JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LE ROUX

Recherches sur les équations aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 403-455.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__403_0>

Recherches sur les équations aux dérivées partielles;

PAR M. J. LE ROUX.

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS D'UNE INFINITÉ DE VARIABLES.

1. *Utilité de la considération des fonctions d'une infinité de variables.* — Les intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles dépendent, en général, d'une infinité dénombrable de constantes arbitraires; ce sont, par exemple, les valeurs de certaines dérivées, ou de certaines fonctions des dérivées, en un point déterminé. Sans doute, dans l'étude des conditions de détermination et de convergence, il est d'usage de grouper les constantes de manière à constituer des ensembles finis de fonctions et de constantes arbitraires. Il ne faut pas se dissimuler cependant que le groupement des constantes sous forme de fonctions initiales est purement artificiel dans la plupart des cas. Cette méthode a l'avantage d'éviter la considération directe des ensembles infinis; elle donne une image simple du degré d'indétermination et se prête avec facilité à la définition des conditions de convergence. Mais quand on cherche à constituer, dans l'ensemble des intégrales, des groupes naturels, il est indispensable de considérer la totalité des paramètres introduits, sans se préoccuper de les rapporter à telle ou telle fonction initiale.

On est amené ainsi à considérer les fonctions d'une infinité de variables indépendantes. Les fonctions qui s'introduisent dans la théorie des équations aux dérivées partielles appartiennent d'ailleurs à un type simple, jouissant de propriétés remarquables, que nous allons d'abord définir.

2. *Éléments variables dont dépendent les intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles.* — Soit S un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles définissant m fonctions inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Posons

$$p_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On sait qu'en adjoignant aux équations du système S celles que l'on obtient en les différentiant indéfiniment on peut calculer quelques-unes des fonctions z et certaines dérivées p en fonction des autres quantités z et p qui restent arbitraires. Les premières sont les dérivées principales de MM. Méray et Riquier, les secondes les dérivées paramétriques. Ou bien encore, sous une forme plus symétrique, on peut, comme le propose M. Tresse, exprimer les z et leurs dérivées en fonction de certains paramètres et des variables indépendantes, de la manière que nous allons indiquer : les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_m$ seront exprimées à l'aide des x et de ε_0 paramètres: $u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,\varepsilon_0}$, appelés *paramètres d'ordre zéro*; les dérivées du premier ordre s'exprimeront à l'aide des x, des paramètres d'ordre zéro et de ε_1 nouveaux paramètres appelés *paramètres du premier ordre*, etc.

En général, les dérivées d'un ordre donné ν seront des fonctions des x et des paramètres d'ordre égal ou inférieur à ν.

Nous appellerons *paramètres fondamentaux* les paramètres u ainsi introduits, et nous les rangerons en série linéaire, par ordre croissant, les paramètres d'un même ordre étant placés suivant une loi quelconque. Nous affecterons chacun d'un seul indice égal à son rang : $u_1, u_2, u_3, \ldots$

Les paramètres u sont des fonctions des x, des z et de leurs dérivées, telles que les paramètres d'un ordre déterminé ν ne contiennent pas les dérivées d'ordre supérieur à ν, mais dépendent nécessairement de quelques-unes des dérivées d'ordre ν. Elles sont d'ailleurs susceptibles d'une infinité d'expressions, équivalentes entre elles en vertu des équations du système S.

3. *Propriétés fondamentales des solutions.* — Si nous donnons aux variables x, u, des valeurs initiales x_i^0, u_i^0, les dérivées $p_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ prendront des valeurs $p^0_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ et l'on aura, pour représenter les fonctions inconnues, les séries de Taylor

$$(1)\quad z_i = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} p^0_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \frac{(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\,\frac{(x_1-x_2^0)^{\alpha_2}}{\alpha_2!}\cdots\frac{(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}}{\alpha_n!}.$$

Ces séries jouissent des propriétés suivantes, fondamentales pour la suite :

I. *Les différents termes sont des fonctions analytiques de tous leurs éléments x, x^0, u^0; les termes d'ordre ν ne dépendent pas des paramètres d'ordre supérieur à ν.*

Chaque terme est donc une fonction d'un nombre fini d'éléments variables x, x^0, u^0, mais ce nombre croît en général indéfiniment avec le rang du terme considéré.

II. *Dans le domaine des quantités complexes on peut assigner pour chacun de ces éléments variables une aire simple de variation*

$$\mathrm{A}x_1,\quad \mathrm{A}x_2,\quad \ldots,\quad \mathrm{A}x_1^0,\quad \ldots,\quad \mathrm{A}u_1^0,\quad \ldots,$$

telle que pour tous les systèmes de valeurs de ces variables qui sont intérieures aux aires correspondantes, les séries considérées soient uniformément convergentes.

Cette propriété est une conséquence immédiate de la démonstration qu'on donne habituellement de l'existence des intégrales par la méthode des fonctions majorantes, pourvu que l'on prenne comme paramètres fondamentaux les dérivées paramétriques de MM. Méray et Riquier. Dans le cas général, nous supposerons les paramètres choisis de telle façon que la propriété subsiste. Nous appellerons domaine A celui qui est constitué par l'ensemble des valeurs des éléments variables intérieures aux aires considérées.

Il importe de remarquer que le domaine A n'est pas le domaine d'existence des fonctions z_i mais un domaine *restreint* où ces fonctions existent certainement et où l'on peut les soumettre à des opérations déterminées.

III. *Étant donné un nombre positif* ε, *on peut déterminer un nombre* μ *tel qu'en négligeant dans les séries* (1) *les termes qui contiennent les paramètres d'indice supérieur à* μ *le module du reste négligé soit inférieur à* ε, *pour toutes les valeurs des variables intérieures au domaine* A.

Cette propriété est une conséquence de la précédente, puisque le rang des termes qui contiennent les paramètres d'indice supérieur à μ croît indéfiniment avec le nombre μ.

IV. *Les séries* (1) *représentent des fonctions analytiques de chacune des variables* x, x^0, u^0, *et même de tout ensemble contenant un nombre* fini *de ces variables.*

4. *Domaine* restreint *dans un champ d'une infinité de variables.* — Nous allons maintenant entreprendre directement l'étude des fonctions d'une infinité de variables qui présentent en tout ou en partie les caractères que nous venons de définir.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ des variables formant un ensemble infini dénombrable. Il faut d'abord définir pour cet ensemble un domaine *restreint* de variation. S'il s'agit de quantités réelles nous ferons correspondre à chaque variable x_n un intervalle (a_n, b_n), $(a_n < b_n)$; l'ensemble des inégalités

$$a_n < x_n < b_n$$

définira le domaine. S'il s'agit de quantités complexes on représentera chaque variable x_n par un point d'un plan et on lui fera correspondre dans son plan une aire simple A_n dans laquelle le point considéré devra rester enfermé. Nous supposerons dans tous les cas, pour le domaine *restreint*, que les limites relatives à chaque variable x_n (soient les nombres a_n, b_n; soit le contour de l'aire A_n) sont indépendantes des valeurs attribuées aux autres variables dans leurs limites respectives.

Ici se présente une considération qui n'a pas d'analogie dans la théorie des fonctions d'un nombre limité de variables; lorsque n croît indéfiniment, il peut exister une infinité de différences $b_n - a_n$ inférieures à tout nombre positif ε sans être rigoureusement nulles. Un fait analogue est égalment possible pour les variables complexes. Si cette circonstance se présente, nous dirons que le domaine est *évanouissant.*

En général, les résultats qui vont suivre sont applicables aussi bien aux domaines *évanouissants* qu'aux domaines *non évanouissants.* Cependant, certains énoncés, certains procédés de raisonnement demanderaient quelquefois une légère modification. C'est pourquoi nous supposerons en général le domaine *non évanouissant.* On peut toujours évidemment, par un changement de variables, rendre le domaine considéré non évanouissant.

Nous appelons A le domaine défini par les limites considérées et nous regardons tout ensemble de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, comme les coordonnées d'un point x.

Le point x appartient au domaine A si toutes ses coordonnées sont enfermées dans les limites correspondantes.

5. *Fonctions d'une infinité de variables. Fonctions convergentes.* — Une fonction $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ est définie dans le domaine A si à tout point x du domaine correspond une valeur bien déterminée pour la fonction.

La définition de la continuité, dans un domaine non évanouissant, est la même que pour les fonctions d'un nombre limité de variables.

La fonction $f(x)$ est continue dans le domaine non évanouissant A si, étant donné un nombre positif arbitraire ε, on peut trouver un nombre η tel que les inégalités

$$|h_n| < \eta$$

entraînent la suivante :

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

[On a posé $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n, \ldots) = f(x+h)$].

Ces définitions sont indépendantes de la manière dont on établira la correspondance entre la valeur de $f(x)$ et le système de valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Il y a lieu maintenant d'introduire une notion nouvelle, celle de *fonction convergente*.

Soit x^0, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots)$ un point déterminé du domaine A; $x^0 + h$, $(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots)$ un autre point arbitraire du domaine. Désignons par

$$f_m(x^0 + h, x^0) = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \ldots)$$

la fonction qu'on obtient en négligeant dans $f(x^0 + h)$ les accroissements $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots$ de toutes les variables dont l'indice est supérieur à m. Nous dirons que la fonction $f(x)$ est *convergente*, si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre m', tel que l'inégalité

$$(2) \qquad m > m'$$

entraîne pour conséquence

$$(3) \qquad |f(x^0 + h) - f_m(x^0 + h, x^0)| < \varepsilon.$$

Lorsqu'on regarde le point x^0 comme fixe et les h comme des quantités variables, la limite trouvée m' dépendra en général des h. Nous dirons que la fonction est *uniformément convergente* si l'on peut choisir m' de telle façon que l'inégalité (2) entraîne l'inégalité (3), quels que soient les h, sous la seule condition que le point $x^0 + h$ soit intérieur à A.

Si la limite m' peut être prise indépendante des h, on peut aussi la prendre indépendante des x^0. La démonstration est immédiate, en remarquant que l'on a identiquement

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0 + h_{m+1}, \ldots) \\ & - f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0 + k_{m+1}, \ldots, x_{m+p}^0 + k_{m+p}, \ldots) \\ & = [f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0 + h_{m+1}, \ldots) \\ & \qquad\qquad - f_m(x^0 + h, x^0)] \\ & - [f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0 + k_{m+1}, \ldots, x_{m+p}^0 + k_{m+p}, \ldots) \\ & \qquad\qquad - f_m(x^0 + h, x^0)]. \end{aligned} \right.$$

Il est visible que la définition que nous donnons des fonctions convergentes ou uniformément convergentes comprend celle des séries, des produits infinis, etc. Dans une série $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$, la somme S est la limite de la somme S_n obtenue en attribuant la valeur zéro à tous les termes dont l'indice surpasse n; dans un produit infini, c'est par l'unité qu'on remplace les facteurs dont le rang surpasse une certaine limite. Le choix de la valeur de comparaison x^0 est suggéré par la nature de la question dans ces exemples simples; cependant, on pourrait aussi dans une certaine mesure la regarder comme arbitraire.

Une fonction peut évidemment être convergente et même uniformément convergente sans être continue. De même elle peut exister et même être continue sans être convergente. L'exemple le plus simple nous en est fourni par le prolongement d'une série de Taylor en dehors de son cercle de convergence.

Soit $f(z)$ une fonction analytique de z dans une aire simple C contenant l'origine; en désignant par x_0, x_1, ..., les valeurs des dérivées pour $z = 0$, on a donc à l'intérieur du cercle de convergence

$$f(z) = x_0 + \frac{x_1}{1} z + \frac{x_2}{1.2} z^2 + \ldots. \tag{5}$$

Regardons cette valeur comme une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, z$, et désignons-la par $\varphi(x, z)$. Les variables x_1, x_2, ..., x_n, ... pourront parcourir le champ entier des valeurs des x pour lesquels la fonction $f(z)$ reste analytique dans l'aire C.

Soit α un point de l'aire C extérieur au cercle de convergence de la série (5). La fonction $\varphi(x, \alpha)$, dans laquelle on regarde α comme une constante numérique, est bien déterminée et même continue, mais elle n'est pas convergente. On a en effet

$$\varphi_m(x, 0, \alpha) = x_0 + \frac{x_1 \alpha}{1} + \frac{x_2}{1.2}\alpha^2 + \ldots + \frac{x_m}{m!}\alpha^m,$$

et cette expression ne tend pas vers $\varphi(x, \alpha)$ quand m croît indéfiniment.

Il y a donc lieu d'établir une distinction entre le domaine d'existence et le domaine de convergence d'une fonction d'une infinité de variables. On peut rapprocher ces réflexions des considérations de M. Borel sur les séries divergentes.

6. *Séries normales.* — Une fonction convergente peut être représentée par une série convergente dont chaque terme de rang fini ne contient qu'un nombre limité de variables.

En effet, la série

$$(6)\quad \begin{cases} f_0(x^0) + [f_1(x^0+h, x^0) - f(x^0)] \\ \qquad + [f_2(x^0+h, x^0) - f_1(x^0+h, x^0)] + \ldots \end{cases}$$

satisfait aux conditions énoncées et a pour limite $f(x^0+h)$.

De plus, si cette fonction est *uniformément convergente*, la série l'est également.

La série (6) n'est qu'un cas particulier des séries que nous appelons *normales* et qui sont caractérisées par les propriétés suivantes :

1° Elles sont uniformément convergentes dans le domaine considéré;

2° Chaque terme de rang fini ne contient qu'un nombre fini de variables.

Toute série normale représente une fonction uniformément convergente.

Les séries qui représentent les intégrales analytiques des équations aux dérivées partielles sont des séries normales.

7. *Calculs sur les fonctions uniformément convergentes. Séries dont les termes sont des fonctions uniformément convergentes.* — On peut effectuer, sur les fonctions uniformément convergentes, les opérations ordinaires de l'Algèbre : les résultats sont encore des fonctions uniformément convergentes.

La somme ou le produit d'un nombre limité de fonctions uniformément convergentes est une fonction uniformément convergente.

Le quotient de deux fonctions uniformément convergentes est une fonction uniformément convergente, pourvu que le dénominateur soit différent de zéro dans le domaine considéré. Considérons maintenant une série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_i + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions uniformément convergentes dans le domaine A. Supposons, d'autre part, que cette série soit uniformément convergente dans A. Je dis qu'elle y représente une fonction uniformément convergente.

Désignons par $S^{(i)}(x)$ la somme des i premiers termes et par $S_m^{(i)}(x^0+h,x^0)$, ce que devient $S^{(i)}(x^0+h)$ quand on y néglige les accroissements des variables dont l'indice est supérieur à m. Soit de même $S(x)$ la somme de la série considérée, $S_m(x^0+h,x^0)$ ayant la signification ordinaire.

Il s'agit de démontrer que

$$S(x^0+h,x^0)-S_m(x^0+h,x^0)$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

C'est là une conséquence immédiate de l'identité

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &S(x^0+h)-S_m(x^0+h,x^0)\\ &\quad=[S(x^0+h)-S^{(i)}(x^0+h)]+[S^{(i)}(x^0+h)-S_m^{(i)}(x^0+h,x^0)]\\ &\quad\quad-[S_m(x^0+h,x^0)-S_m^{(i)}(x^0+h,x^0)].\end{aligned}\right.$$

Ayant choisi un nombre positif ε, on peut, en vertu de la convergence uniforme, trouver un nombre i' tel que l'inégalité

$$i>i'$$

entraîne

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &|S\ (x^0+h)\ \ -S^{(i)}(x^0+h)|<\frac{\varepsilon}{3}\\ &|S_m(x^0+h,x^0)-S_m^{(i)}(x^0+h)|<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}\right.$$

quel que soit l'indice m. Le nombre i étant fixé et choisi de manière à satisfaire à cette condition, la fonction $S^{(i)}(x)$ est uniformément convergente; on peut donc trouver un nombre m' tel que l'inégalité $m>m'$ ait pour conséquence

$$(9)\qquad |S^{(i)}(x^0+h)-S_m^{(i)}(x^0+h,x^0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

En réunissant les résultats (7), (8), (9) on arrive donc à cette conclusion qu'il est possible de déterminer un nombre m' tel que l'inégalité $m > m'$ entraîne

$$|S(x^0+h) - S_m(x^0+h, x^0)| < \varepsilon.$$

La proposition suivante se démontrerait comme pour un nombre limité de variables :

Une série uniformément convergente dans un domaine A *et dont les termes sont des fonctions continues dans ce domaine y représente une fonction continue.*

8. *Fonctions analytiques.* — Les propriétés des fonctions analytiques peuvent s'étendre aux fonctions $f(x)$ d'une infinité de variables, uniformément convergentes dans un domaine A, et telles que $f_m(x^0+h, x^0)$ soit une fonction analytique de $h_1, h_2, \ldots, h_m$, quelque grand que soit m. Nous dirons que toute fonction $f(x)$ possédant ces caractères est une fonction analytique de l'ensemble infini $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, dans le domaine considéré.

La fonction $f(x)$ étant uniformément convergente est développable en série normale :

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x) + \ldots.$$

Remplaçons-y x par $x^0 + th$ et supposons les h assez petits pour que les points $x^0 + th$ restent intérieurs au domaine A pour toutes les valeurs de t de module inférieur ou égal à *un*. La série

$$f(x^0+th) = u_0(x^0+th) + u_1(x^0+th) + \ldots + u_n(x^0+th) + \ldots$$

a pour termes des fonctions analytiques de t et, en y regardant t comme la seule variable, elle est uniformément convergente à l'intérieur du cercle de rayon *un*, ayant pour centre l'origine. Cette série représente donc une fonction analytique de t qu'on peut développer en série de Mac-Laurin. Le coefficient de t^p dans le développement est égal à l'intégrale de Cauchy

$$U_p(x^0, h) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x^0+zh)}{z^{p+1}}\, dz,$$

évaluée suivant la circonférence de rayon *un* ayant pour centre l'origine ou suivant tout autre contour équivalent.

Nous allons faire voir que $U_p(x^0, h)$ *est une fonction uniformément convergente des h dans un domaine restreint.* Soit en effet $U_p^{(m)}(x^0, h, 0)$ l'expression obtenue en remplaçant par des zéros tous les h dont l'indice surpasse m. On a

$$U_p(x^0,h) - U_p^{(m)}(x^0,h,0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x^0+zh) - f_m(x^0+zh, x^0)}{z^{p+1}}\, dz.$$

Le module de la différence

$$f(x^0+zh) - f_m(x^0+zh, x^0)$$

reste inférieur à un nombre positif, ε_m, et l'intégration est effectuée suivant une circonférence de rayon *un*.

Il en résulte donc, d'après un théorème de M. Darboux :

$$\text{mod}\,[U_p(x^0,h) - U_p^{(m)}(x^0,h,0)] < \varepsilon_m.$$

Le nombre ε_m tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Notre proposition est donc démontrée.

La fonction $U_p^{(m)}(x^0, h, 0)$ est dérivée d'une fonction de m variables indépendantes, les variables dont l'indice est supérieur à m étant regardées comme des constantes.

On a donc

$$U_p^{(m)}(x^0, h, 0) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1^0} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2^0} + \ldots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m^0}\right)^{(p)} f(x^0).$$

La fonction $U_p(x^0, h)$ étant la limite de $U_p^{(m)}(x_0, h, 0)$, lorsque m croît indéfiniment, nous poserons aussi

$$(10) \qquad U_p(x^0, h) = \left(\sum_0^{\infty}{}^i\, h_i \frac{\partial}{\partial x_i^0}\right)^{(p)} f(x^0).$$

En réunissant ces résultats, nous avons le théorème suivant :

La fonction analytique $f(x^0+h)$ est développable dans un *domaine restreint en série uniformément convergente par la formule*

$$f(x^0+h)=\mathrm{U}_0(x^0)+\mathrm{U}_1(x^0,h)+\mathrm{U}_2(x^0,h)+\ldots+\mathrm{U}_p(x^0,h)+\ldots,$$

le terme général $\mathrm{U}_p(x_0,h)$ *de la série étant une fonction uniformément convergente des* h, *définie par l'égalité*

$$(11)\qquad \mathrm{U}_p(x^0,h)=\left(\sum_0^\infty{}^i h_i\frac{\partial}{\partial x_0^i}\right)^{(p)} f(x^0).$$

Je ne m'arrête pas à énumérer toutes les conséquences intéressantes que l'on pourrait déduire de ce théorème concernant les expressions infinies. Je me borne à signaler la suivante que l'on obtient par la considération du premier terme dépendant des h :

$$\mathrm{U}_1(x^0,h)=\sum_0^\infty{}^i h_i\frac{\partial f}{\partial x_0^i}.$$

Soient A *un domaine restreint,* A′ *un domaine contenu dans* A; *soient d'autre part* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots,$ *des fonctions existant dans* A′ *et jouissant de la propriété suivante : à tout point* x *de* A′ *on peut faire correspondre un nombre positif* t_x *tel que le point* $(x+t\varphi)$ *ayant pour coordonnées*

$$x_1+t\varphi_1,\quad x_2+t\varphi_2,\quad \ldots,\quad x_n+t\varphi_n,\quad \ldots,$$

soit contenu dans A *pour toutes les valeurs de* t *dont le module est inférieur à* t_x. *La série*

$$\varphi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\varphi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\varphi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\ldots$$

est alors convergente dans le domaine A′, *si* $f(x)$ *désigne une fonction quelconque analytique dans* A.

9. *Propriétés des dérivées.* — On est conduit à d'intéressantes propriétés des dérivées par la considération de la différence

$$\begin{aligned} f(x)-f_m(x,x^0) &= f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots) \\ &\quad - f(x_1,\ldots,x_m,x^0_{m+1},x^0_{m+2},\ldots) \end{aligned}$$

dont le module reste inférieur à une limite ε_m qui tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

Prenons la dérivée de cette différence par rapport à l'une des variables x_i, et distinguons deux cas :

1° $\quad i \leqq m$,

2° $\quad i > m$.

Soit d'abord $i = m - \alpha$. Supposons que dans son plan la variable x_i soit représentée par un point situé à une distance supérieure ou égale à δ_i du contour de l'aire A_i.

Nous avons alors

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_{m-\alpha}} - \frac{\partial f_m(x,x^0)}{\partial x_{m-\alpha}} \right| \leqq \frac{\varepsilon_m}{\delta_{m-\alpha}}.$$

D'où l'on déduit cette proposition :

Les dérivées d'une fonction analytique uniformément convergente sont elles-mêmes des fonctions analytiques uniformément convergentes.

Si l'on a, en second lieu, $i = m + \alpha$, la dérivée $\frac{\partial f_m}{\partial x_{m+\alpha}}$ est nulle, et l'on se trouve conduit à l'expression d'une limite supérieure de la dérivée de la fonction $f(x)$

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_{m+\alpha}} \right| \leqq \frac{\varepsilon_m}{\delta_{m+\alpha}}.$$

La même méthode s'appliquerait évidemment aux dérivées d'ordre supérieur, et l'on trouverait

$$\operatorname{mod} \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_r} f(x)}{\partial x^{p_1}_{m+\alpha_1}\, \partial x^{p_2}_{m+\alpha_2}\, \partial x^{p_r}_{m+\alpha_r}} \leqq \frac{p_1!\, p_2! \ldots p_r!\, \varepsilon_m}{\delta^{p_1}_{m+\alpha_1}\, \delta^{p_2}_{m+\alpha_2}\, \delta^{p_r}_{m+\alpha}}.$$

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS QUI DÉPENDENT D'UNE INFINITÉ DE CONSTANTES ARBITRAIRES.

10. *Définition des ensembles de fonctions.* — Je considère des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$, dépendant de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, en nombre illimité :

$$(12) \qquad \begin{cases} z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots) = \varphi_1(x, a), \\ z_2 = \varphi_2(x, a), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_p = \varphi_p(x, a). \end{cases}$$

Je suppose que toutes ces fonctions sont analytiques par rapport à la totalité des arguments x, a, dont elles dépendent, et uniformément convergentes dans un domaine restreint des a.

Les séries

$$(13) \qquad \delta z_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_k}\delta a_k + \ldots$$

admettent alors un domaine de convergence uniforme sans que les δa_i soient astreints à aucune condition exprimable par des égalités. Elles définissent donc de nouvelles fonctions analytiques uniformément convergentes des x, a, δa.

J'appelle *ensemble de fonctions* la totalité des fonctions du système (12) quand les constantes a parcourent les systèmes de valeurs dout elles sont susceptibles.

En attribuant aux constantes des valeurs déterminées, l'on a un système de p fonctions particulières constituant un *élément de l'ensemble.*

Un ensemble *est linéaire* quand les constantes y figurent linéairement. A tout élément de l'ensemble général (12) on peut faire correspondre un ensemble linéaire par les formules (13), dans lesquelles on regarde les δa comme arbitraires, les constantes a ayant reçu des valeurs numériques déterminées. Nous dirons que cet ensemble linéaire et homogène est *associé* à l'élément considéré de l'ensemble (12).

Un ensemble linéaire et homogène est associé à tous ses éléments.

Nous allons nous occuper principalement des ensembles dont chaque élément est composé d'une seule fonction et nous commencerons par les ensembles linéaires et homogènes.

11. *Ensembles linéaires. Fonctions primaires.* — Considérons l'ensemble

$$z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k + \ldots \tag{14}$$

dans lequel on suppose que $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ sont des fonctions analytiques déterminées des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Nous les appellerons les *éléments fondamentaux* de l'ensemble.

Donnons aux constantes des valeurs telles que z et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement s'annulent au point de situation générale $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Au point de vue formel il existe toujours pour les constantes une infinité de valeurs satisfaisant à ces conditions; nous supposerons que les valeurs choisies conservent la convergence de l'expression (14). Nous dirons que l'élément considéré est un *élément d'ordre m* au point ξ. En le développant par la formule de Taylor suivant les puissances de $x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, \ldots, x_n-\xi_n$, on trouve pour l'ensemble des termes du moindre degré un polynome homogène d'ordre m par rapport aux différences $x-\xi$. Nous appellerons ce polynome la *fonction primaire* de l'élément.

Il existe en général une infinité d'éléments d'ordre m et aussi une infinité de fonctions primaires; mais le nombre des fonctions primaires d'ordre m linéairement indépendantes est nécessairement limité puisqu'il n'est jamais supérieur au nombre total des dérivées $m^{\text{ièmes}}$ d'une fonction de n variables, c'est-à-dire à $\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$.

S'il est toujours égal à ce maximum, quel que soit m, nous dirons que l'ensemble considéré est *maximum*.

Il sera toujours possible, dans ce cas, d'attribuer aux constantes des valeurs telles que z et ses dérivées jusqu'à un ordre quelconque prennent au point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des valeurs arbitrairement données d'avance. On pourra donc trouver, dans l'ensemble, des fonctions z telles que la différence

$$z - \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

s'annule au point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à un ordre désigné, aussi grand qu'on voudra, $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant une fonction holomorphe arbitraire.

Sans rien préjuger sur la convergence nous pouvons dire que l'ensemble considéré embrasse alors *formellement* la totalité des fonctions holomorphes de n variables.

Dans ce cas il ne peut exister, entre les dérivées en nombre fini des fonctions de l'ensemble, aucune relation indépendante des a, exprimable par des équations analytiques.

On peut concevoir seulement des relations où figurent une infinité de dérivées ou qui soient exprimables par des équations fonctionnelles. Telles sont, par exemple, dans le champ des fonctions d'une seule variable, les fonctions paires, les fonctions périodiques, etc.

12. *Propriétés des fonctions d'un ensemble linéaire et homogène.* — Les fonctions d'un ensemble linéaire et homogène jouissent de quelques propriétés qui sont des conséquences immédiates de leur définition.

I. *Toute combinaison linéaire et homogène d'un nombre fini ou infini d'éléments de l'ensemble en est également un élément.*

On suppose, bien entendu, que si le nombre des éléments de l'expression considérée est infini, elle n'en conserve pas moins une signification et représente toujours une fonction analytique des variables x dans un domaine déterminé, toujours le même.

II. *Si l'on prend un élément z_m, d'ordre m au point ξ, les dérivées $\frac{\partial z_m}{\partial \xi_i}$ font partie de l'ensemble.*

Ces dérivées sont en général d'ordre $m - 1$ au point ξ.

III. *Toute dérivée non nulle d'une fonction primaire d'ordre m est égale à la fonction primaire d'un élément d'ordre inférieur.*

Soit en effet z_m un élément d'ordre m au point ξ, $\overline{z_m}$ sa fonction primaire; la dérivée $\frac{\partial z_m}{\partial \xi_i}$ a pour fonction primaire, au signe près, $\frac{\partial \overline{z_m}}{\partial x_i}$, à moins que cette dérivée ne soit nulle.

IV. *Toute combinaison linéaire et homogène à coefficients constants, non nulle, de fonctions primaires d'ordre m, est la fonction primaire d'un élément du même ordre.*

Par coefficients constants nous entendons évidemment des coefficients indépendants des x, mais pouvant dépendre des variables ξ.

13. *Équations primaires.* — Supposons que, pour un certain ordre m, le nombre des fonctions primaires linéairement indépendantes soit inférieur au maximum. Nous pourrons, dans ce cas, former une ou plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles, vérifiées par toutes les fonctions primaires de cet ordre et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Chacune d'elles ne contient que des dérivées d'un même ordre;

2° Les coefficients sont indépendants des variables x, mais peuvent contenir les ξ;

3° Toute solution de ces équations, entière et homogène d'ordre m en $x - \xi$, est une fonction primaire.

Pour former ce système il suffit d'avoir l'expression générale des fonctions primaires d'ordre m. Calculons successivement les dérivées premières, secondes, ... Si les dérivées premières sont indépendantes nous passons aux dérivées secondes, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à des dérivées d'un certain ordre p qui ne soient plus linéairement indépendantes. Il existe alors entre elles un certain nombre de relations linéaires et homogènes que nous savons former. Les dérivées d'ordre $p + 1$ vérifient le système déduit du précédent par différentiation, mais elles peuvent en outre être reliées par d'autres équations linéaires qui n'en soient pas des conséquences.

En procédant ainsi de proche en proche, nous construirons les équations que nous avons définies et auxquelles nous donnons le nom d'*équations primaires* relatives à l'ordre m.

A la rigueur on pourrait se contenter de former les équations d'ordre m de ce système, mais il est utile, pour notre but, d'avoir un système formé par les équations de l'ordre le moins élevé possible et dont toutes les autres se déduisent par différentiation.

Les équations primaires relatives à l'ordre m sont de la forme suivante

$$(15)\qquad \sum A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\overline{u}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=0\qquad \begin{matrix}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=r)\\ r\leqq m,\end{matrix}$$

$\overline{u}$ désignant la fonction primaire, r l'ordre de l'équation considérée, les coefficients A étant des fonctions des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

14. *Caractéristiques.* — Prenons une équation primaire relative à l'ordre m et remplaçons-y les dérivées $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\overline{u}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ par les produits $h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\ldots h_n^{\alpha_n}$ de nouvelles variables $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Nous obtenons alors un polynome homogène d'ordre r, $P(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ que nous appelons un *polynome caractéristique* relatif aux éléments d'ordre m. Ce nom, emprunté à la théorie des équations aux dérivées partielles, va se trouver justifié dans la suite.

Pour avoir une image géométrique des équations de la forme

$$(16)\qquad P(h_1, h_2, \ldots, h_n)=0,$$

considérons, dans l'espace à n dimensions, un plan passant au point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, et ayant pour équation

$$(17)\qquad h_1(x_1-\xi_1)+h_2(x_2-\xi_2)+\ldots+h_n(x_n-\xi_n)=0.$$

Nous appelons *élément caractéristique* relatif à l'ordre m, au point ξ, tout plan dont les coordonnées $h_1, h_2, \ldots, h_n$ vérifient l'ensemble des équations de la forme (16).

La détermination de l'ensemble des éléments caractéristiques est un problème purement algébrique qui revient à la recherche des solutions communes aux équations (16). On sait que ces solutions constituent un ensemble complexe auquel correspondent des variétés à une ou plusieurs dimensions tangentielles homogènes [1].

Il peut y avoir par exemple : 1° une variété à $n-1$ dimensions tangentielles homogènes de classe γ_{n-1}, qui correspond à un facteur commun de tous les polynomes P; 2° une variété à $n-2$ dimensions homogènes de classe $\gamma_{n-2}, \ldots$; en dernier lieu on aura un système de γ_1 plans distincts ou confondus. Je donne à cet ensemble d'éléments le nom de *complexe* [2] *caractéristique* relatif à l'ordre m. Les nombres $\gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_1$, toujours rangés dans le même ordre, s'appellent les *indices* du complexe.

Il y a équivalence complète, au point de vue des formes, entre les équations primaires et les polynomes P. D'autre part le complexe caractéristique étant connu, il est toujours possible de former un ensemble d'équations homogènes d'un ordre désigné r vérifié par tous les éléments caractéristiques, et tel en outre que toutes les autres équations d'ordre r vérifiées par ces éléments soient des combinaisons linéaires et homogènes des relations ainsi formées [3].

Il résulte immédiatement de là que la connaissance du complexe caractéristique relatif aux éléments d'un ordre donné détermine complètement les équations primaires correspondantes.

Donc :

Deux systèmes d'équations primaires ayant les mêmes éléments caractéristiques sont équivalents.

Les équations primaires sont susceptibles d'une interprétation géométrique. En égalant à zéro la fonction primaire d'un élément d'ordre m on a l'équation d'un cône dans l'espace à n dimensions.

---

(1) Le nombre de dimensions d'une variété désigne ici pour nous le nombre des *variables homogènes* dont dépend chaque élément de la variété.

(2) Nous employons ici le mot *complexe* parce qu'il s'agit d'une figure composée.

(3) Si r est inférieur à m il n'existe pas nécessairement d'équation d'ordre r de la nature indiquée. Mais quand il en existe on peut toujours les former.

Tous les cônes ainsi obtenus sont *apolaires* par rapport au complexe caractéristique correspondant.

Considérons, en particulier, les fonctions de deux variables indépendantes x et y; le complexe caractéristique se compose d'un système de droites concourantes. Si la courbe représentée par l'équation $z_m = 0$ possède au point ξ, η un point multiple d'ordre m, les m tangentes de la courbe en ce point forment un système *apolaire* par rapport aux droites caractéristiques. Lorsqu'il y a seulement deux droites caractéristiques les m tangentes considérées forment un système cyclo-projectif (1) ayant les caractéristiques pour rayons doubles : le rapport anharmonique du système formé par deux quelconques de ces tangentes et les deux droites caractéristiques est égal à une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

En particulier, lorsque les caractéristiques sont les droites isotropes, les tangentes à la courbe $z_m = 0$ forment une étoile régulière à m rayons.

15. *Changement du complexe caractéristique quand m varie.* — Pour étudier la modification que peut éprouver le complexe caractéristique quand on passe des éléments d'ordre m à ceux d'un ordre différent, nous nous appuierons sur la remarque suivante : lorsqu'une fonction v des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfait à un système d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles, dont les coefficients sont indépendants des variables, les dérivées $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ vérifient le même système.

Il résulte immédiatement de là et des propriétés énoncées au n° **12** que :

Tout polynome homogène d'ordre $m - 1$ en $x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \ldots,$ qui satisfait au système des équations primaires relatives à l'ordre m, est une fonction primaire d'ordre $m - 1$.

Par suite, tout élément caractéristique relatif à l'ordre m est aussi un élément caractéristique relatif à l'ordre $m - 1$ avec un degré de multiplicité au moins égal.

---

(1) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*. Trad. Benoist.

L'inverse n'a pas nécessairement lieu. Il peut exister des éléments caractéristiques relatifs à l'ordre $m-1$, qui cessent d'appartenir au complexe relatif à l'ordre m.

Il résulte de là que les fonctions primaires relatives à l'ordre m satisfont nécessairement aux équations primaires relatives à l'ordre $m-1$ et à celles qui s'en déduisent par différentiation relativement aux variables x. Mais elles peuvent vérifier en outre certaines équations primaires additionnelles qui ne soient pas des conséquences des précédentes.

Si ces équations nouvelles n'existent pas, le complexe caractéristique est le même pour l'ordre $m-1$ et pour l'ordre m. Si elles existent, il y a un *abaissement* du complexe caractéristique, en ce sens que certains ensembles d'éléments cessent d'en faire partie.

On arriverait au même résultat en partant de l'expression des fonctions primaires; l'expression

$$v_m = [h_1(x_1-\xi_1)+h_2(x_2-\xi_2)+\ldots+h_n(x_n-\xi_n)]^m$$

représente une fonction primaire d'ordre m, pourvu que l'élément $h_1, h_2, \ldots, h_n$ soit caractéristique.

Si, de plus, les coordonnées $h_1, h_2, \ldots, h_n$ annulent non seulement les polynomes caractéristiques P, mais encore leurs dérivées partielles par rapport aux h jusqu'à un ordre donné $\mu-1$ inclusivement, c'est-à-dire si l'élément considéré est un élément caractéristique multiple d'ordre μ, les expressions de la forme

$$w_m = Q_{\mu-1}(x-\xi)[h_1(x_1-\xi_1)+h_2(x_2-\xi_2)+\ldots+h_n(x_n-\xi_n)]^{m-\mu+1},$$

où $Q_{\mu-1}$ désigne un polynome arbitraire homogène d'ordre $\mu-1$, représentent encore des fonctions primaires d'ordre m. Inversement, quand ces expressions représentent des fonctions primaires, l'élément $h_1, h_2, \ldots, h_n$ est un élément caractéristique d'ordre μ ou d'ordre supérieur.

En exprimant que les dérivées $\frac{\partial v_m}{\partial x_i}$, $\frac{\partial w_m}{\partial x_i}$ sont des fonctions primaires d'ordre $m-1$, on arrive encore aux conclusions énoncées plus haut.

16. *Indices caractéristiques et complexe caractéristique de l'ensemble.* — Considérons d'après cela l'ensemble $\gamma_{n-1}^m, \gamma_{n-2}^m, \ldots, \gamma_1^m$ des indices du complexe caractéristique relatif à l'ordre m. Le nombre γ_{n-1}^m ne peut augmenter, d'après ce qui précède, quand m croît, sans quoi il s'introduirait des éléments caractéristiques nouveaux; mais il peut arriver que le cône caractéristique de classe γ_{n-1}^m, à $(n-1)$ dimensions tangentielles homogènes, n'appartienne plus en totalité au complexe caractéristique relatif à l'ordre $m+1$.

S'il est irréductible et que l'un de ses éléments cesse d'être caractéristique pour l'ordre $m+1$, il n'y aura plus pour cet ordre, ni pour les ordres supérieurs, de multiplicité caractéristique à $n-1$ dimensions; mais certaines multiplicités à moins de $n-1$ dimensions tangentielles, précédemment situées sur la variété considérée, pourront conserver la propriété d'être caractéristiques et s'adjoindront aux suivantes, ce qui aura pour effet de faire croître les nombres $\gamma_{n-2}^m, \gamma_{n-3}^m, \ldots$. Si la multiplicité caractéristique de classe $n-1$ n'est pas irréductible, une ou plusieurs des parties irréductibles qui la constituent pourront disparaître du complexe, et il en résultera encore l'accroissement possible des nombres $\gamma_{n-2}^m, \gamma_{n-3}^m, \ldots$. Le même raisonnement s'applique aux variétés à moins de $n-1$ dimensions qui entrent dans la composition du complexe caractéristique. En résumé, nous arrivons donc au résultat suivant :

Lorsque m croît, aucun des indices caractéristiques ne peut augmenter, à moins que l'un des indices précédents ne diminue. En particulier, le premier indice γ_{n-1}^m ne peut croître.

Comme les valeurs des indices sont essentiellement positives ou nulles, il arrivera forcément qu'à partir d'une certaine valeur de m ils resteront tous constants.

Soient $\Gamma_{n-1}, \Gamma_{n-2}, \ldots, \Gamma_1$ les valeurs finales; il existe un complexe caractéristique ayant ces nombres pour indices et qui est contenu dans les complexes relatifs à tous les ordres sans exception. Nous l'appelons pour cette raison le *complexe caractéristique* de l'ensemble. A partir d'une certaine valeur de m, le complexe caractéristique relatif à l'ordre m se réduit au complexe commun et le système fondamental des équations primaires reste le même, ou plus exactement, il ne s'y introduit d'autres équations nouvelles que celles qui se déduisent par différentiation des équations d'ordre inférieur.

Pour les fonctions de deux variables indépendantes, il n'existe qu'un seul indice caractéristique Γ_1 que nous appellerons *la classe* (¹) de l'ensemble.

17. *Équations aux dérivées partielles de l'ensemble.* — Les fonctions de l'ensemble considéré satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles que nous allons former, et dont les résultats précédents indiquent des caractères généraux.

Supposons qu'on ait disposé des constantes a_1, a_2, ... de manière que la fonction

$$z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k + \ldots$$

s'annule au point de *situation générale* ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement. Soit, d'autre part, $P_m(\overline{u}) = 0$ une équation primaire d'ordre m et relative aux éléments du même ordre au point ξ. Cette expression $P_m(\overline{u})$ est une combinaison linéaire quelconque des équations primaires fondamentales et de leurs dérivées, ne contenant que les dérivées d'ordre m de la fonction $\overline{u}$. Elle s'annule au point ξ quand on remplace $\overline{u}$ par un élément arbitraire z_m d'ordre m.

D'après cela, le système suivant d'équations linéaires dans lequel on regarde $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ comme les inconnues, et où l'on a donné aux x les valeurs ξ :

$$(18)\qquad \begin{cases} 0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k + \ldots \\ 0 = a_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + a_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \cdots + a_k \dfrac{\partial u_k}{\partial \xi_1} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_1 \dfrac{\partial^{m-1} u_1}{\partial \xi_n^{m-1}} + a_2 \dfrac{\partial^{m-1} u_2}{\partial \xi_n^{m-1}} + \cdots + a_k \dfrac{\partial^{m-1} u_k}{\partial \xi_n^{m-1}} + \cdots \end{cases}$$

(¹) LIE. *Leipz. Berichte*, 1895, p. 123. L'identité de signification est déjà évidente.

entraîne comme conséquence

$$(19) \qquad 0 = a_1 P_m(u_1) + a_2 P_m(u_2) + \ldots + a_k P_m(u_k).$$

On suppose bien entendu que, dans cette dernière équation, on a également donné aux x les valeurs ξ. Comme les éléments fondamentaux u ne dépendent pas des ξ, il est indifférent de faire la substitution avant ou après la différentiation.

Les équations (18) et (19) contiennent une infinité d'inconnues, mais on peut se borner à en considérer un nombre limité p que l'on fera ensuite croître indéfiniment.

Rien ne s'oppose donc à l'application de la théorie générale des formes linéaires.

Formons la matrice infinie

$$(\mathrm{M}) \qquad \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) & \ldots & u_k(\xi) & \ldots \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_k}{\partial \xi_1} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^{m-1} u_1}{\partial \xi_n^{m-1}} & \dfrac{\partial^{m-1} u_2}{\partial \xi_n^{m-1}} & \ldots & \dfrac{\partial^{m-1} u_k}{\partial \xi_n^{m-1}} & \ldots \\ P_m(u_1) & P_m(u_2) & \ldots & P_m(u_k) & \ldots \end{vmatrix}.$$

Comme l'équation (19) est une conséquence du système (18), les éléments de la dernière ligne de la matrice (M) sont des combinaisons linéaires et homogènes des éléments correspondants des lignes précédentes.

Il existe donc au moins une relation linéaire de la forme.

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{c} P_m(u) + \Sigma B_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}} = 0 \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < m). \end{array} \right.$$

qui est vérifiée par tous les éléments fondamentaux de l'ensemble et, par conséquent, par tous les éléments. C'est une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène, d'ordre m, dans laquelle on peut évidemment remplacer les ξ par les x.

Le nombre des équations linéairement indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre m que l'on obtient ainsi est égal au nombre des équations primaires indépendantes de l'ordre considéré. Il est donc entièrement déterminé par le complexe caractéristique correspondant. Il n'existe pas d'autres relations d'ordre m vérifiées par toutes les fonctions de l'ensemble, car en supposant nulles toutes les dérivées d'ordre inférieur à m, on ne doit trouver d'autres relations que celles qui se déduisent des équations primaires.

Nous avons donc le moyen de former progressivement pour les valeurs croissantes de m les équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes auxquelles satisfont les fonctions de l'ensemble.

Supposons que nous ayons construit les équations d'ordre m et d'ordre inférieur; passons aux équations d'ordre $m+1$. Parmi les équations primaires relatives aux éléments d'ordre $m+1$, se trouve le système formé par les dérivées des équations primaires relatives aux éléments d'ordre m. Si le complexe caractéristique reste le même, toutes les équations primaires d'ordre $m+1$ se trouvent formées ainsi, et, dans ce cas, toutes équations aux dérivées partielles d'ordre $m+1$ de notre système s'obtiendront par des combinaisons linéaires des équations d'ordre inférieur et de leurs dérivées. Si, au contraire, l'un des indices diminue, c'est qu'il s'est adjoint au système précédent des équations nouvelles qui n'en sont pas des conséquences. A partir du moment où les indices caractéristiques restent constants, il ne s'ajoute plus aucune équation étrangère, le système est *complet*.

Notre ensemble linéaire de fonctions constitue, pour le système correspondant d'équations aux dérivées partielles, une intégrale générale au sens d'Ampère. D'après la manière dont nous avons procédé pour former ce système, il est visible, en effet, qu'il n'existe pas d'autres équations linéaires vérifiées par toutes les fonctions de l'ensemble. Il n'y a pas non plus d'équations non linéaires distinctes de celles que l'on pourrait former par la combinaison des équations de notre système, car des formes linéaires sont *absolument indépendantes* dès qu'elles sont linéairement indépendantes.

Nous trouvons en définitive le théorème suivant:

A tout ensemble linéaire de fonctions analytiques on peut faire *correspondre un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles dont l'ensemble considéré constitue une intégrale générale au sens d'Ampère.*

18. *Solutions d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles.* — Réciproquement, à tout système *passif* (au sens de MM. Méray et Riquier) d'équations linéaires aux dérivées partielles, on peut faire correspondre un ensemble linéaire convergent de fonctions, car les intégrales du système s'expriment linéairement à l'aide de valeurs que prennent en un point arbitraire les dérivées *paramétriques*, et, de plus, ce sont des fonctions uniformément convergentes de ces paramètres dans un domaine restreint.

La *mesure de la généralité* ou le *degré d'indétermination* des solutions peut être défini par le nombre des dérivées de chaque ordre que l'on peut choisir arbitrairement. Or, considérons les équations primaires relatives à l'ordre m et amenons-les toutes à être d'ordre m par des différentiations. Le nombre des équations distinctes que l'on obtient est précisément égal au nombre des relations distinctes existant entre les dérivées d'ordre m et les dérivées d'ordre inférieur. Les deux systèmes ainsi considérés : d'une part, le système proposé, et, d'autre part, le système des équations primaires des différents ordres, ont entre eux la même correspondance que deux systèmes d'équations linéaires ordinaires de même déterminant dont le premier serait quelconque tandis que le second serait homogène.

Il en résulte que, pour avoir la mesure de la généralité et même les caractères principaux de l'indétermination, il est permis de remplacer les équations du système proposé par les équations primaires, en ayant soin de ramener toutes les équations primaires relatives à l'ordre m à être elles-mêmes d'ordre m.

Les indices caractéristiques de l'ensemble définissent le nombre et la nature des fonctions arbitraires qui déterminent l'intégrale. Il y aura Γ_{n-1} fonctions de $(n-1)$ variables, Γ_{n-2} fonctions de $(n-2)$ variables, etc. Le complexe caractéristique donne ainsi une image très nette de l'indétermination du système.

Quant aux constantes qui achèvent de déterminer la solution, leur nombre dépend des différences successives des indices γ_i^m relatifs aux différents ordres. Il y aurait peut-être avantage à remplacer, au point de vue de l'énumération, la considération des constantes par celle de polynomes d'un nombre donné de variables et d'un ordre déterminé. On pourrait dire, par exemple, que l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre m est déterminée par un polynome d'ordre $m+1$ dans le voisinage d'un point z_0.

Nous ne développerons pas ces considérations dont nous n'aurons pas à faire l'application dans ce travail.

Signalons, pour terminer, cette simple remarque : lorsque le système proposé se réduit à une équation unique et à celles qui s'en déduisent par différentiation, le complexe caractéristique se réduit à un cône à $(n-1)$ dimensions tangentielles homogènes et dont la classe est égale à l'ordre de l'équation de base. Supposons ce cône indécomposable algébriquement. Alors, *toute autre équation linéaire ayant en commun avec la proposée un ensemble d'intégrales dépendant d'une fonction arbitraire de $(n-1)$ variables en admet toutes les intégrales.*

19. *Ensembles non linéaires.* — Considérons maintenant un ensemble non linéaire défini par l'équation

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \tag{21}$$

la fonction φ étant supposée analytique et uniformément convergente par rapport aux a, dans un domaine restreint.

Différentions z par rapport aux x et désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots$ la suite formée par z et ses dérivées rangées par ordre croissant, les dérivées d'un même ordre étant d'ailleurs placées d'une manière quelconque. Prenons toutes les dérivées jusqu'à un ordre déterminé p inclusivement et formons avec ces éléments la matrice suivante :

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{\partial u_1}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial a_\mu} & \cdots \\ \frac{\partial u_2}{\partial a_1} & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial a_\mu} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial a_1} & \frac{\partial u_p}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial u_p}{\partial a_\mu} & \cdots \end{matrix}\right|. \tag{22}$$

Si tous les déterminants d'ordre p de cette matrice ne sont pas nuls identiquement, on pourra trouver des valeurs des constantes donnant aux fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots$ des valeurs désignées d'avance en un point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, de situation générale, sauf les relations d'inégalités relatives à la limitation du domaine, qu'on pourrait être amené à écrire pour que la fonction ξ existe.

Faisons croître m; la même circonstance peut se présenter indéfiniment; dans ce cas, nous dirons encore que l'ensemble considéré est maximum. Sinon, nous arriverons à un certain ordre pour lequel tous les déterminants d'ordre p de la matrice (22) sont nuls. Il existe alors, entre les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, des relations indépendantes des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots$; ces relations sont des équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions de l'ensemble.

L'ensemble linéaire associé à chaque élément de l'ensemble (21) donne lieu à la considération de la même matrice (22). En effet, les éléments fondamentaux de cet ensemble

$$\frac{\partial z}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial a_2}, \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial a_\mu}, \quad \ldots$$

et leurs dérivées par rapport aux x sont précisément les éléments de la matrice. Prenons donc, dans cette matrice, q lignes satisfaisant aux conditions suivantes : 1° les déterminants d'ordre q déduits de ces q lignes sont tous nuls; 2° certains déterminants d'ordre $q-1$ formés avec les $(q-1)$ premières sont différents de zéro. Il existe alors entre les éléments correspondants des q lignes considérées une relation linéaire unique

$$\text{(23)} \qquad A_1 \frac{\partial u_{\alpha_1}}{\partial a_i} + A_2 \frac{\partial u_{\alpha_2}}{\partial a_i} + \ldots + A_q \frac{\partial u_{\alpha_q}}{\partial a_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \infty),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_q$ désignant des fonctions des x et des a.

C'est l'une des équations linéaires auxquelles satisfont les éléments de l'ensemble linéaire associé. Mais, d'un autre côté, les mêmes conditions expriment qu'il existe entre les fonctions $u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots, u_{\alpha_q}$ une relation unique, indépendante des a,

$$(24) \qquad f(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots, u_{\alpha_q}, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

d'où l'on déduit les relations

$$(25) \qquad \frac{\partial f}{\partial u_{\alpha_1}} \frac{\partial u_{\alpha_1}}{\partial a_i} + \frac{\partial f}{\partial u_{\alpha_2}} \frac{\partial u_{\alpha_2}}{\partial a_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_{\alpha_q}} \frac{\partial u_{\alpha_q}}{\partial a_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \infty).$$

La relation (23) étant unique est équivalente à (25).
Donc:

A toute équation linéaire vérifiée par la totalité des éléments de l'ensemble linéaire associé à un élément général de l'ensemble considéré correspond une équation aux dérivées partielles unique à laquelle satisfont les éléments de ce dernier ensemble, et réciproquement.

L'équation (25) appartient au *système auxiliaire* de M. Darboux.
On peut l'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial u_{\alpha_1}} \delta u_{\alpha_1} + \frac{\partial f}{\partial u_{\alpha_2}} \delta u_{\alpha_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_{\alpha_q}} \delta u_{\alpha_q} = 0.$$

Ces résultats ne s'appliquent bien entendu qu'aux éléments généraux de l'ensemble. Il peut exister des éléments singuliers pour lesquels certaines équations de la forme (23) s'évanouiraient identiquement, et la correspondance que nous avons établie cesserait alors d'être complète.

Quand on s'en tient aux éléments généraux, la mesure de l'indétermination de l'ensemble linéaire associé est donc la même que celle de l'ensemble non linéaire proposé, et la considération du système auxiliaire de M. Darboux permet d'appliquer aux ensembles généraux quelques-unes des propriétés des ensembles linéaires.

Nous avons en particulier le théorème suivant:

A tout ensemble non maximum de fonctions analytiques on peut *faire correspondre un système fini d'équations aux dérivées partielles, dont cet ensemble constitue une intégrale générale au sens d'Ampère.*

Le degré de généralité des solutions de ce système est défini par les équations primaires relatives à l'ensemble linéaire associé à l'un quelconque de ses éléments généraux, ou, ce qui revient au même, par les complexes caractéristiques des équations du système auxiliaire de M. Darboux.

La réciproque est évidente. Les solutions d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles analytiques étant elles-mêmes des fonctions analytiques uniformément convergentes des constantes initiales, forment des ensembles généraux de la nature de ceux que nous venons d'étudier.

Les propriétés générales des équations aux dérivées partielles, que nous avons rencontrées au courant de cette étude, ne sont évidemment pas essentiellement nouvelles, mais il nous a paru intéressant de les retrouver en partant de la considération de nos ensembles de fonctions dépendant d'une infinité de paramètres variables. Il est remarquable que des lois si simples et si régulières aient pu se dégager de la considération de ces expressions infinies, qui eussent semblé d'abord devoir être rebelles à toute règle.

20. *Ensembles dont chaque élément comprend plusieurs fonctions.* — Il resterait maintenant à faire l'étude des ensembles dont chaque élément comprend plusieurs fonctions. Il est évident que les mêmes méthodes sont encore applicables.

D'ailleurs, on peut toujours, *avec* ou *sans* addition d'une variable indépendante nouvelle, exprimer tous les éléments à l'aide d'une fonction unique et de ses dérivées en nombre limité. Considérons, par exemple, r fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_r$.

Posons

$$\zeta = z_1 + z_2 x_{n+1} + z_3 x_{n+1}^2 + \ldots + z_r x_{n+1}^{r-1};$$

les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_r$ s'expriment immédiatement à l'aide de ζ et de ses dérivées par rapport à x_{n+1}.

Nous nous bornons à ces indications, le présent travail étant spécialement consacré à l'étude des équations qui ne contiennent qu'une fonction inconnue.

CHAPITRE III.

LES GROUPES GÉNÉRAUX ET LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

21. *Forme des systèmes.* — Nous allons maintenant prendre comme point de départ un système donné d'équations aux dérivées partielles, à une seule fonction inconnue z et à n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous le supposerons prolongé indéfiniment par différentiation et les équations qui le composent écrites suivant l'ordre croissant, de telle façon que toute relation entre les dérivées d'ordre m et d'ordre inférieur qu'on pourrait en déduire par des différentiations et par la combinaison des résultats obtenus soit une conséquence *algébrique* des équations d'ordre m et d'ordre inférieur *écrites* dans le système.

Nous l'appellerons le *système* S et nous en représenterons les équations par la forme condensée

$$(\mathrm{S})\qquad \begin{cases} f(x, z, p) = 0, \\ \left(p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right). \end{cases}$$

Il y a lieu d'y adjoindre le système auxiliaire de M. Darboux

$$(\mathrm{S}')\qquad \delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \sum \frac{\partial f}{\partial p}\delta p = 0$$

qui définit les *variations* infiniment petites du premier ordre de chaque intégrale du système S quand on suppose égales à zéro les variations des variables indépendantes.

Le système S′ est à proprement parler inséparable du système S et doit être regardé comme constituant avec ce dernier un système unique S_1 à deux fonctions inconnues z et δz.

22. *Le groupe* G_1. — Soit

$$z = \varphi(x, x^0, u^0) \tag{26}$$

la valeur de l'intégrale z exprimée en fonction des variables indépendantes x, de leurs valeurs initiales x^0 et des valeurs initiales u^0 des paramètres fondamentaux. Les paramètres fondamentaux étant des fonctions de variables x, z, p, on peut déduire leur expression de celle de la fonction inconnue z. Soit

$$u_i = \varphi_i(x, x^0, u^0). \tag{27}$$

Remplaçons dans ces équations x_k par $x_k^0 + h_k$ et considérons le système

$$\begin{cases} x_k = x_k^0 + h_k, \\ u_i = F_i(h, x^0, u^0). \end{cases} \tag{28}$$

On peut le regarder comme définissant un groupe de transformations G_1 à n paramètres $h_1, h_2, \ldots, h_n$ dans lequel les éléments transformés forment une suite infinie. Les transformations de ce groupe sont deux à deux inverses, et aux valeurs $h_i = 0$ correspond la transformation identique.

Le groupe G_1 admet des transformations infinitésimales. En prenant le développement de u_i suivant les puissances de $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et en se bornant aux termes du premier ordre on a

$$u_i = u_i^0 + v_{i,1}^0 h_1 + v_{i,2}^0 h_2 + \ldots + v_{i,n}^0 h_n + \ldots,$$

les quantités $v_{i,1}^0, v_{i,2}^0, \ldots, v_{i,n}^0$ étant des fonctions des variables x^0 et u^0. Nous désignerons par $v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,n}$, les fonctions analogues exprimées à l'aide des variables x, u. Elles jouissent de la propriété importante que voici :

Si u_i est un élément d'ordre m, les fonctions v_i correspondantes ne dépendent pas des paramètres d'ordre supérieur à $n + 1$.

Cela posé, les transformations infinitésimales du groupe G_1 sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des suivantes :

$$(29)\quad \begin{cases} U_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \sum v_{i,1} \dfrac{\partial f}{\partial u_i}, \\ U_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \sum v_{i,2} \dfrac{\partial f}{\partial u_i}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_n(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \sum v_{i,n} \dfrac{\partial f}{\partial u_i}. \end{cases}$$

Ces transformations infinitésimales dépendent en général d'une infinité de variables x, u; mais il n'y a à cela aucun inconvénient d'après la théorie générale que nous avons esquissée au premier Chapitre.

Il est évident que les opérations $U_1(f)$, $U_2(f)$, ..., $U_n(f)$ ne sont autre chose que des symboles de différentiation par rapport aux variables x_1, x_2, ..., x_n, quand on regarde les u comme des fonctions des x définies par les équations (28).

On a, par conséquent, $(U_i, U_k)f = 0$. Quand on considère les fonctions exprimées, non plus à l'aide des paramètres fondamentaux, mais à l'aide de z et de ses dérivées, il y a lieu d'envisager, au lieu des opérations $U_i(f)$, les opérations suivantes dont la signification est analogue :

$$(30)\quad \begin{cases} X_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \sum p_{\alpha_1+1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \dfrac{\partial f}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}}, \\ X_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \sum p_{\alpha_1, \alpha_2+1, \dots, \alpha_n} \dfrac{\partial f}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_n(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \sum p_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n+1} \dfrac{\partial f}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}}, \end{cases}$$
$$(z = p_{0,0,\dots,0}).$$

23. *Invariants du groupe* G_1. — Le groupe G_1 est évidemment intransitif; nous pouvons même dire infiniment intransitif, car il possède une infinité d'invariants indépendants. Il est facile d'en former un système fondamental.

Donnons, dans les équations (28), aux variables indépendantes des valeurs numériques déterminées, x'_1, x'_2, ..., x'_n. Éliminons dans cette hypothèse les paramètres h_1, h_2, ..., h_n entre les équations considérées, et remplaçons les variables initiales x^0, u^0 par x, u. Les valeurs que prennent les fonctions F :

$$I_p = F_p(x' - x, x, u)$$

forment évidemment un système fondamental d'invariants, car la connaissance des valeurs des paramètres fondamentaux en un point x' suffit pour en déterminer les valeurs en tout autre point et, par conséquent, tous les autres invariants contenant uniquement les x et les u seront des fonctions des invariants I_p. On voit que notre système fondamental est simplement constitué par les valeurs (28) des paramètres fondamentaux dans lesquelles on donne aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs numériques déterminées, tandis que l'on considère comme éléments variables les valeurs initiales x^0, u^0.

Ces invariants et, en général, tous ceux que l'on pourrait former de quelque manière que ce soit, présentent l'inconvénient de dépendre d'une infinité d'éléments variables. Les cas où il existe des invariants dépendant d'un nombre limité de paramètres fondamentaux sont exceptionnels dans le domaine des équations à plusieurs variables indépendantes. Il est d'ailleurs facile de reconnaître si un système donné admet des invariants contenant les dérivées jusqu'à un ordre déterminé m inclusivement ou de construire *a priori* des exemples de pareils systèmes.

24. *Le groupe* G. — Les invariants I_p et ceux qui s'en déduisent sont les seuls invariants du groupe G_1 qui contiennent *uniquement* les x et les u; mais ils sont insuffisants pour caractériser entièrement ce groupe; ils définissent, en effet, un groupe plus général G, contenant G_1 et dont les transformations infinitésimales sont de la forme

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n,$$

en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des fonctions arbitraires des x et des u.

Le groupe G jouit de la propriété caractéristique de laisser les intégrales invariantes. Tout autre groupe possédant la même propriété admet, outre les invariants I_p, des invariants différentiels obtenus en regardant les x et les u comme des fonctions de certaines variables, ou même encore d'autres invariants contenant seulement les x et les u.

25. *Transformation des variables initiales.* — A côté des transformations qui laissent les intégrales invariantes il y a lieu de considérer celles qui les transforment les unes dans les autres.

Soit

$$z = \varphi(x, x^0, u^0)$$

l'expression de l'intégrale générale. En effectuant sur les variables initiales une transformation quelconque

$$\begin{aligned} x'^0_h &= \psi_h(x^0, u^0), \\ u'^0_i &= \theta_i(x^0, u^0), \end{aligned}$$

on obtient une nouvelle intégrale, transformée de la première,

$$z' = \varphi(x, x'^0, u'^0).$$

A un système de variations infiniment petites

$$\delta x^0_k = \xi^0_k\, \delta t, \qquad \delta u^0_i = \eta^0_i\, \delta t,$$

correspond une variation infiniment petite de z :

$$\delta z = \delta t \left\{ \sum \xi^0_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^0_k} + \sum \eta^0_i \frac{\partial \varphi}{\partial u^0_i} \right\},$$

intégrale du système auxiliaire de M. Darboux.

Soient T^0_r et T^0_s deux transformations infinitésimales quelconques relatives aux variables initiales, x^0, u^0, et

$$\begin{aligned} T^0_r z &= \sum \xi^0_{kr} \frac{\partial z}{\partial x^0_k} + \sum \eta^0_{ir} \frac{\partial z}{\partial u^0_i}, \\ T^0_s z &= \sum \xi^0_{ks} \frac{\partial z}{\partial x^0_k} + \sum \eta^0_{is} \frac{\partial z}{\partial u^0_i}, \end{aligned}$$

les variations infinitésimales correspondantes de z. On en déduit, par la méthode de Lie, la transformation infinitésimale (T^0_r, T^0_s), à laquelle correspond une nouvelle intégrale du système auxiliaire

$$(T_r^0, T_s^0)z = T_r^0 T_s^0 z - T_s^0 T_r^0 z.$$

Supposons que l'une de ces transformations, T_r^0 par exemple, appartienne au groupe G, défini au numéro précédent, et qui laisse les intégrales invariantes. On a alors

$$T_r^0 z = 0$$

et la transformation infinitésimale précédente se réduit à

$$T_r^0 T_s^0 z.$$

D'où ce théorème :

Quand on effectue sur une intégrale $T_s^0 z$ *du système auxiliaire, associé à l'intégrale générale du système* S, *une transformation infinitésimale quelconque du groupe* G, *on obtient une nouvelle intégrale du système auxiliaire.*

Ce théorème peut être regardé comme une extension aux ensembles généraux de la remarque si simple qui nous a servi de base pour la théorie des ensembles linéaires.

26. *Le groupe* K. — A tout groupe de transformations des variables x^0, u^0 correspond un groupe de transformations des intégrales, mais les propriétés afférentes à ces groupes ne sont pas, en général, des propriétés *intrinsèques* des intégrales, *indépendantes du mode de définition.* Elles se rapportent plutôt à la manière d'être, à l'*allure* des intégrales dans le voisinage du point initial x^0. Pour que la trace des variables initiales disparaisse il faut que les transformations considérées satisfassent à la condition suivante :

Soient x, u, x^1, u^1, deux systèmes différents d'éléments appartenant à la même intégrale, les deux systèmes transformés correspondants, x', u' et x'^1, u'^1, devront aussi appartenir à une même intégrale généralement distincte de la première.

Supposons que les deux systèmes d'éléments x, u, et x^1, u^1 soient infiniment voisins, posons alors

$$x' = x + dx, \qquad u' = u + du.$$

Pour que les deux systèmes considérés appartiennent à la même intégrale il faut et il suffit qu'on ait les relations suivantes :

$$du_i = \sum v_{ik}\, dx_k, \tag{31}$$

qui devront entraîner, comme conséquences, les équations analogues

$$du'_i = \sum v'_{ik}\, dx'_k.$$

Nous sommes donc amenés à cette conclusion :

Les seules transformations auxquelles puissent correspondre des propriétés des intégrales indépendantes des variables initiales sont celles qui conservent l'ensemble des équations (31).

L'ensemble de ces transformations forme un groupe K que nous appellerons le *groupe général des transformations des intégrales du système* S, ou simplement le *groupe général du système* S.

Il est indifférent d'effectuer les transformations de ce groupe sur les variables initiales x^0, u^0 ou sur les variables courantes x, u. Le résultat est toujours le même.

Le groupe général K contient évidemment le groupe G déjà défini, qui laisse les intégrales invariantes.

27. *Conditions auxquelles doivent satisfaire les transformations infinitésimales du groupe* K. — Soit δx, δu, un système de variations infiniment petites appartenant au groupe K. D'après la propriété qui nous a servi de définition on doit avoir, pour toutes les valeurs de l'indice i,

$$\delta\Big(du_i - \sum v_{ik}\, dx_k\Big) = \sum \lambda_{ij}\Big(du_j - \sum v_{jk}\, dx_k\Big) \tag{32}$$

les λ_{ij} désignant des fonctions infiniment petites du même ordre que les variations δx, δu. En calculant successivement les différents termes du premier membre on a

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\, du_i &= d\,\delta u_i = \sum_h \frac{\partial\,\delta u_i}{\partial x_h} dx_h + \sum_j \frac{\partial\,\delta u_i}{\partial u_j} du_j,\\ \delta\, dx_k &= d\,\delta x_k = \sum_h \frac{\partial\,\delta x_k}{\partial x_h} dx_h + \sum_j \frac{\partial\,\delta x_k}{\partial u_j} du_j,\\ \delta v_{ik} &= \qquad\quad \sum_h \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h}\,\delta x_h + \sum_j \frac{\partial v_{ik}}{\partial u_j}\delta u_j, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\Big(du_i - \sum_k v_{ik}\,dx_k\Big) &= \sum_j \left(\frac{\partial\,\delta u_i}{\partial u_j} - \sum_k v_{ik}\,\frac{\partial\,\delta x_k}{\partial u_j}\right) du_j\\ &\quad + \sum_h \left(\frac{\partial\,\delta u_i}{\partial x_h} - \delta v_{ih} - \sum_k v_{ik}\frac{\partial\,\delta x_k}{\partial x_h}\right) dx_h. \end{aligned}\right.$$

En identifiant les relations (32) et (34) on trouve les relations suivantes :

$$(35)\qquad \lambda_{ij} = \frac{\partial\,\delta u_i}{\partial u_j} - \sum v_{ik}\,\frac{\partial\,\delta x_k}{\partial u_j},$$

$$(36)\qquad -\sum_j \lambda_{ij} v_{jh} = \frac{\partial\,\delta u_i}{\partial x_h} - \delta v_{ih} - \sum_k v_{ik}\frac{\partial\,\delta x_k}{\partial x_h}.$$

On peut donner à ces formules une forme élégante et simple en introduisant l'opération Δf définie par l'identité

$$(37)\quad \Delta f = \delta f - \sum_k \mathrm{U}_k(f)\,\delta x_k = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_h}\delta x_h + \frac{\partial f}{\partial u_i}\delta u_i\right) - \sum_k \mathrm{U}_k(f)\,\delta x_k.$$

On a, en particulier,

$$\Delta x_h = 0, \qquad \Delta u_i = \delta u_i - \sum_k v_{ik}\,\delta x_k,$$

ce qui permet de mettre l'identité (37) sous la forme

$$(38)\qquad \Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i}\Delta u_i.$$

L'équation (35) donne alors

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial u_j} + \sum_k \frac{\partial v_{ik}}{\partial u_j} \delta x_k. \tag{39}$$

Pour transformer l'équation (36) résolvons-la d'abord par rapport à δv_{ih} :

$$\delta v_{ih} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_h} + \sum_j \lambda_{ij} v_{jh} - \sum_k v_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h}.$$

Portons dans cette expression la valeur de λ_{ij} donnée par l'équation (39) et tenons compte en outre de l'identité

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_h} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_h} - \sum_k v_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h} - \sum_k \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h} \delta x_k.$$

Nous trouvons

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_h} + \sum_j v_{jh} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial u_j} + \sum_j v_{jh} \sum_k \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h} \delta x_k + \sum_k \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h} \delta x_k = \delta v_{ih}. \tag{40}$$

Le coefficient de δx_k dans le premier membre a pour valeur

$$\frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h} + \sum_j v_{jh} \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h} = \mathrm{U}_h(v_{ik}) = \mathrm{U}_h[\mathrm{U}_k(u_i)].$$

Mais les opérations U_h, U_k étant permutables, on peut écrire

$$\mathrm{U}_h(v_{ik}) = \mathrm{U}_h \mathrm{U}_k(u_i) = \mathrm{U}_k \mathrm{U}_h(u_i) = \mathrm{U}_k v_{ih}.$$

L'équation (40) devient donc

$$\mathrm{U}_h \Delta(u_i) + \sum_k \mathrm{U}_k(v_{ih}) \delta x_k = \delta v_{ih}$$

ou bien

$$\mathrm{U}_h \Delta(u_i) = \delta v_{ih} - \sum_k \mathrm{U}_k(v_{ih}) \delta x_k = \Delta v_{ih}. \tag{41}$$

ou encore, sous une forme plus significative :

$$(42) \qquad \mathrm{U}_h\Delta(u_i) = \Delta\mathrm{U}_h(u_i).$$

Donc :

Les opérations U_h et Δ, *appliquées aux variables* u, *sont permutables.*

Elles le sont également quand on les applique à des fonctions quelconques, comme on le voit immédiatement en formant l'expression

$$\mathrm{U}_h\Delta f - \Delta\mathrm{U}_h f.$$

Ce résultat pouvait être prévu. C'est la traduction algébrique de la propriété caractéristique du groupe K de remplacer les intégrales les unes par les autres.

Dans tout ce qui précède, les δ ont la signification de variations infiniment petites; cependant, on peut aussi les considérer comme des quantités finies. Si l'on a, par exemple,

$$\delta x_k = \xi_k \delta t, \qquad \delta u_i = \eta_i \delta t,$$

il n'y a aucun inconvénient à remplaeer δx_k par ξ_k et δu_i par η_i, à cause de la forme homogène des expressions considérees. Nous conserverons les notations δx_k et δu_i au lieu de $\frac{\delta x_k}{\delta t}$, $\frac{\delta u_i}{\delta t}$, pour la simplicité de l'écriture, mais nous admettrons qu'on puisse leur attribuer des valeurs d'un ordre de grandeur quelconque.

28. *Fonctions génératrices des transformations infinitésimales.* — La permutabilité des opérations U et Δ permet de calculer les différentes expressions Δu_i quand Δz est supposé connu.

Soit en effet

$$p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

on peut écrire

$$p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \mathrm{U}_1^{\alpha_1}\mathrm{U}_2^{\alpha_2}\ldots\mathrm{U}_n^{\alpha_n} z,$$

les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ indiquant, bien entendu, la répétition des opérations considérées.

On tire de là, en vertu de l'équation (42),

$$\Delta p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_n^{\alpha_n} \Delta z. \tag{43}$$

D'autre part, les u_i sont des fonctions des z, des p et des x; soit

$$u_i = \varphi_i(x, z, p).$$

On a alors

$$\Delta u_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \Delta z + \Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial p} \Delta p. \tag{44}$$

La fonction Δz dépend en général d'une infinité de variables x, u; par ailleurs, au point de vue de son rôle dans la génération des transformations infinitésimales, elle présente une analogie évidente avec celle que Lie représente par le symbole W dans la théorie des transformations de contact, et qu'il appelle la *fonction caractéristique* (¹). Nous dirons pour cette raison que Δz est la *fonction caractéristique* ou la *fonction génératrice* de la transformation infinitésimale considérée.

Le mot *caractéristique* ou même l'expression *fonction caractéristique* a déjà différentes acceptions dans la théorie des équations aux dérivées partielles. C'est pourquoi nous préférons employer pour la fonction Δz l'appellation de *fonction génératrice,* qui ne présente pas le même inconvénient. Il est évident, en effet, qu'il n'y a aucune confusion à craindre avec les fonctions génératrices de Laplaee.

29. *Transformations infinitésimales correspondant à une fonction génératrice donnée. Groupe de Darboux.* — A toute transformation infinitésimale correspond une fonction génératrice

$$\Delta z = \Psi(x, u).$$

Cherchons, inversement, à définir les transformations infinitésimales qui correspondent à une fonction caractéristique donnée.

(¹) Lie. *Transf. Gruppen*, t. II, p. 252.

Soit $\Delta z = \delta z - \Sigma \frac{\partial z}{\partial x_k} \delta x_k = \Psi(x, u)$.

Nous avons d'abord la solution simple

$$\delta z = \Psi(x, u)$$
$$\delta x_k = 0,$$

puis

$$\delta p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_n^{\alpha_n} \Psi(x, u).$$

La transformation infinitésimale ainsi obtenue est caractérisée par la propriété de laisser invariantes les variables indépendantes. A toute fonction génératrice correspond une transformation infinitésimale de cette espèce, et l'ensemble de ces transformations correspondant aux diverses fonctions génératrices forme un groupe contenu dans K et que nous appellerons le *groupe de Darboux* du système considéré. Ce nom est justifié par la relation qui existe entre ces transformations et les intégrales du système auxiliaire de M. Darboux.

A toute fonction génératrice correspond, dans le groupe de Darboux, une transformation infinitésimale déterminée.

Considérons maintenant deux transformations infinitésimales correspondant à une même fonction génératrice $\Psi(x, u)$.

Soient

$$\delta_1 x, \quad \delta_1 z, \quad \delta_1 u,$$
$$\delta_2 x, \quad \delta_2 z, \quad \delta_2 u$$

les deux transformations; on a

$$\delta_1 z - \Sigma U_k(z) \delta_1 x_k = \Psi,$$
$$\delta_2 z - \Sigma U_k(z) \delta_2 x_k = \Psi.$$

D'où l'on tire

$$\delta_1 z - \delta_2 z - \Sigma U_k(z)(\delta_1 x_k - \delta_2 x_k) = 0.$$

La transformation infinitésimale

$$\delta_1 - \delta_2 = (\delta_1 x - \delta_2 x, \delta_1 z - \delta_2 z, \delta_1 u - \delta_2 u)$$

laisse donc les intégrales invariantes et appartient, par conséquent, au groupe G. D'où cette conclusion :

On obtient la transformation infinitésimale la plus générale correspondant à une fonction génératrice donnée en ajoutant aux composantes de l'une quelconque d'entre elles celles de la transformation infinitésimale la plus générale du groupe G.

La proposition suivante en est un corollaire :

Toute transformation du groupe général K *est le produit d'une transformation du groupe de Darboux par une transformation du groupe* G.

Ce résultat, d'ailleurs, était à peu près évident *a priori*.

Nous connaissons l'expression générale des transformations infinitésimales du groupe G. Pour achever de déterminer le groupe général K, il suffit de définir l'ensemble des transformations infinitésimales du groupe de Darboux ou, ce qui revient au même, l'ensemble des fonctions caractéristiques.

30. *Détermination de l'ensemble des fonctions génératrices.* — Soit $f(x, z, p) = 0$ l'une quelconque des équations du système S. La fonction f s'annule identiquement quand on y remplace z et ses dérivées par leurs valeurs en fonction des paramètres fondamentaux. On a donc dans cette hypothèse $\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ et, par suite, $\Delta f = 0$.

En supposant f exprimée à l'aide de z, de ses dérivées et des variables indépendantes, on a par conséquent l'équation

$$(45) \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \sum \frac{\partial f}{\partial p}\Delta p = 0,$$

qui ne diffère que par la notation de l'équation correspondante du système auxiliaire de M. Darboux. Il faut cependant observer une différence importante dans l'interprétation des équations.

Lorsqu'on veut intégrer le système auxiliaire ou, plus exactement, le système S_1, formé du système S et du système auxiliaire, on cherche à exprimer les valeurs des fonctions z et δz en fonction des *variables courantes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de constantes x^0, u^0, δu^0. Pour la fonction Δz, au contraire, nous voulons une expression contenant en général la totalité des variables courantes x, u.

L'ensemble des équations de la forme (45) constitue pour la détermination de Δz un véritable système d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, mais à une infinité de variables indépendantes. En remplaçant les Δp par leurs valeurs, on donne en effet à l'équation (45) la forme suivante

$$(45') \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \sum \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}} U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_n^{\alpha_n} \Delta z = 0.$$

La fonction z et ses dérivées p sont supposées remplacées dans l'équation (45′) par leurs valeurs en fonction des x et des u.

Le résultat auquel nous sommes parvenus, quoique fort naturel en soi, n'en paraît pas moins, au premier abord, surprenant et inattendu. Il montre bien, en tout cas, que les fonctions d'une infinité de variables indépendantes sont appelées à jouer un rôle essentiel dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Mais il semblerait que nous nous heurtons ici à un obstacle presque infranchissable. La théorie des équations aux dérivées partielles d'une infinité de variables indépendantes n'existe pas encore, et, par suite, elle ne peut nous renseigner ni sur l'existence, ni sur le degré de généralité des solutions du système (45′). Devons-nous le considérer comme un ensemble de symboles vides de sens ?

Nous allons montrer que ce système est réellement intégrable et déterminer la forme de son intégrale générale.

31. *Expression générale des fonctions génératrices.* — Reprenons les équations (26) et (27) qui déterminent z et les u_i en fonction des x, x^0, u^0,

$$(26) \qquad z = \varphi(x, x^0, u^0),$$

$$(27) \qquad u_i = \varphi_i(x, x^0, u^0).$$

Nous allons regarder les x^0 comme des constantes numériques et les u^0 comme des quantités variables. L'ensemble des fonctions définies par la première de ces équations embrasse alors la totalité des intégrales du système S. La variation δz associée à chaque intégrale du système est définie par

$$(46) \qquad \delta z = \sum \frac{\delta \varphi}{\partial u_i^0} \delta u_i^0.$$

Les quantités δu_i^0 ne sont pas des constantes numériques, mais des fonctions des variables initiales

$$(47) \qquad \delta u_i^0 = \varepsilon_i(x^0, u^0).$$

A tout système de fonctions ε_i correspond une transformation faisant correspondre à toute intégrale du système S une intégrale infiniment voisine déterminée.

La fonction génératrice Δz n'est autre chose, d'après ce que nous avons vu, que l'expression de δz en fonction des x et des u, lorsqu'on suppose égales à zéro les variations des variables indépendantes. Pour obtenir cette expression, il suffira donc de remplacer, dans le second membre de l'équation (46), les variables u^0 par leurs valeurs en fonction des variables u.

On obtiendrait ces valeurs en résolvant les équations (27) par rapport aux quantités u^0. Mais on évite cette résolution par la remarque suivante :

Si les deux systèmes d'éléments $[x, u]$, $[x^0, u^0]$ appartiennent à la même intégrale du système S, on peut prendre l'un quelconque d'entre eux pour système initial, les variables de l'autre système étant les variables courantes.

En prenant les x^0, u^0 comme variables initiales, on trouve les équations (27); en les prenant, au contraire, comme variables courantes, les x, u étant les valeurs initiales, on trouvera les équations analogues

$$(48) \qquad u_i^0 = \varphi_i(x^0, x, u).$$

On obtiendra donc la fonction caractéristique Δz correspondant à la variation δz de l'équation (46) en y remplaçant les quantités u_i^0 par leurs valeurs (48) en fonction des x et des u.

Les fonctions $\varphi_i(x^0, x, u)$, où l'on regarde les x^0 comme des constantes, sont des invariants du groupe G. Il en est donc de même des fonctions $\varepsilon_i(x^0, u^0)$, après que l'on a effectué les substitutions indiquées.

On peut en déduire l'expression générale des fonctions génératrices.

Désignons par $\Psi_i(x, x^0, u)$ la transformée de la dérivée $\frac{\partial\varphi(x, x^0, u^0)}{\partial u_i^0}$:

$$\Psi_i(x, x^0, u) = \left.\frac{\partial\varphi(x, x^0, u^0)}{\partial u_i^0}\right|_{u_0=\varphi_i(x^0, x, u)};$$

l'expression (46) de δz devient alors

$$\Delta z = \Sigma\varepsilon_i\Psi_i(x, x^0, u), \tag{49}$$

les ε_i étant des invariants arbitraires du groupe G.

Telle est l'expression cherchée.

32. *Expression générale des transformations infinitésimales.* — Il est facile d'en déduire celle des transformations infinitésimales.

Soit δF *une transformation infinitésimale quelconque du groupe* K, *admettant la fonction génératrice* Ψ; *si* ε *désigne un invariant arbitraire du groupe* G, $\varepsilon.\delta F$ *est une autre transformation infinitésimale du groupe* K, *admettant la fonction génératrice* $\varepsilon\Psi$.

Cette propriété est évidente pour les transformations du groupe de M. Darboux; on en déduit facilement qu'elle est générale.

Plus généralement :

Soient $\delta_1 F, \delta_2 F, \ldots, \delta_p F$ *des transformations infinitésimales du groupe* K, *correspondant respectivement aux fonctions génératrices* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p$, *et soient en outre* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ *des invariants arbitraires du groupe* G; *la transformation infinitésimale*

$$\varepsilon_1\delta_1 F + \varepsilon_2\delta_2 F + \ldots + \varepsilon_p\delta_p F$$

appartient au groupe K *et admet pour fonction caractéristique*

$$\varepsilon_1 \Psi_1 + \varepsilon_2 \Psi_2 + \ldots + \varepsilon_p \Psi_p.$$

Le nombre p peut même croître indéfiniment pourvu que les expressions considérées admettent alors des domaines de convergence.

Désignons par δ_iF *une transformation infinitésimale correspondant à la fonction génératrice* $\Psi_i(x, u)$ *de la formule* (49); *la transformation infinitésimale la plus générale du groupe* K *aura alors pour expression*

$$\delta F = \sum_1^{\infty} \varepsilon_i \delta_i F + \sum_1^{n} \lambda_k U_k F,$$

les ε_i *désignant comme précédemment des invariants du groupe* G, *et les* λ *des fonctions entièrement arbitraires des* x *et des* u.

Ce résultat est une généralisation évidente de ceux que Lie (¹) a établis pour les équations différentielles ordinaires.

33. *Remarques sur l'ensemble des fonctions génératrices.* — L'ensemble des fonctions génératrices du groupe K est linéaire par rapport aux éléments fondamentaux Ψ_i, mais les coefficients au lieu d'être des constantes sont des invariants du groupe G. Nous pourrions étendre à cet ensemble les principales propriétés des ensembles linéaires étudiés au Chapitre II, en remplaçant dans les raisonnements les dérivées ordinaires $\frac{\partial}{\partial x_k}$ par les opérations U_k. Cette correspondance est d'ailleurs une conséquence des relations qui existent entre les fonctions génératrices et les intégrales du système auxiliaire de M. Darboux.

Soit $\psi(x, x^0, u^0)$ une intégrale du système auxiliaire; en remplaçant u^0 par sa valeur définie par l'équation (48) en fonction des x et des u on en déduit une fonction génératrice $\Psi(x, x^0, u)$. Indiquons

(¹) *Vorl. über Diff. Gleich.*, Kap. 15, p. 308 et suiv.

par le symbole $\overline{u}^0$ que nous considérons cette quantité comme une fonction des x et des u,

$$\psi\left(x, x^0, \overline{u}^0\right) = \Psi(x, x^0, u).$$

On a

$$\mathrm{U}_k\psi\left(x, x^0, \overline{u}^0\right) = \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \sum \frac{\partial\psi}{\partial \overline{u}_i^0} \mathrm{U}_k\left(\overline{u}_i^0\right)$$

et comme l'on a $\mathrm{U}_k \overline{u}_i^0 = 0$, on trouve simplement

$$\mathrm{U}_k\Psi(x, x^0, u) = \frac{\partial\psi\left(x, x^0, \overline{u}^0\right)}{\partial x_k}.$$

Les fonctions Ψ_i correspondent d'une manière univoque aux éléments u_i par la formule

$$\Psi_i(x, x^0, u) = \frac{\partial\varphi\left(x, x^0, \overline{u}^0\right)}{\partial \overline{u}_i^0}.$$

On vérifie facilement, en partant de là, que si le paramètre u_i est d'ordre m, les termes du moindre degré de la fonction Ψ_i ordonnée suivant les puissances des différences $x - x^0$ sont eux-mêmes d'ordre m. Pour $u = u^0$ la fonction primaire est la même que celle de la fonction $\frac{\partial\varphi(x, x^0, u_i^0)}{\partial u_i^0}$.

34. *Ensembles fondamentaux de fonctions génératrices.* — Toute fonction génératrice $\psi(x, u)$ est une combinaison linéaire et homogène des éléments fondamentaux $\Psi_i(x, x^0, u)$, exprimée par la formule (49), les coefficients arbitraires ε_i étant, comme nous l'avons vu, des invariants du groupe G. Supposons maintenant que nous ayons défini de quelque manière un ensemble linéaire de fonctions génératrices

$$a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m + \ldots,$$

les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ étant des *constantes* arbitraires.

En remplaçant ces constantes par des *invariants* du groupe G on obtiendra un ensemble de fonctions génératrices qui pourra être plus général. Pourra-t-on reconstituer ainsi l'ensemble complet des fonctions génératrices du groupe K?

Pour résoudre cette question nous allons examiner le développement d'une fonction génératrice quelconque $\psi(x, u)$. Considérons l'identité

$$\psi(x, u) = \sum \varepsilon_i(x, x^0, u)\, \Psi_i(x, x^0, u).$$

La fonction $\psi(x, u)$ équivaut à une variation infinitésimale δz du groupe de M. Darboux, et cette même variation δz pourrait s'obtenir par la variation des variables initiales u^0 dans la formule

$$z = \varphi(x, x^0, u^0).$$

De telle sorte que l'on a, en vertu des équations (48),

$$\sum \frac{\partial \varphi(x, x^0, u^0)}{\partial u_i^0} \delta u_i^0 = \sum \varepsilon_i(x, x^0, u)\, \Psi_i(x, x^0, u),$$

et comme la dérivée $\frac{\partial \varphi(x, x^0, u^0)}{\partial u_i^0}$ est équivalente à $\Psi_i(x, x^0, u)$ il en résulte que δu_i^0 est équivalent à $\varepsilon_i(x, x^0, u)$, en vertu des mêmes équations (48). Or on peut construire δu_i à l'aide de δz.

Soit $u_i = \theta_i(x, z, p)$, on en tire

$$\delta u_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \delta z + \sum \frac{\partial \theta_i}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}} \delta p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}.$$

Si l'on considère la variation particulière δz qui correspond à la fonction génératrice ψ, on trouve

$$\delta u_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \psi + \sum \frac{\partial \theta_i}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}} \mathrm{U}_1^{\alpha_1}, \mathrm{U}_2^{\alpha_2}, \ldots, \mathrm{U}_n^{\alpha_n}, \psi.$$

Représentons l'expression du second membre par $\Theta_i \psi$, et écrivons

$$\delta u_i = \Theta_i \psi.$$

Faisons $x = x^0$, et attribuons aux u les valeurs arbitraires u^0; on a alors

$$\varepsilon_i(x^0, x^0, u^0) = \Theta_i \psi|_{x_0, u_0}.$$

Cette condition ne détermine pas d'ailleurs complètement les invariants ε_i quand on regarde les u^0 comme des constantes numériques; ces invariants sont définis par la condition de se réduire, pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$, à des *fonctions arbitraires* des u. Pour achever de les déterminer il ne suffit donc pas de connaître les valeurs *numériques* $\varepsilon_i(x, x^0, u^0)$, il faut avoir aussi l'*ensemble* de leurs dérivées par rapport aux variables u, pour le même système de valeurs initiales.

La fonction $\Psi_i(x, x^0, u)$ est caractérisée par les conditions suivantes, qui ont lieu pour $x = x^0$ *quelles que soient les valeurs des* u,

$$(50) \qquad \begin{cases} \Theta_i \Psi_i = 1, \\ \Theta_j \Psi_i = 0 \qquad (j \neq i). \end{cases}$$

Supposons que l'ensemble considéré de fonctions possède un degré suffisant de généralité pour qu'on puisse choisir arbitrairement les valeurs *numériques* des expressions $\Theta_i \psi$ quand on attribue aux x et aux u des valeurs *constantes* arbitraires x^0, u^0. Il sera alors possible de choisir les coefficients a_k de manière que les équations (50) aient lieu, non pas identiquement quels que soient les u, mais pour les valeurs *constantes* x^0, u^0. Les valeurs considérées des a_k sont des fonctions des quantités x^0, u^0, $a_k(x^0, u^0)$. Remplaçons dans ces fonctions les quantités u^0 par leurs valeurs en fonction des x et des u données par les équations (48).

Les constantes $a_k(x^0, u^0)$ sont alors remplacées par des invariants du groupe G, $\varepsilon_k(x, x^0, u)$, satisfaisant à la relation suivante quels que soient les u,

$$\varepsilon_k(x^0, x^0, u) = a_k(x^0, u).$$

La fonction génératrice correspondante

$$\sum \varepsilon_k \psi_k$$

satisfera donc aux équations (50) quels que soient les u, pour $x = x^0$.

Nous dirons pour cette raison que l'ensemble considéré

$$\psi = \Sigma a_k \psi_k$$

est *fondamental* s'il est possible d'attribuer aux constantes a des valeurs telles que les expressions $\Theta_i\psi$ prennent des *valeurs numériques* arbitraires quand on donne aux variables x, u des valeurs initiales quelconques x^0, u^0.

On retrouve cette notion d'ensemble fondamental dans l'étude de la transitivité des groupes.

35. *Transformations équivalentes.* — Nous dirons que deux transformations infinitésimales sont équivalentes si elles admettent la même fonction génératrice.

Deux transformations équivalentes appliquées successivement à une intégrale donnée conduisent toujours à la même intégrale transformée.

Soient δf et $\delta_1 f$ deux transformations équivalentes. On a entre elles une relation identique de la forme

$$\delta_1 f = \delta f + \sum_k \lambda_k \mathrm{U}_k f.$$

Supposons que f soit un invariant du groupe G; la relation précédente donne alors

$$\delta_1 f = \delta f. \tag{51}$$

Réciproquement, si la relation (51) a lieu pour toute transformation δ_1 équivalente à δ, il est évident que la fonction considérée f est un invariant du groupe G.

36. *L'accolade de Lie.* — Supposons que deux transformations δ, δ_1 admettent respectivement les fonctions génératrices Ψ, Ψ_1. Formons la parenthèse $(\delta\delta_1)f$. Soit

$$\delta f = \Delta f + \Sigma \delta x_k \mathrm{U}_k f,$$
$$\delta_1 f = \Delta_1 f + \Sigma \delta_1 x_k \mathrm{U}_k f.$$

On a, à cause de la permutabilité des opérations U_k et Δ,

$$(52) \qquad (\delta\delta_1)f = (\Delta\Delta_1)f + \sum_k (\Delta\delta_1 x_k - \Delta_1 \delta x_k)\, U_k f.$$

Les deux transformations $(\delta\delta_1)$ et $(\Delta\Delta_1)$ sont donc équivalentes et admettent par conséquent la même fonction génératrice.

Cette fonction génératrice a pour expression

$$(\Delta\Delta_1)z = \Delta\Delta_1 z - \Delta_1\Delta z = \Delta\Psi_1 - \Delta_1\Psi.$$

Donc, quand on connaît deux fonctions génératrices Ψ et Ψ_1, on peut en déduire une troisième

$$\Delta\Psi_1 - \Delta_1\Psi = \sum \frac{\partial\Psi_1}{\partial u_i}\Delta u_i - \sum \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\Delta_1 u_i,$$

ou encore, en introduisant les opérations Θ_i des équations (50),

$$\Delta\Psi_1 - \Delta_1\Psi = \sum \frac{\partial\Psi_1}{\partial u_i}\Theta_i\Psi - \sum \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\Theta_i\Psi_1.$$

Nous représenterons cette fonction génératrice par le symbole

$$\{\Psi, \Psi_1\},$$

suivant la notation employée par Lie[1] pour les transformations de contact.

37. *Propriétés des accolades de Lie.* — Les accolades de Lie satisfont aux relations suivantes, où les ε désignent des invariants du groupe G :

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned}
&\{\Psi, \Psi\} = 0,\\
&\{\Psi, \varepsilon\Psi\} = \Delta\varepsilon\,\Psi,\\
&\{\Psi, \varepsilon\Psi_1\} = \Delta\varepsilon\,\Psi_1 + \varepsilon\{\Psi, \Psi_1\},\\
&\{\Psi, \varepsilon_1\Psi_1 + \varepsilon_2\Psi_2 + \ldots + \varepsilon_p\Psi_p\} = \sum_1^p \Delta\varepsilon_i\Psi_i + \sum_1^p \varepsilon_i\{\Psi, \Psi_i\},\\
&\{\Psi_i\{\Psi_k, \Psi_l\}\} + \{\Psi_k\{\Psi_l, \Psi_i\}\} + \{\Psi_l\{\Psi_i, \Psi_k\}\} = 0.
\end{aligned}\right.$$

---

(1) *Transf. Grupp.*, t. II, p. 320.

Prenons la suite des éléments fondamentaux de l'ensemble des fonctions caractéristiques (49) et formons avec deux quelconques d'entre elles l'accolade de Lie $\{\Psi_i, \Psi_k\}$.

Comme le résultat appartient encore à l'ensemble, on a nécessairement

$$\{\Psi_i, \Psi_k\} = \sum_s \varepsilon_{iks} \Psi_s, \tag{54}$$

les coefficients ε_{iks} étant des invariants du groupe G, et satisfaisant aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{iks} + \varepsilon_{kis} = 0, \\ \Delta_s \varepsilon_{ikj} + \Delta_i \varepsilon_{skj} + \Delta_k \varepsilon_{sij} + \sum_\nu (\varepsilon_{ik\nu} \varepsilon_{s\nu j} + \varepsilon_{si\nu} \varepsilon_{k\nu j} + \varepsilon_{ks\nu} \varepsilon_{i\nu j}) = 0. \end{array} \right. \tag{55}$$

Nous avons défini dans ce qui précède les éléments principaux dont la considération s'impose quand on veut entreprendre une étude rationnelle des ensembles d'intégrales.

Nous en ferons quelques applications dans un prochain Mémoire.