JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Remarques sur les systèmes non holonomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 27-28.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__27_0>

Remarques sur les systèmes non holonomes;

PAR M. PAUL APPELL.

A la suite de l'intéressante étude de MM. Beghin et Rousseau, je développerai brièvement deux remarques relatives aux systèmes non holonomes, l'une se rapportant aux percussions, l'autre aux mouvements très lents.

1. MM. Beghin et Rousseau montrent dans le Mémoire précédent que la forme des équations de la théorie des percussions, que j'avais déduite des équations de Lagrange pour les systèmes holonomes, s'applique encore aux systèmes non holonomes, quoique les équations de Lagrange soient alors en défaut. On peut établir ce résultat par une voie analogue à celle que j'ai suivie dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1896, premier fascicule). Prenons les équations du mouvement d'un système quelconque sous la forme

$$\text{(1)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \Delta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

que j'ai donnée dans le Mémoire intitulé : *Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique* (*Journal de Mathématiques*, 1901, premier fascicule). Dans ces équations

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n$$

représente la somme des travaux virtuels des forces données, pour un déplacement compatible avec les liaisons, et Δ_α des termes correctifs dépendant seulement de $q_1, q_2, \ldots, q_n, q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ et du temps; ces termes correctifs étant *nuls* si le système est holonome. Mais alors, si des percussions ont lieu pendant l'intervalle très court $t_1 - t_0$, nous multiplierons les deux termes de l'équation (1) par dt et nous intégrerons de t_0 à t_1. Les intégrales de $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dt$ et $\Delta_\alpha dt$ seront négligeables, car les q_α et les q'_α restent finis et les équations donneront

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0 = \int_{t_0}^{t_1} Q_\alpha dt.$$

Ce sont précisément, à la différence des notations près, les équations dont on peut déduire celles de MM. Beghin et Rousseau.

2. On peut faire une remarque du même genre pour l'application des équations de Lagrange aux mouvements très lents d'un système non holonome à liaisons indépendantes du temps.

Si le mouvement est très lent, les vitesses sont très petites; par conséquent, les quantités $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ restent très petites. Supposons alors qu'on néglige les carrés et les produits de ces quantités : les termes Δ_α qui figurent dans les équations (1), étant des formes quadratiques de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, sont *négligeables* et les équations approchées prennent la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,$$

où il restera à supprimer les termes du deuxième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$.

Dans ce cas, les équations de Lagrange fournissent donc des équations approchées du mouvement, quoique cette forme d'équations ne soit pas rigoureusement applicable.