JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 43-137.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__43_0>

Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques;

Par M. G. HUMBERT.

Le présent Mémoire a pour but d'établir certaines liaisons remarquables entre la théorie des fonctions abéliennes singulières de genre deux et la théorie arithmétique des formes quadratiques; il est divisé en trois Parties.

Dans la première, consacrée aux fonctions *simplement* singulières, c'est-à-dire à celles dont les périodes vérifient *une* relation singulière, nous montrons, en nous reportant à un résultat antérieurement établi par nous, que les solutions en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - 4yz - 4tu = \mathrm{A},$$

se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par des formules linéaires, qui fournissent en même temps des transformations en elle-même de la forme $x^2 - 4yz - 4tu$. Ce résultat met en évidence un groupe intéressant, isomorphe au groupe abélien, et qui est intimement lié aux propriétés de la forme quadratique.

Laissant ensuite de côté les questions purement arithmétiques, nous déterminons toutes les transformations qui n'altèrent pas une relation singulière donnée, ou qui changent l'une dans l'autre deux relations données, de même invariant; nous étendons ces formules aux transformations singulières du premier degré.

La seconde partie est consacrée aux fonctions *doublement* singulières, dont les périodes satisfont à un système de *deux* relations singulières données. Nous faisons voir qu'à chaque système de cette nature correspond une classe de formes binaires positives, proprement ou improprement équivalentes entre elles, et que cette classe ne change pas quand on opère, sur le système proposé, une transformation ordinaire quelconque de degré un.

Inversement, les systèmes qui donnent naissance à des formes d'une classe donnée sont réductibles, par des transformations ordinaires du premier degré, à un nombre fini d'entre eux, nombre égal à l'unité dans un grand nombre de cas, que nous déterminons.

Au lieu des périodes, considérons les *modules* des fonctions abéliennes : ils sont liés par une ou deux équations algébriques, selon que les fonctions sont simplement ou doublement singulières. On peut ainsi faire correspondre à toute relation singulière, ou plutôt à son invariant entier, une surface algébrique; à toute classe de formes binaires positives, on fera de même correspondre une ou plusieurs courbes algébriques, dont les propriétés refléteront celles de la classe. Par exemple, si une classe représente un nombre, la surface dont ce nombre est l'invariant contient les courbes qui répondent à la classe, et réciproquement : les propriétés de cette Géométrie des nombres et des formes sont étudiées et développées.

On détermine les groupes fuchsiens des courbes algébriques ainsi introduites; on établit qu'ils reviennent à des groupes découverts par M. Poincaré, et rattachés par lui aux transformations en elle-même d'une forme quadratique ternaire indéfinie.

Cette recherche montre que, dans des cas très étendus, les courbes qui répondent à des classes de même déterminant et de même genre arithmétique ont le même genre géométrique et se correspondent point par point; de là résulte une liaison bien inattendue entre les deux notions si dissemblables de genre, en Arithmétique et en Géométrie.

On fait voir ensuite que la correspondance univoque entre les courbes qui répondent à des classes du même genre est réalisée par des *trans-*

formations singulières du premier degré, et l'on met en évidence le lien qui unit la théorie de ces transformations à celle des formes quadratiques ternaires.

Enfin, dans un ordre d'idées analogue à celui de la première Partie, on montre comment les résultats obtenus se rattachent à la représentation d'une forme binaire positive par la forme $x^2 - 4yz - 4tu$, déjà rencontrée précédemment.

La troisième Partie concernera les fonctions triplement singulières; elle paraîtra ultérieurement et sera précédée d'un résumé spécial.

PREMIÈRE PARTIE.

Fonctions abéliennes simplement singulières.

1. Si les périodes normales d'une fonction abélienne $F(u, v)$ vérifient *une* seule relation singulière, c'est-à-dire une relation du type

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, B, C, D, E sont des entiers sans diviseur commun, j'ai établi (t. V, 5ᵉ série de ce *Journal,* p. 234 et suivantes) qu'une transformation ordinaire du premier ordre change cette relation en une relation analogue

$$(2) \qquad A_1 G + B_1 H + C_1 G' + D_1(H^2 - GG') + E_1 = 0,$$

et que la quantité, *essentiellement positive,* $B^2 - 4AC - 4DE$, est égale à $B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1$: cette quantité, que j'ai désignée par Δ, est donc un invariant.

L'expression des A_1, B_1, ..., en fonction des A, B, ..., et des seize entiers caractéristiques de la transformation employée est la suivante (*ibid.*, p. 236) :

$$(3)\quad \begin{cases} A_1 = A(db)_{31} + B(ad)_{31} + C(ac)_{31} + D(cd)_{31} + E(ab)_{31}, \\ B_1 = 2A(db)_{03} + B[2(ad)_{03} - n] + 2C(ac)_{03} + 2D(cd)_{03} + 2E(ab)_{03}, \\ C_1 = A(db)_{02} + B(ad)_{02} + C(ac)_{02} + D(cd)_{02} + E(ab)_{02}, \\ D_1 = A(db)_{23} + B(ad)_{23} + C(ac)_{23} + D(cd)_{23} + E(ab)_{23}, \\ E_1 = A(db)_{01} + B(ad)_{01} + C(ac)_{01} + D(cd)_{01} + E(ab)_{01}. \end{cases}$$

Dans ces formules, $(ab)_{ij}$ désigne $a_i b_j - a_j b_i$, et les seize entiers a_i, b_i, c_i, d_i sont liés par les six relations classiques d'Hermite pour la transformation d'ordre $n = 1$; on dit aussi que ce sont les coefficients d'une substitution abélienne à quatre variables.

Inversement, j'ai montré (*ibid.*, p. 246) que, si deux systèmes d'entiers, A, B, C, D, E et A_1, ..., E_1, sans diviseur commun dans chaque système, vérifient l'équation

$$(4)\qquad B^2 - 4AC - 4DE = B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1,$$

les deux relations singulières (1) et (2) sont réductibles l'une à l'autre par une transformation d'ordre 1, c'est-à-dire que A_1, B_1, ..., E_1 s'expriment, en fonction de A, B, ..., E, par des équations du type (3).

2. Si nous employons le langage de la théorie des formes arithmétiques, ces résultats s'énoncent ainsi :

1° *Toutes les représentations propres d'un nombre positif* Δ, *par la forme à cinq variables* $X^2 - 4YZ - 4TU$, *se déduisent de l'une quelconque d'entre elles* [1], x, y, z, t, u, *par les formules* (3),

[1] Il est aisé d'obtenir immédiatement une solution propre de l'équation $\Delta = x^2 - 4yz - 4tu$; par exemple, si $\Delta = 4N$, on prendra $x = t = u = 0$; $y = N$, $z = -1$; si $\Delta = 4N + 1$, on prendra $t = u = 0$, $x = z = -1$, $y = N$.

c'est-à-dire

$$(5)\quad\begin{cases} X = x[2(ad)_{03} - n] + 2y(db)_{03} + 2z(ac)_{03} + 2t(cd)_{03} + 2u(ab)_{03}, \\ Y = x\quad (ad)_{31} \quad + \ y(db)_{31} + \ z(ac)_{31} + \ t(cd)_{31} + \ u(ab)_{31}, \\ Z = x\quad (ad)_{02} \quad + \ y(db)_{02} + \ z(ac)_{02} + \ t(cd)_{02} + \ u(ab)_{02}, \\ T = x\quad (ad)_{23} \quad + \ y(db)_{23} + \ z(ac)_{23} + \ t(cd)_{23} + \ u(ab)_{23}, \\ U = x\quad (ad)_{01} \quad + \ y(db)_{01} + \ z(ac)_{01} + \ t(cd)_{01} + \ u(ab)_{01}; \end{cases}$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont les seize entiers caractéristiques d'une transformation ordinaire du premier degré ($n = \pm 1$) (1).

2° *Les mêmes formules* (5) *donnent des transformations arithmétiques en elle-même de la forme à cinq variables $x^2 - 4yz - 4tu$*: cela résulte en effet immédiatement de la propriété d'invariance traduite par l'équation (4).

De plus les substitutions (5) forment un groupe, que je dis être *isomorphe au groupe abélien*, qui répond aux transformations du premier degré d'Hermite. Ce dernier groupe, en effet, est celui des substitutions quaternaires

$$(S)\qquad \begin{vmatrix} x_0 & a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ x_1 & b_0x_0 + b_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2 & c_0x_0 + c_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_3 & d_0x_0 + d_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

les entiers a_i, b_i, c_i, d_i vérifiant les relations classiques (où $n = \pm 1$):

$$\begin{gathered} (ab)_{03} + (ab)_{12} = (ac)_{03} + (ac)_{12} \\ = (bd)_{03} + (bd)_{12} = (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0 \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} = (bc)_{03} + (bc)_{12} = n, \end{gathered}$$

(1) Nous écrivons $n = \pm 1$ au lieu de $n + 1$, pour comprendre, dans nos formules, les transformations d'ordre -1, qui s'obtiennent en combinant, avec les transformations habituelles d'ordre *un*, celle qui change g, h, g'

A la substitution $S(a_i, b_i, c_i, d_i)$ répond la transformation du premier ordre T, d'entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i; au produit de deux substitutions S et S', répond le produit TT' des transformations correspondantes : cela résulte des propriétés générales de la transformation.

Cela posé, soient Σ et Σ' les substitutions (3) qui répondent à T et à T' : effectuer sur les périodes singulières la transformation T, puis la transformation T', c'est opérer sur les A, B, C, D, E la substitution Σ, puis la substitution Σ', c'est-à-dire la substitution $\Sigma\Sigma'$; en d'autres termes, $\Sigma\Sigma'$ répond à TT', et par suite à SS', ce qui établit la proposition.

Le groupe abélien se trouve donc lié d'une manière très étroite aux substitutions semblables de la forme $x^2 - 4yz - 4tu$, et à la représentation d'un nombre par cette forme.

3. *Application.* — Soit à décomposer en cinq carrés, dont trois positifs et deux négatifs, un nombre positif Δ, de l'un des types $4N$ et $4N + 1$, c'est-à-dire à représenter Δ par la forme

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \tau^2 - \upsilon^2.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur Δ, un des entiers ξ, η, ζ aura la parité de τ et un autre aura celle de υ; si donc η et ζ sont les deux entiers ainsi fixés, on pourra poser

$$\begin{aligned} \eta + \tau &= 2Y, & \zeta + \upsilon &= 2T, \\ -\eta + \tau &= 2Z, & -\zeta + \upsilon &= 2U, \end{aligned}$$

en $-G$, $-H$, $-G'$ et dont les entiers caractéristiques sont nuls, sauf

$$a_0 = b_1 = 1, \qquad c_2 = d_3 = -1.$$

Pour ces transformations, la quantité $B^2 - 4AC - 4DE$ est aussi invariante, ce qui justifie nos énoncés généraux.

Les transformations d'*ordre* ± 1 sont les transformations (ordinaires) de *degré* 1.

et l'on aura

$$\Delta = \xi^2 - 4YZ - 4TU,$$

équations dont les solutions propres se déduisent de l'une d'elles à l'aide des formules (5).

Ainsi, le problème de la décomposition d'un nombre positif, $4N$ ou $4N + 1$, en cinq carrés, dont trois positifs et deux négatifs, se ramène à la détermination de toutes les substitutions du groupe abélien à quatre variables, c'est-à-dire de toutes les transformations ordinaires du premier degré pour les fonctions abéliennes de genre *deux*.

4. *Remarque.* — Pour compléter ces résultats, il resterait à voir dans quel cas deux substitutions (5), répondant à des valeurs différentes des a_i, b_i, c_i, d_i, donnent, pour un même système de valeurs de x, y, z, t, u, un même système de valeurs de X, Y, Z, T, U.

En d'autres termes, étant donnée une relation singulière (1),

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

dans quel cas deux transformations différentes du premier degré, T et T', la changeront-elles en une *même* relation singulière ; ou, plus exactement, en deux relations singulières ayant les mêmes coefficients? S'il en est ainsi, la transformation du premier ordre $T'T^{-1}$ change évidemment la relation (1) en une relation singulière de mêmes coefficients A, B, ..., E; le problème est donc ramené à la détermination de toutes les transformations du premier degré qui n'altèrent pas une relation singulière donnée; nous allons effectuer cette détermination, qui jouera un rôle important dans la suite du Mémoire.

Transformations n'altérant pas une relation singulière.

5. *Transformations ordinaires.* — Soit la relation singulière

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

faisons subir aux périodes une transformation *ordinaire, d'ordre* *quelconque n*; les périodes transformées G, H, G′ sont liées à g, h, g' par les relations d'Hermite :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} g &= \frac{(db)_{01}+(db)_{31}G+2(db)_{03}H+(db)_{02}G'+(db)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},\\ h &= \frac{(ad)_{01}+(ad)_{31}G+[2(ad)_{03}-n]H+(ad)_{02}G'+(ad)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},\\ g' &= \frac{(ac)_{01}+(ac)_{31}G+2(ac)_{03}H+(ac)_{02}G'+(ac)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},\\ h^2-gg' &= \frac{(cd)_{01}+(cd)_{31}G+2(cd)_{03}H+(cd)_{02}G'+(cd)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')}. \end{aligned}\right.$$

Les dénominateurs sont les mêmes dans les quatre formules; les a_i, b_i, c_i, d_i sont les seize entiers caractéristiques d'une transformation d'ordre n, et $(ab)_{ij}$ désigne toujours $a_ib_j-a_jb_i$: ces quantités doivent vérifier les relations

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(ab)_{03}+(ab)_{12}=(ac)_{03}+(ac)_{12}=(bd)_{03}+(bd)_{12}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=(cd)_{03}+(cd)_{12}=0,\\ &\qquad\qquad\qquad(ad)_{03}+(ad)_{12}=(bc)_{03}+(bc)_{12}=n. \end{aligned}\right.$$

Inversement, des équations (6) on tire G, H, G′ et H^2-GG' en fonction de g, h, g' :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} G &= \frac{(cd)_{02}+(ac)_{02}g+2(bc)_{02}h+(db)_{02}g'+(ab)_{02}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+2(bc)_{23}h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En vertu de (6), la relation singulière (1) en g, h, g' se transforme en une relation singulière en G, H, G′ : cherchons quels doivent être les a_i, b_i, c_i, d_i pour que celle-ci soit identique à la première (à un facteur constant près). La méthode la plus naturelle serait d'exprimer que les coefficients A_1, B_1, …, E_1, de la relation en G, H, G′ sont proportionnels à A, B, …, E; c'est celle qu'a suivie M. Bourget [1],

---

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. XII.

quand il a déterminé les transformations d'ordre 1 qui font revenir sur elle-même la relation $h^2 - gg' - P = 0$, mais elle conduirait, dans le cas général, à des calculs inextricables. Il sera beaucoup plus simple de raisonner comme il suit.

6. Regardons g, h, g' et G, H, G′ comme les coordonnées cartésiennes de deux points dans deux espaces (e) et (E) : en vertu des relations (6) et (8), ces deux espaces se correspondent point par point, lorsque les a_i, b_i, c_i, d_i sont donnés; de plus, toute quadrique q de (e), passant par la conique à l'infini sur le cône $h^2 - gg' = 0$, se transforme en une quadrique Q, de (E), passant par la conique à l'infini sur le cône $H^2 - GG' = 0$, et réciproquement. Il résulte immédiatement de là que toute droite de l'espace (e) rencontrant la première conique se transforme en une droite de l'espace (E), rencontrant la deuxième, et, par suite, que toute génératrice rectiligne de la quadrique q se transforme en une génératrice rectiligne de la quadrique Q : aux génératrices d'un même système de q correspondent, naturellement, les génératrices d'un même système de Q.

7. Cela posé, nous ne nous servirons plus des relations (6); nous utiliserons celles qui se présentent tout d'abord, entre g, h, g' et G, H, G′, dans la théorie de la transformation.

Soient U et V les variables pour lesquelles les périodes normales sont (1, 0), (0, 1), (G, H), (H, G′), et u, v celles qui ont pour périodes (1, 0), (0, 1), (g, h), (h, g'); on pose, dans la théorie de la transformation,

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

les λ, μ étant des constantes, et l'on exprime que U et V augmentent d'une de leurs périodes qnand u et v augmentent d'une des leurs, ce qui donne, en désignant par a_i, b_i, c_i, d_i les entiers caractéristiques de la transformation,

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 G + a_2 H, & \mu &= b_0 + b_3 G + b_2 H,\\ \lambda' &= a_1 + a_3 H + a_2 G', & \mu' &= b_1 + b_3 H + b_2 G',\\ \lambda g + \mu h &= d_0 + d_3 G + d_2 H, & \lambda h + \mu g' &= c_0 + c_3 G + c_2 H,\\ \lambda' g + \mu' h &= d_1 + d_3 H + d_2 G', & \lambda' h + \mu' g' &= c_1 + c_3 H + c_2 G'. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de λ, μ, λ', μ' conduit aux relations

$$(10)\quad \begin{cases} g(a_0+a_3\mathrm{G}+a_2\mathrm{H})+h\,(b_0+b_3\mathrm{G}+b_2\mathrm{H})=d_0+d_3\mathrm{G}+d_2\mathrm{H}, \\ g(a_1+a_3\mathrm{H}+a_2\mathrm{G}')+h\,(b_1+b_3\mathrm{H}+b_2\mathrm{G}')=d_1+d_3\mathrm{H}+d_2\mathrm{G}'. \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} h(a_0+a_3\mathrm{G}+a_2\mathrm{H})+g'(b_0+b_3\mathrm{G}+b_2\mathrm{H})=c_0+c_3\mathrm{G}+c_2\mathrm{H}, \\ h(a_1+a_3\mathrm{H}+a_2\mathrm{G}')+g'(b_1+b_3\mathrm{H}+b_2\mathrm{G}')=c_1+c_3\mathrm{H}+c_2\mathrm{G}'. \end{cases}$$

Considérons maintenant la quadrique (en g, h, g') de l'espace (e), représentée par la relation singulière (1),

$$(1)\qquad \mathrm{A}g+\mathrm{B}h+\mathrm{C}g'+\mathrm{D}(h^2-gg')+\mathrm{E}=0;$$

elle admet, comme génératrices rectilignes de systèmes différents les deux droites

$$(12)\qquad g=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}},\quad h=\frac{-\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{D}}\quad \text{et}\quad g=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}},\quad h=\frac{-\mathrm{B}-\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{D}},$$

Δ désignant l'invariant $\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}-4\mathrm{DE}$. Cela suppose $\mathrm{D}\gtrless 0$; nous admettrons de plus que Δ *n'est pas carré parfait*, c'est-à-dire que l'on est en dehors du *cas elliptique* ([1]).

Si maintenant la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i) change la relation singulière (1) en une relation identique (en G, H, G'), les deux génératrices rectilignes (12) auront pour transformées respectives deux génératrices rectilignes, de système différent, de la quadrique

$$(1\ bis)\qquad \mathrm{AG}+\mathrm{BH}+\mathrm{CG}'+\mathrm{D}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')+\mathrm{E}=0.$$

Or, en faisant $g=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$, $h=\frac{-\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{D}}$ dans la première des équations (10), on obtient la relation

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{C}(a_0+a_3\mathrm{G}+a_2\mathrm{H})+\dfrac{-\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2}(b_0+b_3\mathrm{G}+b_2\mathrm{H}) \\ \quad =\mathrm{D}(d_0+d_3\mathrm{G}+d_2\mathrm{H}), \end{cases}$$

([1]) Ce journal, 5e série, t. V, p. 247.

qui représente, en G, H, G′, un plan parallèle à l'axe $G=0$, $H=0$; ce plan, en vertu de ce qui précède, doit couper, suivant deux génératrices, la quadrique $AG+BH+CG'+D(H^2-GG')+E=0$: dès lors, il contiendra nécessairement une des deux génératrices de cette surface, $G=\frac{C}{D}$, $H=\frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}$, ($\varepsilon$ désignant ± 1), *qui lui sont parallèles*. En d'autres termes, l'équation (13) doit être satisfaite pour $G=\frac{C}{D}$, $H=\frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}$, ce qui donne

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &C\left(a_0+a_3\frac{C}{D}+a_2\frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}\right)+\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2}\left(b_0+b_3\frac{C}{D}+b_2\frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}\right)\\ &\qquad\qquad=D\left(d_0+d_3\frac{C}{D}+d_2\frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}\right).\end{aligned}\right.$$

On en conclut, en égalant séparément dans les deux membres les coefficients de $\sqrt{\Delta}$ et les parties rationnelles,

$$(15)\qquad Dd_2=Ca_2+\varepsilon Db_0+\varepsilon Cb_3-\frac{B}{2}(1+\varepsilon)b_2,$$

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &CDa_0+C^2a_3-\frac{1}{2}BCa_2-\frac{1}{2}B\left(Db_0+Cb_3-\frac{1}{2}Bb_2\right)\\ &\qquad+\frac{\varepsilon}{4}(B^2-4AC-4DE)b_2=D^2d_0+CDd_3-\frac{BD}{2}d_2.\end{aligned}\right.$$

De même, en faisant dans la seconde relation (10) $g=\frac{C}{D}$, $h=\frac{-B+\sqrt{D}}{2D}$, on obtient, en G, H, G′, l'équation d'un plan parallèle à l'axe $G'=0$, $H=0$, plan qui doit couper, suivant deux génératrices, la quadrique (1 *bis*) $AG+BH+\ldots+E=0$; comme il est parallèle aux deux génératrices de cette quadrique qui ont pour équations

$$G'=\frac{A}{D},\qquad H=\frac{-B+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2D}\qquad (\varepsilon'=\pm 1),$$

il doit contenir l'une d'elles : ce sera celle qui est du même système que la génératrice $G = \frac{C}{D}$, $H = \frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}$, c'est-à-dire celle qui répond à $\varepsilon' = -\varepsilon$. On a donc, en portant dans la seconde équation (10) les valeurs indiquées de g, h, G', H, et en séparant les parties rationnelle et irrationnelle,

$$(17)\qquad Dd_3 = Ca_3 - \varepsilon D b_1 - \varepsilon A b_2 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon) b_3,$$

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} & CDa_1 + ACa_2 - \tfrac{1}{2}BCa_3 - \tfrac{1}{2}B\left(Db_1 + Ab_2 - \tfrac{1}{2}Bb_3\right) \\ & \quad - \tfrac{\varepsilon}{4}(B^2 - 4AC - 4DE)b_3 = D^2 d_1 + ADd_2 - \frac{BD}{2}d_3. \end{aligned} \right.$$

Les quatre relations (15), (16), (17) et (18) fournissent les valeurs des d_i en fonction des a_i et b_i sous la forme

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} Dd_0 &= Ca_0 + \varepsilon C b_1 - \varepsilon E b_2 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon) b_0 \\ Dd_1 &= Ca_1 - \varepsilon A b_0 + \varepsilon E b_3 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon) b_1 \\ Dd_2 &= Ca_2 + \varepsilon C b_3 + \varepsilon D b_0 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon) b_2 \\ Dd_3 &= Ca_3 - \varepsilon A b_2 - \varepsilon D b_1 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon) b_3 \end{aligned} \right. \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On calculera les c_i d'une manière analogue : à la génératrice rectiligne $g' = \frac{A}{D}$, $h = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2D}$, qui est du même système que la première des génératrices (12), doit correspondre une génératrice rectiligne en G, H, G'. Or, si l'on remplace g' et h par les valeurs précédentes dans la première des équations (11), on obtient, en G, H, G', un plan, parallèle à l'axe $G = 0$, $H = 0$, qui doit dès lors, comme on s'en rend compte aisément, contenir la droite $G = \frac{C}{D}$, $H = \frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}$, ε étant le même que précédemment.

On raisonnera d'une manière analogue sur la seconde équation (11), et l'on obtiendra finalement les valeurs suivantes des c_i :

$$(20)\quad \begin{cases} Dc_0 = Ab_0 - \varepsilon C a_1 + \varepsilon E a_2 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0, \\ Dc_1 = Ab_1 + \varepsilon A a_0 - \varepsilon E a_3 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_1, \\ Dc_2 = Ab_2 - \varepsilon C a_3 - \varepsilon D a_0 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_2, \\ Dc_3 = Ab_3 + \varepsilon A a_2 + \varepsilon D a_1 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_3. \end{cases}$$

8. *Réciproquement*, cherchons si les conditions (19) et (20), qui sont nécessaires, sont suffisantes.

En premier lieu, les a_i, b_i, c_i, d_i doivent vérifier les relations (7); en y substituant aux c_i et d_i leurs valeurs (19) et (20), ces relations se réduisent aux deux suivantes :

$$(21)\quad \begin{cases} (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \\ -A(ab)_{02} + B(ab)_{03} - C(ab)_{31} - D(ab)_{01} + E(ab)_{32} = \varepsilon D n, \end{cases}$$

dont la première est générale pour toutes les transformations ordinaires.

En second lieu, il s'agit de voir si la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i), dont les entiers caractéristiques vérifient (19), (20) et (21), change en elle-même la relation

$$(1)\quad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

c'est ce qu'on vérifie sans difficulté en remplaçant, dans cette relation, g, h, g' et $h^2 - gg'$ par leurs valeurs (6) en G, H, G', $H^2 - GG'$, et chassant le dénominateur commun : on trouve ainsi que la relation (1) se reproduit, son premier membre étant multiplié par $-n\varepsilon$.

Il résulte de là que, pour toutes les transformations ordinaires d'ordre n qui n'altèrent pas la relation

$$(1)\quad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

les entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i ne sont assujettis qu'aux conditions (19), (20) et (21).

Nous trouvons ainsi, en faisant successivement dans nos formules $\varepsilon = -1$ et $\varepsilon = +1$, deux espèces de transformations d'ordre n résolvant le problème : nous dirons qu'une de ces transformations est *propre* ou *impropre*, selon qu'elle répond à $\varepsilon = -1$ ou à $\varepsilon = +1$.

D'après ce qui vient d'être dit, une transformation propre reproduit la relation (1), en multipliant son premier membre par le facteur $+n$; pour une transformation impropre, le facteur serait $-n$.

9. *Autre expression des c_i et d_i.* — Les relations (19) et (20), qui donnent les c_i et d_i en fonction des a_i et b_i ne fournissent pas immédiatement ces quantités sous forme entière, à cause du facteur D qui figure dans leurs premiers membres. Il est aisé de remédier à cet inconvénient.

Supposons, par exemple, que les coefficients A et D soient premiers entre eux, et désignons par p et q deux entiers, choisis arbitrairement et vérifiant la relation

$$\mathrm{A}p + \mathrm{D}q = 1. \tag{22}$$

La première des relations (20) s'écrit, en utilisant (22),

$$\mathrm{D}c_0 = \mathrm{A}b_0 + \left[-\varepsilon \mathrm{C}a_1 + \varepsilon \mathrm{E}a_2 - \frac{\mathrm{B}}{2}(1+\varepsilon)a_0\right](\mathrm{A}p + \mathrm{D}q);$$

comme A et D sont premiers entre eux, le coefficient de A, dans le second membre, doit être divisible par D, ce qui donne, en désignant par θ un entier, les deux équations :

$$\left\{\begin{aligned} c_0 &= \theta \mathrm{A} + q\left[-\varepsilon \mathrm{C}a_1 + \varepsilon \mathrm{E}a_2 - \frac{\mathrm{B}}{2}(1+\varepsilon)a_0\right], \\ b_0 &= \theta \mathrm{D} - p\left[-\varepsilon \mathrm{C}a_1 + \varepsilon \mathrm{E}a_2 - \frac{\mathrm{B}}{2}(1+\varepsilon)a_0\right]. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

De même, en désignant par τ, σ et ρ des entiers, les trois dernières relations (20) fournissent les équations

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
c_1 &= \tau A \qquad\quad + q\left[\varepsilon E a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_1\right],\\
b_1 &= \tau D - \varepsilon a_0 + p\left[\varepsilon E a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_1\right],\\
c_2 &= \sigma A - \varepsilon a_0 - q\left[\varepsilon C a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_2\right],\\
b_2 &= \sigma D \qquad\quad + p\left[\varepsilon C a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_2\right].\\
c_3 &= \rho A + \varepsilon a_1 - q\frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_3,\\
b_3 &= \rho D - \varepsilon a_2 + p\frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_3.
\end{aligned}\right.$$

On a ainsi les expressions, sous forme entière, des b_i et c_i en fonction des a_i et des entiers θ, τ, σ, ρ; pour obtenir les d_i, il suffit de porter, dans (19), les valeurs ci-dessus des b_i, et l'on trouve, en tenant compte dans les calculs de la relation $Ap + Dq = 1$,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
d_0 &= \varepsilon\tau C - \varepsilon\sigma E - \theta\frac{B}{2}(1-\varepsilon),\\
d_1 &= qCa_1 - qEa_2 - \varepsilon\theta A + \varepsilon\rho E + \varepsilon q\frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0,\\
d_2 &= \varepsilon\theta D + pCa_1 - pEa_2 + \varepsilon\rho C + \frac{B}{2}(1+\varepsilon)[\varepsilon p a_0 - \sigma],\\
d_3 &= a_0 - \varepsilon\sigma A - \varepsilon\tau D + qCa_3 - pEa_3\\
&\qquad + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)[-\rho + \varepsilon q a_2 - \varepsilon p a_1].
\end{aligned}\right.$$

Les équations (21) deviennent, si l'on y remplace les b_i par leurs valeurs précédentes,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&\qquad\qquad \rho a_0 - \theta a_3 + \sigma a_1 - \tau a_2 = 0,\\
&a_0^2 + Cpa_1^2 + Eqa_2^2 + Bpa_0a_1\\
&\quad + (Cq - Ep)a_0a_3 - Bqa_0a_2 - (Cq + Ep)a_1a_2\\
&\quad + \varepsilon[A(\theta a_2 - \sigma a_0) + B(\rho a_0 - \theta a_3) + C(\rho a_1 - \tau a_3)]\\
&\qquad\qquad + \varepsilon D(\theta a_1 - \tau a_0) + E(\sigma a_3 - \rho a_2)] = n.
\end{aligned}\right.$$

Finalement, toutes les transformations ordinaires d'ordre n qui n'altèrent pas la relation singulière

$$\mathrm{A}g + \mathrm{B}h + \mathrm{C}g' + \mathrm{D}(h^2 - gg') + \mathrm{E} = 0,$$

où A et D sont premiers entre eux, ont leurs entiers caractéristiques b_i, c_i, d_i exprimés par les formules (23), (24) et (25), en fonction des a_i et de quatre entiers ρ, θ, σ, τ, liés aux a_i par les relations (26) : dans ces formules, p et q sont des entiers, formant une solution de l'équation $\mathrm{A}p + \mathrm{D}q = 1$.

10. *Cas particuliers.* — La relation singulière donnée peut toujours se ramener, par une transformation d'ordre 1, comme je l'ai établi ailleurs ([1]), à l'une des formes

$$\begin{aligned} h^2 - gg' \phantom{{}+h} &= \mathrm{P}, \\ h^2 - gg' + h &= \mathrm{P}, \end{aligned}$$

selon que son coefficient B est pair ou impair. On a alors $\mathrm{D} = 1$, et les formules (19) et (20) donnent, sous forme entière, les c_i, d_i en fonction des a_i, b_i. On trouve ainsi :

1° *Transformations ordinaires d'ordre n n'altérant pas*

$$h^2 - gg' - \mathrm{P} = 0.$$

$$(27)\qquad \left\{ \begin{aligned} c_0 &= -\varepsilon \mathrm{P} a_2, & d_0 &= \varepsilon \mathrm{P} b_2 \\ c_1 &= \varepsilon \mathrm{P} a_3, & d_1 &= -\varepsilon \mathrm{P} b_3 \\ c_2 &= -\varepsilon a_0, & d_2 &= \varepsilon b_0 \\ c_3 &= \varepsilon a_1, & d_3 &= -\varepsilon b_1 \end{aligned} \right. \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

les a_i et b_i étant liés uniquement par les relations (21), à savoir :

$$(28)\qquad \left\{ \begin{aligned} a_0 b_3 - a_3 b_0 + {}& a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 - {}& \mathrm{P}(a_2 b_3 - a_3 b_2) = -n\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

([1]) Ce Journal, 5e série, t. V, p. 245.

Ces formules coïncident avec celles qu'a données M. Bourget dans le cas de $n = 1$.

Les transformations *propres* répondent à $\varepsilon = -1$; dans le cas particulier de $n = 1$, elles changent la relation $h^2 - gg' - P = 0$ en $H^2 - GG' - P = 0$; les transformations impropres ($\varepsilon = +1$) la changent en $-(H^2 - GG' - P) = 0$: on le voit de suite en remplaçant $h^2 - gg'$ par sa valeur (6) et en chassant le dénominateur.

Il résulte de là que le produit de deux transformations (27) d'ordre *un* et de même espèce est une transformation (27) propre du même ordre; le produit de deux transformations (27) d'espèces différentes est une transformation (27) *impropre*.

2° *Transformations ordinaires d'ordre n n'altérant pas*

$$h^2 - gg' + h - P = 0.$$

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
c_0 &= -\varepsilon P a_2 - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)a_0\\
c_1 &= \varepsilon P a_3 - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)a_1\\
c_2 &= -\varepsilon\ a_0 - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)a_2\\
c_3 &= \varepsilon\ a_1 - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)a_3\\
d_0 &= \varepsilon P b_2 - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)b_0\\
d_1 &= -\varepsilon P b_3 - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)b_1\\
d_2 &= \varepsilon\ b_0 - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)b_2\\
d_3 &= -\varepsilon\ b_1 - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)b_3
\end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

les a_i et b_i étant liés uniquement par les relations (21), à savoir :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1 &= 0,\\
-a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_0 b_1 - a_1 b_0 - P(a_2 b_3 - a_3 b_2) &= -n\varepsilon.
\end{aligned}\right.$$

11. *Cas où* D *est nul.* — Les formules précédentes supposent $D \gtrless 0$; si D est nul, c'est-à-dire si la relation singulière proposée est du type

$$Ag + Bh + Cg' + E = 0,$$

on opère sur elle une transformation *particulière* d'ordre un, T, de manière à la changer en une relation pour laquelle D ne soit pas nul; si S est une transformation quelconque laissant celle-ci inaltérée, la transformation TST^{-1} n'altérera pas la relation proposée, et réciproquement. On obtiendra donc par ce procédé toutes les transformations de la proposée en elle-même. Voici le résultat, en supposant $A \gtrless 0$.

Les b_i et d_i sont donnés, en fonction des a_i et c_i, par les relations :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
Ab_0 &= \varepsilon C a_1 - \varepsilon E a_2 + \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0,\\
Ab_1 &= -\varepsilon A a_0 + \varepsilon E a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_1,\\
Ab_2 &= \varepsilon C a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_2,\\
Ab_3 &= -\varepsilon A a_2 + \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_3;\\
Ad_0 &= \varepsilon C c_1 - \varepsilon E c_2 + \varepsilon E a_0 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)c_0,\\
Ad_1 &= -\varepsilon A c_0 + \varepsilon E c_3 + \varepsilon E a_1 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)c_1,\\
Ad_2 &= \varepsilon C c_3 + \varepsilon E a_2 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)c_2,\\
Ad_3 &= -\varepsilon A c_2 + \varepsilon E a_3 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)c_3.
\end{aligned}\right.$$

Quant aux a_i et aux c_i, ils sont liés par les deux relations

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
&(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0,\\
&-A(ac)_{02} + B(ac)_{03} + C(ac)_{13} - E(ac)_{23} = \varepsilon A n.
\end{aligned}\right.$$

En particulier, si $A = 1$, les relations (31) donnent les b_i et d_i sous forme entière.

12. *Transformations singulières.* — Cherchons de même les transformations singulières ([1]) qui n'altèrent pas la relation

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

supposée la *seule* relation singulière entre les périodes.

En ce cas, les relations qui donnent g, h, g', $h^2 - gg'$ en fonction de G, H, G', $H^2 - GG'$, ou inversement, gardent ([2]) une forme analogue à celle des relations (6) et (8); les relations (9) subsistent également. Il en résulte que les raisonnements des n^{os} **6-8** sont encore applicables, et, par suite, que les d_i et c_i sont toujours donnés en fonction des a_i et b_i par les équations (19) et (20). Seulement entre les a_i, b_i on n'a plus les relations (21), qui découlaient des relations (7), caractéristiques d'une transformation ordinaire. Celles-ci, pour une transformation singulière d'indices l et k, sont remplacées par les suivantes ([3]) :

$$\begin{aligned} &(ac)_{03} + (ac)_{12} = Ak, & &(db)_{03} + (db)_{12} = Ck, \\ &(ab)_{03} + (ab)_{12} = Dk, & &(cd)_{03} + (cd)_{12} = Ek, \\ &(ad)_{03} + (ad)_{12} = l, & &(bc)_{03} + (bc)_{12} = l + Bk. \end{aligned}$$

En tenant compte de (19) et de (20), on réduit ce système à deux équations seulement :

$$(33) \left\{ \begin{aligned} &(ab)_{03} + (ab)_{12} = Dk, \\ &- A(ab)_{02} + B(ab)_{03} - C(ab)_{31} \\ &\qquad - D(ab)_{01} + E(ab)_{32} = Dl\varepsilon + \frac{B\varepsilon}{2}(1+\varepsilon)Dk. \end{aligned} \right.$$

Finalement, les formules (19), (20) et (33) fournissent toutes les transformations singulières, d'indices l et k, n'altérant pas la relation (1), supposée la seule singulière entre les périodes g, h, g'.

([1]) *Voir* le *Journal de Math.*, 5^e série, t. VI, p. 281 et suivantes

([2]) *Ibid.*, p. 284.

([3]) *Ibid.*, p. 283 et 286.

On peut en déduire des formules analogues à (23), (24) et (25), donnant les b_i, c_i, d_i en fonction des a_i et de quatre entiers, liés entre eux par deux relations.

13. Bornons-nous, dans cette voie, à indiquer les résultats pour les *transformations singulières de degré* 1.

Il résulte de nos recherches antérieures qu'une transformation singulière de degré 1, relative aux fonctions abéliennes dont les périodes vérifient la relation

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

est déterminée (à une transformation ordinaire près d'ordre 1) quand on se donne ses indices, l et k, c'est-à-dire deux nombres entiers satisfaisant à l'équation de Pell

$$(2l + Bk)^2 - k^2(B^2 - 4AC - 4DE) = 4.$$

On trouverait, par les formules (19), (20) et (33), deux espèces de transformations singulières d'indices l et k; il suffit de connaître *une* de celles qui répondent à $\varepsilon = -1$, car les autres transformations de mêmes indices, répondant soit à $\varepsilon = -1$, soit à $\varepsilon = +1$, s'obtiennent en faisant précéder la première d'une transformation ordinaire quelconque de degré un.

Or, les formules (19), (20), ou mieux les formules (23), (24), (25), où l'on fait

$$\theta = 0, \qquad a_0 = 1, \qquad a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

donnent la solution suivante :

$$(34) \quad \begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 0, \\ b_0 = 0, & b_1 = 1 + \tau D, \\ c_0 = 0, & c_1 = \tau A, \\ d_0 = -\tau C + \sigma E, & d_1 = -\rho E, \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_2 = \sigma D, & b_3 = \rho D, \\ c_2 = 1 + \sigma A, & c_3 = \rho A, \\ d_2 = -\rho C, & d_3 = 1 + \sigma A - \rho B + \tau D, \end{cases}$$

en supposant A et D premiers entre eux; et l'on a, d'après (33),

$$\rho = k, \qquad 1 + \sigma A - kB + \tau D = l.$$

Nous avons d'ailleurs établi (*loc. cit.*) que toutes les transformations singulières du premier degré sont (à une transformation ordinaire près d'ordre 1) les puissances, positives ou négatives, de celles dont les indices l et k forment ([1]) la plus petite solution entière de l'équation de Pell :

$$(2l + Bk)^2 - k^2(B^2 - 4AC - 4DE) = 4.$$

En particulier les transformations singulières de degré 1, correspondant à la relation $h^2 - gg' - P = 0$, sont des puissances de celle (d'indices l et k) que définissent les formules (34) :

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_0 = 0, & b_1 = l, & b_2 = 0, & b_3 = k, \\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = 0, \\ d_0 = 0, & d_1 = Pk, & d_2 = 0, & d_3 = l; \end{array}$$

l et k désignent ici la plus petite solution positive de l'équation

$$l^2 - Pk^2 = 1.$$

La transformation précédente n'altère pas la relation $h^2 - gg' - P = 0$; plus exactement, en vertu des formules générales de la transformation singulière (ce Journal, 5e série, t. VI, p. 284), elle change cette relation en $l(H^2 - GG' - P) = 0$.

([1]) *Ibid.*, p. 315-316.

14. *Extension.* — La méthode employée aux nos **6-8** permet également de trouver, presque sans calcul, les transformations ordinaires d'ordre $n=\pm 1$, qui permettent de passer d'une relation singulière donnée à une autre également donnée, mais nécessairement de même invariant que la première.

Soient les relations :

$$\begin{aligned} &Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,\\ &A_1 G + B_1 H + C_1 G' + D_1(H^2 - GG') + E_1 = 0, \end{aligned}$$

avec la condition

$$B^2 - 4AC - 4DE = B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1.$$

Les transformations ordinaires du premier degré qui changent la première relation en la seconde ont leurs entiers c_i et d_i, donnés en fonction des a_i, b_i par les équations :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} Dc_0 &= Ab_0 - \varepsilon C_1 a_1 + \varepsilon E_1 a_2 - \frac{a_0}{2}(B + \varepsilon B_1)\\ Dc_1 &= Ab_1 + \varepsilon A_1 a_0 - \varepsilon E_1 a_3 - \frac{a_1}{2}(B - \varepsilon B_1)\\ Dc_2 &= Ab_2 - \varepsilon C_1 a_3 - \varepsilon D_1 a_0 - \frac{a_2}{2}(B - \varepsilon B_1)\\ Dc_3 &= Ab_3 + \varepsilon A_1 a_2 + \varepsilon D_1 a_1 - \frac{a_3}{2}(B + \varepsilon B_1)\\ Dd_0 &= Ca_0 + \varepsilon C_1 b_1 - \varepsilon E_1 b_2 - \frac{b_0}{2}(B - \varepsilon B_1)\\ Dd_1 &= Ca_1 - \varepsilon A_1 b_0 + \varepsilon E_1 b_3 - \frac{b_1}{2}(B + \varepsilon B_1)\\ Dd_2 &= Ca_2 + \varepsilon C_1 b_3 + \varepsilon D_1 b_0 - \frac{b_2}{2}(B + \varepsilon B_1)\\ Dd_3 &= Ca_3 - \varepsilon A_1 b_2 - \varepsilon D_1 b_1 - \frac{b_3}{2}(B - \varepsilon B_1) \end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Les a_i et b_i sont liés uniquement par les deux relations (où $n=\pm 1$) :

$$(ab)_{03} + (ab)_{12} = 0,$$
$$-A_1(ab)_{02} + B_1(ab)_{03} - C_1(ab)_{31} - D_1(ab)_{01} + E_1(ab)_{32} = \varepsilon n D.$$

On mettrait les c_i et d_i sous forme entière par le procédé du n° **9**.

Si D était nul, on trouverait sans difficulté les formules suivantes :

$$(36)\quad\left\{\begin{aligned}
Ab_0 &= \varepsilon C_1 a_1 - \varepsilon E_1 a_2 + \frac{a_0}{2}(B + \varepsilon B_1),\\
Ab_1 &= -\varepsilon A_1 a_0 + \varepsilon E_1 a_3 + \frac{a_1}{2}(B - \varepsilon B_1),\\
Ab_2 &= \varepsilon C_1 a_3 + \varepsilon D_1 a_0 + \frac{a_2}{2}(B - \varepsilon B_1),\\
Ab_3 &= -\varepsilon A_1 a_2 - \varepsilon D_1 a_1 + \frac{a_3}{2}(B + \varepsilon B_1),\\
Ad_0 &= \varepsilon C_1 c_1 - \varepsilon E_1 c_2 - Ea_0 - \frac{1}{2}(B - \varepsilon B_1)c_0,\\
Ad_1 &= -\varepsilon A_1 c_0 + \varepsilon E_1 c_3 - Ea_1 - \frac{1}{2}(B + \varepsilon B_1)c_1,\\
Ad_2 &= \varepsilon C_1 c_3 + \varepsilon D_1 c_0 - Ea_2 - \frac{1}{2}(B + \varepsilon B_1)c_2,\\
Ad_3 &= -\varepsilon A_1 c_3 - \varepsilon D_1 c_1 - Ea_3 - \frac{1}{2}(B - \varepsilon B_1)c_3,
\end{aligned}\right.$$

Les a_i et c_i sont alors liés par les relations (où $n = \pm 1$) :

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0,$$

$$-A_1(ac)_{02} + B_1(ac)_{03} + C_1(ac)_{13} - D_1(ac)_{01} - E_1(ac)_{23} = \varepsilon n A.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Fonctions abéliennes doublement singulières.

Généralités.

15. Les périodes d'une fonction abélienne étant ramenées à la forme normale, $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h) ; (h, g'), la fonction sera dite *double-*

ment singulière s'il existe, entre g, h, g', *deux* relations singulières du type (1), à savoir :

$$(1)\qquad Ag + Bh + Cg' + D\,(h^2 - gg') + E = 0,$$

$$(2)\qquad A_1 g + B_1 h + C_1 g' + D_1 (h^2 - gg') + E_1 = 0,$$

les $A, B, \ldots, E$, et de même les $A_1, B_1, \ldots, E_1$, étant des entiers sans diviseur commun.

Observons d'abord que nous avons le droit de supposer premiers entre eux les déterminants tels que $AB_1 - BA_1, \ldots, DE_1 - ED_1$, formés avec quatre coefficients correspondants des relations (1) et (2) : dans le cas contraire, il suffirait de remplacer une de ces relations par une de ses combinaisons linéaires avec l'autre. Nous dirons alors que le *système* (1) et (2) est *propre*.

Cela posé, soient F et F_1 les premiers membres des équations (1) et (2) : l'invariant d'une relation singulière entre les périodes étant nécessairement positif (*Journal de Math.*, 5[e] série, t. V, p. 246), il faut que l'invariant de la relation

$$(3)\qquad xF + yF_1 = 0,$$

où x et y désignent des entiers quelconques, soit positif (¹). Or, si l'on pose

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta = B^2 - 4AC - 4DE; \qquad \Delta_1 = B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1, \\ \delta = BB_1 - 2AC_1 - 2CA_1 - 2DE_1 - 2ED_1, \end{cases}$$

cet invariant a pour expression la *forme quadratique binaire* en x, y :

$$(5)\qquad \Delta x^2 + 2\delta xy + \Delta_1 y^2,$$

qui, par suite, doit être définie et positive. Les coefficients Δ et Δ_1 des carrés sont positifs, puisque ce sont respectivement les invariants des relations singulières (1) et (2); il suffit dès lors que le discriminant

(¹) *Voir* aussi à ce sujet le Tome VI, 5[e] série, de ce *Journal*, p. 334-336.

de la forme (5), à savoir

$$\Delta\Delta_1 - \delta^2,$$

soit positif.

16. *Invariants.* — Opérons maintenant sur les périodes une transformation ordinaire du premier degré, quelconque d'ailleurs; les relations singulières $F = 0$, $F_1 = 0$ se changent respectivement en deux relations analogues, $F' = 0$, $F'_1 = 0$, qui constituent un système propre.

Car, s'il en était autrement, la relation $xF' + yF'_1 = 0$, où x et y sont des entiers premiers entre eux, aurait tous ses coefficients divisibles par un même facteur; mais elle est la transformée de la relation $xF + yF_1 = 0$, *où les coefficients n'ont aucun facteur commun,* puisque le système $F = 0$, $F_1 = 0$ est propre, et l'on sait (¹) qu'une telle relation est changée, par une transformation ordinaire d'ordre ± 1, en une relation jouissant de la même propriété.

Cela posé, les invariants de F' et F'_1 sont respectivement égaux à ceux, Δ et Δ_1, de F et F_1, d'après la définition même de l'invariant; on vérifie aisément par la marche suivie à propos de l'invariant (²) que la quantité δ définie par (4) est un invariant *simultané* des deux relations $F = 0$, $F_1 = 0$.

Il résulte de là que la forme quadratique (5) reste inaltérée quand on opère sur les deux relations singulières initiales une même transformation ordinaire du premier *degré.*

17. On peut aller plus loin, en remplaçant le système $F = 0$, $F_1 = 0$, par un système *arithmétiquement équivalent,* c'est-à-dire par

$$\text{(S)} \qquad \lambda F + \mu F_1 = 0, \qquad \lambda' F + \mu' F_1 = 0,$$

λ, μ, λ', μ' désignant des entiers tels que $\lambda\mu' - \lambda'\mu = \pm 1$: il est clair que le système (S) est propre en même temps que le système $F = 0$, $F_1 = 0$. La forme quadratique en x', y' qui lui correspond,

---

(¹) Ce *Journal*, 5ᵉ série, t. V, p. 237.

(²) *Ibid.*, p. 236-237.

c'est-à-dire l'invariant de la relation

$$x'(\lambda F + \mu F_1) + y'(\lambda' F + \mu' F_1) = 0,$$

ou

$$(\lambda x' + \lambda' y') F + (\mu x' + \mu' y') F_1 = 0,$$

se calcule en remplaçant, dans la forme (5), x et y par $\lambda x' + \lambda' y'$ et $\mu x' + \mu' y'$. En d'autres termes, puisque $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ est égal à ± 1, la forme ainsi obtenue en x', y' est *équivalente*, proprement ou improprement, à la forme (5) en x, y. Si nous combinons ce résultat avec ceux du numéro précédent, nous arrivons à ce théorème :

18. Théorème. — *A un système propre de deux relations singulières* $F = 0$, $F_1 = 0$, *entre les périodes, correspond une forme quadratique binaire positive en x et y, qui est l'invariant de la relation singulière* $xF + yF_1 = 0$: *cette forme se change en une forme proprement ou improprement équivalente quand on remplace le système initial par un système arithmétiquement équivalent, ou quand on opère sur lui une transformation ordinaire de degré un.*

En d'autres termes, à tout *système* propre $F = 0$, $F_1 = 0$, est associée une *classe* de formes, l'équivalence entre deux formes quelconques de la classe étant propre ou impropre; cette classe demeure inaltérée pour une transformation de degré un effectuée sur le système initial [1].

19. *Invariant absolu du système.* — Il suit de là que le *système* $F = 0$, $F_1 = 0$ possède un invariant, à savoir le discriminant $\Delta\Delta_1 - \delta^2$ de la classe associée : la propriété peut aussi être vérifiée directement sans autre difficulté que la longueur des calculs. Nous appellerons cet invariant l'*invariant absolu;* il est toujours positif.

---

[1] Dans tout ce Mémoire, à moins d'avis contraire, nous appellerons *classe* de formes quadratiques binaires l'ensemble des formes proprement ou improprement équivalentes à l'une d'elles; une de nos classes comprend donc *généralement* deux classes ordinaires opposées; la seule exception est qu'une classe ambiguë ordinaire constituera *à elle seule* une de nos classes.

20. *Problème inverse.* — Si *deux* systèmes de deux relations singulières donnent naissance à une *même* classe de formes binaires, ces deux systèmes sont-ils réductibles l'un à l'autre, par une transformation du premier degré? Sinon, à quels types canoniques peuvent se réduire tous les systèmes donnant naissance à une même classe?

Telle est la question que nous allons aborder; nous restreindrons souvent les démonstrations au cas où les coefficients B et B_1, qui figurent dans les relations (1) et (2), sont tous deux pairs : en ce cas, la forme (5), liée au système (1), (2), a tous ses coefficients divisibles par 4, et l'on reconnaît immédiatement, par l'examen des formules (4), que, dans tout système donnant naissance à une forme de la même classe, les coefficients analogues à B et B_1 sont également pairs.

Il n'y aura aucune difficulté à étendre les raisonnements au cas où B serait pair et B_1 impair; quant au cas de B et B_1 impairs, on le ramène au précédent en remplaçant le système $F = 0$, $F_1 = 0$ par le système arithmétiquement équivalent $F - F_1 = 0$, $F_1 = 0$.

21. *Remarque I.* — D'après cette dernière observation, on a toujours le droit de supposer B pair; la forme (5) appartient dès lors au type

$$4(ax^2 + bxy + cy^2), \qquad \text{si } B_1 \text{ est pair;}$$
$$4ax^2 + 4bxy + (4c+1)y^2, \qquad \text{si } B_1 \text{ est impair.}$$

Réciproquement, une forme de l'un ou l'autre de ces types dérivera toujours d'un système propre de deux relations singulières; par exemple, les deux formes ci-dessus dérivent respectivement des systèmes propres

$$\begin{cases} h^2 - gg' - a = 0, \\ g - cg' - b = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h^2 - gg' - a = 0, \\ g + h - cg' - b = 0. \end{cases}$$

Remarque II. — Il est aisé de reconnaître le *cas elliptique*, c'est-à-dire celui où une intégrale abélienne de première espèce, correspondant aux périodes considérées, est réductible à une intégrale elliptique. Nous avons établi [1] que ce cas est caractérisé par une relation

[1] Ce *Journal*, 5e série, t. V, p. 247.

singulière entre les périodes ayant pour invariant un carré parfait : si donc les fonctions abéliennes considérées sont liées par un système de deux relations singulières, on sera placé dans un cas elliptique lorsque la forme quadratique associée au système pourra proprement représenter un carré; c'est-à-dire, en vertu d'un beau résultat de Gauss, lorsque cette forme appartiendra au genre principal.

Réduction d'un système de deux relations singulières.

22. Admettons, comme au n° **20**, que la forme (5), liée au système $F = 0$, $F_1 = 0$, à savoir

$$\Delta x^2 + 2\delta xy + \Delta_1 y^2, \tag{5}$$

ait ses coefficients Δ, 2δ, Δ_1, divisibles par 4; nous désignerons par 4Ω leur plus grand commun diviseur.

Soit alors P un nombre premier *positif* représenté proprement par la forme (5), après division des coefficients de celle-ci par 4Ω : on sait, par un théorème célèbre de Dirichlet, qu'il existe une infinité de tels nombres premiers [1]. La forme (5), pour des valeurs x' et y', premières entre elles, de x et y, prendra donc la valeur $4\Omega P$. Si x'' et y'' sont des entiers tels que $x'y'' - y'x'' = \pm 1$, on pourra remplacer le système initial $F = 0$, $F_1 = 0$, par le système arithmétiquement équivalent $x'F + y'F_1 = 0$, $x''F + y''F_1 = 0$: d'ailleurs la première de ces nouvelles relations a pour invariant $4\Omega P$, en vertu de ce qui précède; on peut dès lors, par une transformation ordinaire d'ordre 1, T, la réduire au type

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

de même invariant, $4\Omega P$. Soient alors $\Phi = 0$ la transformée, par T, de $x''F + y''F_1 = 0$; D' le coefficient de $h^2 - gg'$ dans Φ; le système $h^2 - gg' - \Omega P = 0$, $\Phi = 0$ peut être remplacé par le système arith-

---

[1] Il est clair qu'on a le droit de supposer que P ne divise pas Ω.

métiquement équivalent

$$(6)\qquad h^2 - gg' - \Omega P = 0, \qquad \Phi - D'(h^2 - gg' - \Omega P) = 0,$$

où la seconde relation est privée de terme en $h^2 - gg'$.

D'ailleurs toutes ces transformations n'ont pas changé la *classe* de la forme binaire (5) associée au système; celle-ci a donc toujours ses coefficients divisibles par 4Ω, ce qui exige d'abord que, dans les deux relations singulières finales (6), les coefficients des termes en h soient pairs. On a donc le droit de supposer le système initial (1), (2) ramené au type

$$(7)\qquad h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

$$(8)\qquad \alpha g + 2\beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

α, β, γ, ω désignant des entiers tels que α, 2β, γ, ω soient premiers entre eux. La forme quadratique binaire liée au système (7), (8) a pour expression

$$(9)\qquad 4[\Omega P x^2 + \omega xy + (\beta^2 - \alpha\gamma)y^2];$$

d'après ce qui vient d'être dit, elle doit être divisible par 4Ω, c'est-à-dire que ω et $(\beta^2 - \alpha\gamma)$ admettent le facteur Ω; ils n'admettent pas simultanément le facteur P, car 4Ω est le plus grand commun diviseur des coefficients de la forme (5), et par suite aussi de ceux de la forme équivalente (9).

23. Considérons maintenant un second système de deux relations singulières donnant naissance à une forme binaire, proprement ou improprement équivalente à la forme (5). En opérant sur ce système comme sur le système initial, on le réduira au type

$$(10)\qquad h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

$$(11)\qquad \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 = 0,$$

Ω et P étant les mêmes que précédemment, puisqu'ils ne dépendent que de la classe de formes à laquelle appartient (5).

La forme associée au système (10) et (11), c'est-à-dire

$$(12) \qquad 4[\Omega P x^2 + \omega_1 xy + (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1)y^2]$$

étant équivalente (proprement ou improprement) à la forme (9), a même déterminant; donc on a

$$(13) \qquad \omega^2 - 4\Omega P(\beta^2 - \alpha\gamma) = \omega_1^2 - 4\Omega P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1),$$

ce qui montre que $2P$ divise $\omega - \omega_1$ ou $\omega + \omega_1$. On en conclut aisément, ε_0 désignant l'unité positive ou négative,

$$(14) \qquad \omega_1 = \varepsilon_0\omega + 2\mu\Omega P \qquad (\varepsilon_0 = \pm 1),$$

car les quotients par Ω de ω et ω_1 sont de même parité. Cette condition, jointe à (13), suffit pour que les deux formes (9) et (12) soient équivalentes: remplaçons, en effet, x par $x + \varepsilon_0\mu y$ dans la forme (9); elle devient, si l'on tient compte de (13) et (14),

$$4[\Omega P x^2 + \varepsilon_0\omega_1 xy + (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1)y^2],$$

forme proprement ou improprement équivalente à (12), selon qu'on a $\varepsilon_0 = +1$ ou $\varepsilon_0 = -1$.

Observons enfin que l'équation (13), où l'on remplace ω par sa valeur tirée de (14), s'écrit, après division par $4\Omega P$,

$$(15) \qquad \beta^2 - \alpha\gamma = \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 - \mu(\omega_1 - \mu\Omega P).$$

24. Cela posé, cherchons si les systèmes (7), (8) et (10), (11) peuvent être ramenés l'un à l'autre par une transformation ordinaire *d'ordre* 1, n'altérant pas la relation $h^2 - gg' - \Omega P = 0$, commune aux deux systèmes.

Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, qu'une telle transformation change la relation (8), $\alpha g + 2\beta h + \gamma g' - \omega = 0$, en une relation singulière appartenant au système (10), (11), c'est-à-dire du type

$$(16) \quad \mu'(\alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1) + \lambda'(h^2 - gg' - \Omega P) = 0,$$

λ' et μ' étant entiers. D'ailleurs μ' doit être égal à ± 1, puisque le système (10), (16), déduit du système *propre* (7), (8) par une transformation d'ordre 1, est aussi un système propre (nº **16**); nous avons donc finalement à rechercher si une transformation ordinaire du premier *ordre*, n'altérant pas $h^2 - gg' - \Omega P = 0$, peut changer l'une dans l'autre les relations

$$\alpha g + 2\beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$
$$(17) \qquad \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 - \lambda(h^2 - gg' - \Omega P) = 0,$$

λ désignant un entier.

Une première condition nécessaire est que ces relations aient même invariant, c'est-à-dire que l'on ait

$$(18) \qquad \beta^2 - \alpha\gamma = \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 - \lambda(\omega_1 - \lambda\Omega P).$$

Soient maintenant a_i, b_i, c_i, d_i les seize entiers caractéristiques de la transformation cherchée; celle-ci n'altérant pas la relation

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

on a, entre ces entiers (nº **10**) les équations

$$(19) \quad \begin{cases} c_0 = -\varepsilon\Omega P a_2, & c_1 = \varepsilon\Omega P a_3, & c_2 = -\varepsilon a_0, & c_3 = \varepsilon a_1, \\ d_0 = \varepsilon\Omega P b_2, & d_1 = -\varepsilon\Omega P b_3, & d_2 = \varepsilon b_0, & d_3 = -\varepsilon b_1 \\ & & (\varepsilon = \pm 1), & \end{cases}$$

$$(20) \qquad \begin{cases} (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \\ (ab)_{01} - \Omega P (ab)_{23} = -\varepsilon. \end{cases}$$

D'après les formules (36) du nº **14**, où l'on fait $n = +1$, pour que la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i) change l'une dans l'autre les relations (17), il faut et il suffit qu'on ait, entre les a_i, b_i, c_i, d_i, les équations

$$(21) \quad \begin{cases} \alpha b_0 = \eta\gamma_1 a_1 + \eta(\omega_1 - \lambda\Omega P)a_2 + (\beta + \eta\beta_1)a_0 \\ \alpha b_1 = -\eta\alpha_1 a_0 - \eta(\omega_1 - \lambda\Omega P)a_3 + (\beta - \eta\beta_1)a_1 \\ \alpha b_2 = \eta\gamma_1 a_3 - \eta\lambda a_0 + (\beta - \eta\beta_1)a_2 \\ \alpha b_3 = -\eta\alpha_1 a_2 + \eta\lambda a_1 + (\beta + \eta\beta_1)a_3 \end{cases} \qquad (\eta = \pm 1),$$

et

$$
(22)\left\{\begin{array}{l}
\alpha d_0 = \quad \eta\gamma_1 c_1 + \eta(\omega_1 - \lambda\Omega P)c_2 + \omega a_0 - (\beta - \eta\beta_1)c_0 \\
\alpha d_1 = -\eta\alpha_1 c_0' - \eta(\omega_1 - \lambda\Omega P)c_3 + \omega a_1 - (\beta + \eta\beta_1)c_1 \\
\alpha d_2 = \quad \eta\gamma_1 c_3 - \eta\lambda c_0 \qquad\qquad + \omega a_2 - (\beta + \eta\beta_1)c_2 \\
\alpha d_3 = -\eta\alpha_1 c_2 + \eta\lambda c_1 \qquad\qquad + \omega a_3 - (\beta - \eta\beta_1)c_3
\end{array}\right. \qquad (\eta = \pm 1),
$$

$$
(23)\left\{\begin{array}{l}
(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0, \\
-\alpha_1(ac)_{02} + 2\beta_1(ac)_{03} + \gamma_1(ac)_{13} + \lambda(ac)_{01} + (\omega_1 - \lambda\Omega P)(ac)_{23} = \eta\alpha.
\end{array}\right.
$$

Des simplifications importantes se produisent dans ce système.

Portons en effet dans (22) les valeurs des d_i, c_i, b_i déduites de (19) et (21); les quatre équations (22) se réduisent à une seule

$$\varepsilon\eta\omega_1 - \omega = 2\varepsilon\eta\lambda\Omega P,$$

qui, par comparaison avec (14), entraîne

$$(24) \qquad \lambda = \mu, \qquad \varepsilon\eta = \varepsilon_0,$$

ε_0 étant l'unité et μ l'entier définis par la formule (14). La relation (18) est dès lors vérifiée d'elle-même, puisqu'elle devient identique à l'équation (15), qui est supposée satisfaite.

Les relations (21) et (19) donnent donc les valeurs des b_i, c_i, d_i en fonction des a_i; enfin les relations (20) et (23) se réduisent, à l'aide de (24), à la suivante :

$$
(25)\left\{\begin{array}{l}
\alpha_1(a_0^2 - \Omega P a_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - \Omega P a_3^2) \\
+ 2\beta_1(a_0 a_1 + \Omega P a_2 a_3) + \omega_1(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \varepsilon_0 \alpha.
\end{array}\right.
$$

Nous arrivons donc enfin à la conclusion suivante :

Les systèmes (7), (8) *et* (10), (11), *qu'on suppose donner naissance à deux formes binaires équivalentes (proprement ou non), seront réductibles l'un à l'autre par une transformation d'ordre* 1 *si les équations* (25) *et* (21), *où* a_0, a_1, a_2, a_3 *et* b_0, b_1, b_2, b_3 *sont les inconnues, sont résolubles en nombres entiers.*

25. *Remarque I.* — Nous avons supposé, dans ces formules, que les transformations du premier ordre introduites sont d'ordre $+1$, c'est-à-dire qu'on a $(ad)_{03}+(ad)_{12}=+1$. Mais on doit aussi considérer les transformations d'ordre -1, pour lesquelles

$$(ad)_{03}+(ad)_{12}=-1,$$

et qu'on obtient en combinant les premières avec celle qui change les signes de g, h, g' et qui est définie par $a_0=b_1=1$; $c_2=d_3=-1$, et les autres a_i, b_i, c_i, d_i nuls. Ces transformations d'ordre -1 n'altèrent pas non plus les modules des fonctions abéliennes considérées.

Dans ces conditions l'équation (25) est remplacée par la même équation, où le second membre est $\pm\varepsilon_0\alpha$.

La question de reconnaître si les systèmes (7), (8) et (10), (11) sont réductibles l'un à l'autre est ainsi ramenée à celle de la résolubilité en nombres entiers des équations (25) et (21), où ε_0 et η sont regardées comme des *indéterminées* susceptibles de prendre les valeurs ± 1. Quant à λ, c'est, d'après (14) et (24), le quotient par $2\Omega P$ de celle des deux quantités $\omega_1\pm\omega$ qui admet le facteur P.

L'équation (25), à savoir

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}&\alpha_1(a_0^2-\Omega P a_2^2)+\gamma_1(a_1^2-\Omega P a_3^2)\\&+2\beta_1(a_0a_1+\Omega P a_2a_3)+\omega_1(a_0a_3+a_1a_2)=\varepsilon_0\alpha\end{aligned}\right.$$

ne contient que les inconnues a_0, a_1, a_2, a_3; quant aux équations (21), on peut les écrire sous forme de congruences :

$$(26)\quad\left\{\begin{array}{lll}\eta\gamma_1a_1+\eta(\omega_1-\lambda\Omega P)a_2&+(\beta+\eta\beta_1)a_0\equiv 0\\-\eta\alpha_1a_0-\eta(\omega_1-\lambda\Omega P)a_3&+(\beta-\eta\beta_1)a_1\equiv 0\\\eta\gamma_1a_3-\eta\lambda a_0&+(\beta-\eta\beta_1)a_2\equiv 0\\-\eta\alpha_1a_2+\eta\lambda a_1&+(\beta+\eta\beta_1)a_3\equiv 0\end{array}\right.\quad(\operatorname{mod}\alpha).$$

Il est à observer que le déterminant des coefficients de a_0, a_1, a_2, a_3 dans les premiers membres est, en vertu de (18), multiple de α; les congruences n'exigent donc pas que a_0, a_1, a_2, a_3 soient eux-mêmes multiples de α, ce qui rendrait l'équation (25) impossible à résoudre.

26. *Remarque II.* — Au lieu de rechercher directement si les deux systèmes proposés sont réductibles l'un à l'autre, on peut opérer la recherche sur deux autres systèmes, respectivement réductibles aux précédents par une transformation du premier ordre n'altérant pas $h^2 - gg' - \Omega P$. Par exemple, si l'on effectue sur le système (10), (11) une telle transformation, on remplacera la seconde équation de ce système,

$$\alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 = 0,$$

en tenant compte de $h^2 - gg' - \Omega P = 0$, par la suivante :

$$\alpha_0 g + 2\beta_0 h + \gamma_0 g' - \omega_0 = 0,$$

où les entiers α_0, β_0, γ_0, ω_0 sont donnés en fonction de α_1, β_1, γ_1, ω_1 par les relations

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha_1(n_1^2 - \Omega P n_3^2) + 2\beta_1(\Omega P m_3 n_3 - m_1 n_1) \\
&\quad + \gamma_1(m_1^2 - \Omega P m_3^2) - \omega_1(m_3 n_1 - m_1 n_3), \\
2\beta_0 &= -2\alpha_1(n_0 n_1 + \Omega P n_2 n_3) + 2\beta_1(2m_0 n_1 + 2\Omega P m_3 n_2 - 1) \\
&\quad - 2\gamma_1(m_0 m_1 + \Omega P m_2 m_3) - 2\omega_1(m_0 n_3 - m_3 n_0), \\
\gamma_0 &= \alpha_1(n_0^2 - \Omega P n_2^2) + 2\beta_1(\Omega P m_2 n_2 - m_0 n_0) \\
&\quad + \gamma_1(m_0^2 - \Omega P m_2^2) - \omega_1(m_0 n_2 - m_2 n_0), \\
\omega_0 &= 2\alpha_1 \Omega P(n_1 n_2 + n_0 n_3) - 4\beta_1 \Omega P(m_0 n_3 + m_1 n_2) \\
&\quad + 2\gamma_1 \Omega P(m_0 m_3 + m_1 m_2) + \omega_1[1 + 2\Omega P(m_2 n_3 - m_3 n_2)].
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules m_0, m_1, m_2, m_3 et n_0, n_1, n_2, n_3 désignent huit entiers, assujettis seulement aux conditions

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
(mn)_{01} - \Omega P(mn)_{23} &= 1, \\
(mn)_{12} + \qquad (mn)_{03} &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Pour obtenir ces formules, on a supposé $\varepsilon = -1$, $n = +1$, dans la transformation indiquée au n° **10**, n'altérant pas $h^2 - gg' - \Omega P = 0$.

27. *Remarque III.* — La forme quadratique quaternaire en a_0, a_1, a_2, a_3 qui constitue le premier membre de (25) peut recevoir une expression remarquable. Supposons, pour fixer les idées, ω_1 pair; l'équation (25), après multiplication des deux membres par α_1, s'écrit

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_1 a_0+\beta_1 a_1+\frac{\omega_1}{2}a_3\right)^2\\ &-\Omega P(\alpha_1 a_2-\beta_1 a_3)^2+2\frac{\omega_1}{2}a_1(\alpha_1 a_2-\beta_1 a_3)\\ &-a_1^2(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)+a_3^2\left[\Omega P(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)-\frac{\omega_1^2}{4}\right]=\varepsilon_0\alpha\alpha_1.\end{aligned}$$

Le premier membre est une forme quaternaire du type

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned}&U^2-\Omega P Y^2+2\frac{\omega_1}{2}XY-(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)X^2\\ &\quad+\left[\Omega P(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)-\frac{\omega_1^2}{4}\right]Z^2.\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on désigne par $\varphi(x,y)$ le quart de la forme (12) associée au système (10), (11), à savoir

$$\varphi(x,y)=\Omega P x^2+2\frac{\omega_1}{2}xy+(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)y^2,$$

la forme ternaire $z^2-\varphi(x,y)$ a pour adjointe la forme

$$\begin{aligned}F(X,Y,Z)=-\Omega PY^2+2\frac{\omega_1}{2}XY-(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)X^2&\\ +\left[\Omega P(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)-\frac{\omega_1^2}{4}\right]Z^2&,\end{aligned}$$

de sorte que la forme quaternaire (29) est $U^2+F(X,Y,Z)$, qu'on rencontre dans la recherche des transformations en elle-même de la forme $z^2-\varphi(x,y)$.

28. Revenons maintenant à l'étude de la résolubilité en nombres entiers des équations (25) et (21), en a_i et b_i, puisque c'est à cette étude que nous avons ramené le problème de la réduction l'un à l'autre des deux systèmes (7), (8) et (10), (11).

Nous distinguerons plusieurs cas.

29. *Premier cas.* — $\Omega = 1$, ou 2. Supposons d'abord $\Omega = 1$, et, pour fixer les idées, ω_1 pair, $\omega_1 = 2\omega'_1$. La forme (12) associée au système (10), (11) est, après division par 4,

$$(30) \qquad Px^2 + 2\omega'_1 xy + (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1)y^2;$$

elle est, en vertu de $\Omega = 1$, proprement primitive; son discriminant est $P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega_1'^2$.

Je dis que, si ce discriminant est impair, le système (10), (11) est réductible à un système du type

$$(31) \qquad h^2 - gg' - P = 0; \qquad g - mg' - 2n = 0,$$

m et n n'étant assujettis qu'à la seule condition que la forme associée à (31), après division par 4, c'est-à-dire $Px^2 + 2nxy + my^2$, soit équivalente (proprement ou non) à la forme (30) (¹). Pour l'établir, il suffit, en vertu de la théorie générale, de montrer que les équations (25) et (21) ont, en a_i et b_i, des solutions entières lorsqu'on y fait $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Or, dans ce cas, les équations (21) fournissent, pour les b_i, des valeurs entières en fonction des a_i, de sorte que tout revient à établir la résolubilité, en nombres entiers a_i, de l'équation (25), qui s'écrit ici

$$(32) \left\{ \begin{aligned} &\alpha_1(a_0^2 - Pa_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - Pa_3^2) + 2\beta_1(a_0a_1 + Pa_2a_2) \\ &\qquad\qquad + 2\omega'_1(a_0a_3 + a_1a_2) \quad = \pm 1. \end{aligned} \right.$$

Observons d'abord que nous avons le droit de supposer γ_1 positif, impair, et premier à ω'_1 : car, s'il en est autrement, nous remplacerons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \omega_1$ par les valeurs $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \omega_0$ données au n° **26**, en supposant, dans les formules de ce numéro, $m_2 = m_3 = n_2 = n_3 = 0$, et

---

(¹) Cette proposition entraîne évidemment la suivante : deux systèmes de deux relations singulières donnant naissance à deux formes équivalentes, divisibles par 4, et après cette division, proprement primitives et de déterminant impair, sont réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré 1, car les deux systèmes sont réductibles à un *même* système (31).

$m_0 n_1 - m_1 n_0 = 1$, ce qui vérifie les équations (28). En vertu des formules (27), on aura $\omega_0 = \omega_1$ et $\gamma_0 = \alpha_1 n_0^2 - 2\beta_1 m_0 n_0 + \gamma_1 m_0^2$: or on peut choisir m_0 et n_0, premiers entre eux, de manière que γ_0 soit positif, impair, et n'ait aucun facteur commun avec ω_1 ; car, d'après l'hypothèse initiale, α_1, $2\beta_1$, γ_1, ω_1 n'ont pas de facteur commun, et la forme $\alpha_1 n_0^2 - 2\beta_1 m_0 n_0 + \gamma_1 m_0^2$ est indéfinie, puisque $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$, invariant de la relation (11), est positif.

Cela posé, faisons $a_2 = 0$ dans l'équation (32); celle-ci devient

$$(33) \qquad \alpha_1 a_0^2 + 2\beta_1 a_0 a_1 + \gamma_1 a_1^2 - \gamma_1 P a_3^2 + 2\omega_1' a_0 a_3 = \pm 1.$$

Le premier membre est une forme quadratique ternaire, *indéfinie*, puisque P est positif, *proprement primitive*, puisque α_1, $2\beta_1$, γ_1, $2\omega_1'$ n'ont pas de diviseur commun; son discriminant est

$$\gamma_1[P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega_1'^2],$$

quantité positive et impaire en vertu de ce qui précède.

La forme adjointe du premier membre de (33) a pour coefficients

$$\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1, \quad \gamma_1^2 P, \quad \omega_1'^2 + \alpha_1\gamma_1 P, \quad 2\gamma_1\omega_1', \quad 2\beta_1\omega_1', \quad 2\gamma_1\beta_1 P;$$

comme $\gamma_1^2 P$, coefficient d'un des carrés, est impair, le plus grand commun diviseur de ces coefficients est impair : je dis qu'il est égal à l'unité.

Car, s'il admettait un facteur premier, d, impair et différent de 1, d diviserait $2\gamma_1\omega_1'$, c'est-à-dire γ_1 ou ω_1', mais non les deux, puisque γ_1 et ω_1' sont premiers entre eux. Or, si d divisait γ_1, comme il divise $\omega_1'^2 + \alpha_1\gamma_1 P$, il diviserait ω_1', contrairement à l'hypothèse précédente; s'il divisait ω_1', il diviserait P, puisqu'il divise $\gamma_1^2 P$: ce serait donc, puisque d entre aussi en facteur dans $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$, un diviseur commun de P, ω_1', $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$, et la forme (30) ne serait pas primitive, c'est-à-dire que Ω serait différent de 1, résultat en contradiction avec l'hypothèse.

En résumé, la forme ternaire indéfinie qui constitue le premier membre de (33) et son adjointe sont proprement primitives, et, comme la première a son discriminant impair, elle peut, d'après un théorème connu ([1]), représenter $+1$ ou -1.

On arrive, par un raisonnement semblable, au même résultat, si $\Omega = 2$, et si $\omega_1 = 2\omega'_1$, ω'_1 étant impair; c'est-à-dire si la forme binaire associée au système proposé est, après division par 4, improprement primitive.

Enfin, si, Ω étant égal à 1, ω_1 était impair, la quantité

$$4P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega_1^2$$

serait impaire. Comme plus haut, nous avons le droit de supposer γ_1 impair et premier à ω_1 : je dis que l'équation (25) est encore résoluble pour $\alpha = \pm 1$.

Car elle s'écrit

$$\begin{aligned}\alpha_1(a_0^2 - Pa_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - Pa_3^2) + 2\beta_1(a_0a_1 + Pa_2a_3)&\\ + \omega_1(a_0a_3 + a_1a_2) &= \pm 1;\end{aligned}$$

et, si nous y faisons $a_2 = 0$, $a_0 = 2a'_0$, elle devient

$$4\alpha_1 a_0'^2 + 4\beta_1 a'_0 a_1 + \gamma_1(a_1^2 - Pa_3^2) + 2\omega_1 a'_0 a_3 = \pm 1.$$

Le premier membre est encore une forme ternaire indéfinie, proprement primitive, de discriminant impair, $\gamma_1[4P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega_1^2]$; on reconnaît, comme plus haut, que son adjointe est proprement primitive, et, par suite, la forme peut représenter $+1$ ou -1.

30. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

I. *Deux systèmes de deux relations singulières donnant naissance à deux formes binaires, proprement ou improprement équivalentes entre elles et divisibles par 4, sont réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré 1, dans les deux cas suivants :*

1° *Les deux formes, après division par 4, sont proprement ou improprement primitives et de discriminant impair;*

([1]) Voir, par exemple, MEYER, *Journal de Crelle*, t. **115**, p. 179; et BACHMANN, *Zahlentheorie*, 4e Partie, p. 254-255.

2° *Les deux formes, après division par* 2, *sont improprement primitives.*

Il subsiste une lacune, relative au cas où les deux formes, après division par 4, seraient proprement primitives et de discriminant pair : pour étendre le théorème à ce cas, il suffirait d'établir que l'équation (32) est encore résoluble en nombres entiers. Nous n'avons pas réussi à le faire d'une manière générale ([1]) ; nous verrons du moins plus bas que les systèmes de relations singulières, donnant naissance aux formes d'une *classe* qui, après division par 4, est proprement primitive et de déterminant pair, peuvent se réduire à un *nombre fini* d'entre eux ([2]).

31. Enfin, en restant toujours dans l'hypothèse de $\Omega = 1$, et en étudiant, d'une manière analogue à la précédente, les systèmes de deux relations qui donnent naissance à une forme $4ax^2 + 4bxy + (4c+1)y^2$, on arriverait à cette conclusion :

II. *Deux systèmes de deux relations singulières donnant naissance à deux formes binaires, proprement ou improprement équivalentes entre elles et non divisibles par* 4, *sont réductibles l'un à l'autre lorsque les formes sont primitives et que le quotient de leur discriminant commun par le facteur* 4, *qu'il contient nécessairement, est impair* (*ou impairement pair*).

([1]) Dans une Note publiée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, nous avions énoncé le théorème sans aucune restriction, trompé par une erreur de calcul qui nous avait fait croire à la possibilité de représenter, dans tous les cas, une forme ternaire, proprement primitive, de déterminant impair, par la forme quaternaire qui constitue le premier membre de (32).

([2]) Nous avons reconnu, pendant l'impression de ce Mémoire, que le théorème I est encore vrai lorsque les deux formes, après division par 4, sont *primitives et de déterminant pair, mais non multiple de* 4. Nous nous appuyons, pour l'établir, sur ce théorème d'Arn. Meyer (*Crelle*, t. 108), que deux formes ternaires indéfinies, d'invariants Ω, Δ, et appartenant au même genre, sont équivalentes, lorsque les nombres Ω et Δ ne sont pas divisibles par 4 et n'ont pas de diviseur commun impair. On en déduit aisément que, dans le cas indiqué, l'équation (32) est encore résoluble en nombres entiers, ce qui établit notre théorème.

Il subsiste là encore une lacune, relative au cas où le discriminant serait multiple de 16; nous verrons encore que les systèmes donnant naissance à une classe de ce type, se ramènent à un *nombre fini* d'entre eux.

32. *Second cas.* — $\Omega > 2$. Il n'est plus possible alors de réduire, dans tous les cas, le système (10), (11) à un système analogue pour lequel α soit égal à ± 1, c'est-à-dire, sous une autre forme, que l'équation (25), pour $\alpha = \pm 1$, à savoir :

$$\begin{aligned}\alpha_1(a_0^2 - \Omega P a_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - \Omega P a_3^2) + 2\beta_1(a_0 a_1 + \Omega P a_2 a_3)\\ + \omega_1(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \pm 1,\end{aligned}$$

n'a généralement pas de solutions. On en déduirait effectivement, en observant que ω_1 est divisible par Ω,

$$\alpha_1 a_0^2 + 2\beta_1 a_0 a_1 + \gamma_1 a_1^2 \equiv \pm 1 \pmod{\Omega};$$

or les nombres représentés par la forme qui figure au premier membre ont tous même caractère quadratique par rapport à un diviseur impair quelconque de Ω, puisque le discriminant de cette forme, $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$, est multiple de Ω, d'après l'hypothèse même : la congruence ci-dessus n'est donc possible que si les caractères quadratiques précédents coïncident avec ceux de $+1$, ou de -1, ce qui n'a évidemment pas lieu en général.

33. Nous bornerons notre étude au résultat suivant.

Supposons Ω *impair*, ω_1 pair : $\omega_1 = 2\omega_1'$; désignons par δ_i un diviseur premier quelconque de Ω.

Les deux systèmes

$$(\Sigma)\begin{cases} h^2 - gg' - \Omega P = 0, \\ \alpha g + 2\beta h + \gamma g' - 2\omega' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h^2 - gg' - \Omega P = 0, \\ \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - 2\omega_1' = 0, \end{cases}$$

sont toujours censés donner naissance à deux formes binaires proprement ou improprement équivalentes entre elles; nous désignerons par J le seizième de leur invariant absolu commun,

$$J = \Omega P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega_1'^2,$$

nombre divisible par Ω^2, puisque $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$ et ω'_1 sont multiples de Ω.

Cela posé, les deux systèmes (Σ) sont réductibles l'un à l'autre si les conditions ci-dessous sont satisfaites :

a) Les deux formes associées à ces systèmes sont, après division par 4Ω, des formes proprement primitives (¹), de déterminant impair et premier avec Ω : ce déterminant est la quantité $\frac{J}{\Omega^2}$, de sorte que J est impair.

b) Les caractères quadratiques, par rapport à chacun des diviseurs δ_i, de Ω, des deux formes

$$f = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \qquad \text{et} \qquad f_1 = \alpha_1 x^2 + 2\beta_1 xy + \gamma_1 y^2$$

sont liés par les relations

$$(34) \qquad \left(\frac{f_1}{\delta_i}\right) = \left(\frac{f}{\delta_i}\right), \qquad \ldots \qquad \text{(pour toutes les valeurs de } i\text{)}$$

ou par les relations

$$(34\ bis) \qquad \left(\frac{f_1}{\delta_i}\right) = \left(\frac{-f}{\delta_i}\right), \qquad \ldots \qquad \text{(pour toutes les valeurs de } i\text{).}$$

De ce théorème, supposé établi, on conclut immédiatement (²) que les systèmes (propres), qui donnent naissance à des formes, proprement ou improprement équivalentes entre elles, du type $4\Omega\varphi$, Ω désignant un nombre impair, et φ une forme binaire proprement primitive, de déterminant premier à 2Ω, se réduisent à un nombre fini d'entre eux : ce nombre est celui des caractères quadratiques possibles par rapport aux diviseurs premiers de Ω, si ceux-ci sont tous de la forme $4N + 1$, et à la moitié de ce nombre dans le cas contraire.

(¹) Cette condition est vérifiée d'elle-même, puisque ω_1 et ω sont pairs.

(²) *Voir* aussi à ce sujet la remarque du nº 35.

Pour démontrer le théorème, il suffit (n° **24**) d'établir la résolubilité en nombres entiers des équations (25) et (21), quand les conditions a) et b) sont satisfaites.

34. Voici la marche générale de la démonstration.

En vertu de la remarque du n° **26**, on a le droit de supposer α_1, β_1, γ_1, de somme paire; puis de les remplacer par

$$\alpha_1; \quad -\alpha_1 n_0 + \beta_1; \quad \alpha_1 n_0^2 - 2\beta_1 n_0 + \gamma_1,$$

ou par

$$\alpha_1 - 2\beta_1 m_1 + \gamma_1 m_1^2; \quad -\gamma_1 m_1 + \beta_1; \quad \gamma_1;$$

sans altérer $2\omega'_1$: dans ces formules n_0 et m_1 désignent des entiers arbitraires. Il en résulte sans difficulté, puisque α_1, $2\beta_1$, γ_1 et $2\omega'_1$ n'ont pas de diviseur commun, qu'on peut supposer α_1 positif, impair et premier à ω'_1; dès lors $\beta_1 + \gamma_1$ est impair.

Cela étant, la quantité $\alpha_1 - 2\beta_1 m_1 + \gamma_1 m_1^2$, si m_1 est impairement pair, est congrue, suivant le module 8, à $\alpha_1 + 4(\gamma_1 + \beta_1)$, c'est-à-dire à $\alpha_1 + 4$: on pourra donc supposer, en désignant par p un nombre premier donné, que la quantité $\frac{J}{\Omega^2}\alpha_1 p$ n'est pas congrue à 7 (mod 8); car si elle l'était, il suffirait de remplacer α_1 par la valeur précédente $\alpha_1 - 2\beta_1 m_1 + \gamma_1 m_1^2$, et la quantité $\frac{J}{\Omega^2}\alpha_1 p$ deviendrait congrue à 3 (mod 8).

Cela posé, je désigne par p un nombre premier, non diviseur de α_1 et de J, et ayant, par rapport à chaque diviseur δ_i de Ω, le même caractère quadratique que α_1 [1] : je dis qu'on peut réduire le système (10), (11),

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0, \qquad \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - 2\omega'_1 = 0,$$

à un système du même type, où le coefficient de g, dans la seconde relation, serait p.

---

[1] Un tel nombre existe, car la forme qui constitue le premier membre de (25) ne représente que des nombres jouissant de cette propriété, et peut évidemment représenter une infinité de nombres premiers.

Il suffit pour cela, d'après la théorie générale, de prouver la résolubilité en nombre entiers des équations (25) et (21), λ *et* β *étant regardés,* dans (21), *comme des indéterminées,* et α étant remplacé par p.

Or, en premier lieu, l'équation (25)

$$(25)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(a_0^2 - \Omega P a_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - \Omega P a_3^2) \\ \quad + 2\beta_1(a_0 a_1 + \Omega P a_2 a_3) + 2\omega'_1(a_0 a_3 + a_1 a_2) = p \end{array} \right.$$

admet des solutions entières. Faisons-y, par exemple, $a_3 = 0$; le premier membre se réduit à une forme ternaire, indéfinie et proprement primitive,

$$(35)\qquad \alpha_1(a_0^2 - \Omega P a_2^2) + \gamma_1 a_1^2 + 2\beta_1 a_0 a_1 + 2\omega'_1 a_1 a_2,$$

de discriminant $\alpha_1 J$, quantité positive et impaire, d'après nos hypothèses.

On reconnaît ensuite, comme au n° **29**, que la forme adjointe a ses coefficients divisibles par Ω, et devient, après cette division, proprement primitive.

Or, en vertu d'un important théorème déjà cité (¹), pour que la forme (35) représente proprement le nombre p, il est nécessaire que le caractère quadratique de p, par rapport à chaque diviseur δ_i de Ω, soit celui de la forme, c'est-à-dire, d'après (35), celui de α_1 : ces conditions sont vérifiées par hypothèse; elles sont d'ailleurs suffisantes si $\alpha_1 \frac{J}{\Omega^2} p$ n'est pas congru à 7 suivant le module 8, ce qu'on a eu le droit d'admettre. L'équation (25) est donc résoluble.

(¹) MEYER, *Crelle,* t. 115, p. 179; ou BACHMANN, *Zahlentheorie,* 4ᵉ Partie, p. 254. L'énoncé de ce théorème est le suivant : *Soit f une forme quadratique ternaire, indéfinie, proprement primitive, et d'invariants* Ω, Δ, *impairs et premiers entre eux; la condition nécessaire et suffisante pour que f puisse représenter un nombre impair, m, premier à* $\Omega\Delta$, *et tel que* Δm *ne soit pas congru à* 7 (mod 8), *est qu'on ait, pour tout diviseur premier,* δ_i, *de* Ω,

$$\left(\frac{f}{\delta_i}\right) = \left(\frac{m}{\delta_i}\right).$$

Il reste maintenant à examiner si les équations (21), où l'on remplace a_0, a_1, a_2, a_3, par une solution de (25), ont des solutions; elles s'écrivent, si l'on y fait, par exemple, $\eta = +1$,

$$(21\ bis)\quad \left\{\begin{array}{lcl} pb_0 - \beta a_0 + \lambda\Omega P a_2 = & \gamma_1 a_1 + \omega_1 a_2 + \beta_1 a_0, \\ pb_1 - \beta a_1 - \lambda\Omega P a_3 = & -\alpha_1 a_0 - \omega_1 a_3 - \beta_1 a_1, \\ pb_2 - \beta a_2 + \lambda a_0 \quad = & \gamma_1 a_3 \qquad\qquad - \beta_1 a_2, \\ pb_3 - \beta a_3 - \lambda a_1 \quad = & -\alpha_1 a_2 \qquad\qquad + \beta_1 a_3. \end{array}\right.$$

Ce sont quatre équations linéaires par rapport aux *six* inconnues b_0, b_1, b_2, b_3, β, λ; la matrice des coefficients des inconnues est :

$$\begin{array}{cccccc} p & 0 & 0 & 0 & a_0 & +\Omega P a_2, \\ 0 & p & 0 & 0 & a_1 & -\Omega P a_3, \\ 0 & 0 & p & 0 & a_2 & a_0, \\ 0 & 0 & 0 & p & a_3 & -a_1. \end{array}$$

Les déterminants d'ordre 4 qu'elle contient sont tous divisibles par p^2; je dis que p^2 est leur plus grand commun diviseur. En effet, parmi ces déterminants figurent, après division par p^2, les quantités

$$a_0^2 - \Omega P a_2^2;\quad a_0 a_3 + a_1 a_2;\quad a_0 a_1 + \Omega P a_2 a_3;\quad a_1^2 - \Omega P a_3^2;$$

qui, en vertu de (25), ne peuvent admettre, comme diviseur commun, que p : or, parmi les solutions entières de (25), qui sont évidemment en nombre infini, il est clair qu'on a pu en choisir une, telle que les quatre quantités ci-dessus ne soient pas divisibles par p; et, dès lors, le plus grand commun diviseur cherché est bien p^2.

Il faut maintenant, pour que les équations (21 *bis*) soient résolubles, que les déterminants, formés avec trois colonnes quelconques de la matrice et la colonne des second membres de (21 *bis*), soient divisibles par p^2, c'est-à-dire que p soit en facteur dans chacun des mineurs d'ordre 3 contenus dans le Tableau :

$$\begin{array}{llll} a_0 & -\Omega P a_2 & \gamma_1 a_1 + \omega_1 a_2 + \beta_1 a_0, \\ a_1 & -\Omega P a_3 & -\alpha_1 a_0 - \omega_1 a_3 - \beta_1 a_1, \\ a_2 & a_0 & \gamma_1 a_3 \qquad\qquad - \beta_1 a_2, \\ a_3 & -a_1 & -\alpha_1 a_2 \qquad\qquad + \beta_1 a_3. \end{array}$$

Or, en développant, on trouve que les quatre mineurs contiennent, en facteur, le premier membre de (25), c'est-à-dire p, ce qui établit finalement la résolubilité des équations (25) et (21 *bis*), et, par suite, la proposition qu'on avait en vue.

Le nombre p ayant, par rapport à chaque δ_i, le caractère quadratique de α_1, aura aussi, d'après les hypothèses, celui de α (ou celui de $-\alpha$); donc, en vertu du raisonnement précédent, on pourra réduire le premier système Σ :

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0, \qquad \alpha g + 2\beta h + \gamma g' - 2\omega' = 0,$$

à un système du même type, où le coefficient de g sera $+p$ (ou $-p$); de sorte, finalement, que les deux systèmes Σ proposés seront respectivement ramenés aux types

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} h^2 - gg' - \Omega P = 0, \\ pg + 2\beta h + \gamma g' - 2\omega' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h^2 - gg' - \Omega P = 0, \\ pg + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - 2\omega'_1 = 0, \end{cases}$$

les β, γ, ω' n'étant pas, bien entendu, les mêmes que précédemment.

En vertu des théorèmes généraux, les deux systèmes (S) donnent naissance à des formes binaires équivalentes (proprement ou non); chacun d'eux a, pour invariant absolu, la quantité 16 J, qui n'a pas été altérée par les transformations effectuées.

Je dis maintenant que les deux systèmes (S) sont réductibles l'un à l'autre; montrons encore, pour cela, que les équations (25) et (21), où l'on suppose $\alpha = \alpha_1 = p$, sont résolubles en nombres entiers : on y considère cette fois β et λ comme des quantités données, les seules inconnues sont les a_i et les b_i.

Posons, à cet effet, dans (21) et (25),

$$(36) \qquad a_0 = (\beta - \beta_1)\xi, \qquad a_1 = p\zeta, \qquad a_2 = \lambda\xi, \qquad a_3 = p\theta,$$

ξ, ζ, θ étant des entiers indéterminés. Les équations (21), ou, ce qui revient au même, les congruences (26) se trouvent vérifiées d'elles-mêmes, en tenant compte de (18); tout revient ainsi à établir que l'équation (25) est résoluble quand on y remplace les a_i par leurs valeurs (36), c'est-à-dire qu'on peut trouver des entiers ξ, ζ et θ tels qu'on ait :

$$\begin{aligned}&[(\beta-\beta_1)^2-\Omega P\lambda^2]\xi^2+p\gamma_1(\zeta^2-\Omega P\theta^2)\\&\quad+2\beta_1\xi[(\beta-\beta_1)\zeta+\Omega P\lambda\theta]+2\omega_1'\xi[(\beta-\beta_1)\theta+\lambda\zeta]=+1.\end{aligned}$$

Le premier membre est une forme ternaire, proprement primitive, indéfinie; de déterminant $Jp\gamma_1[(\beta-\beta_1)^2-\Omega P\lambda^2]$. On voit aisément, en s'appuyant sur la remarque du n° **26**, qu'on a le droit d'altérer $\beta, \gamma, \beta_1, \gamma_1$, sans altérer p, de manière que ce déterminant soit impair et que $\frac{J}{\Omega^2}p\gamma_1[(\beta-\beta_1)^2-\Omega P\lambda^2]$ soit premier à Ω et non congru à 7 suivant le module 8. De même, la forme adjointe sera, après division par Ω, une forme proprement primitive, et il résulte de là, sans difficulté, en vertu du théorème déjà invoqué (Note de la p. 85), que la forme pourra représenter le nombre $+1$.

35. Le théorème énoncé au n° **33** est donc complètement établi; on aurait un résultat analogue, facile à énoncer, dans le cas où ω_1 (et par suite ω) serait impair; et dans celui où le coefficient de h, dans l'équation (11), et par suite dans (8), serait impair.

Dans tous les autres cas, ainsi qu'on le verra plus loin, les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance à des formes d'une même classe se réduisent toujours à un nombre limité d'entre eux.

Remarque. — Reprenons le premier système Σ :

$$(\Sigma)\qquad\left\{\begin{aligned}&h^2-gg'-\Omega P=0,\\&\alpha g+2\beta h+\gamma g'-2\omega'=0,\end{aligned}\right.$$

et supposons que, par une transformation ordinaire quelconque de degré un, T, on ait ramené ce système à la forme

$$(\Sigma_0)\qquad\left\{\begin{aligned}&H^2-GG'-\Delta_0=0,\\&\alpha_0G+2\beta_0H+\gamma_0g'-2\omega_0'=0;\end{aligned}\right.$$

l'entier Δ_0 sera nécessairement divisible par Ω, et il en sera de même des entiers ω'_0 et $\beta_0^2 - \alpha_0\gamma_0$, puisque les formes associées à (Σ) et à (Σ_0) sont équivalentes, et que la première admet, par hypothèse, le diviseur Ω. On a donc $\Delta_0 = \Omega D$, l'entier D n'étant pas d'ailleurs premier, en général.

Cela posé, je dis que les caractères quadratiques de α_0, par rapport aux diviseurs premiers, δ_i, de Ω, sont simultanément les mêmes que ceux de α, ou que ceux de $-\alpha$, en supposant α_0 et α premiers à Ω [1].

Soit, en effet,

$$\lambda(h^2 - gg' - \Omega P) + \lambda'(\alpha g + 2\beta h + \gamma g' - 2\omega') = 0$$

la relation singulière, appartenant au système (Σ), que la transformation T change en $H^2 - GG' - \Omega D = 0$; on aura, d'après les formules (35) du n° **14**, entre les entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i de T, les relations :

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda c_0 = \lambda'\alpha b_0 - \varepsilon\Omega D a_2 - \beta\lambda' a_0, \\ \lambda c_1 = \lambda'\alpha b_1 + \varepsilon\Omega D a_3 - \beta\lambda' a_1, \\ \lambda c_2 = \lambda'\alpha b_2 - \varepsilon a_0 \qquad - \beta\lambda' a_2, \\ \lambda c_3 = \lambda'\alpha b_3 + \varepsilon a_1 \qquad - \beta\lambda' a_3, \\ \lambda d_0 = \lambda'\gamma a_0 + \varepsilon\Omega D b_2 - \beta\lambda' b_0, \\ \lambda d_1 = \lambda'\gamma a_1 - \varepsilon\Omega D b_3 - \beta\lambda' b_1, \\ \lambda d_2 = \lambda'\gamma a_2 + \varepsilon b_0 \qquad - \beta\lambda' b_2, \\ \lambda d_3 = \lambda'\gamma a_3 - \varepsilon b_1 \qquad - \beta\lambda' b_3, \end{array}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$(ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \qquad (ab)_{01} - \Omega D(ab)_{23} = -\varepsilon\lambda.$$

---

[1] On peut dire, plus généralement, en désignant par f et f_0 les deux formes $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ et $\alpha_0 x^2 + 2\beta_0 xy + \gamma_0 y^2$, que les caractères $\left(\frac{f_0}{\delta_i}\right)$ sont simultanément égaux soit aux caractères $\left(\frac{f}{\delta_i}\right)$, soit aux caractères $\left(\frac{-f}{\delta_i}\right)$.

Soient $F=0$, $\Phi=0$ les deux équations (Σ); la transformation T change $\Phi=0$ en une relation singulière, $\Psi_0=0$, entre G, H, G′, où le coefficient de G est égal, en vertu des formules (6) du n° 5, à

$$\alpha(db)_{31}+2\beta(ad)_{31}+\gamma(ac)_{31}-2\omega'(ab)_{31}.$$

D'ailleurs, si μ et μ' désignent deux entiers tels que $\lambda\mu'-\lambda'\mu$ soit égal à 1, le système $\lambda F+\lambda'\Phi=0$, $\mu F+\mu'\Phi=0$ est propre et se transforme, par T, en un système propre; or, par T, $\lambda F+\lambda'\Phi=0$ devient $H^2-GG'-\Omega D=0$, et $\Phi=0$ devient $\Psi_0=0$: il en résulte que $F=0$ devient $\dfrac{H^2-GG'-\Omega D-\lambda'\Psi_0}{\lambda}=0$, et $\mu F+\mu'\Phi=0$ devient $\frac{\mu}{\lambda}(H^2-GG'-\Omega D-\lambda'\Psi_0)+\mu'\Psi_0=0$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\lambda}[\Psi_0+\mu(H^2-GG'-\Omega D)]=0.$$

D'après cela, le coefficient α_0 sera égal (au signe près) au coefficient de g, dans Ψ_0, divisé par λ, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{\lambda}[\alpha(db)_{31}+2\beta(ad)_{31}+\gamma(ac)_{31}-2\omega'(ab)_{31}].$$

En tenant compte des relations (T), écrites plus haut, entre les c_i, d_i et les a_i, b_i, on a ainsi

$$\begin{aligned}\pm\lambda^2\alpha_0=\alpha(b_1^2-\Omega D b_3^2)+2\beta(\Omega D a_3 b_3-a_1 b_1)+\gamma(a_1^2-\Omega D a_3^2)\\ +(ab)_{31}[2\lambda'(\beta^2-\alpha\gamma)-2\lambda\omega'],\end{aligned}$$

d'où l'on conclut pour les caractères quadratiques de $\pm\alpha_0$ par rapport aux diviseurs δ_i, de Ω, en se souvenant que $\beta^2-\alpha\gamma$ et ω' sont divisibles par δ_i,

$$\left(\frac{\pm\alpha_0}{\delta_i}\right)=\left(\frac{\alpha b_1^2-2\beta a_1 b_1+\gamma a_1^2}{\delta_i}\right)=\left(\frac{\alpha}{\delta_i}\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela suppose que λ n'est pas divisible par δ_i : dans le cas contraire, il faudrait résoudre les formules (T) par rapport aux b_i et d_i, ce qui donnerait $\lambda' b_i$ et $\lambda' d_i$ en fonction entière des a_i et c_i, et l'on retrouverait le même résultat, car λ', premier à λ, ne peut être divisible par δ_i.

La proposition ainsi établie montre que deux systèmes du type (Σ_0), donnant naissance à des formes équivalentes, divisibles par Ω, ne pourront être réduits l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré *un*, si les caractères quadratiques de leurs coefficients α_0 (ou $-\alpha_0$) par rapport aux diviseurs, δ_i, de Ω sont différents. Si ces caractères coïncident, il résulte du théorème énoncé au nº **33** que les deux systèmes seront réductibles l'un à l'autre, comme étant réductibles à un même troisième.

Représentation géométrique des nombres et des formes.

36. Soit une forme algébrique binaire du sixième ordre

$$\Phi(X, Y) = a_0 X^6 + 6a_1 X^5 Y + \ldots, \quad + a_6 Y^6;$$

elle possède trois invariants absolus, et deux formes de mêmes invariants absolus sont réductibles l'une à l'autre par une substitution linéaire effectuée sur X et Y ([1]).

Cela posé, regardons les trois invariants absolus comme les *modules* des fonctions abéliennes liées au radical $\sqrt{\Phi(X, Y)}$, et considérons, dans l'espace, le point M qui a pour coordonnées cartésiennes ces trois modules : nous l'appellerons le *point modulaire;* il reste invariable quand on fait subir aux périodes des fonctions abéliennes une transformation ordinaire quelconque du premier degré.

37. Si les fonctions abéliennes considérées sont simplement singulières, c'est-à-dire si leurs périodes sont uniquement assujetties à vérifier une relation singulière, d'invariant donné, le point modulaire M décrit une surface algébrique, dont nous avons appris théoriquement à former

---

([1]) Voir, par exemple, O. Bolza, *Ueber binärformen sechster Ordnung...* (*Mathem. Annalen,* t. XXX, p. 550-551). Le théorème ne souffre d'exception que si l'une des formes a une racine triple : ce cas ne se présentera pas dans nos applications.

l'équation, sous le nom d'équation modulaire (¹) : elle ne dépend que de l'invariant donné, lequel est nécessairement d'une des formes $4N$ ou $4N+1$; nous dirons que cette surface est la *surface hyperabélienne d'invariant* $4N$ *ou* $4N+1$.

38. Si les fonctions abéliennes introduites sont doublement singulières, c'est-à-dire, si l'on impose uniquement à leurs périodes la condition de vérifier un système de deux relations singulières *données*, le point modulaire décrit évidemment *une* courbe gauche : celle-ci reste la même quand on considère, au lieu du système proposé, son transformé par une transformation ordinaire de degré 1; car cette opération n'altère pas les modules, ni par suite le point modulaire.

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que la forme binaire liée au système proposé soit du type

$$4(ax^2+2bxy+cy^2)=4\varphi(x,y),$$

la quantité $ac-b^2$ étant impaire et $\varphi(x,y)$ proprement ou improprement primitive : nous savons (n° **30**) que tous les systèmes qui donnent naissance à la forme 4φ, ou à une forme équivalente, sont réductibles l'un à l'autre par une transformation du premier degré, et dès lors il leur correspond une seule et même courbe décrite par le point modulaire.

En d'autres termes, à l'ensemble des formes équivalentes (proprement ou non) à $4\varphi(x,y)$, c'est-à-dire à une *classe* de formes positives, divisibles par 4, et, après cette division, proprement ou improprement primitives et de déterminant impair, répond une et une seule courbe algébrique de l'espace : c'est celle que décrit le point modulaire quand les périodes abéliennes vérifient un des systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe.

Des résultats analogues s'appliquent aux autres types de formes indiqués aux n^os^ **30** et **31**.

Dans d'autres cas, à une classe de formes correspondent *plusieurs* courbes algébriques : par exemple, pour une classe $4\Omega\varphi(x,y)$, où Ω

(¹) Ce *Journal*, 5^e^ série, t. V, p. 313 et suivantes.

est impair et la forme φ positive, proprement primitive, de déterminant impair et premier à Ω, il y aura autant de courbes algébriques qu'il y a de systèmes propres, irréductibles l'un à l'autre, donnant naissance à une forme de la classe; ce nombre est fini, et nous avons appris à le déterminer au n° **33**.

On ne doit pas perdre de vue que les formes binaires positives, introduites par notre théorie, sont celles qui appartiennent à l'un ou à l'autre des types $4(ax^2+bxy+cy^2)$; $4(ax^2+bxy+cy^2)+y^2$.

39. *Propriété fondamentale*. — Entre les surfaces hyperabéliennes et les courbes algébriques ainsi définies, existe une relation remarquable.

Soit $F=0$, $F_1=0$, un système propre de deux relations singulières donnant naissance à une forme $4\varphi(x,y)$ du type examiné au numéro précédent; si la forme $\varphi(x,y)$ représente *proprement* un nombre N, cela signifie, d'après la définition même de la forme 4φ, qu'une des relations singulières, $xF+yF_1=0$, du système proposé, a pour invariant $4N$, et inversement; x et y désignant des nombres premiers entre eux. Les modules de toute fonction abélienne, dont les périodes vérifient $F=0$, $F_1=0$, satisfont donc à l'équation modulaire d'invariant $4N$; et réciproquement, si les modules d'une fonction abélienne doublement singulière satisfont à cette équation, la forme quadratique binaire associée représente proprement le nombre $4N$.

En d'autres termes :

Si la forme associée à un système de deux relations singulières représente proprement un nombre Δ, la courbe algébrique correspondante (supposée unique) est sur la surface hyperabélienne d'invariant Δ, et réciproquement.

Il en est de même si, à la forme binaire considérée, correspondent plusieurs courbes de l'espace : *toutes* celles-ci sont situées sur les surfaces hyperabéliennes dont les invariants sont proprement représentables par la forme.

40. Comme conséquence immédiate, on voit que :

Les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance *à des formes d'une classe donnée sont toujours réductibles à un nombre fini d'entre eux, par des transformations ordinaires de degré* 1; *ou, si l'on veut, les courbes qui répondent à une classe de formes donnée sont toujours en nombre fini.*

Car ces courbes sont communes à toutes les surfaces hyperabéliennes dont les invariants peuvent être représentés par la forme; elles sont dès lors en nombre fini, puisque deux surfaces hyperabéliennes d'invariants différents n'ont évidemment pas de portion commune.

Nous dirons que les courbes qui répondent à une classe donnée sont les *courbes hyperabéliennes* liées ou associées à cette classe.

41. *Intersection de deux surfaces hyperabéliennes.* — Si P est un point commun à deux surfaces hyperabéliennes d'invariants Δ et Δ_1, les périodes des fonctions abéliennes dont **P** est le point modulaire vérifient une relation singulière d'invariant Δ, et une autre d'invariant Δ_1; il en résulte que P est sur une courbe hyperabélienne, associée à une classe de formes pouvant représenter proprement Δ et Δ_1, et tous les points de cette courbe sont également sur les deux surfaces hyperabéliennes proposées. Réciproquement, toute courbe hyperabélienne liée à une classe de formes qui représente proprement Δ et Δ_1 est située sur les deux surfaces. Ainsi :

L'intersection de deux surfaces hyperabéliennes d'invariants Δ et Δ_1 se compose de toutes les courbes hyperabéliennes associées aux classes de formes positives, des types $4(ax^2+bxy+cy^2)$, $4(ax^2+bxy+cy^2)+y^2$, qui peuvent représenter, à la fois et proprement, les nombres Δ et Δ_1.

En dehors de ces courbes, il peut y avoir (et il y a effectivement) une intersection singulière *fixe*, qui répond au cas où la connaissance du point modulaire P ne détermine pas (à une substitution linéaire près) la forme sextique binaire $\Phi(X, Y)$, c'est-à-dire au cas où Φ a une racine triple (note du n° **36**). Les invariants absolus vérifient alors deux relations connues, c'est-à-dire que le point modulaire décrit une courbe fixe, et il est aisé de voir que celle-ci est commune à toutes les surfaces hyperabéliennes.

42. Le théorème précédent permet de *séparer* les courbes hyperabéliennes associées à deux classes différentes de formes; d'une manière plus précise : *on peut obtenir, sous forme d'équation à coefficients entiers, et sans facteur étranger, l'équation des projections sur un plan quelconque des courbes hyperabéliennes liées à une classe de formes* numériquement *donnée* (¹).

Car, pour qu'on ne pût *séparer* les courbes hyperabéliennes liées respectivement à des classes C_0, C_1, ..., il faudrait que *toute* surface hyperabélienne contenant les courbes liées à l'une quelconque de ces classes contînt les courbes liées à chacune des autres; en d'autres termes, les formes des classes C_0, C_1, ... représenteraient proprement les mêmes nombres. Or il est aisé de voir, en se servant des formes réduites, que deux formes *positives* ne peuvent représenter les mêmes nombres que si elles sont équivalentes (proprement ou non), et dès lors les classes C_0, C_1, ... coïncident.

Cela posé, convenons de dire qu'une classe C_0 contient une classe C_1 si les formes de C_0 peuvent représenter proprement tous les nombres représentables proprement par les formes de C_1 : toute surface hyperabélienne contenant les courbes associées à C_1 contiendra dès lors les courbes associées à C_0.

Si une classe C n'est contenue dans aucune autre, les surfaces hyperabéliennes dont les invariants sont représentés proprement par les formes de C n'ont en commun que les courbes hyperabéliennes liées à C; on pourra donc toujours trouver un nombre *fini* de surfaces hyperabéliennes n'ayant en commun que ces courbes, et comme les coefficients des équations des surfaces sont des nombres entiers, il en sera de même de l'équation des projections des courbes communes sur un plan quelconque.

Si la classe C est contenue dans plusieurs autres, C_1, C_2, ..., les surfaces hyperabéliennes dont les invariants sont représentés proprement par les formes de C contiennent toutes, outre les courbes hyperabéliennes liées à C, celles qui sont liées à C_1, C_2, ... et n'en contiennent simultanément pas d'autres. Ceci prouve d'abord que les classes C_1, C_2, ... sont en nombre fini, et ensuite qu'on obtiendra,

(¹) C'est-à-dire à une classe dont on donne numériquement une des formes.

sous la forme indiquée, l'équation des projections des courbes associées à C, si l'on peut obtenir les équations analogues pour C_1, C_2, ... : or, en raisonnant sur C_1, C_2, ... comme on vient de le faire sur C, on finira évidemment par arriver à des classes qui ne sont contenues dans aucune autre, ce qui établit la proposition.

43. *Résumé.* — La théorie précédente permet ainsi d'associer à toute classe de formes quadratiques positives, de l'un des types

$$(\mathrm{C}) \qquad 4(ax^2 + bxy + cy^2), \qquad 4(ax^2 + bxy + cy^2) + y^2,$$

une ou plusieurs *courbes* algébriques hyperabéliennes; ce nombre, discuté aux nos **30-33**, est celui des systèmes propres de deux relations singulières, irréductibles l'un à l'autre, donnant naissance à des formes de la classe.

A tout nombre de l'un des types $4N$, $4N+1$, on associe de même une *surface* algébrique, à savoir la surface hyperabélienne qui a ce nombre pour invariant.

Si les formes d'une classe C représentent un nombre Δ, la surface hyperabélienne associée à Δ contient les courbes hyperabéliennes associées à C, et réciproquement.

Ajoutons que s'il y a k représentations distinctes du nombre par une forme de la classe, les courbes sont multiples d'ordre k sur la surface et réciproquement, ainsi qu'on s'en rend compte sans difficulté. Les représentations qui correspondent aux valeurs x, y et $-x$, $-y$ ne sont pas regardées comme distinctes; de plus, si les formes de la classe admettent d transformations propres ou impropres en elles-mêmes, on doit prendre $\frac{k}{d}$ à la place de k.

Les surfaces qui répondent aux nombres Δ et Δ_1 se coupent, en dehors de courbes fixes, suivant les courbes hyperabéliennes associées aux classes de formes (C) qui peuvent représenter à la fois Δ et Δ_1.

De tout cela résulte une méthode intéressante, bien qu'exclusivement théorique, pour reconnaître si une forme donnée (C) peut ou non représenter un nombre donné : *la question est ramenée à reconnaître si une surface algébrique, qui ne dépend que du nombre,* *contient ou non une courbe, ou un groupe de courbes algébriques (rationnellement inséparables), qui ne dépend que de la forme.*

Remarque. — Notre représentation géométrique met immédiatement en évidence certaines propriétés arithmétiques dont la démonstration directe demanderait peut-être quelques développements. Par exemple :

1° Le nombre des classes de formes quadratiques binaires positives, proprement ou improprement primitives, pouvant représenter à la fois deux nombres donnés est fini;

2° Il n'y a pas de forme quadratique binaire positive pouvant représenter proprement trois nombres donnés, *pris au hasard.*

Groupe fuchsien d'une courbe hyperabélienne.

44. Considérons un système propre de deux relations singulières, qu'on peut toujours ([1]) supposer réduites aux types

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - \mathrm{D} &= 0,\\ mg + nh - pg' - q &= 0, \end{aligned}\right.$$

D, m, n, p, q étant des entiers, quelconques d'ailleurs, dont les quatre derniers sont sans diviseur commun.

La forme quadratique associée est ici

$$(38)\qquad \psi(x, y) = 4\mathrm{D}x^2 + 4qxy + (n^2 + 4mp)y^2.$$

Proposons-nous de déterminer toutes les transformations ordinaires du premier degré qui transforment en lui-même le système (37).

Si $\mathrm{F} = 0$, $\mathrm{F}_1 = 0$ sont les deux relations (37), le problème revient à chercher les transformations de degré *un* qui changent respective-

---

([1]) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 334. Si $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$ sont les deux relations données, on prendra une relation quelconque, $\lambda\Phi + \mu\Phi_1 = 0$, dont l'invariant soit pair, et on la réduira au type $h^2 - gg' - \mathrm{D} = 0$, comme on peut le faire par une transformation d'ordre 1. Le nombre 4D est donc l'invariant pair d'une quelconque des relations singulières appartenant au système proposé.

ment F et F_1 en $\lambda F + \mu F_1$ et $\lambda' F + \mu' F_1$, après qu'on a chassé le dénominateur commun de g, h, g' et $h^2 - gg'$, qui figure dans les formules (6) de la transformation (Première Partie).

Dès lors la relation $xF + yF_1 = 0$ se change en

$$(\lambda x + \lambda' y)F + (\mu x + \mu' y)F_1 = 0,$$

et comme l'invariant est resté le même, on aura, *quels que soient x et y,*

$$\psi(x, y) = \psi(\lambda x + \lambda' y, \mu x + \mu' y).$$

La forme $\psi(x, y)$ se transforme donc en elle-même par la substitution $x = \lambda X + \lambda' Y$, $y = \mu X + \mu' Y$, dont le déterminant est nécessairement ± 1.

45. Bornons-nous au cas où *cette forme n'est pas d'une classe ambiguë :* ses seules transformations possibles en elle-même sont $x = \varepsilon X$, $y = \varepsilon Y$, ε désignant ± 1. On a donc

$$\lambda = \mu' = \varepsilon, \qquad \lambda' = \mu = 0.$$

On est ainsi ramené à chercher les transformations du premier degré qui reproduisent séparément les deux relations (37), ou les reproduisent changées simultanément de signe.

Or cette recherche a été faite d'une manière générale au n° **24**; nous avons alors déterminé toutes les transformations qui n'altèrent pas (au signe près) la relation

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

et changent (au signe près) la relation

$$\alpha g + 2\beta h + \gamma g' - \omega = 0$$

en

$$\alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 - \lambda(h^2 - gg' - \Omega P) = 0.$$

Il suffira donc, dans les formules (19), (20), (21), (22), (23), (25), de faire $\lambda = 0$; $\Omega P = D$; α, 2β, γ, ω et α_1, $2\beta_1$, γ_1, ω_1 égaux respectivement à m, n, $-p$, q; $\varepsilon_0 = +1$; en ayant soin, pour tenir compte des transformations d'ordre -1, de mettre le signe $\pm$ devant le second membre de (25). On trouve ainsi, pour les entiers caractéristiques des transformations cherchées, les formules

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{llll} c_0 = -\varepsilon D a_2, & c_1 = \varepsilon D a_3, & c_2 = -\varepsilon a_0, & c_3 = \varepsilon a_1, \\ d_0 = \varepsilon D b_2, & d_1 = -\varepsilon D b_3, & d_2 = \varepsilon b_0, & d_3 = -\varepsilon b_1, \end{array}\right.$$

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} m b_0 = -\eta p\, a_1 + \eta q a_2 + \frac{1+\eta}{2} n a_0, \\ m b_1 = -\eta m a_0 - \eta q a_3 + \frac{1-\eta}{2} n a_1, \\ m b_2 = -\eta p\, a_3 \qquad\quad + \frac{1-\eta}{2} n a_2, \\ m b_3 = -\eta m a_2 \qquad\quad + \frac{1+\eta}{2} n a_3; \end{array}\right.$$

les a_i sont liés par

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l} m(a_0^2 - D a_2^2) - p(a_1^2 - D a_3^2) \\ \quad + n(a_0 a_1 + D a_2 a_3) + q(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \pm m, \end{array}\right.$$

et les unités, positives ou négatives, ε, η sont égales, puisque l'on a, en vertu de (24), $\varepsilon\eta = +1$; bien entendu les valeurs des b_i données par (40) doivent être entières.

46. *Remarque.* — Le produit de deux des transformations considérées, T et T', est évidemment une transformation jouissant de la même propriété; en d'autres termes, si a_i, b_i, c_i, d_i et a'_i, b'_i, c'_i, d'_i sont les entiers caractéristiques de T et de T', et si ε et ε' sont les unités correspondantes, on aura une transformation de même nature par les formules qui donnent les entiers caractéristiques de TT', à savoir :

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l} a''_i = a_i a'_0 + b_i a'_1 + c_i a'_2 + d_i a'_3, \\ b''_i = a_i b'_0 + b_i b'_1 + c_i b'_2 + d_i b'_3, \\ c''_i = a_i c'_0 + b_i c'_1 + c_i c'_2 + d_i c'_3, \\ d''_i = a_i d'_0 + b_i d'_1 + c_i d'_2 + d_i d'_3. \end{array}\right.$$

On reconnaît que l'unité ε'', qui répond à cette nouvelle transformation, est définie par $\varepsilon'' = -\varepsilon\varepsilon'$; de même si l'on désigne par θm et $\theta' m$ les seconds membres de (41) pour les deux transformations T et T' (θ et $\theta' = \pm 1$), ce second membre, pour TT', sera $\theta\theta' m$.

Il en résulte qu'on obtiendra toutes les transformations cherchées en combinant celles qui répondent à $\varepsilon = -1$ et $\theta = \pm 1$ avec une transformation particulière quelconque répondant à $\varepsilon = +1$.

47. Nous étudierons d'abord le cas où la classe de formes liée au système des deux relations singulières initiales n'admet qu'une *seule* courbe hyperabélienne associée; nous supposerons, pour fixer les idées, que ces formes sont divisibles par 4, et deviennent, après cette division, primitives et de déterminant impair [1].

En ce cas, la forme (38) est du type

$$4(Dx^2 + 2q'xy + py^2); \tag{43}$$

elle dérive du système de deux relations singulières

$$\begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ g - pg' - 2q' = 0; \end{cases} \tag{44}$$

et, pour obtenir les transformations ordinaires de degré *un* laissant ce système inaltéré, on doit faire, dans les formules (39), (40) et (41), $m = 1$, $n = 0$, $q = 2q'$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} c_0 &= -\varepsilon D a_2, & c_1 &= \varepsilon D a_3, & c_2 &= -\varepsilon a_0, & c_3 &= \varepsilon a_1, \\ d_0 &= \varepsilon D b_2, & d_1 &= -\varepsilon D b_3, & d_2 &= \varepsilon b_0, & d_3 &= -\varepsilon b_1; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b_0 = -\varepsilon p a_1 + 2\varepsilon q' a_2, \\ b_1 = -\varepsilon a_0 - 2\varepsilon q' a_3, \\ b_2 = -\varepsilon p a_3, \\ b_3 = -\varepsilon a_2; \end{cases} \tag{45}$$

$$a_0^2 - D a_2^2 - p(a_1^2 - D a_3^2) + 2q'(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \pm 1. \tag{46}$$

---

[1] Ou impairement pair [Note [2] du n° 30].

Les b_i, d'après (45), sont entiers; les a_i sont donc quatre entiers quelconques vérifiant l'équation (46), qui peut s'écrire

$$(47)\quad (a_0 + q' a_3)^2 - D a_2^2 + 2q' a_1 a_2 - p a_1^2 + (pD - q'^2) a_3^2 = \pm 1.$$

48. Posons maintenant, comme l'a fait M. Picard dans ses belles recherches sur les transformations qui laissent invariable la relation $h^2 - gg' - D = 0$,

$$(48)\qquad g = -2\frac{\sqrt{D}}{u+v},\qquad h = \sqrt{D}\,\frac{u-v}{u+v},\qquad g' = 2\frac{\sqrt{D}\,uv}{u+v},$$

valeurs de g, h, g' qui vérifient identiquement cette relation.

Les modules des fonctions abéliennes qui répondent à ces périodes sont, d'après M. Picard, des fonctions uniformes de u, v, que l'éminent géomètre a désignées sous le nom de *fonctions hyperabéliennes*.

Admettons, pour un instant, que la solution $h^2 - gg' - D = 0$ soit la seule relation entre les périodes; si nous regardons g, h, g' comme les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, nous savons (n° **6**) que toute transformation ordinaire de degré *un* n'altérant pas la relation proposée change une génératrice rectiligne quelconque de la quadrique $h^2 - gg' - D = 0$ en une génératrice rectiligne de la même quadrique. Or, d'après (48), ces génératrices ont comme équations $u = \text{const.}$ pour un système, $v = \text{const.}$ pour le second; il en résulte aisément que chacune des transformations considérées change u (ou v) en une fonction linéaire de u ou de v. On trouve ainsi sans difficulté, à l'aide des formules du n° **10**, en désignant par u_1 et v_1 les nouvelles valeurs de u et v,

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{(a_0 - a_2\sqrt{D})u - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{-(b_0 - b_2\sqrt{D})u + (b_1 + b_3\sqrt{D})},\\ v_1 &= \frac{(a_0 + a_2\sqrt{D})v + (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(b_0 + b_2\sqrt{D})v + (b_1 - b_3\sqrt{D})},\end{aligned}\right.$$

lorsque, pour la transformation considérée, la valeur de l'unité ε qui figure dans les formules (27) du n° **10**, est égale à -1; et

$$(50)\quad \begin{cases} u_1 = -\dfrac{(a_0+a_2\sqrt{D})v+(a_1-a_3\sqrt{D})}{(b_0+b_2\sqrt{D})v+(b_1-b_3\sqrt{D})}, \\ v_1 = \dfrac{(a_0-a_2\sqrt{D})u-(a_1+a_3\sqrt{D})}{(b_0-b_2\sqrt{D})u-(b_1+b_3\sqrt{D})}. \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon = +1$.

Ces formules ont déjà été données par M. Bourget [1].

49. Cela posé, revenons aux périodes doublement singulières, g, h, g', qui vérifient le système (44) :

$$(44)\qquad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - 2q' = 0;$$

en remplaçant, dans la deuxième équation, g, h, g' par leurs valeurs (48), on obtient, entre u et v, la relation

$$(51)\qquad \sqrt{D} + p\sqrt{D}\,uv + q'(u+v) = 0.$$

Les transformations de degré *un* n'altérant pas les relations (44) font subir à u et v les substitutions (49) et (50), où l'on remplace les b_i par leurs valeurs (45), en ayant soin de faire, dans ces valeurs, $\varepsilon = -1$ ou $\varepsilon = +1$, selon qu'on porte les b_i dans (49) ou dans (50). On trouve ainsi, pour $\varepsilon = -1$:

$$(52)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{(a_0-a_2\sqrt{D})u-(a_1+a_3\sqrt{D})}{-(pa_1-2q'a_2-pa_3\sqrt{D})u+(a_0+2q'a_3+a_2\sqrt{D})}, \\ v_1 = \dfrac{(a_0+a_2\sqrt{D})v+(a_1-a_3\sqrt{D})}{(pa_1-2q'a_2+pa_3\sqrt{D})v+(a_0+2q'a_3-a_2\sqrt{D})}; \end{cases}$$

---

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. XII.

Par une inadvertance facile à corriger au n° 25 de son excellent Mémoire, M. Bourget indique, parmi les substitutions (49), la substitution $u_1 = (a + c\sqrt{D})u$, $v_1 = (a - c\sqrt{D})v$, où a et c forment une solution *quelconque* de l'équation $a^2 - Dc^2 = 1$. Ce résultat n'est exact que si l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$ est résoluble.

et pour $\varepsilon = +1$,

$$(52\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{(a_0+a_2\sqrt{D})v+(a_1-a_3\sqrt{D})}{(pa_1-2q'a_2+pa_3\sqrt{D})v+(a_0+2q'a_3-a_2\sqrt{D})},\\ v_1 &= \frac{(a_0-a_2\sqrt{D})u-(a_1+a_3\sqrt{D})}{-(pa_1-2q'a_2-pa_3\sqrt{D})u+(a_0+2q'a_3+a_2\sqrt{D})};\end{aligned}\right.$$

les a_i étant toujours liés par l'équation (46).

Ces deux classes de substitutions n'altèrent pas, d'après leur formation même, la relation (51) entre u et v.

D'ailleurs une solution particulière de l'équation (46) est donnée par

$$a_0 = +1, \qquad a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

et la substitution (52 *bis*) correspondante sur u et v est :

$$(53)\qquad u_1 = +v, \qquad v_1 = +u.$$

Il résulte de là (n° **46**) que, pour obtenir toutes les substitutions sur u et v qui répondent aux transformations de degré *un* laissant inaltéré le système (44), on n'aura qu'à combiner la substitution (53) avec les substitutions (52), où les a_i sont des entiers quelconques liés par (46).

50. On déduit immédiatement de ces résultats le groupe fuchsien de la courbe hyperabélienne associée au système (44), ou à la classe de formes dont (43) est un représentant. Considérons en effet les modules des fonctions abéliennes dont les périodes vérifient le système (44) : ce sont, comme nous l'avons dit d'après M. Picard, des fonctions uniformes hyperabéliennes de u et de v, dont nous désignerons l'une quelconque par $\Phi(u, v)$; d'ailleurs, v étant lié à u par (51), on aura

$$\Phi(u, v) = \Phi\left(u, \frac{-\sqrt{D}-q'u}{q'+p\sqrt{D}\,u}\right),$$

et le second membre est évidemment une fonction uniforme de u, $f(u)$.

Or $\Phi(u, v)$ ne change pas quand on y remplace u et v par les u_1 et v_1 définis par (52) ou (52 *bis*), puisque cette opération équivaut à une transformation d'ordre *un*, laquelle n'altère pas les modules; de plus, les u_1 et v_1 étant liés, comme on l'a fait observer, par la relation (51), on aura

$$\Phi(u_1, v_1) = \Phi\left(u_1, \frac{-\sqrt{D} - q' u_1}{q' + p\sqrt{D}\, u_1}\right) = \Phi(u, v) = \Phi\left(u, \frac{-\sqrt{D} - q' u}{q' + p\sqrt{D}\, u}\right),$$

c'est-à-dire que la fonction $f(u)$ ne change pas quand on opère sur u la première des substitutions (52), ou quand on remplace u par la valeur v déduite de (51).

51. En d'autres termes :

Les coordonnées d'un point de la courbe hyperabélienne associée à la forme (43), *à savoir* $4(Dx^2 + 2q'xy + py^2)$, *sont des fonctions uniformes du paramètre* u; *elles ne changent pas quand on opère sur cette variable les substitutions*

$$(54) \qquad u_1 = \frac{(a_0 - a_2\sqrt{D})\, u - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{-(pa_1 - 2q'a_2 - pa_3\sqrt{D})\, u + (a_0 + 2q'a_3 + a_2\sqrt{D})},$$

les a_i *étant des entiers quelconques, assujettis seulement à vérifier l'équation*

$$(46) \qquad a_0^2 - Da_2^2 - p(a_1^2 - Da_3^2) + 2q'(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \pm 1.$$

A ces substitutions il faut combiner celle qui répond à (53) *et* (51), *à savoir :*

$$(55) \qquad u_1 = -\frac{q'u + \sqrt{D}}{p\sqrt{D}\, u + q'},$$

et dont le carré est la substitution unité (1).

(1) *Classes ambiguës.* — Si la forme (43) appartient à une classe ambiguë, il y a, pour u, d'autres substitutions fuchsiennes que (54) et (55).

En effet, la forme (43) est alors équivalente à l'une des formes

$$4(Dx^2 + py^2), \qquad 4(2D'x^2 + 2D'xy + py^2),$$

52. On a ainsi déterminé le groupe fuchsien de la courbe considérée; il est lié aux solutions entières de l'équation (46) qui, elle-même, mise sous la forme (47), est du type

$$U^2 - DY^2 + 2q'XY - pX^2 + (pD - q'^2)Z^2 = \pm 1,$$

équation qu'on rencontre, ainsi qu'on a déjà eu l'occasion de l'observer (n° **27**), dans la recherche des transformations en elle-même de la forme ternaire indéfinie $z^2 - Dx^2 - 2q'xy - py^2$: il est à remarquer que la forme $Dx^2 + 2q'xy + py^2$ est le quart de la forme (43), liée à la courbe hyperabélienne envisagée.

---

qui dérivent respectivement des deux systèmes

$$(S) \qquad \begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ g - pg' = 0, \end{cases}$$

$$(S') \qquad \begin{cases} h^2 - gg' - 2D' = 0, \\ g - pg' - 2D' = 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas (S), en vertu du n° 44, la forme $Dx^2 + py^2$ admettant la transformation en elle-même $x = X$, $y = -Y$, il peut exister des transformations ordinaires de degré *un* reproduisant les deux relations (S), multipliées respectivement par $+1$ et -1 : la transformation qui change g, h, g' en $-g$, $+h$, $-g'$ est dans ce cas; elle a ses entiers caractéristiques nuls, sauf

$$a_0 = c_2 = -1, \qquad b_1 = d_3 = +1.$$

Elle donne pour u, d'après (48), la substitution $u_1 = -u$, qu'il suffira de combiner avec les substitutions (54) et (55), pour avoir toutes celles du groupe fuchsien cherché.

Dans le second cas, (S'), on trouve de même que la transformation

$$a_0 = b_1 = b_2 = 1, \qquad c_2 = d_3 = -1, \qquad d_0 = 2D'$$

(les autres a_i, b_i, c_i, d_i nuls), n'altère pas le système (S') : si $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ sont les deux équations (S'); elle change en effet Φ_1 et Φ_2 respectivement en Φ_1 et $-\Phi_2 + \Phi_1$. Elle donne, pour u, la substitution (de période *deux*)

$$u_1 = \frac{-u\sqrt{2D'} - 2}{2u(D' - p) + \sqrt{2D'}},$$

qu'il suffira aussi de combiner avec (54) et (55).

Le groupe fuchsien qu'on vient d'obtenir rentre comme cas particulier dans ceux que M. Poincaré (¹) a déduits des transformations en elle-même d'une forme ternaire indéfinie *quelconque;* M. Fricke en a étudié des variétés dans des Mémoires d'un grand intérêt (²).

53. Désignons par $4\varphi(x, y)$ la forme initiale (43) et posons

$$f(x, y, z) = z^2 - \varphi(x, y);$$

l'adjointe de f est la forme ternaire

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = -\mathrm{D}\mathrm{Y}^2 + 2q'\mathrm{X}\mathrm{Y} - p\mathrm{X}^2 + (p\mathrm{D} - q'^2)\mathrm{Z}^2,$$

en sorte que l'équation (46) s'écrit

$$(46)' \qquad (a_0 + q'a_3)^2 + \mathrm{F}(a_1, a_2, a_3) = \pm 1.$$

Observons maintenant que l'expression (55) de u_1 rentre dans le type (54), où l'on ferait $a_0 = -q'$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$: mais, pour ces valeurs des a_i, le premier membre de (46)', au lieu d'être ± 1, est égal à $p\mathrm{D} - q'^2$, discriminant de la forme φ, *et aussi de la forme* $f(x, y, z)$.

On peut donc dire que les substitutions du groupe fuchsien considéré sont *toutes* données par la formule (54), les a_i étant liés par l'une ou l'autre des relations

$$(48) \qquad (a_0 + q'a_3)^2 + \mathrm{F}(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} \pm 1, \\ \pm(p\mathrm{D} - q'^2). \end{cases}$$

D'ailleurs il suffit, comme on l'a vu, de combiner une seule des substitutions répondant à la seconde hypothèse avec toutes celles qui répondent à la première, pour avoir l'ensemble des substitutions du groupe : la relation $(a_0 + q'a_3)^2 + \mathrm{F}(a_1, a_2, a_3) = p\mathrm{D} - q'^2$ se rencontre également dans la recherche des transformations linéaires de la forme $f(x, y, z)$ en elle-même.

(¹) *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. III, p. 405.

(²) *Math. Annalen*, t. XXXVIII, XXXIX et XLII. *Voir* aussi de beaux travaux de M. Bianchi, *ibid.*, t. XXXVIII, XL, XLII et XLIII.

54. *Remarque I.* — On peut donner une infinité de formes aux substitutions du groupe fuchsien considéré, en remplaçant u par une fonction linéaire de cette variable; on obtient ainsi le groupe transformé du premier par une substitution linéaire.

Inversement, tous les groupes fuchsiens qui répondent à une même forme ternaire $f(x, y, z)$ sont, comme l'a montré M. Poincaré [1], et comme il est aisé de le voir directement, les transformés de l'un d'entre eux par une substitution linéaire; il en est évidemment de même si l'on remplace la forme $f(x, y, z)$ par une forme équivalente.

55. *Remarque II.* — Le produit de deux substitutions du groupe est une substitution du groupe, ce qui revient à dire que le produit de deux transformations (45) est encore une transformation du même type.

De là résultent sans difficulté des formules qui permettent, étant données deux solutions entières de l'équation (46), d'en déduire une troisième : elles coïncident avec les formules classiques pour la composition de deux des transformations semblables de la forme $f(x, y, z)$, et il est inutile d'insister ici sur ce point.

56. Cela posé, considérons deux formes binaires $\varphi(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ positives, primitives, et de discriminants impairs [2]; supposons que les formes ternaires

$$f = z^2 - \varphi(x, y) \qquad \text{et} \qquad f_1 = z^2 - \varphi_1(x, y)$$

soient proprement ou improprement équivalentes, ce qui exige l'égalité des discriminants des deux formes φ et φ_1. En vertu de la remarque du n° **54**, les groupes fuchsiens des courbes associées aux deux formes 4φ et $4\varphi_1$ sont transformés l'un de l'autre par une substitution linéaire, ou, sous une autre forme, ces deux courbes hyperabéliennes sont de même genre et se correspondent point par point.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 419.

(2) Ou impairement pairs.

57. Cherchons maintenant à quelles conditions les deux formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ seront équivalentes.

Soit posé

$$\varphi = Dx^2 + 2q'xy + py^2, \qquad \varphi_1 = D_1x^2 + 2q'_1xy + p_1y'^2,$$
$$\Delta = pD - q'^2 = p_1D_1 - q'^2_1,$$

on a, pour les adjointes F et F_1, de f et f_1,

$$(56) \qquad \begin{cases} F = -DY^2 + 2q'XY - pX^2 + \Delta Z^2, \\ F_1 = -D_1Y^2 + 2q'_1XY - p_1X^2 + \Delta Z^2. \end{cases}$$

Si f et f_1 sont équivalentes, leurs adjointes le sont également, et appartiennent dès lors au même genre : par suite, en désignant par d_i un diviseur premier quelconque de Δ, discriminant de f et f_1, les caractères quadratiques $\left(\frac{F}{d_i}\right)$, $\left(\frac{F_1}{d_i}\right)$ seront identiques, c'est-à-dire qu'on aura

$$\left(\frac{DY^2 - 2q'XY - pX^2}{d_i}\right) = \left(\frac{D_1Y_1^2 - 2q'_1X_1Y_1 + p_1X_1^2}{d_i}\right),$$

quels que soient X, Y, X_1, Y_1. En d'autres termes, les nombres représentés par les deux formes binaires

$$DY^2 + 2q'XY + pX^2, \qquad D_1Y^2 + 2q'_1XY + p_1X^2,$$

c'est-à-dire par φ et φ_1, ont même caractère quadratique par rapport à chacun des diviseurs du déterminant commun.

On en conclut que les deux formes φ et φ_1 appartiennent au même genre.

En effet :

1° Si elles sont toutes deux improprement primitives, la propriété précédente suffit pour que le genre soit le même;

2° Si l'une est proprement et l'autre improprement primitive, le déterminant commun, $-\Delta$, est de la forme $4N + 1$, et la propriété suffit encore;

3° Reste donc seulement le cas où les deux formes seraient proprement primitives; elles seront du même genre si, pour tous les nombres impairs n, représentés par φ ou par φ_1, la quantité $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ a la même valeur, en supposant Δ (qui est impair) de la forme $4N+1$.

Or on peut toujours supposer les premiers coefficients, D et D_1, de φ et φ_1, impairs, et les seconds, p et p_1 pairs; et pour que φ ou φ_1 représente un nombre impair, il faut et il suffit que x soit impair.

Cela posé, on a identiquement, puisque les formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes,

$$\begin{aligned} z^2 - \varphi(x, y) = {} & (\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)^2 \\ & - \varphi_1(\lambda x + \mu y + \nu z,\ \lambda' x + \mu' y + \nu' z), \end{aligned}$$

d'où

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y) = {} & \varphi_1(\lambda x + \mu y + \nu z,\ \lambda' x + \mu' y + \nu' z) \\ & + z^2 - (\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)^2. \end{aligned} \right.$$

Donnons à x une valeur impaire quelconque; si l'on peut déterminer des valeurs entières de y et de z telles que la différence de carrés

$$z^2 - (\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)^2$$

soit paire (et par suite divisible par 4), l'identité précédente montre qu'un nombre impair représentable par φ sera égal à un nombre impair représentable par φ_1, à un multiple près de 4, et la quantité $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ aura même valeur pour les deux formes. Or pour que l'on *ne puisse* rendre $z^2 - (\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)^2$ pair, x ayant une valeur impaire, il faut évidemment que λ'' soit impair, μ'' pair et ν'' impair : je dis que ce cas ne peut se présenter. L'identité (57) donne en effet, si l'on y fait successivement les indéterminées nulles à l'exception d'une seule,

$$\begin{aligned} D &= -\lambda''^2 + \varphi_1(\lambda, \lambda'), \\ p &= -\mu''^2 + \varphi_1(\mu, \mu'), \\ 0 &= -\nu''^2 + \varphi_1(\nu, \nu') + 1. \end{aligned}$$

Mais, pour D et λ'' impairs, la première de ces relations exige que λ

soit pair; la seconde, pour p et μ'' pairs, exige que μ soit pair; la troisième, pour ν'' impair, exige que ν soit pair. Or λ, μ, ν ne peuvent être pairs simultanément, puisque le déterminant (λ, μ', ν'') est égal à ± 1 (1).

Donc enfin, si les deux formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes (proprement ou non), les formes φ et φ_1 appartiennent au même genre.

58. Réciproquement, si φ et φ_1 sont du même genre, les formes $f = z^2 - \varphi$ et $f_1 = z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes.

Car les deux formes adjointes (56), F et F_1, ont alors même caractère quadratique par rapport à chacun des diviseurs du discriminant Δ, commun aux deux formes f et f_1. D'ailleurs F et F_1 sont proprement primitives, car Δ est impair, et D, q', p, d'une part, D_1, q'_1, p_1, d'autre part, n'ont aucun facteur commun, puisque φ et φ_1 sont primitives : de tout cela il résulte que les formes ternaires f et f_1, dont F et F_1 sont les adjointes, appartiennent au même genre. Leur déterminant Δ étant impair, par hypothèse, et le plus grand commun diviseur, 1, des coefficients des adjointes F et F_1 étant premier à Δ, on en conclut, par un théorème connu (2), qu'elles appartiennent à la même classe.

59. Voici donc la conclusion, que nous retrouvons d'ailleurs plus loin par une autre méthode :

Considérons les classes de formes quadratiques binaires, posi-

---

(1) Comme conséquence, on peut trouver des entiers x, y, z premiers entre eux, dont le premier est impair, annulant $z - (\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)$; sous une autre forme, les deux formes φ et φ_1, en vertu de (57), peuvent représenter proprement un même nombre impair.

(2) *Voir*, par exemple, Bachmann, *Zahlentheorie*, 4e Partie, p. 251. L'énoncé de cet important théorème, dû à Arn. Meyer, est celui-ci : *Deux formes ternaires proprement primitives, indéfinies, d'invariants impairs et premiers entre eux, appartiennent à la même classe si elles appartiennent au même genre.* Le théorème est encore vrai (Meyer, *Crelle*, t. CVIII) si les deux invariants sont, l'un ou l'autre ou tous deux, impairement pairs et n'ont pas de diviseur commun impair. [Note (2) du n° 30.]

tives, primitives, de même déterminant impair ([1]), *qui font partie d'un même* GENRE, *et soient* φ_1, φ_2, ... *des formes appartenant respectivement à chacune de ces classes : les courbes hyperabéliennes associées aux classes de formes* $4\varphi_1$, $4\varphi_2$, ... *sont du même* GENRE, *et se correspondent point par point* ([2]).

60. La même théorie s'applique aux formes 4φ, lorsque la forme φ, au lieu d'être proprement primitive, ne l'est qu'après division par un facteur impair, Ω.

En ce cas, les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance à des formes de la même classe que 4φ ne peuvent se réduire à un seul d'entre eux, et l'on n'a plus le droit de supposer $m = 1$, comme on l'a fait au n° **47**.

Soit en ce cas

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - D &= 0,\\ mg + 2n'h - pg' - 2q' &= 0 \end{aligned}\right.$$

un système donnant naissance à une forme

$$(59)\qquad 4\varphi(x,y) = 4[Dx^2 + 2q'xy + (n'^2 + mp)y^2]$$

du type considéré : par hypothèse, D, $2q'$, $n'^2 + mp$ ont pour plus grand commun diviseur le nombre impair positif Ω; on admet en

---

([1]) Ou impairement pair : la démonstration, pour ce cas, se calque sur la précédente; on s'appuie sur le théorème de Arn. Meyer cité dans la dernière note. De même, si les formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$, de déterminant impairement pair, sont équivalentes, on établit que φ et φ_1 sont du même genre : la démonstration du n° 57 reste, en effet, applicable; il suffit d'observer que, en vertu de (57), φ et φ_1 peuvent représenter respectivement deux nombres impairs dont la différence est un multiple de 8.

([2]) *Classes ambiguës.* — Si le genre contient une classe ambiguë, φ_0, la courbe C_0 associée à la classe $4\varphi_0$ ne correspond pas point par point aux courbes C_1, C_2, ... associées à $4\varphi_1$, $4\varphi_2$, ... : car son groupe fuchsien contient une substitution fondamentale qui n'a pas sa correspondante dans les autres groupes (note du n° 51). On en conclut aisément qu'à un point de C_0 répondent deux points de C_1, et, à un point de C_1, un point de C_0.

outre que le quotient par Ω^2 de la quantité $J = D(n'^2 + mp) - q'^2$ est premier avec Ω.

Pour trouver le groupe fuchsien de la courbe hyperabélienne qui correspond au système (58), nous avons, comme plus haut, à étudier les transformations de degré *un*, données par les formules (39), (40) et (41), qui laissent ce système invariable.

Supposons, dans les formules (40), $\varepsilon = -1$: le cas de $\varepsilon = +1$ donnerait lieu à une observation pareille à celle du n° **46.** Il vient ainsi

$$\begin{aligned} mb_0 &= pa_1 - qa_2, \\ mb_1 &= ma_0 + qa_3 + 2n'a_1, \\ mb_2 &= pa_3 + 2n'a_2, \\ mb_3 &= ma_2; \end{aligned}$$

les a_i vérifiant l'équation

$$\begin{aligned} m(a_0^2 - Da_2^2) - p(a_1^2 - Da_3^2) + 2n'(a_0a_1 + Da_2a_3) \\ + 2q'(a_0a_3 + a_1a_2) = \pm m. \end{aligned}$$

On peut, par la méthode suivie au n° **19**, exprimer les a_i et b_i en fonction linéaire, à coefficients entiers, de nouvelles indéterminées : supposons pour cela, comme nous en avons le droit (n° **34**), m et $2q'$ premiers entre eux, et soient μ et ν deux entiers tels que

$$m\mu + 2q'\nu = 1;$$

on aura :

$$\begin{aligned} a_0 &= t, & b_0 &= -2q'x + p\mu z, \\ a_1 &= z, & b_1 &= t + 2n'\mu z + 2q'y, \\ a_2 &= -mx + p\nu z, & b_2 &= py + 2n'x, \\ a_3 &= -2n'\nu z + my, & b_3 &= -mx + p\nu z; \end{aligned}$$

les nouvelles indéterminées, x, y, z, t, seront liées par la relation

$$\begin{aligned} (t + n'\mu z + q'y)^2 - z(2q'x + p\mu z) - D(mx + p\nu z)^2 \\ + D(py + 2n'x)(my - 2n'\nu z) - (n'\mu z + q'y)^2 = \pm 1. \end{aligned}$$

On en conclut, comme on l'a fait précédemment, que le groupe fuchsien cherché est celui qui correspond aux transformations en elle-même de la forme ternaire ayant pour adjointe

$$(60)\quad \begin{cases} -z(-2q'x+p\mu z)-\mathrm{D}(mx+p\nu z)^2 \\ \quad -\mathrm{D}^2(py+2n'x)(my-2n'\nu z)-(n'\mu z+q'y)^2. \end{cases}$$

On trouve que cette forme est

$$(61)\quad \begin{cases} f(x,y,z)=z^2(1-4\mathrm{D}\nu^2 n'^2)-\mathrm{D}m^2x^2-p(\mu+\mathrm{D}p\nu^2)y^2 \\ \qquad +2n'(-\mu-2p\mathrm{D}\nu^2)yz+4\mathrm{D}mn'\nu zx \\ \qquad -2(q'-\mathrm{D}mp\nu)xy. \end{cases}$$

Elle a pour déterminant la quantité $\mathrm{J}=\mathrm{D}(n'^2+mp)-q'^2$, introduite plus haut; le plus grand commun diviseur des coefficients de son adjointe (60) est Ω, comme on s'en assure aisément, en se souvenant que m, $2n'$, p, $2q'$ n'ont pas de facteur commun, que m et $2q'$ sont premiers entre eux, et que D, q', n'^2+mp ont Ω pour plus grand commun diviseur.

D'ailleurs, la forme f peut s'écrire

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= -\mathrm{D}(mx+p\nu z+2n'\nu z)^2+2y\frac{q'}{m}(mx+p\nu y+2n'\nu z) \\ &\quad +\left(z-\frac{n'}{m}y\right)^2-\frac{y^2}{m^2}(n'^2+mp); \end{aligned}$$

elle se transforme donc, par la substitution fractionnaire de déterminant 1,

$$\begin{cases} mx+p\nu y+2n'\nu z = \xi, \\ \dfrac{y}{m} = -\eta, \\ z-\dfrac{n'}{m}y = \zeta, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{m}[\xi+mp\nu\eta+2n'\nu(\zeta-n'\eta)], \\ y=-m\eta, \\ z= \zeta-n'\eta, \end{cases}$$

en la forme

$$(62)\quad \zeta^2-\mathrm{D}\xi^2-2q'\xi\eta-(n'^2+mp)\eta^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \zeta^2-\varphi(\xi,\eta).$$

Les deux formes (61) et (62) appartiennent donc au même genre, d'après un beau résultat de Stephen Smith [1]; il en résulte, en vertu du théorème de Meyer déjà employé [2], qu'elles sont aussi de la même classe, c'est-à-dire équivalentes l'une à l'autre.

On en conclut que le groupe fuchsien de la courbe hyperabélienne liée au système (58) est le transformé, par une substitution linéaire, de celui qui dérive des transformations en elle-même de la forme (62), c'est-à-dire de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$: c'est le résultat obtenu dans le cas particulier étudié d'abord; il conduit aux mêmes conséquences.

61. Par suite :

Soit φ une forme binaire positive, divisible par un nombre impair, Ω, et, après cette division, proprement primitive et de déterminant impair, premier à Ω :

1° *Toutes les courbes hyperabéliennes associées à la classe de formes dont 4φ est un représentant sont du même genre et se correspondent point par point;*

2° *Elles correspondent aussi point par point aux courbes hyperabéliennes associées à toute classe $4\varphi_1$, pour laquelle la forme binaire positive φ_1 a même déterminant, même diviseur Ω et même genre que la forme φ* [3].

Car on établit, comme précédemment, que, si φ_1 remplit ces conditions, les deux formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes, et réciproquement.

62. Ces résultats établissent une liaison remarquable entre les courbes hyperabéliennes associées à deux classes de formes qui appartiennent au même genre; on va les compléter en les rattachant aux transformations singulières du premier ordre des périodes, dans le cas du moins des formes primitives, c'est-à-dire de $\Omega = 1$ ou 2.

Supposons, pour fixer les idées, $\Omega = 1$; soient φ et φ_1 deux formes

---

(1) *Philos. Transactions*, t. CLVII, p. 275.

(2) Note du n° 58.

(3) On suppose que φ_1, après division par Ω, est proprement ou improprement primitive.

proprement primitives, positives, de même déterminant impair et du même genre; les formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes et, dès lors (n° **57**, note), φ et φ_1 représentent proprement un même nombre, D. Elles peuvent donc s'écrire :

$$\varphi = \mathrm{D}x^2 + 2q'xy + py^2, \qquad \varphi_1 = \mathrm{D}x^2 + 2q'_1xy + p_1y^2,$$

et les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance aux classes représentées par 4φ et $4\varphi_1$ sont réductibles respectivement aux types

$$\begin{cases} h^2 - gg' - \mathrm{D} = 0, \\ g - pg' - 2q' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1^2 - g_1g'_1 - \mathrm{D} = 0, \\ g_1 - p_1g'_1 - 2q'_1 = 0. \end{cases}$$

Or, si l'on pose, comme au n° **48**,

$$g = -\frac{2\sqrt{\mathrm{D}}}{u+v}, \qquad h = \sqrt{\mathrm{D}}\,\frac{u-v}{u+v}, \qquad g' = 2\sqrt{\mathrm{D}}\,\frac{uv}{u+v},$$
$$g_1 = -\frac{2\sqrt{\mathrm{D}}}{u'+v'}, \qquad h_1 = \sqrt{\mathrm{D}}\,\frac{u'-v'}{u'+v'}, \qquad g'_1 = 2\sqrt{\mathrm{D}}\,\frac{u'v'}{u'+v'},$$

aux variables u et u' répondent, comme on l'a vu, deux groupes fuchsiens, transformés l'un de l'autre par une substitution linéaire. La correspondance point par point entre les deux courbes hyperabéliennes associées respectivement aux classes 4φ et $4\varphi_1$ s'établit donc en posant

$$u' = \frac{\mathrm{A}u + \mathrm{B}}{\mathrm{E}u + \mathrm{F}},$$

A, B, E, F désignant des constantes : la forme même (54) des deux groupes fuchsiens relatifs à u et u' montre que A, B, E, F sont du type $\lambda + \mu\sqrt{\mathrm{D}}$, λ et μ étant entiers. On a ainsi, en remplaçant u et u' par leurs valeurs en fonction des périodes,

$$-\frac{h_1+\sqrt{\mathrm{D}}}{g_1} = \frac{-(\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1\sqrt{\mathrm{D}})(h+\sqrt{\mathrm{D}}) + (\mathrm{B}_0+\mathrm{B}_1\sqrt{\mathrm{D}})g}{-(\mathrm{E}_0+\mathrm{E}_1\sqrt{\mathrm{D}})(h+\sqrt{\mathrm{D}}) + (\mathrm{F}_0+\mathrm{F}_1\sqrt{\mathrm{D}})g}$$
$$= -\frac{g'_1}{h_1-\sqrt{\mathrm{D}}} = \frac{-(\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1\sqrt{\mathrm{D}})g' + (\mathrm{B}_0+\mathrm{B}_1\sqrt{\mathrm{D}})(h-\sqrt{\mathrm{D}})}{-(\mathrm{E}_0+\mathrm{E}_1\sqrt{\mathrm{D}})g' + (\mathrm{F}_0+\mathrm{F}_1\sqrt{\mathrm{D}})(h-\sqrt{\mathrm{D}})},$$

les A_i, B_i, E_i, F_i désignant des entiers.

On a maintenant le droit de changer, dans ces relations, le signe de $\sqrt{D}$, que rien ne fixe *a priori :* on obtient ainsi, entre les périodes, des relations de la forme

$$\mathfrak{P}_1 g_1 + \mathfrak{P}_2 h_1 = \mathfrak{P}_3, \qquad \mathfrak{P}_1 h_1 + \mathfrak{P}_2 g'_1 = \mathfrak{P}_4,$$
$$\mathfrak{Q}_1 g_1 + \mathfrak{Q}_2 h_1 = \mathfrak{Q}_3, \qquad \mathfrak{Q}_1 h_1 + \mathfrak{Q}_2 g'_1 = \mathfrak{Q}_4,$$

$\mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{Q}_i$ désignant un système de périodes simultanées en g, h, g'. Or ces relations caractérisent une transformation (n° **7**), faisant passer des périodes g, h, g' aux périodes g_1, h_1, g'_1 : cette transformation doit être du premier degré, puisque la correspondance entre les points des deux courbes hyperabéliennes considérées, c'est-à-dire entre les points modulaires liés aux deux systèmes de périodes, est univoque; elle doit être singulière, car une transformation ordinaire d'ordre *un* n'altérerait pas le point modulaire.

Des considérations analogues s'appliquent au cas où φ et φ_1 seraient, l'une ou l'autre ou toutes deux, improprement primitives, en appartenant toujours au même genre.

63. On arrive ainsi à cette conclusion, que nous retrouverons plus loin, *par une méthode plus rigoureuse* et à l'abri de toute objection :

Soient φ_1, φ_2, ... des formes binaires positives, primitives, de même déterminant impair (¹), *n'appartenant pas à la même classe, mais appartenant au même genre : les systèmes propres de deux relations singulières qui donnent naissance aux classes dont $4\varphi_1$, $4\varphi_2$, ... sont les représentants, sont réductibles à un seul d'entre eux par des transformations* SINGULIÈRES *du premier degré.*

La proposition ne s'applique pas aux formes *non primitives*, parce que les courbes hyperabéliennes qui sont associées à une classe non primitive ne sont pas rationnellement séparables; la transformation qui établit la correspondance univoque entre les points de deux de ces courbes n'est donc pas nécessairement du premier degré.

(¹) Ou impairement pair [note (¹) du n° 59].

64. Cette induction nous conduit à étudier les transformations singulières du premier degré pour les fonctions abéliennes doublement singulières : nous n'avons fait cette étude que pour les fonctions simplement singulières ([1]).

Transformations singulières du premier degré.

65. Supposons que les périodes g, h, g' vérifient deux relations singulières $F = 0$, $F_1 = 0$, formant un système propre. Une transformation singulière quelconque, *faisant passer* ([2]) *des périodes* G, H, G' *aux périodes* g, h, g', suppose entre celles-ci *une* relation singulière; dans le cas actuel, si λ et μ désignent deux entiers premiers entre eux, à toute relation $\lambda F + \mu F_1 = 0$, répond un ensemble de transformations singulières que nous avons appris à former.

Supposons que le système $F = 0$, $F_1 = 0$ soit réductible au type

$$(44)\qquad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - 2q' = 0;$$

pour obtenir toutes les transformations singulières de degré un qui correspondent à la relation singulière

$$\lambda(h^2 - gg' - D) + \mu(g - pg' - 2q') = 0,$$

il faut se donner les *indices* l et k, c'est-à-dire deux entiers vérifiant la relation

$$(63)\qquad l^2 - k^2(D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2) = +1;$$

la transformation correspondante du premier degré, d'indices l et k, est alors déterminée, à une transformation *ordinaire* près de ce degré;

([1]) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 313 et suiv.

([2]) *Voir* la *Théorie des transformations singulières* dans ce Journal, 5e série, t. VI, p. 281-326.

ses entiers caractéristiques sont définis par les formules (n° **13**)

$$\begin{array}{llll}
a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\
b_0 = 0, & b_1 = 1 + \tau'\lambda, & b_2 = \sigma'\lambda, & b_3 = k\lambda, \\
c_0 = 0, & c_1 = \tau'\mu, & c_2 = 1 + \sigma'\mu, & c_3 = k\mu, \\
\multicolumn{2}{l}{d_0 = \tau' p\mu - \sigma'(D\lambda + 2q'\mu),} & \multicolumn{2}{l}{d_1 = k(D\lambda + 2q'\mu),} \\
\multicolumn{2}{l}{d_2 = kp\mu,} & \multicolumn{2}{l}{d_3 = l,}
\end{array}$$

où σ' et τ' sont des entiers quelconques, satisfaisant à l'équation

$$l - 1 = \sigma'\mu + \tau'\lambda.$$

Or, λ et μ étant premiers entre eux, on trouvera des entiers, λ' et μ', tels qu'on ait

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' = 1; \tag{64}$$

et dès lors on pourra prendre

$$\sigma' = (l - 1)\mu', \qquad \tau' = (l - 1)\lambda';$$

le Tableau précédent s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{llll}
a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\
b_0 = 0, & b_1 = \lambda\lambda' l + \mu\mu', & b_2 = (l - 1)\lambda\mu', & b_3 = k\lambda, \\
c_0 = 0, & c_1 = (l - 1)\lambda'\mu, & c_2 = \mu\mu' l + \lambda\lambda', & c_3 = k\mu, \\
\multicolumn{3}{l}{d_0 = (l - 1)[p\mu\lambda' - \mu'(D\lambda + 2q'\mu)],} & d_1 = k(D\lambda + 2q'\mu), \\
\multicolumn{3}{l}{d_2 = kp\mu,} & d_3 = l.
\end{array}\right. \tag{65}$$

On obtient ainsi, en faisant varier λ et μ, une infinité de transformations singulières de degré *un*, pour les fonctions abéliennes considérées; on voit que, pour définir une quelconque d'entre elles, il faut se donner en réalité les trois nombres, que nous appellerons ses *indices*, l, $k\lambda$ et $k\mu$, vérifiant la relation (63) :

$$l^2 - Dk^2\lambda^2 - 2q'k\lambda.k\mu + pk^2\mu^2 = +1,$$

c'est-à-dire qu'il faut se donner une solution z, x, y de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1,$$

en désignant toujours par $4\varphi(x, y)$ la forme $4(Dx^2 + 2q'xy + py^2)$, associée au système (44) : k sera le plus grand commun diviseur de x et de y; les quotients de x et y par k seront λ et μ; enfin z sera l.

Remarque. — Pour définir une transformation singulière, T, du premier degré, on doit connaître, avec les indices l, $k\lambda$, $k\mu$, les deux relations singulières (44); on peut d'ailleurs faire subir à celles-ci une transformation singulière quelconque Σ, de degré *un* n'altérant pas leur système : cela revient à faire suivre T de Σ. Or on voit de suite, soit directement, soit en se reportant à des formules antérieurement établies par nous ([1]), que la transformation $T\Sigma$ a pour indices l, $k\lambda$, $k\mu$, ou l, $-k\lambda$, $-k\mu$, si Σ est d'ordre $+1$; et ces mêmes quantités, changées de signe simultanément, si Σ est d'ordre -1.

De même, si l'on fait précéder T d'une transformation ordinaire de degré 1, S, les indices de ST sont l, $k\lambda$, $k\mu$ ou $-l$, $-k\lambda$, $-k\mu$.

Il résulte aisément de là que les transformations singulières de degré *un* et d'indices respectivement égaux à εl, $\eta k\lambda$, $\eta k\mu$, ε et η désignant ± 1, font correspondre à des périodes g, h, g', vérifiant les relations (44), quatre systèmes de périodes équivalents, c'est-à-dire donnant un même point modulaire.

66. Cela posé, soient T et T_1 deux transformations singulières du premier degré, d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$ et l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$: elles font correspondre respectivement aux périodes g, h, g' des périodes G, H, G' et G_1, H_1, G'_1 : dans quel cas ces deux derniers systèmes de périodes donneront-ils le même point modulaire?

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'une transformation ordinaire, S_0, fasse passer de G, H, G' à G_1, H_1, G'_1; alors la transformation de degré *un*, $T^{-1}S_0T_1$, fera passer des périodes g, h, g' aux *mêmes* périodes g, h, g' : ce sera donc ce que nous avons appelé une *multiplication complexe du premier degré*, que nous désignerons

---

([1]) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, nos 148-150.

par Θ. On a ainsi

$$(66) \qquad S_0 T_1 = T\Theta.$$

Or les indices de $S_0 T_1$ sont, à un même facteur ± 1 près, les mêmes que ceux de T_1, comme on vient de le voir; calculons directement ceux de $T\Theta$.

Les entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i de T sont donnés par les formules (65); ceux de la multiplication complexe Θ, de degré *un*, pour le cas des deux relations singulières (44), le sont par les formules suivantes ([1]) :

$$(67) \quad \begin{cases} a'_0 = \theta, & a'_1 = \rho, & a'_2 = +\tau, & a'_3 = \sigma, \\ b'_0 = p\rho, & b'_1 = 0, & b'_2 = -p\sigma, & b'_3 = -\tau, \\ c'_0 = -2q'\rho + D\tau, & c'_1 = D\sigma, & c'_2 = \theta + 2q'\sigma, & c'_3 = \rho, \\ d'_0 = -Dp\sigma, & d'_1 = 2q'\rho - D\tau, & d'_2 = p\rho, & d'_3 = \theta + 2q'\sigma; \end{cases}$$

θ, ρ, τ, σ désignent des entiers liés par l'équation

$$\theta^2 + 2q'\theta\sigma - p\rho^2 + 2q'\rho\tau - D\tau^2 + pD\sigma^2 = \pm 1,$$

qui s'écrit

$$(68) \quad (\theta + q'\sigma)^2 - D\tau^2 + 2q'\rho\tau - p\rho^2 + (pD - q'^2)\sigma^2 = \pm 1,$$

et qui a été déjà rencontrée au n° **47**, avec d'autres notations.

Or, les entiers caractéristiques a''_i, b''_i, c''_i, d''_i de $T\Theta$, sont fournis par les formules ([2])

$$(69) \quad \begin{cases} a''_i = a_i a'_0 + b_i a'_1 + c_i a'_2 + d_i a'_3, \\ b''_i = a_i b'_0 + b_i b'_1 + c_i b'_2 + d_i b'_3, \\ c''_i = a_i c'_0 + b_i c'_1 + c_i c'_2 + d_i c'_3, \\ d''_i = a_i d'_0 + b_i d'_1 + c_i d'_2 + d_i d'_3, \end{cases}$$

([1]) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 339; nous avons changé τ en $-\tau$.

([2]) *Ibid.*, p. 293.

et les indices l'', $k''\lambda''$, $k''\mu''$ de $T\Theta$ ont pour expression (¹) :

$$(70)\qquad \begin{cases} l'' = (a''d'')_{03} + (a''d'')_{12}, \\ k''\mu'' = (a''c'')_{03} + (a''c'')_{12}, \\ k''\lambda'' = (a''b'')_{03} + (a''b'')_{12}. \end{cases}$$

Il suffit maintenant de porter dans (70) les valeurs (69) des a'', b'', c'', d'', calculées elles-mêmes à l'aide de (65) et (67), pour obtenir l', $k''\lambda''$, $k''\mu''$, qui, d'après (66), sont égaux à l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$, au même facteur ± 1 près.

On trouve ainsi les expressions

$$(71)\qquad \begin{cases} l_1 = & l(\theta^2 + 2q'\theta\sigma + p\rho^2 + D\tau^2 - 2q'\tau\rho + pD\sigma^2) \\ & + k\lambda(2q'\theta\rho - 2D\theta\tau + 2pD\rho\sigma - 2Dq'\sigma\tau) \\ & + k\mu(2p\theta\rho + 2pD\sigma\tau + 2pq'\rho\sigma - 2q'\theta\tau - 4q'^2\sigma\tau), \\ k_1\lambda_1 = & l(-2\theta\tau - 2p\rho\sigma) \\ & + k\lambda(\theta^2 + D\tau^2 - p\rho^2 - pD\sigma^2) \\ & + k\mu(-2p\theta\sigma - 2p\rho\tau - 2pq'\sigma^2 + 2q'\tau^2), \\ k_1\mu_1 = & l(2\theta\rho - 2D\sigma\tau + 4q'\rho\sigma) \\ & + k\lambda(2D\theta\sigma - 2D\rho\tau + 2q'\rho^2 + 2q'D\sigma^2) \\ & + k\mu(\theta^2 + 4q'\theta\sigma + 4q'^2\sigma^2 - D\tau^2 + p\rho^2 - pD\sigma^2). \end{cases}$$

67. On reconnaît, dans ces formules, celles qui donnent *des* transformations en elle-même de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$, c'est-à-dire $z^2 - Dx^2 - 2q'xy - py^2$; elles ne fournissent pas *toutes* ces transformations, mais seulement celles qui sont liées aux solutions en nombres entiers de l'équation :

$$(68)\qquad (\theta + q'\sigma)^2 + F(\rho, \tau, \sigma) = \pm 1,$$

F désignant, comme d'habitude, l'adjointe de $z^2 - \varphi(x, y)$.

En d'autres termes, si l, $k\lambda$, $k\mu$ désigne une solution particulière

(¹) Ce *Journal*, 5ᵉ série, t. VI, p. 283 et 286.

de l'équation

$$l^2 - k^2\varphi(\lambda, \mu) = +1,$$

on en déduit, par les formules (71), qui donnent des transformations en elle-même de la forme $l^2 - k^2\varphi(\lambda, \mu)$, une infinité d'autres solutions; soit l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$ l'une de celles-ci : les deux transformations singulières du premier degré d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$ et l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$ sont réductibles l'une à l'autre à l'aide d'une multiplication complexe, et les deux systèmes de périodes G, H, G' et G_1, H_1, G'_1, qu'elles font respectivement correspondre à g, h, g', sont équivalents, c'est-à-dire donnent un même point modulaire.

68. En vertu de la remarque du n° **65**, les transformations d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$ et l, $-k\lambda$, $-k\mu$, font également correspondre à g, h, g' deux systèmes de périodes équivalents : or, si nous posons pour un instant

$$l_1 = l, \qquad k_1\lambda_1 = -k\lambda, \qquad k_1\mu_1 = -k\mu,$$

ces quantités vérifient les équations (71), où les premiers membres seraient multipliés par $pD - q'^2$, et où l'on ferait, dans les seconds membres, $\rho = \tau = 0$, $\sigma = 1$, $\theta = -q'$. Ces dernières valeurs satisfont d'ailleurs à la relation

$$(72)\quad (\theta + q'\sigma)^2 - D\tau^2 + 2q'\rho\tau - p\rho^2 + (pD - q'^2)\sigma^2 = pD - q'^2,$$

dont le deuxième membre est le discriminant de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$. Si donc l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$ est une solution de l'équation

$$l^2 - k^2\varphi(\lambda, \mu) = 1,$$

déduite de la solution l, $k\lambda$, $k\mu$ par une des transformations en elle-même de la forme $l^2 - k^2\varphi(\lambda, \mu)$, qui dérivent d'une solution de l'équation (72), les transformations singulières du premier degré d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$ et l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$ font correspondre aux périodes g, h, g' deux systèmes de périodes équivalents.

69. Tous ces résultats s'étendent, sans autre difficulté que la longueur des calculs, au cas où le système initial de deux relations singulières est réductible au type

$$h^2 - gg' - D = 0, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

avec la seule hypothèse que β et ω soient pairs.

70. Convenons de dire que deux transformations singulières du premier degré sont équivalentes ou non, selon qu'elles font ou non correspondre aux périodes g, h, g' deux systèmes de périodes équivalents entre eux, c'est-à-dire donnant le même point modulaire.

De même, convenons de dire que deux solutions en nombres entiers de l'équation

$$(73) \qquad z^2 - \varphi(x, y) = 1$$

sont équivalentes ou non, selon que l'une se déduit ou non de l'autre par une des transformations *principales* en elle-même de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$: par transformations principales, nous entendons celles qui dérivent, suivant la théorie générale classique, des solutions en nombres entiers de l'une ou l'autre des équations

$$U^2 + F(X, Y, Z) = \begin{cases} \pm 1, \\ \pm \Delta, \end{cases}$$

Δ étant le discriminant de $\varphi(x, y)$ et F l'adjointe de $z^2 - \varphi$.

Les solutions z, x, y et $-z$, $-x$, $-y$ seront également dites *équivalentes*.

Cela posé, les résultats qu'on vient d'obtenir s'énoncent ainsi :

Soit S *un système de deux relations singulières donnant naissance à une forme* $4\varphi(x, y)$; *désignons par* l, $k\lambda$, $k\mu$ *une solution de l'équation*

$$l^2 - k^2\varphi(\lambda, \mu) = 1,$$

λ *et* μ *étant premiers entre eux : à cette solution correspond, pour les fonctions abéliennes dont les périodes vérifient le système* S, *une transformation singulière du premier degré, dont les indices sont*

l, $k\lambda$, $k\mu$; *à deux solutions équivalentes répondent deux transformations équivalentes; à deux solutions non équivalentes répondent deux transformations non équivalentes.*

Sous une autre forme :

A un point modulaire P_1, *donné par des périodes vérifiant le système* S, *les transformations singulières du premier degré font correspondre autant de points modulaires* P_i *qu'il y a de solutions, non équivalentes entre elles, de l'équation* $z^2 - \varphi(x, y) = 1$.

Parmi les points P_i figure le point modulaire initial P_1 : il correspond à la solution $z = 1$, $x = y = 0$, c'est-à-dire à la transformation unité, que nous comptons ainsi au nombre des transformations singulières.

71. Études maintenant les systèmes de deux relations singulières qui dérivent d'un système initial par les transformations singulières de degré 1.

Nous admettrons que le système initial donne naissance à une forme binaire $4\varphi(x,y)$, la forme φ étant primitive (proprement ou improprement), et de discriminant impair (¹); et soit posé, comme d'ordinaire,

$$\varphi(x, y) = Dx^2 + 2q'xy + py^2.$$

Le système considéré peut être réduit, par une transformation ordinaire du premier degré, au type

$$(74) \qquad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - 2q' = 0,$$

et nous aurons évidemment le droit, si $\varphi(x, y)$ est proprement primitive, de supposer D impair et p pair.

Cela posé, appliquons au système (74) la transformation singulière du premier degré, T, dont les entiers caractéristiques sont définis par les équations (65), et qui suppose, entre les périodes, la relation sin-

(¹) Ou impairement pair.

gulière

$$(75) \qquad \lambda(h^2 - gg' - D) + \mu(g - pg' - 2q') = 0.$$

Celle-ci ne change pas par T, ou, plus exactement, se change en

$$(76) \qquad \lambda(H^2 - GG' - D) + \mu(G - pG' - 2q') = 0;$$

de même la relation

$$(77) \qquad \mu'(h^2 - gg' - D) - \lambda'(g - pg' - 2q') = 0,$$

où λ' et μ' sont les entiers qui figurent dans les formules (65), se change par T, en vertu de formules connues (¹), en

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu'(H^2 - GG') - 2kq'H - \lambda'G \\ \quad + G' \left\{ \begin{array}{l} \lambda' p(\lambda\lambda' l^2 + 2l\mu\mu' - \mu\mu') \\ + D\lambda\mu'^2(l-1)^2 - Dp\lambda k^2 - 2q'\mu'(l-1)(\mu\mu' + l\lambda\lambda') \end{array} \right\} \\ \quad + D[p\mu k^2 - \mu'(\mu\mu' l^2 + 2l\lambda\lambda' - \lambda\lambda')] \\ \quad - p\mu\lambda'^2(l-1)^2 + 2q'\lambda'[l + \mu\mu'(l-1)^2] = 0. \end{array} \right.$$

On n'oubliera pas que λ' et μ' vérifient la relation

$$(64) \qquad \lambda\lambda' + \mu\mu' = 1.$$

En vertu de cette relation, le système (75), (77) est arithmétiquement équivalent au système (74); il est donc propre, et il en est évidemment de même du système transformé (76), (78), comme on s'en assure d'ailleurs directement.

Pour avoir la forme binaire $4\psi(x, y)$, associée à ce dernier système, il faut ajouter membre à membre les relations (76) et (78), multipliées respectivement par x et y, et former l'invariant de la relation singulière ainsi obtenue; on trouve, sans autre difficulté que la longueur des calculs,

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(x,y) = p(-\mu x + l\lambda' y)^2 - 2q'(\lambda x + l\mu' y)(-\mu x + l\lambda' y) \\ \qquad + D(\lambda x + l\mu' y)^2 - k^2(pD - q'^2)y^2. \end{array} \right.$$

(¹) Ce *Journal*, 5ᵉ série, t. VI, p. 284.

On peut écrire aussi, en développant,

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = {} & x^2(D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2) \\ & + 2xyl[D\lambda\mu' + q'(\mu\mu' - \lambda\lambda') - p\mu\lambda'] \\ & + y^2[l^2(D\mu'^2 - 2q'\lambda'\mu' + p\lambda'^2) - k^2(pD - q'^2)].\end{aligned}$$

72. Calculons le discriminant de cette forme. A cet effet, observons que la forme $\varphi(x,y)$, c'est-à-dire $Dx^2 + 2q'xy + py^2$, se change, par la substitution de déterminant -1, $x = \lambda X + \mu' Y$, $y = \mu X - \lambda' Y$, en la forme de même discriminant :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

étant posé

$$\begin{aligned} A &= D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2, \\ B &= D\lambda\mu' + q'(\mu\mu' - \lambda\lambda') - p\mu\lambda', \\ C &= D\mu'^2 - 2q'\lambda'\mu' + p\lambda'^2. \end{aligned}$$

Le discriminant de $\psi(x,y)$ s'écrit, avec ces notations,

$$A[l^2C - k^2(pD - q'^2)] - l^2B^2,$$

ou

$$l^2(AC - B^2) - k^2A(pD - q'^2).$$

D'ailleurs $AC - B^2$ est égal au discriminant, $(pD - q'^2)$, de $\varphi(x,y)$, et comme on a, en vertu de (63),

$$l^2 - k^2A = 1,$$

on voit que *le discriminant de* $\psi(x,y)$ *est égal à celui de* $\varphi(x,y)$.

Je dis maintenant que la forme ψ est primitive (proprement ou improprement). Car, pour qu'elle ne le fût pas, il faudrait que les coefficients de ψ, à savoir A, Bl et $Cl^2 - k^2(pD - q'^2)$ eussent un facteur premier commun, d_i.

Ce facteur diviserait dès lors le discriminant $pD - q'^2$, et, par suite, serait commun à A, Bl, Cl^2 : comme il ne peut diviser l, à cause de la relation $l^2 - k^2A = 1$, il diviserait nécessairement A, B, C, et la forme $\varphi(x,y)$ ne serait pas primitive, contrairement à l'hypothèse initiale.

D'ailleurs, si φ est proprement primitive, ψ peut être improprement primitive, et inversement.

73. *La forme $\psi(x,y)$ est du même genre que la forme $\varphi(x,y)$.* Pour le démontrer, observons d'abord que, si d_i désigne un diviseur premier impair du déterminant $q'^2 - pD$, on a, en vertu de (79), pour le caractère quadratique de ψ par rapport à d_i,

$$\left(\frac{\psi}{d_i}\right) = \left(\frac{DX^2 + 2q'XY + pY^2}{d_i}\right),$$

en posant $X = \lambda x + l\mu' y$, $Y = \mu x - l\lambda' y$; c'est-à-dire

$$\left(\frac{\psi}{d_i}\right) = \left(\frac{\varphi}{d_i}\right). \tag{80}$$

Distinguons maintenant, pour achever la démonstration, plusieurs cas.

1° Si le déterminant $q'^2 - pD$ est de la forme $4N + 1$, les relations (80) suffisent pour que les formes φ et ψ appartiennent au même genre;

2° Si $q'^2 - pD$ est de la forme $4N + 3$, φ et ψ sont proprement primitives; on peut alors, comme on l'a dit au n° **71**, supposer D impair et p pair : q' est alors impair, et p impairement pair.

Or, en faisant $y = 0$, $x = 1$ dans $\psi(x, y)$, on obtient le nombre $D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2$, qui est également représenté par la forme $\varphi(x, y)$, pour $x = \lambda$, $y = \mu$.

Si donc ce nombre est impair, c'est-à-dire si λ est impair, φ et ψ pouvant représenter un même nombre impair appartiennent encore au même genre.

Si λ est pair, faisons, dans ψ, $x = 0$, $y = 1$; nous obtenons, avec les notations du numéro précédent, le nombre $Cl^2 - k^2(pD - q'^2)$. Or, λ étant pair, μ, qui lui est premier, est impair; A, c'est-à-dire $D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2$, est impairement pair, comme p; et l'équation $l^2 - k^2A = 1$ exige que l soit impair et k pair. Dès lors, le nombre $Cl^2 - k^2(pD - q'^2)$ est congru, suivant le module 4, à C, c'est-à-dire à $D\mu'^2 - 2q'\lambda'\mu' + p\lambda'^2$, nombre impair, puisque μ', en vertu de $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 1$, est impair. Les formes ψ et φ représentent donc respectivement deux nombres impairs, dont la différence est multiple de 4, ce qui établit encore qu'elles appartiennent au même genre ([1]).

74. *Réciproquement,* je dis que, si la forme primitive ψ est du même genre que la forme φ, la forme 4ψ est associée à un système de deux relations singulières, déduit du système initial par une transformation singulière du premier degré; ou encore qu'une forme équivalente à ψ peut recevoir l'expression (79).

Nous nous appuierons pour cela sur la belle théorie de la représentation d'un nombre ou d'une forme binaire par une forme quadratique ternaire, exposée aux Articles 280 et suivants des *Disquisitiones* ([2]). Soit $-l$, $k\lambda$, $k\mu$ une représentation propre du nombre $+1$ par la forme $z^2-\varphi(x,y)$; on aura

$$l^2-k^2(D\lambda^2+2q'\lambda\mu+p\mu^2)=1.$$

A cette représentation correspond une représentation d'une forme binaire, de déterminant q'^2-pD, par la réciproque de $z^2-\varphi$, réciproque qui a pour expression, avec les notations de M. Bachmann,

$$(81)\qquad \mathfrak{f}(X,Y,Z)=pX^2-2q'XY+DY^2-(pD-q'^2)Z^2,$$

et qui est égale à l'adjointe de $z^2-\varphi$, changée de signe.

Pour déterminer la forme binaire en question, on doit trouver six entiers α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, vérifiant les équations

$$(82)\qquad \alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2=-l,\qquad \beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2=k\lambda,\qquad \gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2=k\mu,$$

([1]) Si le déterminant q'^2-pD est impairement pair, on peut supposer D impair, q' pair, p impairement pair. Si λ est impair, φ et ψ représentent un même nombre impair A, et appartiennent au même genre. Si λ est pair, on voit, comme plus haut, que l est impair et k pair : dès lors, le nombre

$$Cl^2-k^2(pD-q'^2)$$

est congru au nombre impair C suivant le module 8; les formes φ et ψ, qui représentent ainsi deux nombres impairs, dont la différence est multiple de 8, appartiennent encore au même genre.

([2]) *Voir* aussi Bachmann, *Zahlentheorie,* 4e Partie, p. 70-89.

et l'on obtient la forme binaire cherchée, en faisant, dans $\mathcal{F}(X, Y, Z)$,

$$(83) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \alpha_2 y, \\ Y &= \beta_1 x + \beta_2 y, \\ Z &= \gamma_1 x + \gamma_2 y. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, à toutes les solutions de (82) correspondent ainsi, par (83) et (81), des formes binaires équivalentes entre elles : il suffit dès lors d'avoir *une solution particulière* des équations (82). Or nous pouvons prendre :

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -\mu, \qquad &&\beta_1 = \lambda, \qquad &&\gamma_1 = 0, \\ &\alpha_2 = l\lambda', \qquad &&\beta_2 = l\mu', \qquad &&\gamma_2 = k, \end{aligned}$$

ce qui donne, dans (83),

$$\begin{aligned} X &= -\mu x + l\lambda' y, \\ Y &= \lambda x + l\mu' y, \\ Z &= ky, \end{aligned}$$

et, en portant ces valeurs de X, Y, Z dans (81), nous obtenons la forme binaire

$$(84) \quad \left\{ \begin{aligned} & p(-\mu x + l\lambda' y)^2 - 2q'(\lambda x + l\mu' y)(-\mu x + l\lambda' y) \\ & \qquad + D(\lambda x + l\mu' y)^2 - k^2(pD - q'^2)y^2, \end{aligned} \right.$$

qui est précisément le second membre de (79).

Comme, d'après Gauss, toute forme binaire de déterminant

$$q'^2 - pD,$$

représentable proprement par la forme ternaire F, est équivalente à une forme (84), nous avons établi que :

Toute forme binaire de déterminant $q'^2 - pD$, *représentable proprement par la forme ternaire* (81), *est associée à un système de deux relations singulières, déduit du système initial par une transformation singulière de degré* un.

Elle est, par suite, en vertu du n° **73**, du même genre que la forme initiale $\varphi(x, y)$.

Pour établir maintenant la proposition énoncée au commencement du n° **74**, à savoir que toute forme primitive $\psi(x, y)$, du même genre que $\varphi(x, y)$, est équivalente à une forme (84), il suffit d'établir que $\psi(x, y)$ est proprement représentable par la forme ternaire (81).

Or nous avons vu (n° **58**) que, si φ et ψ sont du même genre, les formes $z^2 - \varphi(x, y)$ et $z^2 - \psi(x, y)$ sont équivalentes; leurs adjointes le sont donc également, c'est-à-dire que les deux formes

$$\varphi(\mathrm{Y}, -\mathrm{X}) - (p\mathrm{D} - q'^2)\mathrm{Z}^2 \quad \text{et} \quad \psi(\mathrm{Y}, -\mathrm{X}) - (p\mathrm{D} - q'^2)\mathrm{Z}^2$$

sont équivalentes, et dès lors, la forme $\psi(x, y)$, représentable proprement par la seconde, l'est également par la première, qui coïncide avec la forme ternaire (81). C. Q. F. D.

75. En résumé :

Si $\varphi(x, y)$ est une forme quadratique binaire positive, primitive, de déterminant impair [1], *nous savons que tous les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance à des formes de la même classe que 4φ sont réductibles à l'un d'entre eux par des transformations* ordinaires *du premier degré.*

Appliquons maintenant à ce système une transformation singulière *de degré* un; *il se change en un autre système singulier, et si 4ψ est la forme binaire associée à ce nouveau système, les formes (primitives) φ et ψ appartiennent au même genre. Réciproquement, si ψ est une forme primitive (proprement ou non) du même genre que φ, elle est associée à un système singulier, qui dérive du système initial par une transformation* singulière *du premier degré.*

C'est là une nouvelle et rigoureuse démonstration du théorème énoncé au n° **63**.

76. Passons maintenant aux courbes hyperabéliennes, et soit C celle qui est associée à la classe 4φ.

---

(1) Ou impairement pair.

A un point P, de C, répondent une infinité de systèmes de périodes g, h, g', qui vérifient les relations singulières initiales $h^2 - gg' = D$, $g - pg' = 2q'$, et qui sont transformés l'un de l'autre par une transformation ordinaire de degré *un*, n'altérant pas l'ensemble de ces deux relations.

A tous ces systèmes de périodes, une même transformation singulière du premier degré, d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$, fait correspondre d'autres systèmes de périodes G, H, G′, que je dis être équivalents entre eux, c'est-à-dire ne donner qu'un seul et même point modulaire P′.

Car soient G, H, G′ et G_1, H_1, G'_1 deux de ces nouveaux systèmes, transformés respectivement des systèmes g, h, g' et g_1, h_1, g'_1 par la transformation T, d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$; désignons par S_0 la transformation ordinaire qui fait passer de g_1, h_1, g'_1 à g, h, g' : la transformation TS_0 fera passer de G_1, H_1, G'_1 à g, h, g'; et comme elle a pour indices (n° **65**), aux signes près de l et de k, les indices l, $k\lambda$, $k\mu$ d'une transformation qui fait passer de G, H, G′ à g, h, g', les systèmes G_1, H_1, G'_1 et G, H, G′ sont équivalents (*ibid.*) [1].

Si donc C′ est la courbe hyperabélienne associée au système de deux relations singulières transformé par T du système initial, on voit qu'à un point P de C répond, par T, un point de C′, et réciproquement; et l'on retrouve ainsi le théorème du n° **59** :

Considérons les classes de formes quadratiques binaires Σ, Σ′, Σ″, ..., *positives, primitives, de même déterminant impair* [2], *qui*

---

[1] *Classes ambiguës.* — Ce raisonnement ne s'applique pas si la forme φ est d'une classe ambiguë. Supposons par exemple que cette forme soit équivalente à la forme $Dx^2 + py^2$, c'est-à-dire qu'on ait $q' = 0$; les relations initiales sont alors réductibles au type $h^2 - gg' = D$, $g = pg'$, et les deux systèmes de périodes (g, h, g'), $(-g, h, -g')$, qui vérifient ces relations, donnent un même point modulaire P (note du n° **51**). Or, si S_0 est la transformation ordinaire de degré *un* qui fait passer du second système au premier et si T est une transformation singulière d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$, la transformation TS_0 a pour indices εl, $\eta k\lambda$, $-\eta k\lambda$, en désignant ± 1 par ε et η; les deux systèmes G, H, G′ et G_1, H_1, G'_1 que T fait correspondre aux deux systèmes considérés ne sont donc pas nécessairement équivalents; et, par suite, à un point P de la courbe C, la transformation T fait généralement correspondre *deux* points modulaires P′.

[2] Ou impairement pair.

appartiennent au même GENRE : *les courbes hyperabéliennes* C, C′, C″, ..., *respectivement associées aux classes* 4Σ, $4\Sigma'$, ..., *sont géométriquement du même* GENRE, *et se correspondent point par point; ces correspondances univoques sont réalisées par des transformations singulières du premier degré* ([1]).

77. Reprenons l'ensemble des transformations singulières non équivalentes de degré *un* (nº **70**); leur nombre N est (*ibid.*) celui des solutions non équivalentes de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1.$$

Il résulte de ce qui précède qu'à un point P de la courbe C, associée à la classe 4Σ, ces transformations font correspondre N points modulaires *distincts*, dont l'un coïncide avec P (nº **70**). Parmi ces N points, les uns sont sur la courbe C elle-même, les autres sont sur les courbes C′, C″, ..., associées aux classes $4\Sigma'$, $4\Sigma''$, ... de l'énoncé ci-dessus.

Pour que le point modulaire déduit de P par une transformation T, d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$, soit sur C, il faut que T change le système de deux relations singulières dont dérive C en un système donnant une forme équivalente à la forme 4φ, liée à C. La question revient donc à chercher dans quel cas la forme $\psi(x, y)$, définie par (79), à savoir :

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = \mathrm{D}(\lambda x + l\mu' y)^2 - 2q'(\lambda x + l\mu' y)(-\mu x + l\lambda' y)\\ + p(-\mu x + l\lambda' y)^2 - k^2(p\mathrm{D} - q'^2)y^2,\end{aligned}$$

sera équivalente à la forme

$$\varphi(x, y) = \mathrm{D}x^2 + 2q'xy + py^2,$$

et, par suite, d'après le nº **74**, à trouver les représentations propres de

---

([1]) *Classes ambiguës.* — Si le genre contient des classes ambiguës, la courbe associée à l'une d'elles correspond *point par couple* à chacune des courbes associées aux classes non ambiguës : cette correspondance (1, 2) est encore réalisée, d'après la note précédente, par une transformation singulière du premier degré. Les courbes associées aux classes non ambiguës ont, entre elles, des correspondances univoques.

la forme $\varphi(x, y)$ par la forme ternaire

$$\mathfrak{F}(X, Y, Z) = DX^2 - 2q'XY + pY^2 - (pD - q'^2)Z^2.$$

Or, si l'on applique la théorie classique de Gauss, on trouve qu'elles se déduisent toutes de la représentation propre

$$X = x, \qquad Y = -y, \qquad Z = 0,$$

par les transformations en elle-même de la forme $\mathfrak{F}$.

En d'autres termes, en vertu de la réciprocité entre les formes $z^2 - \varphi$ et $\mathfrak{F}$, la forme $\psi(x, y)$ sera équivalente à $\varphi(x, y)$ si l, $k\lambda$, $k\mu$ est une solution de l'équation

$$l^2 - k^2 \varphi(\lambda, \mu) = 1,$$

déduite de la solution

$$l = 1, \qquad k\lambda = 0, \qquad k\mu = 0,$$

par une des transformations en elle-même de la forme

$$l^2 - \varphi(k\lambda, k\mu).$$

De même, deux formes ψ et ψ_1, répondant respectivement aux valeurs l, $k\lambda$, $k\mu$ et l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$, seront équivalentes entre elles lorsque la solution l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$ de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1$$

se déduira de la solution l, $k\lambda$, $k\mu$ par une des transformations du premier membre en lui-même, et réciproquement.

Si donc on appelle *solutions fondamentales* de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1$$

des solutions dont on peut déduire toutes les autres par les transformations en elle-même de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$, on voit que leur nombre, n, est précisément égal à celui des courbes C, C′, C″, ..., c'est-à-dire au nombre des classes de formes de même genre que $\varphi(x,y)$ [1].

Enfin, parmi les N points modulaires que font correspondre à P toutes les transformations singulières de degré *un*, il y en a $\frac{N}{n}$ sur chacune des courbes C, C′, C″, ..., qui admet ainsi $\frac{N}{n}$ transformations univoques [2] en elle-même, y compris la transformation unité.

78. Ces résultats s'étendent sans difficulté aux autres cas, et, en particulier, à celui des formes non primitives.

Par exemple, soit S un système initial de deux relations singulières donnant naissance à une forme 4φ, telle que φ, après division par un nombre impair Ω, soit une forme $\frac{\varphi}{\Omega}$ primitive, de déterminant impair. Une transformation singulière de degré *un* change S en un système analogue, S_1, qui donne naissance à une forme $4\varphi_1$: la forme φ_1 admet le diviseur Ω, et la forme $\frac{\varphi_1}{\Omega}$ est primitive, de même déterminant et de même genre que $\frac{\varphi}{\Omega}$. La réciproque est vraie; on peut donc dire que si ψ, ψ_1, ... sont des formes non équivalentes, primitives, de même déterminant impair et de même genre, les groupes de courbes hyperabéliennes associées respectivement aux formes $4\Omega\psi$, $4\Omega\psi_1$, ..., se transforment les uns dans les autres par des transformations singulières du premier degré.

Représentations d'une forme binaire par la forme $x^2 - 4yz - 4tu$.

79. Nos théories générales se lient étroitement à la représentation d'une forme quadratique binaire positive par la forme à cinq variables $x^2 - 4yz - 4tu$.

---

(1) On suppose que ce genre ne renferme pas de classe ambiguë; s'il en est autrement, il est aisé de modifier les résultats du texte.

(2) Et involutives. Car le carré d'une transformation singulière conduit à des périodes reproduisant le point modulaire initial. (Ce Journal, 5e série, t. VI, p. 324.)

Soit, pour fixer les idées, $\varphi(x, y)$ une forme positive, proprement primitive et de déterminant impair [1]; proposons-nous de représenter proprement 4φ par la forme à cinq variables; il faut pour cela déterminer des entiers A, B, C, D, E; A′, B′, ..., E′, tels qu'en posant

$$\begin{aligned} X &= Bx + B'y, \\ Y &= Ax + A'y, \\ Z &= Cx + C'y, \\ T &= Dx + D'y, \\ U &= Ex + E'y, \end{aligned}$$

on ait identiquement

$$4\varphi(x, y) = X^2 - 4YZ - 4TU,$$

ce qui exige que B et B′ soient pairs. Pour que la représentation soit propre, il faut que les mineurs d'ordre *deux* contenus dans la matrice

$$\begin{matrix} B, & A, & C, & D, & E, \\ B', & A', & C', & D', & E' \end{matrix}$$

n'aient pas de facteur commun.

On peut dire dès lors que 4φ est la forme associée au système *propre* des deux relations singulières

$$(S) \qquad \begin{cases} Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0, \\ A'g + B'h + C'g' + D'(h^2 - gg') + E' = 0. \end{cases}$$

Cela posé, d'une solution particulière A, A′, ..., E, E′, on en déduit une infinité d'autres en effectuant sur les deux relations précédentes une transformation ordinaire quelconque du premier degré, car cette opération n'altère pas (n° **16**) la forme associée au système. On aura donc une nouvelle solution en remplaçant A, B, C, D, E par les A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 donnés par les formules (3) du n° **1**, et A′, ..., E′ par les expressions homologues.

---

(1) Ou impairement pair.

Je dis qu'on obtient ainsi toutes les représentations propres de 4φ par la forme à cinq variables.

Car si $\beta, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon; \beta', \alpha', \ldots, \varepsilon'$ est une solution du problème, le système propre

$$(\mathrm{S}') \qquad \begin{cases} \alpha g + \beta h + \gamma g' + \delta(h^2 - gg') + \varepsilon = 0, \\ \alpha' g + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon' = 0 \end{cases}$$

est réductible au système (S) par une transformation ordinaire T de degré *un*, puisque ces deux systèmes ont pour forme associée une même forme 4φ, et que φ est proprement primitive et de déterminant impair [1]. Soient alors $F = 0$, $F' = 0$ les deux équations (S); $\Phi = 0$ et $\Phi' = 0$ les deux équations (S'); la transformation T change respectivement $F = 0$ et $F' = 0$ en $\lambda\Phi + \lambda'\Phi' = 0$; $\mu\Phi + \mu'\Phi' = 0$, les entiers $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant tels que $\lambda\mu' - \mu\lambda' = \pm 1$, puisqu'un système propre se transforme en un système propre. Or, par hypothèse, $\varphi(x, y)$ est l'invariant des relations $xF + yF' = 0$ et $x\Phi + y\Phi' = 0$; c'est donc aussi celui de la relation $x(\lambda\Phi + \lambda'\Phi') + y(\mu\Phi + \mu'\Phi') = 0$, transformée par T d'une des précédentes, de sorte qu'on a identiquement

$$\varphi(x, y) = \varphi(\lambda x + \mu y, \lambda' x + \mu' y).$$

On en conclut, en admettant que φ n'appartienne pas à une classe ambiguë, que l'on a

$$\lambda = \mu' = \pm 1, \qquad \mu = \lambda' = 0,$$

c'est-à-dire que les relations $F = 0$, $F' = 0$ sont transformées par T en $\eta\Phi = 0$, $\eta\Phi' = 0$, la quantité η désignant ± 1. En d'autres termes, $\alpha, \ldots, \varepsilon$ sont donnés (au signe près) en fonction de A, B, C, D, E par les relations (3) du n° **1**, et $\alpha', \ldots, \varepsilon'$ le sont, en fonction de $A', \ldots, E'$, par les relations homologues. C. Q. F. D.

Des raisonnements semblables s'appliquent à une forme quelconque de l'un des types $4\varphi(x, y)$ ou $4\varphi(x, y) + y^2$: d'une représentation

---

(1) Ou impairement pair.

propre de cette forme par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$, on en déduit une infinité d'autres par les formules (3) du n° **1**, c'est-à-dire, en réalité, par les transformations en elle-même de la forme à cinq variables indiquées au n° **2**. Nous dirons que toutes les représentations ainsi obtenues forment un *système* de représentations. Cela posé, on reconnaît immédiatement qu'il y a autant de systèmes de représentations qu'il y a de systèmes de deux relations singulières, irréductibles l'un à l'autre par des transformations ordinaires de degré 1, et donnant naissance à une forme binaire équivalente à la forme considérée.

Ou encore :

Le nombre des courbes hyperabéliennes associées à une classe de formes binaires positives, de l'un des types

$$4\varphi(x,y) \quad \textit{et} \quad 4\varphi(x,y)+y^2,$$

est égal au nombre des systèmes de représentations propres de cette forme par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$.