JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 233-328.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__233_0>

Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides;

PAR M. P. DUHEM.

CHAPITRE I.

CONDITIONS QUI SUFFISENT A ASSURER LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE.

§ 1. — La recherche de ces conditions ne relève pas exclusivement du calcul des variations.

On sait que Lagrange a énoncé et démontré cette proposition :

Un système mécanique soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel est assurément en équilibre stable dans un état où le potentiel des forces a une valeur minimum.

La démonstration de Lagrange laissait quelque peu à désirer à ceux qui ont souci de la rigueur; Lejeune-Dirichlet lui a donné une forme qui la sauve de toute objection.

Lorsque la Mécanique générale, fondée sur la Thermodynamique, est venue étendre à de nouveaux domaines les méthodes de l'ancienne Mécanique, on a dû rechercher si la proposition de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet était susceptible d'une plus grande extension et dans quelles circonstances cette extension était légitime.

Il était naturel d'examiner tout d'abord les systèmes mécaniques que forment un nombre fini de corps, chacun de ces corps correspondant à une seule température et étant défini par un nombre limité de variables indépendantes.

On ne tarda pas à reconnaître que la possibilité d'étendre la proposition de Lejeune-Dirichlet à de tels systèmes était subordonnée à cette autre question : *Le système admet-il une énergie utilisable?*

Cette grandeur, lorsqu'elle existe, est caractérisée par la propriété suivante :

Au cours d'une modification réelle élémentaire, on a

$$d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_v = d\Theta + d\mathcal{E}, \tag{1}$$

$d\mathfrak{T}_e$ étant le travail externe,
$d\mathfrak{T}_v$, le travail de viscosité,
Θ, la force vive,
$\mathcal{E}$, l'énergie utilisable.

Cette énergie utilisable n'existe pas en tous les systèmes et dans toutes les circonstances [1].

Seuls, certains systèmes, très particuliers, admettent en toutes circonstances une énergie utilisable; ces systèmes comprennent ceux qu'étudiait l'ancienne Mécanique; aussi les avons-nous parfois nommés les *systèmes classiques*. Pour ces systèmes, l'énergie utilisable se confond avec l'équivalent mécanique de la partie de l'énergie interne qui dépend de la configuration du système, ou, encore, ce qui revient au même dans ce cas, avec le potentiel des actions intérieures.

Aucun système, autre que les systèmes classiques, n'admet d'énergie utilisable en toutes circonstances et quelle que soit la forme des *relations supplémentaires;* en revanche, quel que soit le système, certaines formes de relations supplémentaires assurent l'existence d'une énergie utilisable.

Ces formes peuvent se classer en deux catégories :

1° La première catégorie correspond aux *mouvements isother-*

---

(1) *L'intégrale des forces vives en Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5e série, t. IV, 1898, p. 5).

miques; si, pendant toute la durée du mouvement, la température de chacun des corps qui composent le système est maintenue invariable, tout en différant peut-être d'un corps à l'autre, le système admet une énergie utilisable, qui est alors identique au *potentiel interne*.

2° La seconde catégorie correspond aux *mouvements* que l'on peut nommer *entropiques;* pendant la durée d'un tel mouvement, l'entropie de chaque corps ne dépend que de sa température; la forme de l'énergie utilisable, dans ce cas, dépend de la forme de la relation qui existe entre l'entropie et la température.

Parmi ces relations, la plus simple et la plus remarquable consiste à maintenir invariable l'entropie de chacune des parties du système; de semblables *mouvements isentropiques* caractérisent un système dénué de viscosité et dont les diverses parties ne peuvent céder de chaleur les unes aux autres; en ces mouvements, l'énergie utilisable n'est autre que l'équivalent mécanique de l'énergie interne.

A chacun de ces cas où il existe une énergie utilisable, la proposition de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet peut être étendue sans difficulté; si les actions extérieures admettent un potentiel, le minimum de la somme $\Phi = \mathcal{E} + \Omega$ de l'énergie utilisable $\mathcal{E}$ et du potentiel externe Ω assure la stabilité de l'équilibre du système; toutefois, en énonçant cette proposition, deux remarques doivent être faites, qui concernent les systèmes où l'énergie utilisable résulte des relations supplémentaires :

1° A partir de l'état considéré, la grandeur Φ doit être croissante non pas pour tous les changements possibles du système, mais seulement pour les changements qui respectent les relations supplémentaires d'où découlent l'existence et la forme de l'énergie utilisable.

2° Le minimum de Φ n'assure la stabilité de l'équilibre qu'autant que l'on suppose exclus les mouvements qui transgresseraient ces mêmes relations supplémentaires.

Des systèmes définis par un nombre limité de variables indépendantes passons aux systèmes continus; ceux-ci sont décomposables en une infinité d'éléments infiniment petits; à chaque élément correspondent une température et un nombre limité de variables. Parmi ces systèmes, les *fluides* sont les plus simples.

Il est aisé d'étendre aux corps fluides (¹) les propositions qui définissent les conditions d'existence de l'énergie utilisable.

L'énergie utilisable existe, quelles que soient les relations supplémentaires, pour un *fluide incompressible*, dont chaque élément garde, au cours du mouvement, une densité invariable; les fluides incompressibles tiennent, en Hydrodynamique, le rôle des systèmes classiques.

L'existence de l'énergie utilisable, pour les fluides compressibles, est subordonnée à la forme de la relation supplémentaire.

L'énergie utilisable existe, en premier lieu, si le fluide est animé d'un *mouvement isothermique;* au cours de ce mouvement, chaque élément garde une température invariable qui, d'ailleurs, peut différer d'un élément à l'autre. L'énergie utilisable coïncide alors avec le potentiel interne.

L'énergie utilisable existe, en second lieu, si le fluide est animé d'un *mouvement entropique;* l'entropie de cet élément est alors une fonction de sa température seule; la forme de cette fonction règle la forme de l'énergie utilisable.

Parmi ces mouvements sont les *mouvements isentropiques*; l'entropie de chaque élément garde une valeur invariable, qui peut d'ailleurs différer d'un élément à l'autre; l'énergie utilisable est l'équivalent mécanique de l'énergie interne. Ces mouvements sont ceux que peut prendre un fluide dénué de viscosité et de conductibilité.

Si l'extension aux systèmes continus, et particulièrement aux fluides, des propositions relatives à l'existence de l'énergie utilisable ne rencontre aucune difficulté digne d'être mentionnée, il en est autrement du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet; son extension aux systèmes continus donne lieu à d'importantes remarques (²).

(¹) *Recherches sur l'Hydrodynamique;* 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique,* Chap. II, § 1 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. III, 1901, p. 355).

(²) *Recherches sur l'Hydrodynamique;* 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique,* Chap. II, § 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. III, 1901, p. 362). — *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Journal de*

Il est encore permis d'énoncer la proposition suivante :

Prenons un état d'équilibre où le potentiel Φ ait une valeur moindre qu'en tout état *voisin;* nous pourrons toujours placer le système dans un état initial assez *voisin* de l'état d'équilibre, lui donner une forme vive initiale assez *voisine* de zéro, pour que l'état du système au bout d'un laps de temps quelconque soit toujours aussi *voisin* que l'on voudra de l'état d'équilibre, que sa force vive soit toujours aussi *voisine* que l'on voudra de zéro.

Non seulement cet énoncé donnera lieu aux observations déjà développées touchant les systèmes qui dépendent d'un nombre limité de paramètres : tous les changements réels ou virtuels du système devront se conformer aux relations supplémentaires qui assurent l'existence de l'énergie utilisable et en déterminent la forme, si le système n'est point classique. Mais encore le mot *état voisin*, qui figure à plusieurs reprises dans cet énoncé, devra être entendu dans un sens distinct de son sens habituel.

Habituellement, deux états d'un système continu sont *voisins* l'un de l'autre si les variables qui se rapportent à un élément de masse quelconque dans le premier état diffèrent infiniment peu des variables qui se rapportent au même élément de masse dans le second état.

Dans l'énoncé précédent, deux états sont dits *voisins* lorsque les conditions que nous venons de rappeler sont remplies par toutes les masses élémentaires du système, *sauf peut-être par certains éléments dont l'ensemble forme une masse infiniment petite;* les variables qui caractérisent un de ces éléments dans le premier état du système peuvent différer de quantités finies des variables qui caractérisent ce même élément dans le second état.

Ce changement de sens apporté au mot *voisin* entraîne une conséquence grave.

Une grandeur, Φ par exemple, est minimum dans un état donné du système, lorsqu'elle y a une plus petite valeur qu'en tout état *voisin.* Si l'on adopte le *sens habituel* du mot *voisin,* la recherche des condi-

---

Mathématiques, 5[e] série, t. VII, 1901, p. 311). — *Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme* (*Ibid.*, t. VIII, 1902, p. 5).

tions nécessaires et suffisantes pour que Φ soit minimum dans un état donné du système peut être conduite en suivant les méthodes du calcul des variations. Il n'en est plus de même si l'on entend le mot *voisin* au *nouveau sens;* il est clair alors que la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que Φ soit minimum dans un état donné du système excède la portée légitime du calcul des variations.

A la vérité, les états qui sont, au *sens habituel* du mot, *voisins* d'état donné sont compris parmi ceux qui en sont *voisins* au nouveau sens; les conditions indiquées par le calcul des variations comme conditions nécessaires et suffisantes pour que Φ soit minimum dans un état donné du système demeurent nécessaires, mais elles peuvent fort bien ne plus être suffisantes; rien ne nous permet donc d'affirmer qu'elles suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre du système.

Il est clair, au contraire, que, si, dans un certain état du système, Φ est un *minimum absolu,* le changement de sens du mot *voisin* dans l'énoncé du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet n'a plus rien qui nous puisse inquiéter; en cet état, l'équilibre du système est assurément stable. Cette remarque fait comprendre l'importance des propositions qui vont être démontrées.

Quelques observations doivent précéder la démonstration de ces théorèmes.

La plupart des développements de l'Hydrodynamique sont, pour les fluides exempts de viscosité, subordonnés à la restriction suivante :

Il existe une fonction Λ telle que les équations de l'Hydrodynamique puissent se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial x}+g_x=0,\qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial y}+g_y=0,\qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial z}+g_z=0,$$

où g_x, g_y, g_z sont les composantes de l'accélération.

Or cette restriction ne se trouve vérifiée que dans certains cas particuliers que nous avons appris ailleurs ([1]) à distinguer et à classer.

([1]) *Recherches sur l'Hydrodynamique;* 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique,* Chap. III (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. III, 1901, p. 368).

Nous avons remarqué que la plupart des théorèmes dits *généraux* de l'Hydrodynamique n'étaient établis que dans les circonstances où il existe à la fois une énergie utilisable et une fonction Λ; ces circonstances, peu nombreuses, sont les suivantes :

1° Le fluide est homogène et incompressible;

2° Le fluide est isothermique, c'est-à-dire qu'il est homogène, compressible, et qu'il est en tous ses points porté à une même température qui demeure invariable pendant toute la durée du mouvement;

3° Le fluide est entropique, c'est-à-dire que l'entropie spécifique en chaque point est liée à la température en ce point par un relation qui demeure la même dans toute l'étendue du fluide et à tout instant.

Cette dernière catégorie comprend, en particulier, le cas où le fluide est isentropique, c'est-à-dire où le fluide se meut, à partir d'un état initial homogène, de telle sorte que l'entropie de chaque masse élémentaire demeure invariable.

Ces trois catégories de fluides sont les seules que nous étudierons au cours du présent travail; encore ne les prendrons-nous pas dans leur entière généralité; nous supposerons que les diverses masses élémentaires qui les composent n'exercent les unes sur les autres aucune action; les actions, tout extérieures, auxquelles nos fluides seront supposés soumis, se réduiront à des actions, newtoniennes ou non, appliquées aux divers éléments de masse et à une pression uniforme et constante appliquée à la partie déformable de la surface. De plus, nous supposerons les fluides étudiés exempts de toute viscosité.

§ 2. — En un état d'équilibre stable, le potentiel total est un minimum absolu. Cas du fluide homogène et incompressible.

Soit ρ la densité d'un fluide incompressible homogène et soit $V(x, y, z)$ la fonction potentielle des forces extérieures qui le sollicitent. Si $d\varpi$ est un élément de volume de ce fluide, le potentiel total a pour valeur

$$\Phi = \rho \int V \, d\varpi. \tag{2}$$

Le calcul des variations permet de former les conditions nécessaires et suffisantes [1] pour que cette grandeur soit plus petite dans un état donné du fluide que dans tout état *voisin* de celui-là, le mot *voisin* étant pris dans son sens habituel.

Ces conditions comprennent, tout d'abord, les conditions de l'équilibre hydrostatique, lesquelles se réduisent ici à deux :

La pression hydrostatique n'est jamais négative. — La partie déformable de la surface du fluide est une surface d'égal niveau potentiel.

En outre, elles comprennent une condition d'inégalité:

Soit n la normale à la surface déformable, dirigée vers l'intérieur du fluide; la grandeur $\frac{\partial V}{\partial n}$ ne doit être positive en aucun point de la surface; les points où cette grandeur est nulle n'y doivent pas former une aire d'étendue finie.

Nous supposerons la fonction V uniforme, en sorte que deux surfaces de niveau distinctes ne puissent se couper; nous supposerons en outre que, dans la région de l'espace où notre fluide peut se mouvoir, V ne présente ni maximum ni minimum, en sorte que nulle surface de niveau ne se ferme sur elle-même.

La surface $V = V_0$, qui forme la limite du fluide en équilibre, partage ainsi l'espace en deux régions; l'une, que nous nommerons la *région supérieure*, où V surpasse V_0; l'autre, que nous nommerons la *région inférieure*, où V est inférieur à V_0. Selon la condition indiquée tout à l'heure, cette dernière région contient une partie de la masse fluide; nous supposerons qu'elle la contient tout entière.

Les parois du vase indéformable qui maintiennent le fluide se composent de deux parties; une de ces parties est mouillée par le liquide en équilibre; elle se trouve assurément tout entière dans la *région inférieure;* une autre n'est pas touchée par le fluide en équilibre; *nous supposons que cette seconde partie des parois se trouve tout entière dans la région supérieure.*

Dès lors, il est aisé de voir que la condition donnée par le calcul des

[1] *Des principes fondamentaux de l'Hydrostatique*, § 4 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, 1890, p. C. 28).

variations entraîne cette autre, qui assure pleinement la stabilité de l'équilibre :

Dans l'état considéré du système, la grandeur Φ est un minimum absolu.

Considérons, en effet, le fluide dans un autre état quelconque. Nous pourrons distinguer dans l'espace quatre régions :

La région o n'est occupée par le liquide ni dans le premier état, ni dans le second.

La région 1 est occupée par le fluide aussi bien dans le premier état que dans le second.

La région 2 est occupée par le fluide dans le premier état, mais non dans le second.

Enfin, la région 3 est occupée par le fluide dans le second état, mais non dans le premier.

Dès lors, si Φ se rapporte au premier état et Φ' au second, il est aisé de voir que l'on a

$$\Phi' - \Phi = \rho \int_3 V \, d\varpi - \rho \int_2 V \, d\varpi. \tag{3}$$

L'incompressibilité du fluide exige que l'on ait

$$\int_3 d\varpi - \int_2 d\varpi = 0.$$

L'égalité (3) peut donc s'écrire

$$\Phi' - \Phi = \rho \int_3 (V - V_0) \, d\varpi - \rho \int_2 (V - V_0) \, d\varpi. \tag{4}$$

Mais la partie 3 de l'espace est nécessairement dans la *région supérieure*, en sorte que $(V - V_0)$ y est positif, tandis que la partie 2 est dans la *région inférieure*, en sorte que $(V - V_0)$ y est négatif. L'égalité (3) montre alors que $(\Phi' - \Phi)$ est positif, ce qui établit le théorème énoncé.

§ 3. — Cas du fluide isothermique soumis à des actions extérieures newtoniennes.

Passons au cas d'un fluide homogène, compressible, dont la température uniforme garde une valeur invariable. Supposons ce fluide soumis à des actions extérieures qui se composent, d'une part, de forces newtoniennes, appliquées aux diverses masses élémentaires et dérivant d'une fonction potentielle $V(x, y, z)$; d'autre part, d'une pression normale, uniforme et constante P, appliquée à la partie déformable de la surface. Si ρ est la densité du fluide, la masse élémentaire dm admet un potentiel interne $\zeta(\rho, T)\,dm$, où il va être inutile de faire figurer la température T, qui est une constante. La grandeur Φ a pour valeur, dans ce cas,

$$\Phi = \int [\rho(V + \zeta) + P]\, d\varpi. \tag{5}$$

Le calcul des variations nous fait connaître [1] les conditions nécessaires et suffisantes pour que Φ ait, dans un état donné du fluide, une valeur plus petite que dans tout état *voisin*, ce mot étant entendu au *sens habituel*.

Ces conditions sont les suivantes :

Il existe une quantité C, constante dans toute l'étendue de la masse fluide, telle que l'on ait, en tout point de cette masse,

$$V + \zeta(\rho) + \rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = C. \tag{5 bis}$$

En chaque point de la masse fluide, la pression Π est donnée par l'égalité

$$\Pi = \rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}. \tag{6}$$

Cette pression n'est négative en aucun point du fluide.

---

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, § 6 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, p. 133).

En chaque point de la surface déformable elle prend la valeur P.

La quantité $\frac{\partial V}{\partial n}$ n'est positive en aucun point de la surface déformable; les points où elle est nulle ne forment pas, en cette surface, une aire d'étendue finie.

La quantité

$$J(\rho) = 2\rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2} \tag{7}$$

n'est négative en aucun point de la masse fluide; les points où elle est nulle ne forment pas, en cette masse, un volume fini.

Conservons les notations et les conventions du cas précédent.

En chaque point de la *région supérieure,* nous pouvons définir une densité fictive ρ par l'équation (5); la valeur correspondante de Π, donnée par l'égalité (6), pourra, en certaines circonstances, n'être plus positive; mais *nous admettrons que la valeur de* $J(\rho)$ *qui correspond à ces valeurs fictives de* ρ *continue à être positive,* de manière qu'elle est positive pour toute valeur réelle de la densité.

Dans ces hypothèses, nous allons prouver que, *si les conditions précédentes sont toutes remplies, la valeur de* Φ *est un minimum absolu, ce qui assure la stabilité de l'équilibre.*

Donnons, en effet, comme dans le cas précédent, un déplacement fini au fluide; soit ρ' la densité au sein de l'élément $d\varpi$ après ce déplacement. Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \Phi' - \Phi = & \int_1 [\rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho V - \rho\zeta(\rho)]\, d\varpi \\ & + \int_3 [\rho' V + \rho' \zeta'(\rho') + P]\, d\varpi \\ & - \int_2 [\rho V + \rho\zeta(\rho) + P]\, d\varpi, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

tandis que la conservation de la masse du fluide s'exprimera par l'égalité

$$\int (\rho' - \rho)\, d\varpi + \int_3 \rho'\, d\varpi - \int_2 \rho\, d\varpi = 0. \tag{9}$$

Il est clair que cette condition (9), jointe à la définition de la densité fictive ρ en tout point de la région 3, nous permet d'écrire l'égalité (8) sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi' - \Phi = & \int_{1+3} [\rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho V - \rho\zeta(\rho) + \rho C]\, d\varpi \\ & + \int_2 [\rho V + \rho\zeta(\rho) - \rho C + P]\, d\varpi \\ & - \int_3 [\rho V + \rho\zeta(\rho) - \rho C + P]\, d\varpi\end{aligned}$$

ou bien, en désignant par ρ_0 la densité donnée par l'égalité

$$\rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0} = P$$

que prend le fluide le long de la surface déformable, et en tenant compte de l'égalité (5),

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\Phi' - \Phi = & \int_{1+3} [\rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho V - \rho\zeta(\rho) + \rho C]\, d\varpi \\ & + \int_2 \left[\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0}\right] d\varpi \\ & - \int_3 \left[\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0}\right] d\varpi.\end{aligned}\right.$$

L'égalité (5), différentiée, donne

$$dV + \frac{J(\rho)}{\rho} d\rho = 0.$$

$J(\rho)$ étant toujours positif, nous voyons que la valeur, réelle ou fictive, de ρ en un point de l'espace est une fonction décroissante de la valeur de V au même point ; $(\rho - \rho_0)$ est donc positif dans la région 2 et négatif dans la région 3.

D'ailleurs, le même signe de $J(\rho)$ nous enseigne que

$$\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0}$$

est une fonction croissante de ρ. Nous aurons donc

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_2 \left[\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0} \right] d\varpi > 0, \\ &\int_3 \left[\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0} \right] d\varpi < 0. \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant la fonction

$$F(\rho') = \rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho V - \rho \zeta(\rho) + \rho C.$$

Nous aurons

$$\frac{dF(\rho')}{d\rho'} = V + \zeta(\rho') + \rho' \frac{d\zeta(\rho')}{d\rho'} - C,$$

$$\frac{d^2 F(\rho')}{d\rho'^2} = 2 \frac{d\zeta(\rho')}{d\rho'} + \rho' \frac{d^2\zeta(\rho')}{d\rho'^2} = \frac{J(\rho')}{\rho'}.$$

$F(\rho)$ est évidemment nul; il en est de même de $\frac{dF(\rho)}{d\rho}$, en vertu de l'égalité (5); enfin, $J(\rho')$ étant positif, il en est de même de $\frac{d^2 F(\rho')}{d\rho'^2}$. $F(\rho')$ est donc positif pour toute valeur de ρ' qui diffère de ρ et nous pouvons écrire l'inégalité

$$(12)\qquad \int_{1+3} [\rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho V - \rho \zeta(\rho) + \rho C]\, d\varpi > 0.$$

L'égalité (10) et les inégalités (11) et (12) donnent l'inégalité

$$\Phi' - \Phi > 0$$

et le théorème énoncé est démontré.

§ 4. — Cas du fluide homogène et compressible, soumis à des actions extérieures non newtoniennes.

Il suffit de compliquer fort peu l'analyse précédente pour qu'elle s'étende au cas où les actions extérieures appliquées aux divers éléments de la masse fluide ne sont plus newtoniennes [1].

Dans ce cas, la fonction potentielle de ces actions en un point ne sera pas déterminée par la seule connaissance des coordonnées (x, y, z) de ce point; pour la connaître, il faudra connaître en outre la nature du fluide qui se trouve en ce point et sa densité ρ; nous pourrons donc la représenter par $U(\rho, x, y, z)$ et écrire

$$(13) \qquad \Phi = \int [\rho\, U(\rho) + \rho\, \zeta(\rho) + P]\, d\varpi.$$

Le calcul des variations indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que, en un certain état du fluide, cette grandeur Φ soit plus petite qu'en tout état *voisin*, ce mot étant pris au *sens habituel*. Ces conditions sont les suivantes :

1° Il existe une grandeur C, de même valeur en tout point du fluide, telle que l'on ait

$$(14) \qquad U(\rho) + \rho \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + \zeta(\rho) + \rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = C.$$

2° La pression Π est une fonction uniforme de x, y, z qui vérifie, en tout point du fluide, l'égalité

$$(15) \qquad \rho^2 \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = \Pi.$$

A la surface déformable du fluide, cette grandeur a la valeur invariable P. Elle n'est négative en aucun point du fluide.

---

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles*, § 4 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 175).

3° Soient n la demi-normale à la surface terminale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et α, β, γ les cosinus des angles que cette direction fait avec les axes de coordonnées.

L'expression

$$\frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial y}\beta + \frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial z}\gamma = \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial n}$$

n'est positive en aucun point de la surface déformable du fluide; les points où elle est nulle ne forment pas une aire d'étendue finie.

Cette dernière condition peut se mettre sous une autre forme. En effet, l'égalité (15) donne

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = \rho^2\frac{\partial^2 U(\rho)}{\partial \rho\, \partial n} + \left[2\rho\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + 2\rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho^2\frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}\right]\frac{\partial \rho}{\partial n},$$

tandis que l'égalité (14) permet d'écrire

$$\frac{\partial U(\rho)}{\partial n} + \rho\frac{\partial^2 U(\rho)}{\partial \rho\, \partial n} + \left[\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + 2\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho\frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}\right]\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0.$$

De ces deux égalités, on tire

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = \rho\left[\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{\partial U(\rho)}{\partial n}\right].$$

La condition précédente peut donc s'énoncer ainsi :

La grandeur $\frac{\partial \Pi}{\partial n}$ n'est négative en aucun point de la surface déformable; les points où elle est nulle ne forment pas une aire d'étendue finie.

4° La grandeur

$$(16) \qquad J = 2\rho\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 U(\rho)}{\partial \rho^2} + 2\rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho^2\frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}$$

n'est négative en aucun point du fluide; les points où elle est nulle ne forment pas un volume d'étendue finie.

Nous admettrons, dans ce qui va suivre, que la quantité $J(\rho, x, y, z)$ est positive, en chaque point (x, y, z), non seulement pour la valeur ρ qu'y prend la densité du fluide en équilibre, mais encore pour toutes les valeurs qu'y peut prendre cette densité, entre o et l'inverse du covolume à la température de l'expérience.

Considérons une région de l'espace non occupée par le fluide, celui-ci se trouvant dans un état où toutes les conditions précédentes sont vérifiées. A chaque point de cette région, nous pourrons, par l'équation (14), faire correspondre une valeur fictive de ρ, puis, par l'égalité (15), une valeur fictive de Π; cette dernière valeur pourra être négative.

Nous supposons que la fonction $U(\rho, x, y, z)$, considérée comme fonction des variables x, y, z explicitement écrites, est une fonction uniforme; alors, la densité fictive ρ, définie par l'équation (14), sera, elle aussi, une fonction uniforme de x, y, z; si, en effet, en un point (x, y, z), l'équation (14) était vérifiée par deux valeurs distinctes et positives de ρ, il existerait une troisième valeur de ρ, comprise entre les deux premières, qui annulerait la dérivée par rapport à ρ du premier membre de l'égalité (14); or cette dérivée, $\frac{J(\rho)}{\rho}$, est essentiellement positive.

La valeur fictive de Π, que définit l'égalité (15), est une fonction uniforme de ρ et de x, y, z, partant une fonction uniforme des variables x, y, z.

Nous supposerons que, quelle que soit la valeur constante attribuée à ρ, la fonction $U(\rho, x, y, z)$ n'admette de maximum ni de minimum dans le champ des variables (x, y, z); ou, pour parler d'une manière plus précise, qu'il n'existe aucun point (x, y, z), ni aucune valeur de ρ, telles que l'on ait à la fois les trois égalités

$$\frac{\partial}{\partial x} U(\rho, x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U(\rho, x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} U(\rho, x, y, z) = 0.$$

Les égalités (14) et (15) donnent

$$\frac{J}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial U(\rho,x,y,z)}{\partial x}+\rho\frac{\partial^2 U(\rho,x,y,z)}{\partial\rho\,\partial x}=0,$$

$$J\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho^2\frac{\partial^2 U(\rho,x,y,z)}{\partial\rho\,\partial x}=\frac{\partial\Pi}{\partial x}.$$

On en tire la première des égalités

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x}=-\rho\frac{\partial U(\rho,x,y,z)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial y}=-\rho\frac{\partial U(\rho,x,y,z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z}=-\rho\frac{\partial U(\rho,x,y,z)}{\partial z}.$$

Nous voyons alors qu'il n'existe aucun point de l'espace où l'on ait à la fois

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial z}=0.$$

Nous pouvons, aussi bien dans la région occupée par le fluide que dans la région où il ne se trouve pas, tracer la famille de surfaces $\Pi=\text{const.}$, Π étant une fonction uniforme de x, y, z; deux de ces surfaces ne peuvent se couper; une de ces surfaces ne peut non plus être une surface fermée, puisque Π n'est maximum ni minimum en aucun point de l'espace.

La surface déformable du fluide est une de ces surfaces, la surface $\Pi=P$. Elle divise l'espace en deux régions : une *région supérieure,* où Π est inférieur à P, et une *région inférieure,* où Π est supérieur à P.

D'après ce que nous avons vu, la partie du fluide qui confine à la surface déformable se trouve dans la *région inférieure; nous supposerons que la masse fluide s'y trouve tout entière;* alors, en aucun point occupé par le fluide en équilibre, la pression Π ne sera inférieure à P.

Nous admettrons que la partie, non mouillée par le fluide en *équilibre, des parois du vase qui contient le fluide se trouve tout entière dans la région supérieure.*

Dans ces hypothèses, les conditions énoncées précédemment entraînent cette conséquence :

La grandeur Φ est un minimum absolu.

Gardant alors, autant que possible, les notations des Paragraphes précédents, nous pourrons écrire

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi' - \Phi = & \int_1 [\rho' U(\rho') + \rho'\zeta(\rho') - \rho U(\rho) - \rho\zeta(\rho)]\, d\varpi \\ & + \int_3 [\rho' U(\rho') + \rho'\zeta(\rho') + P]\, d\varpi \\ & - \int_2 [\rho U(\rho) + \rho\zeta(\rho) + P]\, d\varpi. \end{aligned}\right.$$

La conservation de la masse fluide s'exprime encore ici par l'égalité

$$(9)\qquad \int_1 (\rho' - \rho)\, d\varpi + \int_3 \rho'\, d\varpi - \int_2 \rho\, d\varpi = 0.$$

Les égalités (14) et (15), vérifiées en tout point de l'espace, jointes à l'égalité (9), permettent de mettre l'égalité (17) sous la forme

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi' - \Phi = & \int_{1+3} [\rho' U(\rho') + \rho'\zeta(\rho') - \rho' C - \rho U(\rho) - \rho\zeta(\rho) - \rho C]\, d\varpi \\ & + \int_2 (\Pi - P)\, d\varpi + \int_3 (P - \Pi)\, d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Le volume 2 est sûrement dans la *région inférieure* et le volume 3 dans la *région supérieure;* à moins donc que ces volumes ne s'évanouissent, on a

$$\int_2 (\Pi - P)\, d\varpi > 0,$$

$$\int_3 (\Pi - P)\, d\varpi > 0.$$

D'autre part, considérons l'expression

$$F(\rho') = \rho' U(\rho') + \rho'\zeta(\rho') - \rho' C - \rho U(\rho) - \rho\zeta(\rho) + \rho C.$$

Nous aurons

$$\frac{d\mathrm{F}(\rho')}{d\rho'} = \mathrm{U}(\rho') + \rho' \frac{\partial \mathrm{U}(\rho')}{\partial \rho'} + \zeta(\rho') + \rho' \frac{d\zeta(\rho')}{d\rho'} - \mathrm{C},$$

$$\frac{d^2\mathrm{F}(\rho')}{d\rho'^2} = \frac{\mathrm{J}}{\rho'}.$$

Visiblement, $\mathrm{F}(\rho) = 0$; selon l'égalité (14), il en est de même de $\frac{d\mathrm{F}(\rho)}{d\rho}$, tandis que $\frac{d^2\mathrm{F}(\rho')}{d\rho'^2}$ est positif quel que soit ρ'; on a donc, pour toute valeur de ρ' différente de ρ,

$$\mathrm{F}(\rho') = \rho'\mathrm{U}(\rho') + \rho'\zeta(\rho') - \rho'\mathrm{C} - \rho\mathrm{U}(\rho) - \rho\zeta(\rho) + \rho\mathrm{C} > 0.$$

Les trois inégalités qui viennent d'être établies, jointes à l'égalité (18), donnent l'inégalité

$$\Phi' - \Phi > 0,$$

qui démontre le théorème énoncé.

§ 5. — Cas du fluide entropique.

Considérons un fluide homogène et compressible. Supposons-le soustrait à toute action extérieure, sauf à celle d'une pression normale et uniforme P. Supposons, en outre, que la température T ait initialement la même valeur en tous les points du fluide. La densité du fluide en équilibre aura partout une même valeur ρ, liée à la pression P et à la température T par l'égalité

$$\mathrm{P} = \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho}. \tag{19}$$

Imaginons qu'en tout mouvement à partir de cet état d'équilibre, la densité ρ et la température T soient, pour chaque point matériel, liées par la relation

$$\frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}} = -\mathrm{E}s(\mathrm{T}), \tag{20}$$

où $s(T)$ est une fonction de la température T, la même pour tous les points, et où E est l'équivalent mécanique de la chaleur. Posons, en outre,

$$\text{(20 bis)} \qquad S(T) = \int s(T)\, dT.$$

Nous aurons

$$\text{(21)} \qquad \Phi = \int [\rho\zeta(\rho, T) + E\rho S(T) + P]\, d\varpi.$$

Le calcul des variations nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que Φ ait, dans l'état d'équilibre considéré, une valeur plus petite qu'en tout état voisin, le mot *voisin* étant pris au *sens habituel.*

Outre les conditions d'équilibre déjà mentionnées, on obtient de la sorte la condition suivante (1) :

La quantité

$$\text{(22)} \qquad J = \frac{dP}{d\rho} = 2\rho \frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} + \rho^2 \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T} + \rho^2 \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T} \frac{dT}{d\rho}$$

est positive.

On a d'ailleurs, en vertu de l'égalité (20),

$$\text{(23)} \qquad \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T} + \left[\frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial T^2} + E\frac{ds(T)}{dT}\right]\frac{dT}{d\rho} = 0,$$

ce qui permet d'écrire l'égalité (22) sous la forme

$$\text{(24)} \qquad J = 2\rho \frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} + \rho^2 \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho^2} + \frac{\rho^2 \left[\dfrac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\right]^2}{\dfrac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial T^2} + E\dfrac{ds(T)}{dT}}.$$

Nous admettrons que cette quantité est positive pour toute valeur acceptable de la densité ρ et de la température T.

(1) *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant*, Chap. I, § 5 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, p. 131).

Nous allons montrer que, dans l'état d'équilibre initial du fluide, la quantité Φ est un minimum absolu.

Soit dm un élément de masse du système; soient ρ', T' sa densité et sa température dans un état quelconque; visiblement, nous pourrons écrire

$$(25)\quad \Phi' - \Phi = \int \left[\zeta(\rho', T') + ES(T') + \frac{P}{\rho'} - \zeta(\rho, T) - ES(T) - \frac{P}{\rho}\right] dm.$$

ρ' et T' étant liés par la relation

$$(26)\quad \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial T'} = -Es(T'),$$

nous pouvons écrire

$$(27)\quad F(\rho') = \rho'\left[\zeta(\rho', T') + ES(T') + \frac{P}{\rho'} - \zeta(\rho, T) - ES(T) - \frac{P}{\rho}\right].$$

De là, nous tirons

$$\begin{aligned}\frac{dF(\rho')}{d\rho'} = \zeta(\rho', T) + \rho'\frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} + ES(T') - \zeta(\rho, T) - \frac{P}{\rho} - ES(T)\\ + \rho'\left[\frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial T'} + E\frac{dS(T')}{dT'}\right]\frac{dT'}{d\rho'}\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (20 *bis*) et (26),

$$(28)\quad \frac{dF(\rho')}{d\rho'} = \zeta(\rho', T) - \zeta(\rho, T) + ES(T') - ES(T) + \rho'\frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} - \frac{P}{\rho}.$$

Nous trouvons ensuite

$$\begin{aligned}\frac{d^2F(\rho')}{d\rho'^2} = 2\frac{\partial \zeta(\rho' T')}{\partial \rho'} + \rho'^2\frac{\partial^2 \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'^2} + \left[\frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial T'} + E\frac{dS(T')}{dT'}\right]\frac{dT'}{d\rho'}\\ + \rho'^2\frac{\partial^2 \zeta(\rho', T')}{\partial \rho' \partial T'}\frac{dT'}{d\rho'}\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (20 *bis*), (26) et (23),

$$(29)\quad \frac{d^2F(\rho')}{d\rho'^2} = \frac{J(\rho', T')}{\rho'}.$$

L'égalité (27) montre que $F(\rho) = 0$; en tenant compte de l'égalité (19), l'égalité (28) montre également que $\frac{dF(\rho)}{d\rho} = 0$; enfin l'égalité (29) prouve que $\frac{d^2F(\rho')}{d\rho'^2}$ est positif quel que soit ρ'. $F(\rho')$ est donc positif pour toute valeur de ρ' qui diffère de ρ, et il en est de même de $\frac{F(\rho')}{\rho'}$. Alors les égalités (25) et (27) donnent l'inégalité

$$\Phi' - \Phi > 0.$$

qui démontre le théorème énoncé.

CHAPITRE II.

ÉTUDE CINÉMATIQUE DES PETITS MOUVEMENTS DES FLUIDES.

§ 1. — Étude cinématique des petits mouvements quelconques.

Considérons un fluide qui exécute de petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre.

Le point matériel qui, dans le fluide en équilibre, aurait pour coordonnées x_0, y_0, z_0 a pour coordonnées à l'instant t, au sein du fluide en mouvement, les nombres x, y, z; si nous posons

$$(1) \qquad x = x_0 + a, \qquad y = y_0 + b, \qquad z = z_0 + c,$$

a, b, c sont, à l'instant t, les composantes de l'*élongation* du point matériel considéré; ce sont évidemment des fonctions des quatre variables x_0, y_0, z_0, t :

$$(2) \qquad \begin{cases} a = a(x_0, y_0, z_0, t), \\ b = b(x_0, y_0, z_0, t), \\ c = c(x_0, y_0, z_0, t). \end{cases}$$

Ces fonctions et leurs dérivées partielles seront regardées comme infiniment petites.

Cette hypothèse, jointe aux égalités (1), permet d'écrire

$$a(x_0, y_0, z_0, t) = a(x, y, z, t) - \frac{\partial a}{\partial x_0} a - \frac{\partial a}{\partial y_0} b - \frac{\partial a}{\partial z_0} c.$$

Au second membre de cette égalité, les trois derniers termes sont infiniment petits du second ordre; on a donc, en négligeant ces infiniment petits, la première des égalités

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} a(x_0, y_0, z_0, t) &= a(x, y, z, t), \\ b(x_0, y_0, z_0, t) &= b(x, y, z, t), \\ c(x_0, y_0, z_0, t) &= c(x, y, z, t). \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

Ces égalités peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Aux infiniment petits du second ordre près, l'élongation, à l'instant t, du point matériel dont x, y, z sont les coordonnées à cet instant est égale à l'élongation, au même instant, du point matériel dont x, y, z sont les coordonnées dans l'état d'équilibre.

La vitesse du point matériel dont x, y, z sont les coordonnées à l'instant t est une grandeur géométrique bien déterminée dont les composantes seront désignées par

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t).$$

On a visiblement

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{\partial a(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial a(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_0 \partial t} a - \frac{\partial^2 a}{\partial y_0 \partial t} b - \frac{\partial^2 a}{\partial z_0 \partial t} c. \end{aligned}$$

En négligeant les infiniment petits du second ordre, cette égalité devient la première des égalités

$$(4)\qquad \begin{cases} u\,(x,y,z,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}a(x,y,z,t),\\ v\,(x,y,z,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}b(x,y,z,t),\\ w(x,y,z,t)=\dfrac{\partial}{\partial t}c\,(x,y,z,t).\end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Soient $g_x(x,y,z,t)$, $g_y(x,y,z,t)$, $g_z(x,y,z,t)$ les composantes, à l'instant t, de l'accélération du point matériel qui a pour coordonnées x, y, z à cet instant; par un raisonnement analogue à celui qui a fourni les égalités (4), on trouve les égalités

$$(5)\qquad \begin{cases} g_x(x,y,z,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}a(x,y,z,t),\\ g_y(x,y,z,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}b(x,y,z,t),\\ g_z(x,y,z,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}c\,(x,y,z,t).\end{cases}$$

Si (x, y, z) est un point d'une paroi immobile et si n_i est, en ce point, la normale à la paroi dirigée vers l'intérieur du fluide, on doit avoir

$$(6)\qquad \begin{cases} a(x,y,z,t)\cos(n_i,x)+b(x,y,z,t)\cos(n_i,y)\\ \qquad\qquad +c(x,y,z,t)\cos(n_i,z)=0.\end{cases}$$

Supposons que deux fluides 1 et 2 soient en contact; leur surface de contact occupait la position S_{12} dans l'état d'équilibre; à l'instant t, elle occupe la position Σ_{12}, infiniment voisine de S_{12}. Soit $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ un point de la surface Σ_{12}; soient ν_1, ν_2 les deux demi-normales menées en μ à la surface Σ_{12}, la première vers l'intérieur du fluide 1, la seconde vers l'intérieur du fluide 2. Au point géométrique μ, à l'instant t, se trouvent un point matériel appartenant au fluide 1 et un point matériel appartenant au fluide 2; dans l'état d'équilibre, ces deux points matériels étaient sur la surface S_{12}, le premier en

$$M_1(x_1, y_1, z_1),$$

le second en

$$M_2(x_2, y_2, z_2);$$

$M_1\mu$ est l'élongation à l'instant t du premier point matériel, ses composantes sont

$$a_1(x_1, y_1, z_1, t), \quad b_1(x_1, y_1, z_1, t), \quad c_1(x_1, y_1, z_1, t);$$

$M_2\mu$ est l'élongation à l'instant t du second point matériel; ses composantes sont

$$a_2(x_2, y_2, z_2, t), \quad b_2(x_2, y_2, z_2, t), \quad c_2(x_2, y_2, z_2, t).$$

Aux infiniment petits du second ordre près, nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, x) + b_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, y) \\ & \qquad + c_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, z) \\ & + a_2(x_2, y_2, z_2, t)\cos(\nu_2, x) + b_2(x_2, y_2, z_2, t)\cos(\nu_2, y) \\ & \qquad + c_2(x_2, y_2, z_2, t)\cos(\nu_2, z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Soit $M(x, y, z)$ un point de la surface S_{12}; soient n_1, n_2 les deux demi-normales menées par le point M à la surface S_{12}, l'une vers l'intérieur du fluide 1, l'autre vers l'intérieur du fluide 2. Supposons le point M infiniment voisin des points μ, M_1, M_2. Nous aurons

$$\begin{aligned} & a_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, x) \\ & \quad = a_1(x, y, z, t)\cos(n_1, x) \\ & \quad + a_1(x, y, z, t)[\cos(\nu_1, x) - \cos(n_1, x)] \\ & \quad + \cos(\nu_1, x)\left[\frac{\partial a_1}{\partial x}(x_1 - x) + \frac{\partial a_1}{\partial y}(y_1 - y) + \frac{\partial a_1}{\partial z}(z_1 - z)\right]. \end{aligned}$$

Mais, au second membre de cette égalité, les deux derniers termes sont des infiniment petits du second ordre; en les négligeant, il vient

$$a_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, x) = a_1(x, y, z, t)\cos(n_1, x).$$

Cette égalité et d'autres analogues transforment l'égalité (7) en

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1(x, y, z, t)\cos(n_1, x) + b_1(x, y, z, t)\cos(n_1, y) \\ & \qquad\qquad + c_1(x, y, z, t)\cos(n_1, z) \\ & + a_2(x, y, z, t)\cos(n_2, x) + b_2(x, y, z, t)\cos(n_2, y) \\ & \qquad\qquad + c_2(x, y, z, t)\cos(n_2, z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité doit être vérifiée à tout instant, en tout point de la surface *fixe* S_{12}.

Soit $\rho_0(x, y, z)$ la densité, au point (x, y, z), du fluide en équilibre; soit $\rho(x, y, z, t)$ la densité au même point et à l'instant t, au sein du fluide en mouvement; $(\rho - \rho_0)$ est une quantité infiniment petite ainsi que ses dérivées partielles.

Dans le fluide en équilibre, traçons une surface fermée S, circonscrivant une certaine masse. A l'instant t, cette masse est circonscrite par une surface Σ, infiniment voisine de la surface S; un point (x, y, z) de la surface S, subissant le déplacement $a(x, y, z, t)$, $b(x, y, z, t)$, $c(x, y, z, t)$, se vient placer sur la surface Σ. Soit n_i la demi-normale à la surface S, menée par le point (x, y, z) et dirigée vers l'intérieur du volume que cette surface enferme; soit ϖ ce volume. En exprimant que la masse contenue dans la surface Σ est identique à la masse contenue dans la surface S et en négligeant des infiniment petits du second ordre, nous trouvons

$$\int_\varpi \rho_0\, d\varpi = \int_\varpi \rho\, d\varpi - \int_S \rho[a\cos(n_i, x) + b\cos(n_i y) + c\cos(n_i, z)]\, dS.$$

Mais $(\rho - \rho_0)$ étant une quantité infiniment petite, on peut encore écrire cette égalité

$$\int_\varpi (\rho - \rho_0)\, d\varpi = \int_S \rho_0[a\cos(n_i, x) + b\cos(n_i, y) + c\cos(n_i, z)]\, dS.$$

Par une méthode connue, on en conclut que l'on a, en tout point (x, y, z) du volume occupé par le fluide en équilibre, et à tout instant t,

$$(9) \qquad \rho - \rho_0 + \rho_0\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + a\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + b\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + c\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0.$$

D'autre part, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre, on a

$$\rho_0(x, y, z) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial \rho_0}{\partial x} a_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial y} b_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} c_0,$$

en posant

$$a_0 = a(x_0, y_0, z_0, t),$$
$$b_0 = b(x_0, y_0, z_0, t),$$
$$c_0 = c(x_0, y_0, z_0, t).$$

Si l'on tient compte des égalités (3), l'égalité écrite ci-dessus devient

$$\rho_0(x, y, z) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = a\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + b\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + c\frac{\partial \rho_0}{\partial z}.$$

L'égalité (9) devient alors

$$(10) \quad \rho(x, y, z, t) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = -\rho_0(x, y, z)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right).$$

Visiblement, elle peut encore s'écrire

$$(10\ bis) \qquad \left\{\begin{aligned} &\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) \\ &\quad = -\rho_0(x_0, y_0, z_0)\left(\frac{\partial a_0}{\partial x_0} + \frac{\partial b_0}{\partial y_0} + \frac{\partial c_0}{\partial z_0}\right). \end{aligned}\right.$$

Nous disons que le mouvement admet une *fonction potentielle des élongations* lorsqu'il existe une fonction $\psi(x, y, z, t)$ telle que l'on ait

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} a(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial x}, \\ b(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial y}, \\ c(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Nous disons que le mouvement admet une *fonction potentielle des vitesses* lorsqu'il existe une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ telle que l'on ait

$$(12) \qquad \begin{cases} u(x,y,z,t) = -\dfrac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial x}, \\ v(x,y,z,t) = -\dfrac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial y}, \\ w(x,y,z,t) = -\dfrac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial z}. \end{cases}$$

L'existence d'une fonction potentielle des élongations ψ entraîne l'existence d'une fonction potentielle des vitesses $\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial t}$.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie. *Pour que l'existence d'une fonction potentielle des vitesses entraîne l'existence d'une fonction potentielle des élongations,* il faut et il suffit que la quantité

$$a(x,y,z,0)\,dx + b(x,y,z,0)\,dy + c(x,y,z,0)\,dz$$

soit une différentielle totale; en d'autres termes, *il faut et il suffit qu'il existe une fonction potentielle des élongations à l'instant initial du mouvement.*

Lorsqu'il existe une fonction potentielle des élongations, l'égalité (6), vérifiée en tout point d'une paroi immobile, devient

$$(13) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n_i} = 0,$$

tandis que l'égalité (8), vérifiée en tout point de la surface S_{12} qui séparait deux fluides 1 et 2 au moment de l'équilibre, devient

$$(14) \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial n_2} = 0.$$

§ 2. — Petits mouvements pendulaires d'un corps fluide.

Le petit mouvement étudié sera *pendulaire* si l'élongation est définie par les formules

$$
(15)\quad \begin{cases} a(x,y,z,t) = \mathrm{A}(x,y,z)\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{A}'(x,y,z)\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}, \\ b(x,y,z,t) = \mathrm{B}(x,y,z)\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{B}'(x,y,z)\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}, \\ c(x,y,z,t) = \mathrm{C}(x,y,z)\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{C}'(x,y,z)\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}. \end{cases}
$$

Visiblement, ces égalités équivalent aux équations différentielles suivantes :

$$
(16)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} a(x,y,z,t) + \frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2} a(x,y,z,t) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} b(x,y,z,t) + \frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2} b(x,y,z,t) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} c(x,y,z,t) + \frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2} c(x,y,z,t) = 0. \end{cases}
$$

Supposons qu'un tel mouvement admette une fonction potentielle des vitesses $\varphi(x,y,z,t)$; nous aurons, quel que soit t, l'égalité

$$
\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(\mathrm{A}\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \mathrm{A}'\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}
$$

et deux égalités analogues. Ces égalités étant vraies quel que soit t, il en est de même de l'égalité

$$
\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}\left(\mathrm{A}\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \mathrm{A}'\cos 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}
$$

et des deux égalités analogues que l'on obtient en les différentiant par rapport à t. Mais si l'on pose

$$
\psi(x,y,z,t) = -\frac{\mathrm{T}^2}{4\pi^2}\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial t},
$$

les égalités précédentes donnent l'égalité

$$(17) \qquad A \sin 2\pi \frac{t}{T} + A' \cos 2\pi \frac{t}{T} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et deux analogues. Celles-ci expriment que le mouvement défini par les égalités (15) admet une fonction potentielle des élongations. Ainsi, *pour qu'un petit mouvement pendulaire admette une fonction potentielle des vitesses, il faut et il suffit qu'il admette une fonction potentielle des élongations.*

Admettons donc l'existence d'une fonction potentielle des élongations; l'égalité (17) sera vérifiée quel que soit t, et il en sera de même de l'égalité

$$A \cos 2\pi \frac{t}{T} - A' \sin 2\pi \frac{t}{T} = -\frac{T}{2\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial t}$$

que l'on en tire par différentiation.

Ces deux égalités donnent

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} A(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi(x, y, z, t) \sin 2\pi \frac{t}{T} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} \cos 2\pi \frac{t}{T}\right], \\ A'(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi(x, y, z, t) \cos 2\pi \frac{t}{T} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]. \end{aligned} \right.$$

Les deux égalités (18) et les quatre égalités analogues en B, B', C, C' nous enseignent que les dérivées partielles par rapport à x, y, z des deux expressions

$$\psi(x, y, z, t) \sin 2\pi \frac{t}{T} + \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\psi(x, y, z, t) \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

sont indépendantes de t. Il en résulte que l'on a

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(x, y, z, t)\sin 2\pi\frac{t}{T}\\ &\quad+\frac{T}{2\pi}\frac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial t}\cos 2\pi\frac{t}{T} = \Psi(x, y, z) + F(t),\\ &\psi(x, y, z, t)\cos 2\pi\frac{t}{T}\\ &\quad-\frac{T}{2\pi}\frac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial t}\sin 2\pi\frac{t}{T} = \Psi'(x, y, z) + F'(t).\end{aligned}\right.$$

Les égalités (18) deviennent alors

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &A = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}, &&B = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, &&C = -\frac{\partial\Psi}{\partial z},\\ &A' = -\frac{\partial\Psi'}{\partial x}, &&B' = -\frac{\partial\Psi'}{\partial y}, &&C' = -\frac{\partial\Psi'}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

tandis que les égalités (19) donnent

$$(21)\quad \psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T} + \Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T} + f(t),$$

en posant

$$f(t) = F(t)\sin 2\pi\frac{t}{T} + F'(t)\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

Réciproquement, s'il existe deux fonctions $\Psi(x, y, z)$ et $\Psi'(x, y, z)$ telles que les égalités (20) soient vérifiées, l'égalité (21), où $f(t)$ désigne une fonction arbitraire de t, fournira une fonction potentielle des élongations. *Les égalités* (20) *représentent donc les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction potentielle des élongations en un mouvement pendulaire.*

Supposons désormais ces conditions remplies.

L'élongation à l'instant t du point matériel dont x, y, z sont les coordonnées au sein du fluide en équilibre est la résultante de deux vecteurs; le premier a pour composantes

$$\alpha = -\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\beta = -\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\gamma = -\frac{\partial}{\partial z}\Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Le second a pour composantes

$$\alpha' = -\frac{\partial}{\partial x}\Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\beta' = -\frac{\partial}{\partial y}\Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\gamma' = -\frac{\partial}{\partial z}\Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

Chaque point matériel décrit autour de la position (x, y, z) *qu'il occupait dans l'état d'équilibre une trajectoire plane dont le plan est normal à l'intersection des deux surfaces*

$$\Psi(x, y, z) = \text{const.},$$
$$\Psi'(x, y, z) = \text{const.},$$

qui se coupent en ce point (x, y, z).

Cette trajectoire est une ellipse dont le point (x, y, z) *occupe le centre.*

Les normales N, N′ *à ces deux surfaces, menées par le point* (x, y, z), *marquent les directions de deux diamètres conjugués* D, D′ *de cette ellipse.*

Si nous traçons une suite de surfaces $\Psi(x, y, z) = \lambda$ *en faisant croître les valeurs du paramètre* λ *selon une progression arithmétique de raison infiniment petite* ε; *si nous traçons de même une suite de surfaces* $\Psi'(x, y, z) = \lambda'$ *en faisant varier le paramètre* λ' *suivant la même loi que le paramètre* λ; *la longueur du diamètre* D *sera, en chaque point, inversement proportionnelle à la distance normale de deux surfaces* Ψ *consécutives; la longueur du diamètre* D′ *sera inversement proportionnelle à la distance normale de deux surfaces* Ψ' *consécutives.*

Les égalités (13) et (21) montrent que l'on doit avoir, en tout point d'une surface immobile limitant le fluide,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\cos 2\pi\frac{t}{T} = 0.$$

Cette égalité, devant avoir lieu quel que soit t, équivaut aux deux égalités

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi'}{\partial n_i} = 0. \tag{22}$$

La normale n_i à la paroi est donc tangente à l'intersection des deux surfaces

$$\Psi(x, y, z) = \text{const.}, \qquad \Psi'(x, y, z) = \text{const.},$$

en sorte que *la trajectoire elliptique d'un point matériel infiniment voisin de la paroi immobile est décrite dans un plan parallèle au plan tangent à la paroi.*

On voit de même que l'égalité (14) entraîne ici les égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} = 0, \\ &\frac{\partial\Psi'_1}{\partial n_1} + \frac{\partial\Psi'_2}{\partial n_2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Enfin les égalités (9) et (21) donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) \\ &\quad = R(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T} + R'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T} \end{aligned}\right. \tag{24}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} R &= \rho_0\Delta\Psi + \frac{\partial\rho_0}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\rho_0}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\rho_0}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \\ R' &= \rho_0\Delta\Psi' + \frac{\partial\rho_0}{\partial x}\frac{\partial\Psi'}{\partial x} + \frac{\partial\rho_0}{\partial y}\frac{\partial\Psi'}{\partial y} + \frac{\partial\rho_0}{\partial z}\frac{\partial\Psi'}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

CHAPITRE III.

ÉTUDE DYNAMIQUE DES PETITS MOUVEMENTS DES FLUIDES

§ 1. — Considérations générales.

Nous continuerons, en ce Chapitre, à n'étudier que les cas particuliers déjà considérés au Chapitre I; dans tous ces cas il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$ telle que l'on puisse écrire les équations de l'Hydrodynamique sous la forme [Chap. I, égalités (1)]

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + g_x = 0, \\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + g_y = 0, \\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial z} + g_z = 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons que les élongations des divers points du fluide restent toujours très petites, de telle sorte que l'on puisse leur appliquer les considérations développées au Chapitre précédent, nous aurons [Chap. II, égalités (5)]

$$g_x = \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \qquad g_y = \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}, \qquad g_z = \frac{\partial^2 c}{\partial t^2},$$

en sorte que les égalités (1) pourront s'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\Lambda(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}a(x, y, z, t) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\Lambda(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}b(x, y, z, t) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial z}\Lambda(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}c(x, y, z, t) = 0. \end{aligned}\right.$$

Prenons une fonction $\lambda(x, y, z, t)$ telle que

$$\frac{\partial^2 \lambda(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \Lambda(x, y, z, t) \tag{3}$$

et choisissons-la de telle sorte que, pour $t = 0$, λ soit nul dans tout le fluide. Les égalités (2) deviennent

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial x} + a(x, y, z, t)\right] &= 0,\\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial y} + b(x, y, z, t)\right] &= 0,\\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial z} + c(x, y, z, t)\right] &= 0
\end{aligned}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned}
a(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial x} + a_0(x, y, z) + a_1(x, y, z)t,\\
b(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial y} + b_0(x, y, z) + b_1(x, y, z)t,\\
c(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial z} + c_0(x, y, z) + c_1(x, y, z)t.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Pour $t = 0$, λ est nul dans tout l'espace occupé par le fluide; il en est donc de même de $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$, en sorte que, pour $t = 0$, on a

$$a = a_0, \qquad b = b_0, \qquad c = c_0. \tag{5}$$

Ces égalités nous enseignent que a_0, b_0, c_0 sont infiniment petits comme a, b, c.

Les égalités (4) permettent d'écrire

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} - \left(\frac{\partial b_0}{\partial z} - \frac{\partial c_0}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial c_1}{\partial y}\right)t,\\
\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} - \left(\frac{\partial c_0}{\partial x} - \frac{\partial a_0}{\partial z}\right) &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial z}\right)t,\\
\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} - \left(\frac{\partial a_0}{\partial y} - \frac{\partial b_0}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial b_1}{\partial x}\right)t.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Les premiers membres sont infiniment petits quel que soit t; les seconds ne peuvent l'être que si l'on a

$$\frac{\partial b_1}{\partial z}-\frac{\partial c_1}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial c_1}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial a_1}{\partial y}-\frac{\partial b_1}{\partial x}=0.$$

En vertu de ces dernières égalités, il existe une fonction $\mu(x, y, z)$ telle que l'on puisse écrire

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1(x, y, z)=-\dfrac{\partial}{\partial x}\mu(x, y, z),\\ b_1(x, y, z)=-\dfrac{\partial}{\partial y}\mu(x, y, z),\\ c_1(x, y, z)=-\dfrac{\partial}{\partial z}\mu(x, y, z).\end{cases}$$

Si nous tenons compte des égalités (4) et (7) et si nous posons

$$\psi(x, y, z, t)=\lambda(x, y, z, t)+\mu(x, y, z)t,$$

nous pourrons écrire

$$(8)\qquad \begin{cases} a(x, y, z, t)=a_0(x, y, z)-\dfrac{\partial}{\partial x}\psi(x, y, z, t),\\ b(x, y, z, t)=b_0(x, y, z)-\dfrac{\partial}{\partial y}\psi(x, y, z, t),\\ c(x, y, z, t)=c_0(x, y, z)-\dfrac{\partial}{\partial z}\psi(x, y, z, t).\end{cases}$$

Ces égalités justifient immédiatement la proposition suivante :

Le mouvement infiniment petit le plus général d'un fluide au sein duquel existe une fonction Λ *est un mouvement qui admet une fonction potentielle des élongations, pourvu que l'élongation de chaque point matériel soit comptée à partir de la position* (a_0, b_0, c_0) *qu'occupe ce point à l'instant* $t=0$.

Cette proposition équivaut visiblement à la suivante :

Le mouvement infiniment petit le plus général d'un fluide au *sein duquel existe une fonction* Λ *est un mouvement qui admet une fonction potentielle des vitesses.*

Pour pousser plus loin, nous devrons traiter séparément les divers cas que nous avons déjà distingués au Chapitre I.

§ 2. — Équations des petits mouvements pour un fluide homogène et incompressible.

Un fluide homogène et incompressible a une densité invariable ρ.

En un fluide quelconque, un point matériel qui, dans l'état d'équilibre, se trouve au point (x_0, y_0, z_0) avec la densité $\rho_0(x_0, y_0, z_0)$, est, à l'instant t, en un point (x, y, z) où il a la densité $\rho(x, y, z, t)$, et l'on a [Chap. II, égalité (10)]

$$(9)\quad \rho(x, y, z, t) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = \rho_0(x, y, z)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right).$$

Dans le cas actuel, $\rho(x, y, z, t)$ est nécessairement égal à

$$\rho_0(x_0, y_0, z_0),$$

en sorte que l'on a

$$(10)\qquad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Cette égalité, vérifiée quel que soit t, est vraie, en particulier pour $t = 0$, en sorte que l'on doit avoir, en tout point (x, y, z) du fluide,

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial x} a_0(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} b_0(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} c_0(x, y, z) = 0.$$

Les égalités (8), (10) et (11) montrent alors que l'on a, en tout point (x, y, z) du fluide et à tout instant,

$$(12)\qquad \Delta\psi(x, y, z, t) = 0.$$

Pour que la fonction Λ existe il faut et il suffit que la fonction potentielle des forces extérieures qui sollicitent les divers éléments de masse du fluide soit, à chaque instant t, une fonction uniforme de x, y, z. Nous admettrons que cette fonction potentielle est la somme de deux autres :

1° Une fonction $V(x, y, z)$, indépendante de t; les forces qui dérivent de cette fonction potentielle sont celles qui solliciteraient les divers éléments du fluide en l'état d'équilibre stable au voisinage duquel se fait le petit mouvement considéré;

2° Une fonction $\varphi(x, y, z, t)$, variable avec t; cette fonction potentielle des *forces perturbatrices* est infiniment petite.

Pour un fluide homogène et incompressible, on a [1]

$$(13) \qquad \Lambda(x, y, z, t) = \frac{\Pi(x, y, z, t)}{\rho} + V(x, y, z) + \varphi(x, y, z, t),$$

$\Pi(x, y, z, t)$ étant la pression au point (x, y, z) et à l'instant t.

En vertu de cette égalité (13) et des égalités (8), les équations (1) deviennent

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Elles nous enseignent que la somme

$$\frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

est une simple fonction de t; mais, comme on peut toujours ajouter à ψ une fonction arbitraire de t, nous pourrons choisir ψ de telle sorte que l'on ait, en tout point (x, y, z) et à tout instant t,

$$(14) \qquad \frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

(1) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique*, égalité (158) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 373).

Nous allons appliquer cette égalité à un point quelconque de la surface déformable S du fluide et écrire qu'en ce point, Π égale la pression extérieure.

Soit M un point de la surface déformable S, prise dans la position qu'elle occupe à l'instant t; soient x, y, z les coordonnées du point M. Le point matériel qui se trouve en M, à l'instant t, se trouvait, dans l'état d'équilibre, en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, sur la surface S_0 qui terminait le fluide en cet état.

Nous avons, par définition (Chap. II, § 1),

$$(15) \qquad \begin{cases} x - x_0 = a(x_0, y_0, z_0, t), \\ y - y_0 = b(x_0, y_0, z_0, t), \\ z - z_0 = c(x_0, y_0, z_0, t). \end{cases}$$

La pression extérieure au point M est la somme de deux termes :

1° Le premier est la pression $P(M_0)$ qui s'exerçait en M_0 à la surface S_0 du fluide en équilibre; selon les lois de l'Hydrostatique, on avait alors

$$(16) \qquad \frac{P(M_0)}{\rho} + V(M_0) = C,$$

C ayant la même valeur en tout point de la surface S_0;

2° Le second, variable avec l'instant t et le point M ou, ce qui revient au même, avec l'instant t et le point M_0, peut être représenté par $p(M_0, t)$; cette *pression perturbatrice* est infiniment petite.

A tout instant, et pour tout point M de la surface S, nous devons avoir

$$\Pi(M, t) = P(M_0) + p(M_0, t)$$

ou bien, selon l'égalité (14),

$$(17) \qquad \frac{P(M_0) + p(M_0, t)}{\rho} + V(M) + \varphi(M, t) = \frac{\partial^2 \psi(M, t)}{\partial t^2}.$$

En négligeant les infiniment petits du second ordre, et en tenant compte des égalités (15), nous pourrons écrire

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} V(M) = V(M_0) &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0} a(x_0, y_0, z_0, t) \\ &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0} b(x_0, y_0, z_0, t) \\ &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0} c(x_0, y_0, z_0, t), \\ \varphi(M) = \varphi(M_0).& \end{aligned}\right.$$

Si ϖ est la pression en un point quelconque du fluide en équilibre, on a

$$\frac{\varpi}{\rho} + V = C.$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (14), nous donne

$$(19)\quad \frac{\Pi - \varpi}{\rho} + \varphi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - C.$$

Le mouvement étant infiniment petit, la différence de pression $(\Pi - \varpi)$ doit être infiniment petite; le premier membre de l'égalité (19) étant infiniment petit, il en doit être de même du second et, partant, des quantités

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Dès lors, en négligeant les infiniment petits du second ordre, on a

$$(20)\quad \frac{\partial^2 \psi(M, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2}.$$

Si l'on tient compte des égalités (16), (18) et (20), l'égalité (17) devient

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{p(M_0, t)}{\rho} &+ \varphi(M_0, t) - \frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2} + C \\ &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0} a(x_0, y_0, z_0, t) \\ &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0} b(x_0, y_0, z_0, t) \\ &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0} c(x_0, y_0, z_0, t) \qquad = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité a lieu quelle que soit la position du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sur la surface S_0 et quel que soit t.

Faisons-y, tout d'abord, $t = 0$. Désignons par $p_0(M_0)$, $\varphi_0(M_0)$ les valeurs que prennent $p(M_0, t)$, $\varphi(M_0, t)$ pour $t = 0$. Nous trouverons que l'on a, quelle que soit la position du point M_0 sur la surface S_0,

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{p_0(M_0)}{\rho} + \varphi_0(M_0) - \left[\frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2}\right]_0 \\ &\quad + \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0} a_0(M_0) + \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0} b(M_0) + \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0} c(M_0) + C = 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous tenons compte maintenant des égalités (8), nous trouvons que les égalités (21) et (22) exigent que l'on ait, quelle que soit la position du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sur la surface S_0 et quel que soit l'instant t,

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{p(M_0, t) - p_0(M_0)}{\rho} + \varphi(M_0, t) - \varphi(M_0) \\ &\quad = \frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2}\right]_0 \\ &\quad + \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0}\frac{\partial \psi(M_0, t)}{\partial x_0} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0}\frac{\partial \psi(M_0, t)}{\partial y_0} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0}\frac{\partial \psi(M_0, t)}{\partial z_0}. \end{aligned} \right.$$

On voit maintenant comment se traitera le problème des petits mouvements d'un fluide incompressible, homogène, soumis à des actions perturbatrices connues.

Les fonctions $\varphi(M, t)$, $p(M_0, t)$ étant connues, on pourra prendre arbitrairement les trois composantes de l'élongation initiale

$$a_0(x, y, z), \quad b_0(x, y, z), \quad c_0(x, y, z),$$

liées par l'égalité (11); l'égalité (22) fera alors connaître

$$\left[\frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2}\right]_0.$$

Pour déterminer $\psi(x, y, z, t)$, on aura l'équation (12) vérifiée en tout point du fluide, et l'équation (23) vérifiée en tout point de la surface S_0. Cette dernière pourra s'écrire abréviativement

$$(23\,bis)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2\psi(M_0, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0}\frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial x_0} \\ &\qquad + \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0}\frac{\partial\psi(M_0 t,)}{\partial y_0} \\ &\qquad + \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0}\frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial z_0} = F(M_0, t), \end{aligned} \right.$$

F étant une fonction connue. En outre, il faudra se donner la valeur initiale de $\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

Cette égalité prend une forme remarquable dans le cas où la pression $P(M_0)$, qui maintenait le fluide en équilibre, a même valeur en tout point de la surface S_0; dans ce cas, $V(M_0)$ a aussi même valeur en tout point de la surface S_0; si n est la demi-normale à la surface S_0 vers l'intérieur du fluide, si α, β, γ sont les cosinus des angles que cette direction fait avec les axes de coordonnées, on a

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\alpha,$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0} = \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\beta,$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0} = \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\gamma,$$

$$\frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial y}\beta + \frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial z}\gamma = \frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial n}$$

et l'égalité (23 *bis*) devient

$$(24)\qquad \frac{\partial^2\psi(M_0, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial n} = F(M_0, t).$$

Il est un cas particulier que nous aurons à considérer de suite; c'est celui où aucune action perturbatrice ne sollicite le fluide

$$\varphi(M, t) = 0, \qquad p(M_0, t) = 0$$

et où les élongations initiales sont toutes nulles

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = 0, \qquad c_0 = 0.$$

L'égalité (22) nous donne alors

$$\left(\frac{\partial^2\psi(M_0,t)}{\partial t^2}\right)_0 = C,$$

égalité d'où nous tirons

$$F(M_0, t) = C,$$

et qui transforme l'égalité (24) en

$$\frac{\partial^2\psi(M_0,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial n} = 0,$$

Si, à la fonction $\psi(M, t)$, je substitue la somme $[\psi(M,t) - Ct^2]$, et si je désigne maintenant cette somme par $\psi(M, t)$, les équations (8) et (12) demeureront inaltérées, tandis que l'équation précédente deviendra

$$(25)\qquad \frac{\partial^2\psi(M_0,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial n} = 0.$$

§ 3. — Équations des petits mouvements au sein d'un fluide homogène, compressible, isothermique, soumis à des actions newtoniennes ou non newtoniennes.

Un point matériel occupait, dans la position d'équilibre, une position (x_0, y_0, z_0) avec la densité $\rho_0(x_0, y_0, z_0)$; à l'instant t, il occupe la position (x, y, z) avec la densité $\rho(x, y, z, t)$. On peut écrire

$$(9)\qquad \rho(x,y,z,t) - \rho(x_0,y_0,z_0) = -\rho_0(x,y,z)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right).$$

Mais

$$\begin{aligned}\rho_0(x_0,y_0,z_0) = \rho_0(x,y,z) &- \frac{\partial\rho_0(x,y,z)}{\partial x}a(x,y,z,t)\\ &- \frac{\partial\rho_0(x,y,z)}{\partial y}b(x,y,z,t)\\ &- \frac{\partial\rho_0(x,y,z)}{\partial z}c(x,y,z,t).\end{aligned}$$

L'égalité (9) peut donc s'écrire

$$(26)\qquad \rho(t) - \rho_0 = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 a) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 b) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 c),$$

les quantités ρ_0, a, b, c, $\rho(t)$ se rapportant toutes au même point (x, y, z).

L'égalité (26) peut s'appliquer, en particulier, à l'instant $t = 0$; elle donne alors

$$(27) \qquad \rho(0) - \rho_0 = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 a_0) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 b_0) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 c_0).$$

Les égalités (8), (26) et (27) donnent alors

$$(28) \qquad \rho(t) - \rho(0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right).$$

Le système était primitivement en équilibre sous l'influence d'actions newtoniennes ou non newtoniennes extérieures, appliquées à ses éléments de masse et dérivant d'une fonction potentielle $U(\rho, x, y, z)$, et d'une pression $P(M_0)$ appliquée en chaque point de sa surface déformable S_0.

Posons, pour abréger,

$$U_0 = U(\rho_0), \qquad \zeta_0 = \zeta(\rho_0).$$

Il existe une quantité C, indépendante de x, y, z, telle que l'on ait, dans toute la masse fluide,

$$(29) \qquad U_0 + \rho_0 \frac{\partial U_0}{\partial \rho_0} + \zeta_0 + \rho_0 \frac{d\zeta_0}{d\rho_0} = C.$$

La pression Π_0 en un point quelconque du fluide en équilibre est donnée par la relation

$$(30) \qquad \Pi_0 = \rho_0^2 \left(\frac{d\zeta_0}{d\rho_0} + \frac{\partial U_0}{\partial \rho_0}\right).$$

On a donc, en tout point M_0 de la partie déformable S_0 de la surface qui limite le fluide en équilibre,

$$(31) \qquad P(M_0) = \rho_0^2 \left(\frac{d\zeta_0}{d\rho_0} + \frac{\partial U_0}{\partial \rho_0}\right),$$

toutes les quantités qui figurent au second membre ayant les valeurs qui conviennent au point M_0.

Durant le mouvement du système, chacun des éléments de masse sera soumis non seulement aux actions qui dérivent de la fonction potentielle $U(\rho, x, y, z)$, mais encore à des *actions perturbatrices* newtoniennes ou non newtoniennes dont la fonction potentielle sera $\mathfrak{V}(\rho, x, z, t)$; cette fonction sera sans cesse infiniment petite; au point M de la surface S, la pression s'obtiendra en ajoutant, comme dans le cas précédent, à la pression $P(M_0)$, une *pression perturbatrice* infiniment petite

$$p(M_0, t).$$

Dans ces conditions, pendant toute la durée du mouvement, il existera une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$ donnée par l'égalité ([1])

$$(32)\quad \Lambda = U(\rho) + \rho\frac{\partial U(\rho)}{\partial\rho} + \mathfrak{V}(\rho, t) + \rho\frac{\partial\mathfrak{V}(\rho, t)}{\partial\rho} + \zeta(\rho) + \rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}.$$

Les égalités (2) et (8) du présent Chapitre nous donnent

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Lambda - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Nous voyons ainsi que $\left(\Lambda - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)$ est une simple fonction de t; mais on peut toujours ajouter à ψ une fonction arbitraire de t; il est clair que l'on peut choisir cette fonction de telle sorte que $\left(\Lambda - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)$ soit

---

([1]) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique*, égalité (159) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 374).

nul, ce qui, en vertu de l'égalité (32), donne

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &U(\rho)+\rho\frac{\partial U(\rho)}{\partial\rho}+\mathfrak{V}(\rho,t)+\rho\frac{\partial\mathfrak{V}(\rho,t)}{\partial\rho}\\ &\qquad+\zeta(\rho)+\rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Cette égalité est vraie quel que soit t. Écrivons-la pour $t=0$. Désignons par $\zeta(0)$, $U(0)$, $\mathfrak{V}(0)$, ce que deviennent $\zeta(\rho)$, $U(\rho)$, $\mathfrak{V}(\rho,t)$ lorsqu'on y fait $\rho=\rho(0)$ et $t=0$. Nous trouverons l'égalité

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &U(0)+\rho(0)\frac{\partial U(0)}{\partial\rho(0)}+\mathfrak{V}(0)+\rho(0)\frac{\partial\mathfrak{V}(0)}{\partial\rho(0)}\\ &\qquad+\zeta(0)+\rho(0)\frac{d\zeta(0)}{d\rho(0)}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0=0.\end{aligned}\right.$$

Retranchons membre à membre cette égalité de l'égalité (33) et remarquons :

1° Que les trois quantités ρ_0, $\rho(0)$, $\rho(t)$ diffèrent infiniment peu ;

2° Que $\mathfrak{V}$ et ses dérivées partielles sont des quantités infiniment petites.

Si nous posons alors [Chap. I, égalité (16)]

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} J(\rho,x,y,z)=&\ 2\rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}+\rho^2\frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}\\ &+2\rho\frac{\partial U(\rho,x,y,z)}{\partial\rho}+\rho^2\frac{\partial^2 U(\rho,x,y,z)}{\partial\rho^2},\end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(36)\qquad \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}[\rho(t)-\rho(0)]=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

Comparée à l'égalité (28), cette égalité devient

$$(37)\quad \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

Par une transformation analogue, l'égalité (34) devient

$$\frac{J(\rho_0)}{\rho_0}[\rho(0)-\rho_0]+\mathfrak{V}(\rho_0,0)+\rho_0\frac{\partial\mathfrak{V}(\rho_0,0)}{\partial\rho_0}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0=0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (27),

$$(34\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{V}(\rho_0, o) + \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, o)}{\partial \rho_0} \\ &\quad - \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 a_0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 b_0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 c_0)\right] - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

En tout point du fluide, à tout instant, la pression Π a pour valeur

$$\Pi = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}[U(\rho) + \mathfrak{V}(\rho, t) + \zeta(\rho)].$$

Appliquée à un point M de la surface déformable, cette égalité donne, quel que soit t,

$$P(M_0) + p(M_0, t) = \left\{\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}[U(\rho) + \mathfrak{V}(\rho, t) + \zeta(\rho)]\right\}_M.$$

Le segment M_0M a pour composantes a, b, c, qui sont des quantités infiniment petites; il en est de même de la différence

$$[\rho(M_0, t) - \rho_0(M_0)];$$

on a donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned} \rho(M, t) = \rho_0(M_0) &+ [\rho(M_0, t) - \rho_0(M_0)] \\ &+ \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial x} a + \frac{\partial \rho_0}{\partial y} b + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} c\right]_{M_0}. \end{aligned}$$

Alors, si nous tenons compte des égalités (31) et (37), si nous observons en outre que $\mathfrak{V}$ et ses dérivées sont des quantités infiniment petites, nous trouvons

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} p(M_0, t) = &\ \rho_0^2 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} + J(\rho_0)[\rho(t) - \rho_0] \\ &+ \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial x}\right] a \\ &+ \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial y}\right] b \\ &+ \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial z}\right] c. \end{aligned}\right.$$

Au second membre, toutes les variables ont les valeurs qui conviennent au point M_0.

Appliquons d'abord cette égalité à l'instant $t = 0$; elle nous donne

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} p(M_0, 0) - \rho_0^2 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0} = {} & J(\rho_0)[\rho(0) - \rho_0] \\ & + \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial x}\right] a_0 \\ & + \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial y}\right] b_0 \\ & + \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial z}\right] c_0. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, retranchons membre à membre les égalités (38) et (39), en tenant compte des égalités (8) et (36); nous trouvons que l'on doit avoir, en tout point M_0 de la surface S et à tout instant t,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} & p(M_0, t) - p(M_0, 0) - \rho_0^2\left[\frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}\right] \\ & \quad = \rho_0\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0\right] - \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial x}\right]\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ & \qquad - \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial y}\right]\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ & \qquad - \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial z}\right]\frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ et $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0$ ont les valeurs qui conviennent au point M, et non les valeurs qui conviennent au point M_0.

Mais, si nous retranchons membre à membre l'égalité (29) de l'égalité (33), nous trouvons que l'on a, en tout point du fluide,

$$\frac{J(\rho_0)}{\rho_0}[\rho(t) - \rho_0] + \mathfrak{V}(\rho, t) + \rho \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho, t)}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - C.$$

Le premier membre étant infiniment petit, il en est de même du second et de ses dérivées par rapport à x, y ou z, c'est-à-dire de $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$.

Mais on a

$$\frac{\partial^2\psi(\mathrm{M},t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi(\mathrm{M}_0,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^3\psi(\mathrm{M}_0,t)}{\partial x_0\,\partial t^2}a+\frac{\partial^3\psi(\mathrm{M}_0,t)}{\partial y_0\,\partial t^2}b+\frac{\partial^3\psi(\mathrm{M}_0,t)}{\partial z_0\,\partial t}c.$$

Si donc, dans l'égalité (40), nous supposons que $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0$ se rapportent non plus au point M, mais au point M_0, nous négligeons seulement des infiniment petits du second ordre.

Cette formule (40) peut encore s'écrire sous une forme un peu différente.

L'égalité (30), vraie en tout point du fluide, nous permet d'écrire

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}=\mathrm{J}(\rho_0)\frac{\partial\rho_0}{\partial x}+\rho_0^2\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\rho_0\,\partial x},$$
$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}=\mathrm{J}(\rho_0)\frac{\partial\rho_0}{\partial y}+\rho_0^2\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\rho_0\,\partial y},$$
$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial z}=\mathrm{J}(\rho_0)\frac{\partial\rho_0}{\partial z}+\rho_0^2\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\rho_0\,\partial z}.$$

L'égalité (40) peut alors s'écrire

$$(41)\quad\left\{\begin{aligned}&p(\mathrm{M}_0,t)-p(\mathrm{M}_0,0)-\rho_0^2\left[\frac{\partial\mho(\rho_0,t)}{\partial\rho_0}-\frac{\partial\mho(\rho_0,0)}{\partial\rho_0}\right]\\&\quad=\rho_0\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0\right]-\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\Pi_0}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on se donne les actions perturbatrices et les valeurs initiales a_0, b_0, c_0, de l'élongation, l'égalité (27) fait connaître $\rho(0)$; l'égalité (34) ou (34 *bis*) détermine alors la valeur de $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0$; ces résultats préliminaires obtenus, ψ dépend de l'équation indéfinie (37) et de la condition aux limites (40) ou (41) auxquelles on doit joindre la valeur initiale de $\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

Supposons, par exemple, qu'il n'y ait pas d'actions perturbatrices :

$$\mho(\rho,t)=0,\qquad p(\mathrm{M}_0,t)=0,$$

et que les composantes initiales de l'élongation soient nulles :

$$a_0=0,\qquad b_0=0,\qquad c_0=0.$$

L'égalité (27) donne

$$\rho(0) = \rho_0,$$

tandis que les égalités (29) et (34) donnent

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = C.$$

Les égalités (37) et (41) deviennent alors

$$\frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -C,$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} = \rho_0 C.$$

Mais, à la fonction ψ, on peut toujours substituer la fonction $(\psi - Ct^2)$, sans rien changer aux égalités (8); si l'on désigne encore cette fonction par ψ, l'équation indéfinie deviendra

$$(42) \quad \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

tandis que la condition aux limites deviendra

$$(43) \qquad \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

La condition aux limites prend une forme plus simple lorsque la valeur $P(M_0)$ qu'acquiert, sur la surface S_0, la pression Π_0 est la même en tous les points M_0 de cette surface; on a alors

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\alpha, \qquad \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\beta, \qquad \frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\gamma.$$

L'égalité (41) devient

$$(44) \quad \left\{\begin{aligned} & p(M_0, t) - p(M_0, 0) - \rho_0^2\left[\frac{\partial \mho(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \frac{\partial \mho(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}\right] \\ & \quad = \rho_0\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0\right] - \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n}, \end{aligned}\right.$$

tandis que l'égalité (44) prend la forme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \tag{45}$$

On verra sans peine quelles simplifications comportent les équations précédentes lorsque les actions sont newtoniennes, c'est-à-dire lorsque les fonctions U, $\mathfrak{V}$ ne dépendent plus de ρ.

§ 4. — Équations des petits mouvements au sein d'un fluide entropique.

L'état d'équilibre initial d'un fluide entropique est un état où il a, en tout point, même densité ρ_0 et même température T_0; cela suppose que, en cet état, le fluide ne subisse pas d'autre action extérieure que celle d'une pression normale et uniforme $P(M_0)$ appliquée à sa surface déformable S_0. Toute modification à partir de cet état est assujettie à la relation, vérifiée en chaque point,

$$\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = -E s(T). \tag{46}$$

Les relations (27) et (28) sont encore valables ici; mais comme ρ_0 est indépendant de x, y, z, elles deviennent

$$\rho(0) - \rho_0 = -\rho_0 \left(\frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial b_0}{\partial y} + \frac{\partial c_0}{\partial z} \right), \tag{47}$$

$$\rho(t) - \rho(0) = \rho_0 \Delta \psi. \tag{48}$$

Les égalités (2) et (8) du présent Chapitre donneront encore

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\Lambda - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0$$

et, en raisonnant comme dans les deux cas précédents, nous pourrons derechef en conclure que l'on a

$$\Lambda - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Mais si l'on pose

$$(49) \qquad \mathfrak{s}(T) = \int s(T)\,dT,$$

on aura, dans le cas actuel (¹),

$$(50) \quad \Lambda = \mathfrak{V}(\rho, t) + \rho\frac{\partial \mathfrak{V}(\rho, t)}{\partial \rho} + \zeta(\rho, t) + \rho\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + E\mathfrak{s}(T).$$

$\mathfrak{V}(\rho, t)$ est encore la grandeur infiniment petite qui sert de fonction potentielle aux actions perturbatrices, supposées non newtoniennes. Nous avons donc

$$(51) \quad \mathfrak{V}(\rho, t) + \rho\frac{\partial \mathfrak{V}(\rho, t)}{\partial \rho} + \zeta(\rho, T) + \rho\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + E\mathfrak{s}(T) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Appliquons d'abord cette égalité à l'instant $t = 0$; à cet instant, ρ a la valeur $\rho(0)$, infiniment voisine de ρ_0, T a la valeur $T(0)$, infiniment voisine de T_0. On aura donc

$$\begin{aligned}
&\zeta(\rho, T) + \rho\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + E\mathfrak{s}(T) \\
&\quad = \zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0\frac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0} + E\mathfrak{s}(T_0) \\
&\qquad + \left[2\zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0\frac{\partial^2 \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0^2}\right][\rho(0) - \rho_0] \\
&\qquad + \left[\frac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial T_0} + E\frac{d\mathfrak{s}(T_0)}{dT_0} + \rho\frac{\partial^2 \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0\,\partial T_0}\right][T(0) - T_0].
\end{aligned}$$

Mais les égalités (46) et (49) donnent

$$\frac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial T_0} + E\frac{d\mathfrak{s}(T_0)}{dT_0} = 0,$$

tandis que la première de ces égalités donne

$$\frac{\partial^2 \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0\,\partial T_0}[\rho(0) - \rho_0] + \left[\frac{\partial^2 \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial T_0^2} + E\frac{ds(T_0)}{dT_0}\right][T(0) - T_0] = 0.$$

(¹) *Recherches sur l'Hydrodynamique,* première Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique,* égalité (161) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2ᵉ série, t. III, 1901, p. 374).

Si donc on pose [Chap. I, égalité (24)]

$$(52)\quad J(\rho, T) = 2\rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho^2} - \frac{\rho^2 \left[\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T}\right]^2}{\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} + E \frac{ds(T)}{dT}},$$

on pourra écrire, à l'instant $t = 0$,

$$(53)\quad \begin{cases} \zeta(\rho, T) + \rho \dfrac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + Es(T) \\ \quad = \zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0 \dfrac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0} + Es(T_0) + \dfrac{J(\rho_0)}{\rho_0}[\rho(0) - \rho_0]. \end{cases}$$

En négligeant de même les infiniment petits du second ordre, on pourra écrire

$$(54)\qquad \mho(\rho, 0) + \rho \frac{\partial \mho(\rho, 0)}{\partial \rho} = \mho(\rho_0, 0) + \rho_0 \frac{\partial \mho(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}.$$

En vertu des égalités (53) et (54), l'égalité (51) deviendra

$$\mho(\rho_0, 0) + \rho_0 \frac{\partial \mho(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0} + \zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0 \frac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0} + \frac{J(\rho_0, T_0)}{\rho_0}[\rho(0) - \rho_0] = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (47),

$$(55)\quad \begin{cases} \mho(\rho_0, 0) + \rho_0 \dfrac{\partial \mho(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0} + \zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0 \dfrac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0} \\ \quad - J(\rho_0, T_0)\left(\dfrac{\partial a_0}{\partial x} + \dfrac{\partial b_0}{\partial y} + \dfrac{\partial c_0}{\partial z}\right) = \left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0. \end{cases}$$

Appliquons maintenant successivement l'égalité (51) à l'instant 0, puis à l'instant t, et retranchons membre à membre les résultats obtenus. Un raisonnement analogue à celui qui a donné l'égalité (53) nous permettra d'écrire

$$\begin{aligned} &\zeta(\rho, t) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + Es(T) \\ &\quad - \zeta[\rho(0), T(0)] - \rho(0) \frac{\partial \zeta[\rho(0), T(0)]}{\partial \rho(0)} - Es[T(0)] \\ &\quad = \frac{J(\rho_0, T_0)}{\rho_0}[\rho(t) - \rho(0)]. \end{aligned}$$

$\mathfrak{V}$ et ses dérivées partielles étant infiniment petites, nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(\rho, t) + \rho \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho, t)}{\partial \rho} - \mathfrak{V}[\rho(0), 0] - \rho(0) \frac{\partial \mathfrak{V}[\rho(0), 0]}{\partial \rho(0)} \\ = \mathfrak{V}(\rho_0, t) + \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \mathfrak{V}(\rho_0, 0) - \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}.\end{aligned}$$

Nous trouvons donc l'égalité

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(\rho_0, t) + \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \mathfrak{V}(\rho_0, 0) - \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0} \\ + \frac{J(\rho_0, T_0)}{\rho_0}[\rho(t) - \rho(0)] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0\end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (48),

$$(56) \quad \left\{\begin{aligned}J(\rho_0, T_0)\Delta\psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathfrak{V}(\rho_0, 0) + \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_3, 0)}{\partial \rho_0} \\ - \mathfrak{V}(\rho_0, t) - \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0.\end{aligned}\right.$$

Dans l'état d'équilibre, la pression uniforme P est donnée par l'égalité

$$(57) \qquad P = \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0}.$$

Pendant le mouvement, la pression Π en chaque point a pour valeur

$$\Pi = \rho^2 \left[\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho, t)}{\partial \rho}\right],$$

en sorte qu'en chaque point M de la surface déformable S et à chaque instant, on a

$$(58) \qquad P + p(M_0, t) = \rho^2 \left[\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho, t)}{\partial \rho}\right],$$

les quantités qui figurent au second membre ayant les valeurs qui conviennent au point M.

A cause de l'uniformité de ρ_0, de T_0, et à cause de l'égalité (57), on voit sans peine que cette égalité (58) peut s'écrire

$$p(M_0, t) - \rho_0^2 \left[\frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0}\right]_{M_0} = J(\rho_0, T_0)[\rho(M_0, t) - \rho_0]$$

ou bien, en vertu de l'égalité (48),

$$(59) \qquad p(M_0, t) - \rho_0^2 \left[\frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0}\right]_{M_0} = \rho_0 J(\rho_0, T_0) \Delta\psi(M_0, t).$$

Si l'on compare cette égalité à l'égalité (56), on obtient la nouvelle égalité, vérifiée en tout point M_0 de la surface S_0.

$$p(t) + \rho_0 \mathfrak{V}(\rho_0, t) - \rho_0 \mathfrak{V}(\rho_0, o) - \rho_0^2 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, o)}{\partial \rho_0} = \rho_0 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0\right].$$

Appliquée à l'instant $t = o$, cette formule donne

$$p(o) = \rho_0^2 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, o)}{\partial \rho^0}.$$

Elle peut alors se transformer en

$$(60) \quad p(t) - p(o) + \rho_0 \mathfrak{V}(\rho_0, t) - \rho_0 \mathfrak{V}(\rho_0, o) = \rho_0 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0\right].$$

Lorsqu'on se donne les actions perturbatrices et les valeurs initiales a_0, b_0, c_0 des composantes de l'élongation, l'égalité (55) détermine

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

La fonction ψ est ensuite déterminée par l'équation indéfinie (56) et par la condition aux limites (60) auxquelles il faut joindre la valeur initiale de $\frac{\partial \psi}{\partial t}$.

Supposons, en particulier, qu'il n'y ait pas d'actions perturbatrices

$$\mathfrak{V}(\rho, t) = o, \qquad p(M_0, t) = o$$

et que les composantes initiales de l'élongation soient partout nulles

$$a_0 = o, \qquad b_0 = o, \qquad c_0 = o.$$

L'égalité (55) montre alors que $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0$ a pour valeur

$$\zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0 \frac{\partial\zeta(\rho_0, T_0)}{\partial\rho_0},$$

et cette valeur est la même en tous les points du fluide; si nous la désignons par C, nous pourrons substituer à la fonction ψ l'expression $\psi - Ct^2$, que nous désignerons encore par ψ; nous aurons alors

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

L'équation indéfinie (56) deviendra

$$J(\rho_0, T_0)\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \tag{61}$$

tandis que la condition aux limites (60) deviendra

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{62}$$

CHAPITRE IV.

CONDITIONS QUI SONT NÉCESSAIRES POUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE [1].

§ 1. — Cas du fluide incompressible.

M. Liapounoff [2] et M. Hadamard [3] sont parvenus à préciser les conditions qui sont nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un

(1) *Des conditions nécessaires pour qu'un fluide soit en équilibre stable* (*Comptes rendus*, t. CXXXV, 29 décembre 1902, p. 1290).

(2) Liapounoff, Mémoire publié en russe en 1892 et partiellement reproduit dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 8.

(3) Hadamard, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 331.

système défini par un nombre limité de variables. La méthode qu'ils ont suivie peut s'étendre et donner des indications analogues relatives à la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide soumise à des actions extérieures; il convient, dans cette recherche, de se limiter aux cas qui ont été traités dans le Chapitre I, et pour lesquels on connaît des conditions qui suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre.

Le premier de ces cas est ainsi défini :

Le fluide est homogène et incompressible; sa densité est ρ;

Les masses élémentaires qui le composent sont soumises à des forces qui dérivent d'une fonction potentielle $V(x, y, z)$;

La surface déformable est soumise à une pression uniforme et constante P.

Prenons le fluide dans l'état d'équilibre initial et, à l'instant $t = 0$, dérangeons infiniment peu les divers points matériels qui le composent, en leur imprimant des vitesses infiniment petites. Laissons le fluide se mouvoir sans le soumettre à aucune action perturbatrice. Le point matériel qui, dans l'état d'équilibre, occupait la position M_0, occupe, à l'instant t, la position M; M_0M est l'élongation du point matériel considéré à l'instant t; nous continuerons à représenter ses composantes par $a(M_0, t)$, $b(M_0, t)$, $c(M_0, t)$.

Au cours du présent Chapitre, nous dirons que l'équilibre d'un système est stable si l'on peut limiter supérieurement les valeurs absolues initiales de toutes les élongations et de toutes les vitesses de telle sorte que, dans la suite du temps, aucune élongation ni aucune vitesse ne puisse surpasser, en valeur absolue, certaines limites choisies d'avance, arbitrairement d'ailleurs, et qu'il en soit de même des dérivées premières et secondes de ces quantités par rapport à x, y, z, t.

Ce sens du mot *stable* n'est pas exactement celui qui a été adopté au Chapitre I pour rechercher, selon la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet, les conditions qui suffisent à assurer la stabilité; au sens adopté au Chapitre I, le système serait regardé comme stable, bien que certaines élongations ou certaines vitesses dépassassent leurs limites, pourvu que la masse fluide où ces écarts se produisent soit elle-même inférieure à une limite donnée d'avance. En d'autres termes, un système écarté d'un état d'équilibre stable, défini comme au présent Chapitre, demeure toujours dans un état *voisin* de l'état initial, le mot *voisin* étant pris au *sens habituel;* au contraire, un système écarté de l'état d'équilibre stable défini au Chapitre I ne demeure dans un état *voisin* de l'état initial que si l'on entend le mot *voisin* au *sens nouveau.* Par abréviation, nous pourrons dire que la stabilité considérée en ce Chapitre IV est la *stabilité habituelle,* tandis que la stabilité traitée au Chapitre I est la *stabilité nouvelle.*

Au Chapitre I, nous avons montré que *certaines conditions suffisent à assurer à certains systèmes fluides la stabilité nouvelle;* au présent Chapitre, nous allons prouver que *certaines conditions sont nécessaires pour que certains systèmes fluides possèdent la stabilité habituelle.*

Il est essentiel de ne point oublier cette distinction si l'on veut comparer les résultats que nous allons obtenir au présent Chapitre à ceux qui ont été établis au Chapitre I.

Supposons que le système étudié soit doué de la stabilité habituelle; donnons aux divers points matériels qui le composent des vitesses initiales dépendant d'une fonction potentielle des vitesses, mais sans aucune élongation initiale; nous pourrons imposer à toutes ces vitesses initiales des limites supérieures telles que, quels que soient x, y, z, t, les composantes

$$a(x, y, z, t), \quad b(x, y, z, t), \quad c(x, y, z, t)$$

de l'élongation à l'instant t du point matériel dont les coordonnées, au sein du fluide en équilibre, étaient x, y, z, vérifient les inégalités

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} |a| < \mathrm{A}, & |b| < \mathrm{A}, & |c| < \mathrm{A}, \\ \left|\dfrac{\partial a}{\partial x}\right| < \xi \mathrm{A}, & \ldots, & \\ \left|\dfrac{\partial a}{\partial t}\right| < \xi' \mathrm{A}, & \ldots, & \\ \left|\dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| < \eta \mathrm{A}, & \ldots, & \\ \left|\dfrac{\partial^2 a}{\partial x \, \partial t}\right| < \eta' \mathrm{A}, & \ldots, & \\ \left|\dfrac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right| < \zeta \mathrm{A}, & \left|\dfrac{\partial^2 b}{\partial t^2}\right| < \zeta \mathrm{A}, & \left|\dfrac{\partial^2 c}{\partial t^2}\right| < \zeta \mathrm{A}, \end{array} \right.$$

A étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance, et ξ, ξ', η, η', ζ des constantes finies et positives.

D'autre part, ce qui a été dit au paragraphe **2** du Chapitre III montre que l'on peut toujours, si A ne surpasse pas une certaine valeur, écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \lambda A^2, \\ b &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mu A^2, \\ c &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \nu A^2, \end{aligned}\right.$$

λ, μ, ν étant trois fonctions de x, y, z, t qui ne croissent pas au delà de toute limite, en sorte que l'on puisse trouver une quantité positive F telle que l'on ait

$$(3)\qquad |\lambda| < F, \qquad |\mu| < F, \qquad |\nu| < F$$

et $\psi(x, y, z, t)$ étant une fonction qui vérifie les conditions suivantes :

1° En tout point de la surface déformable S_0 qui limite le fluide en équilibre, on a [Chap. III, égalité (25)]

$$(4)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0,$$

n étant la demi-normale à la surface S_0 vers l'intérieur du fluide;

2° En tout point de la partie Σ de la paroi immobile que mouille le fluide en équilibre, on a [Chap. II, égalité (13)]

$$(5)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0;$$

3° En tout point du volume ϖ que limitent les surfaces S et Σ, on a [Chap. III, égalité (12)]

$$(6)\qquad \Delta\psi = 0;$$

4° Enfin, à l'instant $t = 0$, on a, en tout point du volume ϖ,

$$(7)\qquad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

A ce même instant, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ sont nuls en tout point du fluide, tandis que les composantes de la vitesse sont $-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}$, $-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}$, $-\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}$.

En disposant des limites supérieures imposées aux vitesses initiales, on peut prendre A assez petit pour que FA soit sûrement inférieur à 1; les inégalités (1) et les égalités (2) nous montrent que nous aurons alors, quels que soient x, y, z, t,

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| < A(1+FA), \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| < A(1+FA), \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| < A(1+FA).$$

Nous voyons alors que, si le système jouit de la stabilité habituelle, on pourra disposer des limites supérieures imposées aux vitesses initiales, de telle sorte que l'on ait, quels que soient x, y, z, t,

$$(8) \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| < \Psi, \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| < \Psi, \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| < \Psi,$$

Ψ étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance.

Considérons alors l'expression

$$(9) \qquad \Omega = \int \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 dS_0.$$

Sa valeur absolue ne peut surpasser $\Psi^2 \int \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right| dS_0$.

Si donc le système est stable, on pourra imposer à toutes les vitesses initiales une limite supérieure assez petite pour que l'on ait, quel que soit t,

$$(10) \qquad |\Omega| < M,$$

M étant un nombre positif arbitrairement donné d'avance.

L'égalité (9) donne

$$(11) \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 2\int \frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\,dS_0,$$

puis

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2\int \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 + 2\int \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n}\frac{\partial^3 \psi}{\partial n\,\partial t^2} dS_0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (4),

$$(12) \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2\int \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 - 2\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dS_0.$$

Mais l'égalité (6) nous montre que $\Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ est nul dans tout le volume ϖ, tandis que, selon l'égalité (5), $\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ est nul en tout point de la surface Σ. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dS_0 = &\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dS_0 + \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} d\Sigma \\ &+ \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\Delta\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} d\varpi \\ &= -\int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi.\end{aligned}$$

L'égalité (12) peut donc s'écrire

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = &\; 2\int \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 \\ &+ 2\int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi.\end{aligned}\right.$$

Ces calculs faits, nous allons établir la proposition suivante :

Si $\frac{\partial V}{\partial n}$ n'est négatif en aucun point de la surface S_0 et si les points où cette quantité est positive forment, en cette surface, une aire finie, le fluide ne possède pas la stabilité habituelle.

En effet, selon les égalités (4) et (7), $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ est nul, à l'instant $t = 0$, en tout point de la surface S_0; les égalités (9) et (11) montrent que Ω et $\frac{d\Omega}{dt}$ sont nuls à l'instant $t = 0$.

Selon l'égalité (13) et les propriétés attribuées à $\frac{\partial V}{\partial n}$, $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ ne serait jamais négatif. A l'instant $t = 0$, le second terme de $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ serait nul en vertu de l'égalité (7).

D'ailleurs, $\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}$ ne peut être nul en tout point de la surface S_0, à l'instant $t = 0$; en effet, $\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}$ est nul en tout point de la surface Σ, selon l'égalité (5) et, selon l'égalité (6), il en est de même de $\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}$ en tout point du volume ϖ; dès lors, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}$ seraient nuls, à l'instant $t = 0$, en tout point du volume ϖ, et il en serait de même des composantes de la vitesse, ce qui n'est pas.

La valeur initiale de $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$, réduite à son premier terme, est alors positive.

Ω croîtrait donc indéfiniment avec t, contrairement à l'inégalité (10).

Comparons les résultats obtenus au Chapitre I, paragraphe **2**, avec ceux que nous venons de trouver :

Un système formé d'un fluide homogène et incompressible, soumis à des forces qui dérivent d'une fonction potentielle V *et à une pression normale, uniforme et constante, possède certainement la* STABILITÉ NOUVELLE *si* $\frac{\partial V}{\partial n}$ *est négatif en tout point de la surface terminale.*

Si $\frac{\partial V}{\partial n}$ *n'est négatif en aucun point de la surface terminale, et si les points où cette quantité est positive forment une partie finie de la surface terminale, le fluide ne possède certainement pas la* STABILITÉ HABITUELLE.

Ces conclusions, on le voit sans peine, laissent l'une et l'autre échapper certains cas, en sorte que *nous ne possédons pas d'une manière complète les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité soit nouvelle, soit habituelle.*

§ 2. — Cas du fluide homogène, compressible, isothermique, soumis à des actions extérieures newtoniennes ou non newtoniennes.

Par une méthode semblable nous allons traiter d'un fluide homogène, compressible, isothermique, dont les masses élémentaires sont soumises à des forces qui dérivent d'une fonction potentielle $U(\rho, t)$ et dont la surface déformable est soumise à une pression uniforme et constante.

A partir de l'état d'équilibre initial, sans déranger aucun des points matériels qui composent le fluide, donnons-leur des vitesses initiales dépendant d'une fonction potentielle des vitesses. Si le système possède la stabilité habituelle, nous pourrons limiter supérieurement ces vitesses initiales de telle sorte que l'on puisse encore écrire les inégalités

$$(1) \qquad |a| < A, \qquad |b| < A, \qquad |c| < A, \qquad \ldots,$$

En outre, si $\rho_0(x, y, z)$ est la densité au point (x, y, z) au sein du fluide en équilibre, si $\rho(x, y, z, t)$ est, à l'instant t, la densité du point matériel qui, au sein du fluide en équilibre, occupait la position (x, y, z), nous voyons par les inégalités (1) que l'on peut limiter ces vitesses initiales de telle sorte que l'on ait, quels que soient x, y, z, t,

$$\left|\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right| < rA,$$

r étant une constante finie.

D'autre part, si l'on se reporte à la théorie des petits mouvements donnée au § 3 du Chapitre précédent, on voit que l'on pourra imposer à A une limite supérieure telle que l'on puisse écrire les égalités et inégalités (2) et (3), la fonction $\psi(x, y, z, t)$ étant assujettie aux conditions suivantes :

1° A tout instant et en tout point de la surface S_0 qui limite le fluide en équilibre, on a [Chapitre III, égalité (45)]

$$(14) \qquad \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

2° A tout instant, en tout point de la surface indéformable Σ, on a [Chapitre II, égalité (13)]

$$(15) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

3° A tout instant, en tout point de l'espace qu'occuperait le fluide en équilibre, on a [Chapitre III, égalité (42)]

$$(16) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - J(\rho_0)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] = 0;$$

4° A l'instant $t = 0$, en tout point du même espace, on a

$$(17) \qquad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

A ce même instant, $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ sont nuls en tout point du volume ϖ, tandis que $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial t}$ sont respectivement égaux aux composantes de la vitesse.

En raisonnant comme dans le cas précédent, nous verrons encore que l'on peut limiter supérieurement les vitesses initiales de telle sorte que l'on ait, quels que soient x, y, z, t,

$$(8) \qquad \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| < \Psi, \qquad \left|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right| < \Psi, \qquad \left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right| < \Psi,$$

Ψ étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance.

Considérons, au sein du volume occupé par le fluide en équilibre, une certaine région ϖ; dans le cas le plus général, la surface qui délimite cette région peut se composer de trois parties : une partie S_0 appartenant à la surface déformable du fluide en équilibre, une partie Σ appartenant à la paroi invariable, enfin une partie σ tracée à l'intérieur du fluide.

Considérons l'expression

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega = & \int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right]^2 d\varpi \\ & + \int \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)^2 dS_0. \end{aligned} \right.$$

Selon ce qui a été vu au Chapitre II, § 1, si l'on désigne par ρ la densité à l'instant t du point matériel dont x, y, z étaient les coordonnées en l'état d'équilibre et dont ρ_0 était alors la densité, on peut limiter supérieurement A de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \Delta\psi + \theta A^2,$$

θ étant une fonction de x, y, z, t qui ne peut surpasser une certaine limite. On en conclut sans peine que l'on peut, si le système possède la stabilité habituelle, limiter supérieurement les vitesses initiales de telle sorte que l'on ait, quel que soit x, y, z, t,

$$(19) \qquad |\Delta\psi| < R,$$

R étant une constante positive arbitrairement donnée d'avance.

On voit alors que la valeur absolue de Ω ne peut surpasser

$$\begin{aligned}&\int \left|\frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\right| \left\{ \left(\left|\frac{\partial \rho_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \rho_0}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right| \right) \Psi + \rho_0 R \right\}^2 d\varpi \\ &+ \Psi^2 \int \left|\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\right| dS_0.\end{aligned}$$

Partant, on peut limiter supérieurement les vitesses initiales de telle sorte que l'on ait, quel que soit t,

$$(10) \qquad |\Omega| < M,$$

M étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance.

L'égalité (18) donne

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} = {} & 2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \right] \\ & \times \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial t}\right) \right] d\varpi \\ & + 2\int \frac{\partial \Pi_0}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n\, \partial t} dS_0, \end{aligned} \right.$$

puis

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2\Omega}{dt^2} = {} & 2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}\right)\right]^2 d\varpi \\ & + 2\int \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 \\ & + 2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] \\ & \qquad \times \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^3\psi}{\partial y\,\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^3\psi}{\partial z\,\partial t^2}\right)\right] d\varpi \\ & + 2\int \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\,\frac{\partial \psi}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t^2}\, dS_0.\end{aligned}\right.$$

Les deux derniers termes du second membre de cette égalité (21) peuvent, en vertu des égalités (14) et (16), s'écrire

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)\right] d\varpi \\ & + 2\int \rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\, dS_0 \\ = {} & -2\int \rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\, d\Sigma - 2\int \rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\, d\sigma \\ & - 2\int \rho_0\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi.\end{aligned}\right.$$

Mais l'égalité (15) vérifiée à tout instant, en tout point de la surface Σ, entraîne l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

qui, au second membre de l'égalité (22), fait disparaître le premier terme. L'égalité (21) devient alors

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2\Omega}{dt^2} = {} & 2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}\right)\right]^2 d\varpi \\ & + 2\int \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 \\ & - 2\int \left[\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi \\ & - 2\int \rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\, d\sigma.\end{aligned}\right.$$

Pour $t = 0$, nous avons, dans tout le volume ϖ,

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0,$$

partant, selon les égalités (2),

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_0 = 0;$$

nous avons aussi, selon l'égalité (17),

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

L'égalité (18) nous montre alors que l'on a, pour $t = 0$,

$$\Omega = 0. \tag{24}$$

L'égalité (20) nous montre que l'on a, au même instant,

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0. \tag{25}$$

Enfin, l'égalité (23) nous montre qu'à l'instant $t = 0$, on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Omega}{dt^2} = {} & 2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}\right)\right]^2 d\varpi \\ & + 2\int \frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Les égalités (23), (24), (25), (26) vont nous permettre d'établir les propositions que nous avons en vue de démontrer.

Voici la première de ces propositions :

Dans le fluide en équilibre il existe une région d'étendue finie où $J(\rho_0)$ *est négatif; cette région n'est pas attenante à la surface déformable du fluide; dans ces conditions, le fluide ne présente pas la stabilité habituelle.*

Appliquons à ce cas les formules précédentes, en prenant pour volume ϖ la région de l'espace où $J(\rho_0)$ est négatif. Cette région n'étant pas attenante à la surface déformable du fluide, le terme formé par une intégrale étendue à la surface S_0 doit disparaître des égalités (23) et (26).

D'autre part, $J(\rho_0)$ varie d'une manière continue à l'intérieur du fluide en équilibre; le volume ϖ, en tout point duquel $J(\rho_0)$ est négatif, est donc séparé des portions du fluide où $J(\rho_0)$ n'est pas négatif par une surface σ en tout point de laquelle $J(\rho_0) = 0$; l'égalité (16) nous apprend alors qu'en tout point de cette surface σ et à tout instant,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

ce qui, dans la formule (23), fait disparaître l'intégrale étendue à la surface σ.

Le second membre de l'égalité (26) est négatif, à moins qu'en tout point du volume ϖ on ait, à l'instant $t = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial t}\right) = 0.$$

Mais, à l'instant $t = 0$, la fonction $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ est seulement assujettie à ce que ses dérivées partielles en x, y, z ne surpassent pas en valeur absolue la limite imposée aux composantes de la vitesse; on peut donc toujours la choisir de telle sorte qu'elle ne vérifie pas cette condition.

Nous voyons alors que, des égalités (23), (24), (25), (26), on peut tirer les résultats suivants :

1° Pour $t = 0$, on a

$$\Omega = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} < 0,$$

2° Pour aucune valeur positive de t, $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ n'est positif.

Il en résulte que, t croissant au delà de toute limite par valeurs positives, Ω est constamment négatif et sa valeur absolue croît au delà de toute limite. Or, ce résultat est contraire à la condition (10) qui serait vérifiée si le système possédait la stabilité habituelle.

Voici une seconde proposition :

Au sein du fluide en équilibre, il existe une région d'étendue finie en laquelle $J(\rho_0)$ *est négatif; cette région confine à la surface déformable; en tout point de la partie* S_0 *de la surface déformable qui confine à cette région de l'espace,* $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ *est négatif; le système fluide ne possède pas la stabilité habituelle.*

Appliquons encore nos précédentes formules en prenant pour volume ϖ la région où $J(\rho_0)$ est négatif.

Il peut se faire que le volume ϖ se confonde avec le volume entier du fluide; dans ce cas, la surface σ n'existe pas et l'intégrale étendue à cette surface doit disparaître de la formule (23). Il se peut, au contraire, que le volume ϖ comprenne seulement une partie du fluide; dans ce cas, l'intégrale étendue à la surface σ que renferme la formule (23) est nulle pour la raison indiquée au cours de la précédente démonstration. Dans les deux cas, les égalités (23), (24), (25), (26) conduisent encore aux conséquences suivantes :

1° Pour $t = 0$, on a

$$\Omega = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} < 0.$$

2° Pour aucune valeur positive de t, $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ n'est positif.

La démonstration s'achève alors comme celle de la proposition précédente.

La proposition précédente implique celle-ci comme cas particulier :

Un fluide compressible, homogène, isothermique ne subit aucune action extérieure que celle d'une pression uniforme et constante; ce fluide en équilibre a partout la même densité ρ_0*; si la quantité*

$$J(\rho_0) = 2\rho_0 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0} + \rho_0^2 \frac{d^2\zeta(\rho_0)}{d\rho_0^2}$$

est négative, le fluide ne possède pas la stabilité habituelle.

Dans ce cas, en effet, Π_0 a partout la même valeur et $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ est nul.

On démontrerait comme notre seconde proposition la proposition dont voici l'énoncé :

$J(\rho_0)$ *est nul dans une partie du fluide; cette partie est attenante à la surface déformable du fluide en équilibre; en la portion* S_0 *de cette surface à laquelle elle attient, il existe une aire finie où* $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ *est négatif; le fluide ne possède pas la stabilité habituelle.*

Rappelons que nous avions établi, au préalable, les propositions suivantes :

Pour qu'un fluide compressible et isothermique possède la stabilité nouvelle, il suffit :

1° *Que la quantité* $J(\rho_0)$ *ne soit négative en aucun point du fluide et que les points où elle est nulle ne forment pas un volume fini;*

2° *Que la quantité* $\frac{\partial \Pi}{\partial n}$ *ne soit négative en aucun point de la surface déformable du fluide et que les points où elle est nulle ne forment pas une aire d'étendue finie.*

On voit que nous sommes encore loin de posséder les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité soit nouvelle, soit habituelle d'un fluide homogène, compressible, isothermique, soumis exclusivement à des actions extérieures.

§ 3. — Cas du fluide entropique soumis à une pression uniforme et constante.

Prenons maintenant un fluide homogène et compressible soumis à une pression uniforme et constante; au sein de ce fluide en équilibre, la température a, en tout point, la même valeur T_0 et la densité la même valeur ρ_0. Supposons ce fluide assujetti, en tous ses mouvements, à vérifier une égalité de la forme

$$\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = E s(T),$$

où $s(T)$ est la même fonction de T pour tous les points du fluide.

A partir de l'état d'équilibre imprimons au fluide, sans aucun dérangement initial, des vitesses initiales dérivant d'une fonction potentielle; nous pourrons imposer à celles-ci des limites supérieures telles que les inégalités (1) soient vérifiées, A étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance. Nous pourrons d'ailleurs, selon ce qui a été vu au Chapitre III, § 4, limiter supérieurement cette constante A de telle sorte que l'on puisse écrire les égalités (2), où $\psi(x, y, z, t)$ vérifie les conditions suivantes :

1° En tout point de la partie déformable S_0 de la surface qui limite le fluide en équilibre, et à tout instant t, on a [Chapitre III, égalité (62)]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0; \tag{27}$$

2° En tout point de la paroi Σ et à tout instant, on a [Chapitre II, égalité (13)]

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0; \tag{28}$$

3° En tout point de l'espace occupé par le fluide en équilibre, et à tout instant, on a [Chapitre III, égalité (61)]

$$J(\rho_0, T_0)\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0; \tag{29}$$

4° En tout point du même espace et à l'instant $t = 0$, on a

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0. \tag{30}$$

A ce même instant, $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}$ sont nuls dans tout le fluide et $-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}, -\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}, -\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}$ sont égaux aux composantes de la vitesse.

Considérons l'expression

$$\Omega = \int J(\rho_0, T_0)(\Delta\psi)^2\,d\varpi, \tag{31}$$

où l'intégrale s'étend au volume entier du fluide.

Comme au paragraphe précédent, on peut, si le système possède la stabilité habituelle, imposer aux vitesses initiales des limites supérieures telles que l'on ait, quels que soient x, y, z, t, l'inégalité

$$(19) \qquad |\Delta\psi| < R,$$

R étant une quantité positive arbitrairement choisie d'avance. La valeur absolue de Ω demeurera certainement inférieure à

$$R^2 \int |J(\rho_0, T_0)|\, d\varpi,$$

en sorte que l'on peut, si le système est stable, imposer aux vitesses initiales des limites supérieures telles que l'on ait, quel que soit t,

$$(10) \qquad |\Omega| < M,$$

M étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance.

L'égalité (31) donne

$$(32) \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 2\int J(\rho_0, T_0)\, \Delta\psi\, \Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\varpi,$$

puis

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2\int J(\rho_0, T_0)\left(\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 d\varpi + 2\int J(\rho_0, T_0)\,\Delta\psi\,\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\, d\varpi.$$

Selon l'égalité (29), cette dernière égalité devient

$$(33) \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2\int J(\rho_0, T_0)\left(\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 d\varpi + 2\int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\, d\varpi.$$

L'égalité (27) exige que l'on ait, à tout instant et en tout point de la surface S_0,

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Cette égalité et l'égalité (28), vérifiée à tout instant, en tout point de la surface Σ, permettent de donner à l'égalité (33) la forme

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Omega}{dt^2} = {} & 2\int J(\rho_0, T_0)\left(\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\ & - 2\int\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi. \end{aligned}\right.$$

L'égalité (30) et l'égalité (29) montrent qu'à l'instant $t = 0$ on a, dans tout le fluide,

$$\Delta\psi = 0.$$

Les égalités (31) et (32) montrent alors qu'à l'instant $t = 0$ on a

$$(35)\qquad \Omega = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0,$$

tandis qu'au même instant les égalités (30) et (34) donnent

$$(36)\qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2\int J(\rho_0, T_0)\left(\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

Ces calculs nous permettent de démontrer le théorème suivant :

Si, en un fluide entropique, la quantité $J(\rho_0, T_0)$ *est négative, le fluide en équilibre ne possède pas la stabilité habituelle.*

Dans ce cas, en effet, les égalités (35) et (36) nous donneraient, pour $t = 0$,

$$\Omega = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

En outre, on pourrait toujours, à cet instant, choisir la fonction $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, de telle sorte que $\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ne soit pas nul en tout point du fluide; on aurait alors, pour $t = 0$,

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} < 0.$$

Enfin, selon l'égalité (34), $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ ne pourrait devenir positif pour aucune valeur de t; Ω serait donc sans cesse négatif et sa valeur absolue croîtrait au delà de toute limite.

Cette conséquence, qui contredit à l'inégalité (10), démontre le théorème énoncé.

La méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet donnerait la proposition suivante :

Pour que notre fluide entropique possède la stabilité nouvelle il suffit que $J(\rho_0, T_0)$ *soit positif.*

Le cas où $J(\rho_0, T_0)$ est nul échappe également aux deux propositions.

§ 4. — Remarque générale.

Toutes ces démonstrations impliquent un postulat que renferment les égalités (2) et qui peut être regardé comme un cas particulier de cette proposition :

Si un système est animé d'un mouvement infiniment petit, les grandeurs variables qui définissent ce mouvement vérifient des équations qui ne diffèrent des équations dites des petits mouvements *que par des infiniment petits d'ordre supérieur; donc il existe des intégrales des équations des petits mouvements dont ces grandeurs elles-mêmes ne diffèrent que par des infiniment petits d'ordre supérieur; ces intégrales sont celles qui correspondent aux mêmes écarts initiaux et aux mêmes vitesses initiales que le mouvement infiniment petit que l'on considère.*

Ce postulat ne peut être tenu pour évident; les démonstrations précédentes ne peuvent donc prétendre à la même rigueur que les démonstrations données par M. Liapounoff et par M. Hadamard pour les systèmes qui dépendent d'un nombre limité de variables.

CHAPITRE V.

LES OSCILLATIONS PENDULAIRES DES CORPS FLUIDES.

§ 1. — Équations générales qui régissent les oscillations pendulaires propres des corps fluides.

Au présent Chapitre nous nous proposons d'aborder l'étude dynamique des oscillations pendulaires des corps fluides, dont l'étude cinématique a été donnée au Chapitre II, § 2. Nous nous bornerons, d'ailleurs, à étudier les oscillations *propres*, c'est-à-dire que nous supposerons nulles les actions perturbatrices appliquées soit aux diverses masses élémentaires, soit à la surface déformable. En outre, nous supposerons qu'en l'état d'équilibre au voisinage duquel le système oscille, la surface déformable était soumise à une pression uniforme.

Considérons tout d'abord le cas d'un *fluide homogène, compressible, isothermique*, soumis à des actions extérieures, newtoniennes ou non, qui dérivent d'une fonction potentielle.

Selon les égalités (34 *bis*) et (37) du Chapitre III, nous avons, en tout point (x, y, z) de l'espace occupé par le fluide en équilibre,

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 a_0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 b_0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 c_0) = -A^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0,$$

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = A^2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0\right].$$

La seconde de ces égalités a lieu, en outre, quel que soit t.

$$(3)\qquad A^2 = \frac{\rho_0}{J}$$

est une fonction de x, y, z, déterminée lorsqu'on connaît l'état d'équilibre du fluide.

En outre, en tout point de la paroi immobile, et quel que soit t pour la seconde égalité, on a

$$a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \tag{5}$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que la normale n fait avec les axes de coordonnées.

Enfin, en tout point de la surface déformable du fluide en équilibre, on a, quel que soit t [Chap. III, égalité (41)],

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0. \tag{6}$$

Il est facile de voir que ces formules (1), (2), (4), (5), (6) peuvent être regardées comme impliquant celles qui conviennent aux deux autres cas étudiés par nous.

Considérons le cas d'un *fluide homogène et incompressible*. L'égalité (11) du Chapitre III nous montre que l'on a, en tout point de l'espace qu'occupe le fluide en équilibre,

$$\frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial b_0}{\partial y} + \frac{\partial c_0}{\partial z} = 0. \tag{1 bis}$$

En ce même point et à tout instant, on a, quel que soit t, selon l'égalité (12) du même Chapitre,

$$\Delta\psi = 0. \tag{2 bis}$$

Enfin, en tout point de la surface déformable du fluide en équilibre et à tout instant, on a, quel que soit t, l'égalité (23) du Chapitre III :

$$\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0 - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{6 bis}$$

Si l'on observe :

1° Que la densité ρ_0 a la même valeur dans tout le fluide;

2° Qu'en tout point de la surface terminale du fluide en équilibre, on a

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

on voit que les égalités (1 *bis*), (2 *bis*), (6 *bis*) peuvent être regardées comme des formes particulières des égalités (1), (2), (6), à la condition de faire, dans la première,

$$(3\ bis) \qquad A^2 = 0.$$

Considérons, pour terminer, le cas du *fluide entropique.*

L'égalité (55) du Chapitre III nous montre que l'on a, en tout point du volume qu'occuperait le fluide en équilibre,

$$(1\ ter) \qquad J(\rho_0, T_0)\left(\frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial b_0}{\partial y} + \frac{\partial c_0}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

L'égalité (56) du même Chapitre donne, au même point et à tout instant,

$$(2\ ter) \qquad J(\rho_0, T_0)\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

Enfin, selon l'égalité (60) du Chapitre III, en tout point de la surface déformable du fluide en équilibre et à tout instant, on a

$$(6\ ter) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

Le fluide entropique en équilibre était soustrait à toute action autre que celle d'une pression uniforme; la densité ρ_0 y avait donc la même valeur en tout point; il en était de même de la pression Π_0, ce qui annule $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ en tout point de la surface terminale. Selon ces remarques, les égalités (1 *ter*), (2 *ter*), (6 *ter*) peuvent être regardées comme des cas particuliers des égalités (1), (2), (6), à condition de faire dans les deux premières

$$A^2 = \frac{\rho_0}{J(\rho_0, T_0)}.$$

Cette valeur de A^2 est indépendante de x, y, z.

L'étude des oscillations propres d'une masse fluide dépend donc, dans les trois cas que nous avons étudiés, des équations (1), (2), (4), (5), (6), où A^2 est une fonction donnée de x, y, z, ou une constante, ou zéro.

Supposons maintenant que les oscillations que nous voulons étudier soient des oscillations pendulaires.

Au Chapitre III, § 1, nous avons établi le théorème suivant :

Tout petit mouvement d'une masse fluide au sein de laquelle existe une fonction Λ *admet une fonction potentielle des vitesses.*

D'autre part, au Chapitre II, § 2, nous avons démontré cette autre proposition :

Pour qu'un petit mouvement pendulaire d'un milieu continu admette une fonction potentielle des vitesses, il faut et il suffit qu'il admette une fonction potentielle des élongations.

En rapprochant ces deux théorèmes, nous obtenons celui-ci :

Au sein des fluides qui admettent une fonction Λ *et, en particulier, au sein des fluides que nous étudions, tout mouvement pendulaire infiniment petit dérive d'une fonction potentielle des élongations.*

Dès lors, selon les égalités (11) et (21) du Chapitre II, on a, en chaque point et à chaque instant,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\sin 2\pi\frac{t}{T} - \frac{\partial\Psi'}{\partial x}\cos 2\pi\frac{t}{T},\\ b &= -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\sin 2\pi\frac{t}{T} - \frac{\partial\Psi'}{\partial y}\cos 2\pi\frac{t}{T},\\ c &= -\frac{\partial\Psi}{\partial z}\sin 2\pi\frac{t}{T} - \frac{\partial\Psi'}{\partial z}\cos 2\pi\frac{t}{T},\end{aligned}\right.$$

Ψ et Ψ' étant deux fonctions des seules variables x, y, z.

D'autre part, les égalités (8) du Chapitre III donnent

$$(8)\qquad a = a_0 - \frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad b = b_0 - \frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad c = c_0 - \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Identifions ces expressions de a, b, c. Nous en tirons sans peine

$$(9)\qquad a_0 = -\frac{\partial\Psi'}{\partial x},\qquad b_0 = -\frac{\partial\Psi'}{\partial y},\qquad c_0 = -\frac{\partial\Psi'}{\partial z},$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial\Psi}{\partial x}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial\Psi'}{\partial x}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right),\\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial\Psi}{\partial y}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial\Psi'}{\partial y}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right),\\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= \frac{\partial\Psi}{\partial z}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial\Psi'}{\partial z}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right),\end{aligned}\right.$$

Ces égalités donnent

$$(11)\qquad \psi = \Psi\sin 2\pi\frac{t}{T} + \Psi'\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right) + F(t).$$

De cette égalité nous tirons

$$(12)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\left(\Psi\sin 2\pi\frac{t}{T} + \Psi'\cos 2\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{d^2F(t)}{dt^2},$$

$$(13)\qquad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}\Psi' - \left[\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right]_0.$$

Les égalités (1), (9) et (13) donnent

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right)\\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right) + \frac{\pi^2A^2}{T^2}\Psi' = A^2\left[\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right]_0.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, les égalités (2), (10), (12), (13) et (14) donnent

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{d\Psi}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2A^2}{T^2}\Psi\right]\sin 2\pi\frac{t}{T}\\ + &\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2A^2}{T^2}\Psi'\right]\cos 2\pi\frac{t}{T}\\ &= A^2\frac{d^2F(t)}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

Cette égalité (15) nous permet d'écrire

$$(16)\qquad \frac{d^2F(t)}{dt^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\alpha\sin 2\pi\frac{t}{T} + \alpha'\cos 2\pi\frac{t}{T}\right).$$

α, α' étant deux constantes, et, partant,

$$\left[\frac{d^2 F(t)}{dt^2}\right]_0 = \frac{4\pi^2}{T^2}\alpha'. \tag{17}$$

Dès lors, pour que les égalités (14) et (15) soient vérifiées, il faut et il suffit que les fonctions Ψ, Ψ' vérifient, en tout point, les équations

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}(\Psi - \alpha) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi'}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}(\Psi' - \alpha') = 0. \tag{18 bis}$$

L'égalité (5), vérifiée à tout instant, en tout point de la paroi immobile, devient, en vertu des égalités (10),

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial \Psi'}{\partial n}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right) = 0.$$

Elle exige que l'on ait, en tout point de cette paroi,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n} = 0. \tag{19 bis}$$

D'ailleurs, en vertu des égalités (9), l'égalité (19 *bis*) équivaut à l'égalité (4).

En vertu des égalités (10), (12), (13), (16) et (17), l'égalité (6) devient

$$\left[\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} + \frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi - \alpha)\right]\sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$+ \left[\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \Psi'}{\partial n} + \frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi' - \alpha')\right]\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right) = 0.$$

Pour qu'elle soit vérifiée en tout point de la surface déformable et à tout instant, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point de la surface déformable,

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} + \frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi - \alpha) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \Psi'}{\partial n} + \frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi' - \alpha') = 0. \tag{20 bis}$$

Posons maintenant

$$Z = \Psi - \alpha, \qquad Z' = \Psi' - \alpha',$$

et les égalités (7), (18), (18 *bis*), (19), (19 *bis*), (20), (20 *bis*) conduiront aux résultats suivants :

Lorsqu'un des fluides auxquels s'appliquent nos raisonnements est animé d'un petit mouvement pendulaire, les composantes a, b, c de l'élongation sont données par les formules

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= -\frac{\partial Z}{\partial x} \sin 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\partial Z'}{\partial x} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \\ b &= -\frac{\partial Z}{\partial y} \sin 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \\ c &= -\frac{\partial Z}{\partial z} \sin 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\partial Z'}{\partial z} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \end{aligned} \right.$$

où Z, Z' sont deux fonctions de x, y, z soumises aux conditions suivantes :

Chacune d'elles vérifie :

1° *En tout point de l'espace occupé par le fluide en équilibre, l'équation*

$$(22) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2 A^2}{T^2} Z = 0;$$

2° *En tout point de la paroi immobile, l'équation*

$$(23) \qquad \frac{\partial Z}{\partial n} = 0;$$

3° *En tout point de la surface déformable du fluide en équilibre, l'équation*

$$(24) \qquad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Pi_0}{\partial n} \frac{\partial Z}{\partial n} + \frac{4\pi^2}{T^2} Z = 0.$$

§ 2. — Relation entre le problème précédent et un problème de calcul des variations. — Cas des fluides incompressibles.

Soit Ψ une fonction qui est régulière dans tout l'espace occupé par le fluide en équilibre, qui vérifie la condition

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 \tag{25}$$

en tout point de la paroi immobile Σ, et la condition

$$\int \frac{\partial\Psi}{\partial n} dS_0 = 0, \tag{26}$$

où l'intégrale s'étend à la partie déformable S_0 de la surface qui limite le fluide en équilibre.

Considérons la quantité

$$\Theta = \int \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 + 2\Psi\Delta\Psi\right] d\varpi, \tag{27}$$

où l'intégrale s'étend au volume occupé par le fluide en équilibre; en vertu de l'identité

$$\begin{aligned}\int \Psi\Delta\Psi\, d\varpi = &-\int \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial n} dS_0 - \int \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial n} d\Sigma \\ &-\int \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi\end{aligned}$$

et de la condition (25), Θ peut encore s'écrire

$$\Theta = -2\int \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial n} dS_0 - \int \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi. \tag{28}$$

D'autre part, considérons la quantité

$$\Omega = -\int \frac{\partial V}{\partial n} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)^2 dS_0. \tag{29}$$

Imaginons que l'on remplace la fonction Ψ par une fonction infiniment peu différente, $(\Psi + \delta\Psi)$, qui vérifie les conditions (25) et (26), ce qu'expriment les égalités

$$\delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \tag{30}$$

$$\int \delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, dS_0 = 0. \tag{31}$$

Supposons, en outre, que cette variation imposée à la fonction Ψ soit assujettie à laisser invariable la valeur de Θ, ce qu'exprime l'égalité

$$\delta\Theta = 0. \tag{32}$$

Cherchons à déterminer la fonction Ψ de telle sorte que ces conditions imposées à $\delta\Psi$ entraînent l'égalité

$$\delta\Omega = 0. \tag{33}$$

Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe :

1° Deux constantes K et λ;

2° Une grandeur f, variable d'une manière continue le long de la surface Σ, telles que l'on ait, *quelle que soit la fonction* $\delta\Psi$,

$$\delta\Omega - K\,\delta\Theta - \lambda \int \delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, dS_0 - \int f \, \delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, d\Sigma = 0. \tag{34}$$

L'égalité (28) donne

$$\left\{ \begin{aligned} \delta\Theta &= -2 \int \Psi \, \delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, dS_0 - 2 \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, \delta\Psi \, dS_0 \\ &\quad - 2 \int \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \, \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \, \delta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \, \delta \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\varpi \\ &= -2 \int \Psi \, \delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, dS_0 + 2 \int \Delta\Psi \, \delta\Psi \, d\varpi. \end{aligned} \right. \tag{35}$$

Selon cette égalité (35) et les égalités (29) et (30), l'égalité (34) devient

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \left(\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - K\Psi + \frac{\lambda}{2}\right)\delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0 + K\int \Delta\Psi\,\delta\Psi\,d\varpi \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \int \frac{f}{2}\,\delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour que cette égalité ait lieu quelle que soit la fonction $\delta\Psi$, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de la paroi Σ,

$$f = 0;$$

2° En tout point du volume occupé par le fluide en équilibre,

$$(37)\qquad \Delta\Psi = 0;$$

3° En tout point de la surface S_0,

$$(38)\qquad \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - K\Psi + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

La fonction Ψ étant ainsi déterminée, cherchons quelle valeur elle fait prendre à Θ. Selon l'égalité (27), on a, en toutes circonstances,

$$\Theta = -\int \Psi\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0 - \int \Psi\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,d\Sigma + \int \Psi\,\Delta\Psi\,d\varpi.$$

Lorsque Ψ vérifie les égalités (25) et (37), cette égalité peut s'écrire, quelle que soit la constante C,

$$\Theta = -\int (\Psi - C)\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0.$$

Prenons

$$C = \frac{\lambda}{2K}$$

et nous pourrons écrire cette égalité sous la forme

$$K\Theta = -\int \left(\Psi - \frac{\lambda}{2}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0$$

ou bien, puisque Ψ vérifie l'égalité (38) et que Ω est défini par l'égalité (39),

$$K\Theta = \Omega. \tag{39}$$

Ainsi, *toute fonction* Ψ *qui satisfait à notre problème de calcul des variations fait prendre certaines valeurs aux expressions* Ω *et* Θ; *le rapport de ces valeurs est précisément la constante* K.

D'ailleurs, toute fonction Ψ qui résout le problème de calcul des variations que nous avons énoncé vérifie l'équation (37) en tout point de l'espace occupé par le fluide en équilibre; pour une telle fonction Ψ, la quantité Θ, définie par l'égalité (27), se réduit à

$$\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi.$$

On peut donc énoncer cette proposition :

Lorsqu'une certaine fonction Ψ *satisfait au problème de calcul des variations que nous avons énoncé, la valeur correspondante de la constante* K *est donnée par la formule*

$$K = -\frac{\int \frac{\partial V}{\partial n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)^2 dS_0}{\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right]}. \tag{40}$$

La méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet fournit, pour le fluide étudié, cette condition qui suffit à assurer la stabilité nouvelle :

La grandeur $\frac{\partial V}{\partial n}$ *n'est positive en aucun point de la surface* S_0; *les points où elle est nulle ne forment pas, en la surface* S_0, *une aire d'étendue finie.*

La formule (40) nous montre alors que *si cette condition de stabilité est vérifiée, toute valeur de la constante* K *qui correspond à une solution du problème posé est finie et positive.*

Nous pourrons alors poser

$$K = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\alpha, \tag{41}$$

T et α étant deux constantes réelles. Si l'on observe alors que ρ_0 est une constante, que

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

et que, selon l'égalité (3 *bis*), A^2 est ici nul, on voit que les égalités (25), (37) et (38) deviennent respectivement identiques aux égalités (19), (18) et (20). En d'autres termes, toute solution du problème de calcul des variations posé en ce Paragraphe détermine une fonction $\Psi(x, y, z)$ et une constante K. *Le fluide peut être animé d'un petit mouvement pendulaire dont la période* T *est liée à la constante* K *par la première égalité* (41) *et dont l'élongation a pour composantes*

$$a = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\sin 2\pi\frac{t}{T}, \quad b = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}\sin 2\pi\frac{t}{T}, \quad c = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}\sin 2\pi\frac{t}{T}. \tag{42}$$

Les relations que nous venons d'établir entre le problème des petits mouvements des fluides et un problème du calcul des variations entraînent la conséquence suivante :

Les équations des petits mouvements du fluide ne peuvent, si la condition qui suffit à assurer la stabilité nouvelle est vérifiée, admettre une intégrale de la forme

$$\left\{\begin{aligned} a &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}e^{Rt}, \\ b &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}e^{Rt}, \\ c &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z}e^{Rt}, \end{aligned}\right. \tag{43}$$

où la constante R *serait réelle.*

On verrait sans peine, en effet, qu'une telle intégrale correspondrait à une solution du problème de variations où la constante K aurait la valeur négative $-R^2$.

On peut, en suivant la voie tracée par Routh [1] pour le cas de systèmes dépendant d'un nombre limité de variables, indiquer un procédé régulier qui conduit à la formation d'une infinité de mouvements pendulaires, mouvements qui correspondent à des valeurs successives de K rangées par ordre de grandeurs croissantes, ou à des valeurs successives de T rangées par ordre de grandeurs décroissantes; ce procédé, d'ailleurs, n'est point entièrement rigoureux; il prête à la même objection que la méthode donnée par Lejeune-Dirichlet pour démontrer l'existence d'un état d'équilibre électrique.

Supposons d'abord la fonction Ψ assujettie a vérifier :

1° En tout point de la paroi Σ, l'égalité

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0; \tag{25}$$

2° L'égalité

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial n}\, dS_0 = 0; \tag{26}$$

3° L'égalité

$$\Theta = \int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 + 2\Psi\Delta\Psi\right] d\varpi = 1. \tag{44}$$

Considérons les valeurs (44) de Ω données par la formule (29); si l'on suppose vérifiée la condition suffisante pour la stabilité nouvelle (et c'est ce que nous ferons), ces valeurs sont toutes positives; elles admettent une limite inférieure positive Ω_1; supposons, *ce qui n'est pas évident,* qu'il existe une détermination Ψ_1 de la fonction Ψ pour laquelle Ω atteint cette limite inférieure Ω_1, qui en est alors un minimum. L'hypothèse $\Psi = \Psi_1$ annulera donc $\delta\Omega$ quel que soit $\delta\Psi$; en d'autres termes, la fonction Ψ_1 vérifiera les égalités (25), (37), (38)

[1] ROUTH, *Proceedings of the mathematical Society of London,* Vol. X, 1879, p. 146.

et la valeur correspondante de K sera, selon les formules (39) et (44),

$$(45) \qquad K_1 = \Omega_1 = -\int \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial n}\right)^2 dS_0.$$

Imaginons maintenant que la fonction Ψ soit assujettie non seulement aux conditions (25), (26), (44), mais encore à la condition

$$(46) \qquad \Theta_1 = \int \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\varpi = 0.$$

La fonction Ψ ne peut plus devenir égale ou proportionnelle à Ψ_1, car l'égalité (46) donnerait alors, en tout point,

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0,$$

égalités incompatibles avec la condition (44).

Considérons les valeurs, toutes positives, de Ω, qui correspondent à ces déterminations de Ψ. Ces valeurs admettent une limite inférieure positive Ω_2. Comme ces valeurs sont comprises parmi celles que nous avons considérées en premier lieu, Ω_2 ne peut être inférieur à Ω_1 :

$$(47) \qquad \Omega_2 \geqq \Omega_1.$$

Supposons que, pour une détermination Ψ_2 de Ψ, Ω atteigne cette valeur Ω_2, qui sera alors un minimum relatif aux conditions (25), (26), (44) et (46). Il devra exister trois constantes K_2, g, λ_2 et une grandeur f_2 variable d'une manière continue sur Σ, telles que l'égalité

$$(48) \qquad \delta\Omega - K_2\,\delta\Theta - g\,\delta\Theta_1 - \lambda_2\int \delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0 - \int f_2\,\delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0$$

soit vérifiée quel que soit $\delta\Psi$ lorsqu'on y fait $\Psi = \Psi_2$.

Or on a

$$\delta\Theta_1 = \int \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\,\delta\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\,\delta\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\,\delta\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\varpi$$

ou, en observant que $\Delta\Psi_1$ est nul, ainsi que $\frac{\partial\Psi_1}{\partial n}$ sur la surface Σ,

$$\delta\mathfrak{S}_1 = -\int \frac{\partial\Psi_1}{\partial n}\,\delta\Psi\,dS_0.$$

L'égalité (48) devient donc, en y remplaçant Ψ par Ψ_2,

$$(49)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\left(\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n} - K_2\Psi_2 - \frac{\lambda_2}{2}\right)\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 + K_2\int\Delta\Psi_2\,\delta\Psi\,d\varpi \\ \displaystyle\qquad + \frac{g}{2}\int\frac{\partial\Psi_1}{\partial n}\,\delta\Psi\,dS_0 + \int\frac{f_2}{2}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0. \end{cases}$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la fonction $\delta\Psi$. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de la surface Σ,

$$f_2 = 0;$$

2°

$$g = 0;$$

3° En tout point du volume considéré,

$$\Delta\Psi_2 = 0;$$

4° En tout point de la surface S_0,

$$\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n} - K_2\Psi_2 - \frac{\lambda_2}{2} = 0.$$

La fonction Ψ_2, associée à la constante K_2, fournit donc une nouvelle solution de notre problème de variations; cette solution est essentiellement distincte de la première, car Ψ_2 ne peut être simplement proportionnel à Ψ_1; quant à la constante K_2, selon les égalités (39) et (44), elle a pour valeur

$$(45\ bis)\qquad K_2 = \Omega_2.$$

Les égalités (45) et (45 *bis*), jointes à la condition (47), donnent

$$(50)\qquad K_2 \geqq K_1.$$

Nous trouverions une nouvelle solution de notre problème en cherchant, parmi les fonctions Ψ assujetties non seulement aux conditions (25), (26), (44), (46), mais encore à la condition

$$(46\ bis) \qquad \mathfrak{S}_2 = \int \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\varpi = 0,$$

quelle est la détermination Ψ_3 qui rend Ω minimum, et ainsi de suite.

M. H. Poincaré [1] a montré l'identité du problème des petits mouvements pendulaires des fluides incompressibles avec un problème de variations un peu différent du précédent.

On considère une fonction Ψ assujettie à vérifier :

1° En tout point de la surface Σ, la condition

$$(25) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0;$$

2° En tout point du volume occupé par le fluide en équilibre, la condition

$$(37) \qquad \Delta \Psi = 0;$$

et l'on cherche à déterminer cette fonction Ψ de manière qu'elle annule, quel que soit $\delta \Psi$, la variation du rapport

$$\frac{\Omega}{\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi} = \frac{\Omega}{\mathfrak{S}}.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait, selon l'égalité (29), une grandeur f variable d'une manière continue sur la surface Σ, et une fonction $\varphi(x, y, z)$ continue dans l'espace occupé par le fluide en équilibre, telles que l'égalité

$$(51) \qquad \frac{\mathfrak{S}\, \delta \Omega - \Omega\, \delta \mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2} - \int \varphi \Delta \delta \Psi\, d\varpi - \int\!\!\int f \delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Sigma = 0$$

soit vérifiée quelle que soit la fonction $\delta \Psi$.

---

(1) H. Poincaré, *Sur l'équilibre et les mouvements des mers*, § 6 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. II, 1896, p. 87).

Or on a

$$\begin{aligned}\delta\vartheta = & \quad 2\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)d\varpi \\ = & -2\int\Psi\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 - 2\int\Psi\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,d\Sigma - 2\int\Psi\,\Delta\,\delta\Psi\,d\varpi.\end{aligned}$$

Si donc on pose

$$K = \frac{\Omega}{\vartheta}, \tag{52}$$

l'égalité (51) devient

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{2}{\vartheta}\int\left(\frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{\partial\Psi}{\partial n} - K\Psi\right)\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 + \int\left(f - \frac{2K}{\vartheta}\Psi\right)\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,d\Sigma \\ &\qquad\qquad + \int\left(\varphi - \frac{2K}{\vartheta}\Psi\right)\Delta\,\delta\Psi\,d\varpi = 0.\end{aligned}\right. \tag{53}$$

Pour que cette égalité (53) soit vérifiée quelle que soit la fonction $\delta\Psi$, il faut et il suffit que la fonction Ψ, déjà assujettie aux conditions (25) et (37), vérifie en tout point de la surface S_0 l'égalité

$$\frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{\partial\Psi}{\partial n} - K\Psi = 0, \tag{54}$$

et que l'on prenne

$$f = \frac{2K}{\vartheta}\Psi$$

en tout point de la surface Σ de la paroi et

$$\varphi = \frac{2K}{\vartheta}\Psi$$

en tout point du volume occupé par le fluide en équilibre.

La fonction Ψ ainsi déterminée, jointe à la constante K donnée par l'égalité (52), fournit une solution du problème des petits mouvements pendulaires des fluides et toute solution de ce problème peut être obtenue de la sorte.

Cette méthode nouvelle prête évidemment aux mêmes développements que la précédente.

§ 3. — Relation entre le problème des petits mouvements pendulaires d'un corps fluide et un problème de variations. — Cas des fluides compressibles.

Soit Ψ une fonction assujettie aux conditions suivantes :

1° En tout point de la paroi immobile Σ, elle vérifie la condition

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0; \tag{55}$$

2° Elle vérifie l'égalité

$$\left\{\begin{aligned} H = & \int \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 \\ & - \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi = 0, \end{aligned}\right. \tag{56}$$

dont la forme nous est imposée par la condition que la masse demeure invariable en un petit mouvement où l'élongation a pour composantes

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ b &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ c &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \sin 2\pi \frac{t}{T}; \end{aligned}$$

3° La valeur de la quantité

$$\Theta = \int \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi \tag{57}$$

est invariable.

Remplaçons la fonction Ψ par une fonction infiniment peu différente $\Psi + \delta\Psi$, assujettie aux mêmes conditions, et cherchons à déterminer la fonction Ψ de telle sorte que cette variation annule la variation première de la grandeur

$$\left\{\begin{aligned} \Omega = & \int \frac{\partial \Pi_0}{\partial n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)^2 dS_0 \\ & + \int \frac{J_0}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right]^2 d\varpi. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe :

1° Deux constantes K et α;

2° Une grandeur f, variable d'une manière continue sur la surface Σ, telles que l'on ait, *quel que soit* $\delta\Psi$, l'égalité

$$(59)\qquad \delta\Omega - K\,\delta\Theta - \lambda\,\delta H - \int f\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0.$$

Posons

$$(60)\qquad X = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right).$$

L'égalité (58) nous donnera

$$(61)\qquad \delta\Omega = 2\int\frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 + 2\int\frac{J_0}{\rho_0}X\,\delta X\,d\varpi.$$

De même, l'égalité (56) nous donnera

$$(62)\qquad \delta H = \int\rho_0\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 - \int\delta X\,d\varpi.$$

Enfin, l'égalité (57) nous permettra d'écrire

$$\delta\Theta = 2\int\rho_0\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)d\varpi$$

ou bien, en vertu des égalités (55) et (60),

$$(63)\qquad \delta\Theta = -2\int\rho_0\,\Psi\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 - 2\int\Psi\,\delta X\,d\varpi.$$

En vertu des égalités (61), (62), (63), l'égalité (59) devient

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n} + K\rho_0\Psi - \rho_0\lambda\right)\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0\\ &-\int\frac{f}{2}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,d\Sigma + \int\left(\frac{J_0}{\rho_0}X + K\Psi - \lambda\right)\delta X\,d\varpi = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour que cette égalité ait lieu quel que soit $\delta\Psi$, partant, selon l'égalité (60), quel que soit δX, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de la surface Σ,

$$f = 0; \tag{65}$$

2° En tout point de la surface S_0,

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial n} \frac{\partial \Psi}{\partial n} + \rho_0 (K\Psi - \lambda) = 0; \tag{66}$$

3° En tout point du volume occupé par le fluide en équilibre,

$$\frac{J_0}{\rho_0} X + K\Psi - \lambda = 0. \tag{67}$$

Si l'on suppose Ψ choisi de manière à vérifier les égalités (66) et (67), la grandeur Ω, donnée par l'égalité (58), peut s'écrire

$$\Omega = -K \int \rho_0 \left(\Psi - \frac{\lambda}{K}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 - K \int \left(\Psi - \frac{\lambda}{K}\right) X \, d\varpi$$

ou, en remplaçant X par sa valeur (60),

$$\begin{aligned} \Omega = & -K \int \rho_0 \left(\Psi - \frac{\lambda}{K}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 \\ & - K \int \left(\Psi - \frac{\lambda}{K}\right) \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que l'égalité (55) est vérifiée en tout point de la surface Σ et si l'on se reporte à l'égalité (57), on peut transformer l'égalité précédente en

$$\Omega = K\Theta. \tag{68}$$

La méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet conduit aux conditions suivantes qui suffisent à assurer la stabilité nouvelle de la masse fluide :

1° *S'il s'agit d'un fluide soumis seulement à une pression normale et uniforme, cas auquel* $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ *a la valeur* 0 *en tout point de la surface* S_0, J_0 *a, dans tout le fluide, une même valeur positive.*

2° *En tout autre cas,* $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ *n'est négatif en aucun point de la sur-*

face S_0; *les points où cette quantité est nulle ne forment pas une aire d'étendue finie.*

J_0 *n'est négatif en aucun point du volume occupé par le fluide en équilibre; les points où cette quantité est nulle ne forment pas un volume d'étendue finie.*

Restreignant un peu ces conditions, nous supposerons que J_0 *est toujours positif.*

Nous pourrons alors écrire, selon les égalités (3) et (3 *ter*),

$$\frac{J_0}{\rho_0} = \frac{1}{A^2}, \tag{69}$$

A étant une constante réelle et finie.

Les conditions que nous venons d'énumérer, comparées à l'égalité (58), nous assurent que Ω est essentiellement positif; selon l'égalité (57), il en est de même de Θ; dès lors l'égalité (58) conduit à la proposition suivante :

Moyennant les conditions fournies par la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet, conditions qui suffisent à assurer la stabilité nouvelle, la constante K *est essentiellement positive.*

On peut alors poser

$$K = \frac{4\pi^2}{T^2}, \qquad \lambda = \frac{4\pi^2\alpha}{T^2}, \tag{70}$$

α et T étant deux constantes réelles.

Moyennant les égalités (60), (69), (70), nos égalités (66) et (67) deviennent

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} + \frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi - \alpha) = 0, \tag{71}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}(\Psi - \alpha) = 0. \tag{72}$$

La fonction Ψ, qui résout notre problème de variations, vérifie donc les équations (55), (71), (72), qui sont identiques aux équations (19), (30) et (18); d'où la proposition suivante :

En un fluide où sont vérifiées les conditions suffisantes pour la stabilité nouvelle, toute solution de notre problème de variations détermine une fonction Ψ *et une constante positive* K, *auxquelles correspond un petit mouvement pendulaire défini par les formules*

$$a = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\sin\sqrt{K}\,t, \qquad b = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\sin\sqrt{K}\,t, \qquad c = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}\sin\sqrt{K}\,t.$$

Réciproquement, tout petit mouvement pendulaire du fluide fournit une solution de notre problème de variations.

En raisonnant comme au Paragraphe précédent, on peut encore énoncer le théorème suivant :

En un fluide où sont vérifiées les conditions qui assurent la stabilité nouvelle, les équations des petits mouvements n'admettent aucune intégrale de la forme

$$(73) \qquad a = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}e^{Rt}, \qquad b = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}e^{Rt}, \qquad c = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}e^{Rt},$$

où R *serait une constante réelle.*

La méthode de Routh pour former une infinité de valeurs de T, rangées dans l'ordre des valeurs décroissantes, s'étend sans peine au cas actuel; nous ne la développerons pas, pour ne pas allonger outre mesure le présent écrit.

En terminant, nous ferons remarquer que la méthode que nous venons d'appliquer aux fluides compressibles a de grandes analogies avec les deux méthodes par lesquelles les fluides incompressibles ont été traités au Paragraphe précédent; mais elle n'est la simple généralisation ni de l'une ni de l'autre de ces dernières méthodes.