JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 35-41.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__35_0>

Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique;

PAR M. ÉMILE PICARD.

---

1. On sait que l'on peut trouver sur une courbe algébrique une série de groupes de n points dépendant de n paramètres, et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de n variations $u_1, u_2, \ldots, u_n$, c'est-à-dire de telle manière qu'à un système de valeurs des u ne corresponde en général qu'un groupe de points et que, inversement, à un groupe arbitraire de la série ne corresponde qu'un seul système de valeurs des u, abstraction faite des périodes. Le nombre n, comme il est classique, est égal au genre p de la courbe.

Une question analogue peut être posée pour les surfaces algébriques :

Est-il possible de trouver sur certaines surfaces algébriques des séries de groupes de n points, dépendant de $2n$ paramètres, et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $2n$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$, c'est-à-dire de telle manière qu'à un système de valeurs des u ne corresponde en général qu'un seul groupe de points, et que, inversement, à un groupe arbitraire de la série ne corresponde qu'un seul système des u, aux périodes près?

Cette circonstance peut se présenter pour $n = 1$, et l'on a alors les surfaces hyperelliptiques. Il paraissait vraisemblable que, pour d'autres valeurs de n, on aurait des classes de surfaces algébriques jouissant de la propriété indiquée. *En réalité, il n'en existe pas;* c'est ce que je me propose de montrer ici.

2. Considérons donc la surface

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (\text{de degré } m),$$

et, en supposant n supérieur à *un*, soient (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n) les coordonnées de n points arbitraires de la surface. Désignons par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{2n+1},$$

$2n+1$ fonctions rationnelles symétriques des (x, y, z), prises d'ailleurs arbitrairement, on aura une hypersurface

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}) = 0,$$

dans l'espace à $2n+1$ dimensions, et, de plus, puisque les fonctions symétriques ξ sont arbitrairement choisies, cette surface correspondra *uniformément* au groupe des n points.

D'après les hypothèses faites, les coordonnées d'un point arbitraire de la surface F s'exprimeront uniformément par des fonctions abéliennes de $2n$ variables u_2, u_2, ..., u_{2n}. La notion de genre géométrique s'étend immédiatement des surfaces de l'espace à trois dimensions aux hypersurfaces dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Notre surface F ne pourra posséder qu'une seule intégrale multiple de première espèce d'ordre $2n$, et cette intégrale correspondra à l'intégrale multiple

$$\int\int\cdots\int du_1\, du_2 \ldots du_{2n};$$

le genre géométrique de la surface F est donc égal à *un*. De plus, la surface F aura $2n$ intégrales de différentielles totales de première espèce, dont l'inversion donnera les ξ en fonctions abéliennes des u.

A chaque intégrale de différentielle totale de première espèce de la surface F correspond une intégrale de différentielle totale de première espèce de la surface f et inversement. Il en résulte que la surface f possédera $2n$ intégrales de différentielles totales de première espèce linéairement indépendantes

$$(1) \qquad \int P_i\,dx + Q_i\,dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

les P et Q étant rationnelles en x, y et z; ces $2n$ intégrales auront $4n$ périodes ([1]). On voit de plus aisément, à cause de la symétrie des ξ par rapport à $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, que le groupe des n points sera donné par les $2n$ équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{h=1}^{h=n} P_i(x_h, y_h, z_h)\,dx_h + Q_i(x_h, y_h, z_h)\,dy_h = du_i \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n). \end{array} \right.$$

3. Ceci posé, montrons que la surface f ne peut être d'un genre géométrique supérieur à l'unité. Soit, en effet,

$$(\alpha) \qquad \iint \frac{S(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

une intégrale double de première espèce de f. Formons l'intégrale multiple d'ordre $2n$

$$(3) \qquad \iint \cdots \int \frac{S_1 S_2 \ldots S_n}{f'_{z_1} f'_{z_2} \ldots f'_{z_n}}\,dx_1\,dy_1 \ldots dx_n\,dy_n,$$

où S_i et f'_{z_i} désignent respectivement $S(x_i, y_i, z_i)$ et $f'_{z_i}(x_i, y_i, z_i)$.

([1]) On ne sait rien de général sur la dépendance entre le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce (quand il en existe pour une surface) et le nombre de leurs périodes. On doit cependant à M. Enriques deux théorèmes particuliers fort intéressants (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III). En essayant de démontrer la proposition réciproque d'un beau théorème de M. Humbert, le savant géomètre italien arriva à ce résultat que *toute surface algébrique admettant p intégrales de différentielles totales de première espèce avec 2p périodes contient une série de courbes algébriques qui n'est pas renfermée dans une série linéaire de courbes du même ordre*. De plus (pour $p > 1$), *si la surface est de genre géométrique nul, elle correspond par une transformation birationnelle à un cylindre de genre p.*

On peut écrire

$$dx_1\,dy_1\ldots dx_n\,dy_n = \frac{d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_{2n}}{\dfrac{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n})}{D(x_1, y_1, \ldots, y_n)}},$$

le dénominateur étant le déterminant fonctionnel de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}$ par rapport aux $2n$ variables indépendantes $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. Or il est aisé de vérifier que ce déterminant fonctionnel est une fonction rationnelle et symétrique de $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$. C'est évidemment une fonction rationnelle et, pour voir qu'elle est symétrique, il suffit de remarquer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ a'_1 & a'_2 & \ldots & a'_{2n} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{2n} \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_{2n} \\ l'_1 & l'_2 & \ldots & l'_{2n} \end{vmatrix},$$

où les lettres $(a, b, \ldots, l)$ sont en nombre n, ne change pas si l'on permute entre eux deux couples de lignes associées, par exemple si l'on permute les lignes (a, a') et les lignes (b, b'). On remarquera que pareille circonstance ne se présenterait pas dans le cas d'une courbe, et d'une manière plus générale dans le cas d'une fonction algébrique d'un nombre impair de variables indépendantes.

Il résulte de là que l'intégrale (3) est de la forme

$$\int\int\cdots\int \Theta\, d\xi_1\, d\xi_2\ldots d\xi_{2n},$$

où Θ est une fonction rationnelle symétrique de $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ et, par suite, une fonction rationnelle de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}$. Elle est donc une intégrale multiple d'ordre $2n$ de première espèce pour F. Si f est de genre supérieur à *un*, il est clair alors que l'on pourra former pour l'hypersurface F plus d'une intégrale multiple d'ordre $2n$ de première espèce, ce qui est en opposition avec ce que nous avons dit plus haut.

4. Le genre géométrique de f est donc au plus égal à *un;* mais, d'autre part, il ne peut être égal à *zéro*. On démontre en effet (voir *Fonctions algébriques de deux variables,* t. I, p. 137) que si

$$\int P_i\,dx + Q_i\,dy \quad \text{et} \quad \int P_k\,dx + Q_k\,dy,$$

sont deux intégrales de différentielles totales de première espèce relatives à la surface f, on a l'identité

$$P_i Q_k - P_k Q_i = \frac{M(x, y, z)}{f'_z},$$

où $M(x, y, z)$ est un polynome adjoint d'ordre $m-4$, c'est-à-dire un polynome tel que l'intégrale double

$$\int\int \frac{M(x, y, z)}{f'_z}\,dx\,dy$$

est de première espèce. Si le genre géométrique de f était nul, on aurait nécessairement

$$P_i Q_k - P_k Q_i = 0;$$

par suite, les $2n$ intégrales (1) seraient fonctions les unes des autres, et les $2n$ équations (2) ne pourraient être distinctes.

En désignant donc, comme plus haut, par (α) l'intégrale double de première espèce relative à la surface f de genre *un,* nous aurons les identités

$$P_i Q_k - P_k Q_i = A_{ik} \frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

les A_{ik} étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles. On peut supposer A_{ik} différent de zéro pour $i=1$, $k=2$; nous écrirons

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = C \frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

C étant une constante différente de zéro, et soient

$$P_2Q_3 - P_3Q_2 = A\frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

$$P_3Q_1 - P_1Q_3 = B\frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

A et B étant deux constantes. De ces identités on conclut

$$AP_1 + BP_2 + CP_3 = 0,$$

$$AQ_1 + BQ_2 + CQ_3 = 0,$$

et ces relations sont inadmissibles, puisque les trois intégrales

$$\int P_1\,dx + Q_1\,dy, \quad \int P_2\,dx + Q_2\,dy, \quad \int P_3\,dx + Q_3\,dy$$

sont linéairement indépendantes. Nous arrivons donc à une contradiction, et, *par suite, on doit répondre par la négative à la question posée au n° **1**.*

5. La question que nous venons de traiter soulève d'autres problèmes qu'il serait intéressant d'examiner. Il a été expressément mentionné que la série de groupes des n points devait correspondre uniformément à des fonctions abéliennes *non dégénérescentes*. On pourrait s'affranchir de cette dernière restriction. On aurait toujours la surface F et $2n$ intégrales de différentielles totales relatives à cette surface, mais qui ne seraient plus alors nécessairement de première espèce. De plus, tandis que tout à l'heure une intégrale de différentielle totale relative à F devait nécessairement, quand on remplaçait les ξ par leurs valeurs en (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n), se ramener à la forme

$$\sum_{h=1}^{h=n}\int P_i(x_h, y_h, z_h)\,dx_h + Q_i(x_h, y_h, z_h)\,dy_h,$$

conséquence nécessaire de ce que l'intégrale est de première espèce, maintenant l'intégrale transformée pourrait *a priori* être de la forme

$$\int P_1\, dx_1 + Q_1\, dy_1 + P_2\, dx_2 + Q_2\, dy_2 + \ldots + P_n\, dx_n + Q_n\, dy_n,$$

les P et Q dépendant rationnellement de l'ensemble des coordonnées $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, on aurait là une intégrale de différentielle totale *mêlée* relative à n points *arbitraires* de la surface et symétrique par rapport à ces n points. Quoi qu'il en soit, il y a là un point à discuter, et d'une manière plus générale ces intégrales *mêlées* peuvent présenter quelque intérêt.

6. On peut encore se poser une autre question. En restant dans le cas des fonctions abéliennes non dégénérescentes, on pourrait considérer une fonction algébrique de *trois* variables indépendantes donnée par une équation

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

et se poser pour cette hypersurface le problème que nous avons traité pour les surfaces de l'espace à trois dimensions : existe-t-il sur certaines hypersurfaces algébriques des séries de groupes de n points, dépendant de $3n$ paramètres et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $3n$ paramètres. La parité du nombre des variables indépendantes jouait un rôle important dans la démonstration qu'on a lue plus haut; ici, avec trois variables indépendantes au lieu de deux, la démonstration du théorème (à supposer qu'il soit exact) devra être assez notablement modifiée. La même question se pose pour les fonctions algébriques d'un nombre *impair* quelconque de variables indépendantes.