouvelle condition mobile* qui serait ($\mathcal{H}$) pour le point particulier choisi et, pour embrasser tous les points frontière, plus complexe encore.

Le Problème extérieur appellerait donc des recherches excessivement difficiles.

TROISIÈME PARTIE.

EXTENSIONS DIVERSES.

CHAPITRE I.

EXTENSION DU PROBLÈME EXTÉRIEUR. — INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$B(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, y, z, t).$$

1. Si l'on passe de l'équation à trois variables $A(u)$ à l'équation analogue à quatre variables $B(u)$, la belle méthode de M. Volterra pour le *problème intérieur* s'étend immédiatement, sans aucune difficulté, comme l'a montré M. Orazio Tedone [1].

Mais, pour le *problème extérieur,* il se présente une particularité très remarquable.

Posons

$$\Delta^{p,1}(u) = \sum_{1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

[1] *Annali di Matematica,* série III, t. I, 1898. Milan.

Dans le Mémoire que nous venons de citer, M. Tedone montre que *la méthode* de M. Volterra *s'étend facilement* aux équations

$$\Delta^{2n,1}(u) = \mathrm{F} \text{ (problème extérieur).}$$

Il n'est pas question des équations

$$\Delta^{2n+1,1}(u) = \mathrm{F} \text{ (problème extérieur).}$$

Or nous avons exposé, dans la deuxième Partie, la méthode de M. Volterra pour le *problème extérieur* relatif à

$$\mathrm{A}(u) \quad \text{ou} \quad \Delta^{2,1}(u).$$

Ayant essayé de *généraliser banalement cette méthode* au cas

$$\mathrm{B}(u) \quad \text{ou} \quad \Delta^{3,1}(u),$$

nous avons reconnu une *impossibilité absolue*.

Il est inutile de transcrire ici les calculs : l'on ne peut aboutir.

M. Coulon m'a dit l'avoir reconnu de son côté.

Par une voie très sensiblement différente l'on arrive, au contraire, à *intégrer* l'équation [1]

$$\mathrm{B}(u) = \mathrm{F}(x, y, z, t) \text{ (problème extérieur).}$$

Il faudra prendre des fonctions auxiliaires V *autres* que celles de M. Volterra, les combiner d'une manière *différente*, enfin effectuer *deux* dérivations au lieu d'*une*.

2. Afin de faciliter l'intuition des choses nous parlerons le langage géométrique dans l'espace à *quatre dimensions :*

α, β, γ, θ seront les *cosinus* d'une *normale extérieure ;* nous écrirons

$$d\tau = dx.dy.dz.dt,$$
$$\theta.d\omega = dx.dy.dz;$$

---

(1) J'ai annoncé ce résultat à l'Académie des Sciences le 15 décembre 1902.

enfin quand nous écrirons dl, par analogie avec le cas de l'espace ordinaire, ce dl représentera un *élément* de variété à *deux dimensions* (¹).

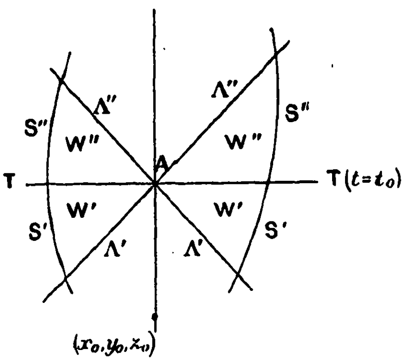
Il est bien évident que la *formule fondamentale* (G) dans l'Introduction s'étend immédiatement.

Nous appellerons encore T le *plan horizontal* de A, $t = t_0$, et Λ le *cône* de A, $r = t - t_0$,

$$[r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2].$$

Nous affecterons de deux accents les éléments *supérieurs* à T, d'un seul les éléments *inférieurs*.

Fig. 17.



Les *fonctions auxiliaires*, solutions de $B(V) = 0$ et *nulles* sur Λ'' et Λ', seront

$$V'' = \frac{r - (t - t_0)}{r},$$

$$V' = \frac{r + (t - t_0)}{r}.$$

Dans le plan T on a

$$(V'')_T = (V')_T = +1. \tag{1}$$

(¹) *Voir* le calcul élégant de $d\Sigma_p$ d'une variété à p dimensions dans un espace à n dimensions dans le Mémoire de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XXII).

Enfin l'on a constamment

$$(2)\qquad \frac{\partial V''}{\partial t} = \frac{-1}{r} = -\frac{\partial V'}{\partial t}.$$

3. *Intégration.* — Appliquons à W″ et à W′ la formule (G) et ajoutons membre à membre, il vient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{W''} V''F\,d\tau + \int_{W'} V'F\,d\tau + \int_{S''}\left(u\frac{dV''}{dN} - V''\frac{du}{dN}\right)d\omega \\ &\quad + \int_{S'}\left(u\frac{dV'}{dN} - V'\frac{du}{dN}\right)d\omega \\ &\quad = 2\int_T \frac{1}{r}\,u\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

C'est cette équation (1) qui, dérivée deux fois en t_0, donnera $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et, par suite,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

et l'on appliquera alors la *formule classique de Green.*

Les dérivations se font conformément aux formules démontrées dans la deuxième Partie. L'on a

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial t_0}\left[\int_{W''} + \int_{W'}\right] = \int_{W''}\frac{1}{r}F\,d\tau - \int_{W'}\frac{1}{r}F\,d\tau,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\int_{S''} - V''\frac{du}{dN}\,d\omega + \int_{S'} - V'\frac{du}{dN}\,d\omega\right] \\ &\quad = -\int_{S''}\frac{1}{r}\,\frac{du}{dN}\,d\omega + \int_{S'}\frac{1}{r}\,\frac{du}{dN}\,d\omega \end{aligned}\right.$$

(certains termes se *détruisent.* D'autres sont *nuls* car V″ s'annule sur Λ″ et V′ s'annule sur Λ′).

Nous appelons encore C″ la variété à *deux* dimensions, intersection de Λ″ par S, C′ l'intersection de Λ′ par S, enfin C l'intersection de S et T.

L'on a encore

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_0}\left[\int_{S''} u\frac{dV''}{dN}d\omega + \int_{S'} u\frac{dV'}{dN}d\omega\right]\\
&\quad = \int_{S''} u\,\frac{-\cos(n,r)}{r^2}d\omega + \int_{S'} u\,\frac{\cos(n,r)}{r^2}d\omega\\
&\quad + \int_{C''+C'} u\,\frac{(t-t_0)\cos(n,r)+r\cos(n,t)}{r^2}\,\frac{dl}{\sin(N,t)}\\
&\quad - 2\int_C u\,\frac{1}{r}\cos(n,t)\frac{dl}{\sin(N,t)}
\end{aligned}
\right.
$$

(car cela résulte de

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V''}{\partial t} = -\frac{1}{r} = -\frac{\partial V'}{\partial t},\\
&\frac{\partial V''}{\partial r} = +\frac{t-t_0}{r^2} = -\frac{\partial V'}{\partial r},\\
&\frac{dV''}{dN} = -\frac{dV'}{dN} = \frac{(t-t_0)\cos(n,r)+r\cos(n,t)}{r^2},
\end{aligned}
$$

n étant la normale extérieure, N la conormale).

D'autre part, la dérivée par rapport à t_0 du deuxième membre de (1) est

$$
2\int_T \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}dx\,dy\,dz + 2\int_C \frac{1}{r}u\cot(N,t)\,dl.
$$

De

$$
\cos(n,t) = -\cos(N,t),
$$

il résulte que l'intégrale relative à C, que l'on vient d'écrire, est égale à la dernière intégrale qui figure dans (4).

Il reste donc, *après une première dérivation*,

$$
(I)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{W''}\frac{1}{r}F\,d\tau - \int_{W'}\frac{1}{r}F\,d\tau - \int_{S''}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}d\omega\\
&\quad + \int_{S'}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}d\omega - \int_{S''} u\,\frac{\cos(n,r)}{r^2}d\omega + \int_{S'} u\,\frac{\cos(n,r)}{r^2}d\omega\\
&\quad + \int_{C''+C'} u\,\frac{dV''}{dN}\,\frac{dl}{\sin(N,t)} = 2\int_T \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}dx\,dy\,dz.
\end{aligned}
\right.
$$

Dérivons (I) comme nous avons dérivé (1); l'on a

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial t_0}\left(\int_{W''}-\int_{W'}\right)=\int_{\Lambda''+\Lambda'}\frac{1}{r}F\,dx\,dy\,dz-2\int_T\frac{1}{r}F\,dx\,dy\,dz.$$

Puis, pour les quatre intégrales de surface, l'on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t_0}\left(-\int_{S''}+\int_{S'}\right)\\&\quad=-\int_{C''+C'}\frac{1}{r}\frac{du}{dN}\frac{dl}{\sin(N,t)}+2\int_C\frac{1}{r}\frac{du}{dN}\frac{dl}{\sin(N,t)}\\&\qquad+2\int_C u\frac{\cos(n,r)}{r^2}\frac{dl}{\sin(N,t)}-\int_{C''+C'}u\frac{\cos(n,r)}{r^2}\frac{dl}{\sin(N,t)}\end{aligned}\right.$$

et il reste

$$+\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{C''+C'}u\frac{dV''}{dN}\frac{dl}{\sin(N,t)}$$

et le second membre de (I) donne

$$2\int_T\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx\,dy\,dz+2\int_C\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\cot(N,t)\,dl.$$

Or, nous avons quelques groupements intéressants :

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F=\Delta u,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{\sin(N,t)}\left[\frac{du}{dN}-\cos(N,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{du}{d\nu},$$

en appelant ν *la normale à* C *situé dans le plan* T (car C possède *une variété à deux dimensions de normales,* tout comme une courbe gauche dans l'espace ordinaire).

De même nous avons

$$(9)\qquad \frac{1}{\sin(N,t)}\frac{\cos(n,r)}{r^2}=-\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}.$$

Or, ces combinaisons (7), (8), (9) *se présentent naturellement* et nous avons enfin

$$
(\text{II}) \left\{
\begin{aligned}
&\int_{\text{A}} \frac{1}{r} \text{F}\, dx\, dy\, dz - \int_{\text{C}''+\text{C}'} \frac{1}{r} \frac{du}{d\text{N}} \frac{dl}{\sin(\text{N}, t)} \\
&\quad - \int_{\text{C}''+\text{C}'} u \frac{\cos(n, r)}{r^2} \frac{dl}{\sin(\text{N}, t)} + \frac{\partial}{\partial t_0} \left[\int_{\text{C}''+\text{C}'} u \frac{d\text{V}''}{d\text{N}} \frac{dl}{\sin(\text{N}, t)} \right] \\
&\quad = 2 \int_{\text{T}} \frac{1}{r} \Delta u\, dx\, dy\, dz - 2 \int_{\text{C}} \left(\frac{1}{r} \frac{du}{d\nu} - u \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} \right) dl.
\end{aligned}
\right.
$$

Or, sur C, dl est l'élément de surface dans l'espace ordinaire.

Donc, le *second membre* de (II'), d'après *la formule de Green*, est

$$
-8\pi u(x_0, y_0, z_0, t_0).
$$

L'intégration est effectuée.

4. *La valeur de u* au point $\text{A}(x_0, y_0, z_0, t_0)$ *est obtenue en fonction des valeurs de u* et $\frac{du}{d\text{N}}$ *sur les deux variétés* à deux dimensions C'' et C' *sections de la surface* S qui est donnée *par le cône* A *relatif au point* A.

Ainsi la valeur de l'intégrale *n'est pas du tout la même fonction des données* dans le *problème extérieur* pour $\text{A}(u)$ et dans le *problème extérieur* pour $\text{B}(u)$. Il n'est pas surprenant, par conséquent, que nous ayons dû prendre une méthode d'intégration différente de celle de M. Volterra.

Remarque. — Par la même voie que M. Volterra, l'on trouve ici *la même condition* que dans le cas de trois variables.

Il existe encore d'*autres conditions* de possibilité du problème, comme je l'ai montré dans le cas de trois variables.

La conclusion est la même : il est extrêmement difficile de reconnaître si la solution obtenue est *une véritable solution.*

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DE

$$\text{(E)}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+hu+f$$

(PROBLÈME INTÉRIEUR), PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

1. Étant réalisées quelques hypothèses, très larges, relativement aux données, nous savons que l'intégrale de

$$\text{(1)}\qquad \mathrm{A}(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\mathrm{F}(x,y,z)$$

existe et prend les valeurs données (ainsi que sa dérivée conormale) à la frontière.

Nous pouvons essayer, par suite, de passer de l'équation (1) à l'équation (E) par cette méthode d'approximations successives, qui a donné des résultats si importants à M. Picard [1] pour l'équation linéaire du deuxième ordre à deux variables.

Le principe est le suivant :

Écrivons (E) sous la forme

$$\text{(E)}\qquad \mathrm{A}(u)=\Phi(u)+f(x,y,z)$$

(a, b, c, h, f sont fonctions de x, y, z *finies*).

On forme d'abord l'intégrale u_0 de

$$(\mathrm{E}_0)\qquad \mathrm{A}(u_0)=f(x,y,z),$$

u_0 et $\frac{du_0}{d\mathrm{N}}$ prenant les valeurs données sur la surface des données S.

Connaissant u_0, on forme l'intégrale u_1 de

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \mathrm{A}(u_1)=\Phi(u_0),$$

u_1 et $\frac{du_1}{d\mathrm{N}}$ étant *nuls* sur S.

(1) *Voir* Préface.

Puis on intègre

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \mathrm{A}(u_2) = \Phi(u_1),$$

u_2 et $\frac{du_2}{d\mathrm{N}}$ étant *nuls* sur S, et ainsi de suite.

Les équations (E_0), (E_1), ... sont toutes du type (1) et l'on a pour l'*intégrale cherchée*

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

à condition que

$$\sum u_n, \quad \sum \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad \sum \frac{\partial u_n}{\partial y}, \quad \sum \frac{\partial u_n}{\partial z}$$

soient *convergentes*.

2. Étudions donc les séries considérées. Puisque $f(x, y, z)$ reste *fini* dans la région considérée de l'espace (enveloppe des cônes Λ touchant le bord de S), $u_0(x, y, z)$ et ses dérivées premières restent *finis*. On peut donc connaître, en fonction des données, un nombre $\mathrm{M} > 0$ tel que, dans tout le champ, on ait

$$|\Phi_0| = \left| a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + c\frac{\partial u_0}{\partial z} + hu_0 \right| < \mathrm{M}.$$

Appelons Z la cote du point *le plus élevé* de l'aire de S découpée par un cône quelconque Λ ayant pour sommet un point (x, y, z) du champ d'intégrabilité déterminé par la forme et l'étendue de S.

On a (Ire Partie, Chapitre I, n° 1)

$$|u_1(x, y, z)| < \mathrm{M}\frac{(\mathrm{Z}-z)^2}{2},$$

$$|u'_1(x, y, z)| < \mathrm{M}(\mathrm{Z}-z)$$

(l'accent désigne l'une quelconque des trois dérivées partielles).

D'où

$$|\Phi(u_1)| < \mathrm{KM}(\mathrm{Z}-z)\left(\frac{\mathrm{Z}-z}{2} + 3\right),$$

K étant supérieur au plus grand des modules des fonctions a, b, c, h, dans le champ.

Or, dans ce champ total, nous pouvons fixer encore un nombre H tel que

$$K\left(\frac{Z-z}{2}+3\right)<H,$$

ce qui donne

$$|\Phi(u_1)|<HM(Z-z).$$

Voici l'essentiel obtenu : le facteur $(Z-z)$ que l'on fera passer sous le signe de quadrature. Avec cela nous obtenons le mode de convergence de l^x; sans cela, nous avons le mode de convergence de la progression géométrique.

3. Reportons-nous, en effet, aux valeurs de

$$u_2(x_0, y_0, z_0),\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_0},\quad \frac{\partial u_2}{\partial y_0},\quad \frac{\partial u_2}{\partial z_0}.$$

On a (Ire Partie, Chapitre I, nos 4 et 5), par l'emploi du plan majorant BC de cote Z,

$$\begin{aligned}
|2\pi u_2(x_0, y_0, z_0)| &< HM\left|\iiint_{(ABC)}(Z-z)\frac{\partial V_A}{\partial z_0}\,d\tau\right| \\
&< HM\,2\pi\int_{z_0}^{Z}(Z-z)\,dz\int_0^{z-z_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{(z-z_0)^2-r^2}} \\
&< HM\,2\pi\int_{z_0}^{Z}(Z-z)(z-z_0)\,dz \\
&< HM\,2\pi\frac{(Z-z_0)^3}{2.3},
\end{aligned}$$

enfin

$$|u_2(x_0, y_0, z_0)|<HM\frac{(Z-z_0)^3}{3!}.$$

Pour les dérivées premières u'_2, il se présente une intégrale

$$\int_{z_1}^{Z} f(x_0, y_0, z)\,dz,$$

qui donne

$$\mathrm{HM}\int_{z_0}^{\mathrm{Z}}(\mathrm{Z}-z)\,dz = \mathrm{HM}\frac{(\mathrm{Z}-z_0)^2}{2},$$

$$u_2'(x_0, y_0, z_0)| < \mathrm{HM}\frac{(\mathrm{Z}-z_0)^2}{2},$$

en sorte que nous pouvons former une limite supérieure de

$$|\Phi(u_2)|,$$

$$|\Phi[u_2(x, y, z)]| < \mathrm{HM}\frac{(\mathrm{Z}-z)^2}{2}\mathrm{K}\left(3+\frac{\mathrm{Z}-z}{3}\right) < \mathrm{H}^2\mathrm{M}\frac{(\mathrm{Z}-z)^2}{2!}.$$

Et alors le même mécanisme donne

$$|u_3(x_0, y_0, z_0)| < \mathrm{H}^2\mathrm{M}\frac{(\mathrm{Z}-z_0)^4}{4!},$$

$$u_3'(x_0, y_0, z_0)| < \mathrm{H}^2\mathrm{M}\frac{(\mathrm{Z}-z_0)^3}{3!},$$

d'où

$$|\Phi[u_3(x, y, z)]| < \mathrm{H}^3\mathrm{M}\frac{(\mathrm{Z}-z_0)^3}{3!}.$$

Ainsi les séries $\sum u_n$, $\sum u_n'$ convergent comme

$$e^{\mathrm{H}(\mathrm{Z}-z_0)};$$

on peut donc écrire

$$\mathrm{A}(u_1+u_2+\ldots) = a\frac{\partial}{\partial x}(u_0+u_1+\ldots) + b\frac{\partial}{\partial y}(u_0+u_1+\ldots) + c\frac{\partial}{\partial z}(u_0+u_1+\ldots) + h(u_0+u_1+\ldots),$$

et comme

$$\mathrm{A}(u_0) = f,$$

on a bien

$$\mathrm{A}(u_0+u_1+u_2+\ldots) = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_0^\infty u_n\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_0^\infty u_n\right) + c\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_0^\infty u_n\right) + h\sum_0^\infty u_n + f(x, y, z)$$

4. Conclusion. — Comme Z peut être aussi grand que l'on veut, on peut donc intégrer l'équation (E) dans le même champ où l'on peut *intégrer* l'équation (1).

L'on peut intégrer de même, pour le *problème intérieur*

$$\Delta^{p,1} u = \sum_{1}^{p} a_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu + f(x, t),$$

ainsi que je l'ai dit dans la Préface de ce Mémoire, où j'ai résumé les résultats obtenus sans dissimuler ceux qui restent à obtenir.