JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BEGHIN

ROUSSEAU

Sur les percussions dans les systèmes non holonomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 21-26.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__21_0>

Sur les percussions dans les systèmes non holonomes;

PAR MM. BEGHIN ET ROUSSEAU.

On sait que les équations de Lagrange s'appliquent au mouvement d'un système holonome; on peut en déduire, comme l'a montré M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 1896, premier fascicule), une forme simple des équations donnant la théorie des percussions pour un système de cette nature. On sait, d'autre part, que les équations de Lagrange ne s'appliquent plus quand certaines liaisons ne sont pas exprimables par des relations en termes finis, c'est-à-dire quand le système n'est plus holonome : on peut alors remplacer en Dynamique les équations de Lagrange par celles que M. Appell a indiquées dans le *Journal de Crelle* (t. 121) et développées dans deux Mémoires insérés au *Journal de Mathématiques* (1900, premier fascicule, et 1901, premier fascicule).

Nous nous proposons de montrer que, même pour ces derniers systèmes, on peut conserver, pour la théorie des percussions, la forme d'équations déduite des équations de Lagrange.

Pour cela, nous établirons cette forme d'équations par une méthode nouvelle qui nous permettra d'en généraliser l'application.

Considérons un système de corps solides soumis à des liaisons exprimables par des équations intégrables ou non. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_k$, les paramètres indépendants, définissant la position du système. Supposons que, pendant l'intervalle de temps $t_0 t_1$, on introduise de nouvelles liaisons et des percussions données. Parmi ces liaisons, un certain nombre pourront s'exprimer par des relations en termes finis de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0, \\ \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0 \end{cases}$$

et d'autres par des relations différentielles non intégrables de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} A_{11}\,dq_1 + A_{12}\,dq_2 + \ldots + A_{1k}\,dq_k + A_1\,dt = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{s1}\,dq_1 + A_{s2}\,dq_2 + \ldots + A_{sk}\,dq_k + A_s\,dt = 0. \end{cases}$$

Il est bien entendu que ces liaisons n'existent pas forcément toutes à l'instant t_0, mais qu'elles s'établissent progressivement de façon à avoir existé à l'instant t_1.

Pour trouver l'état des vitesses à l'instant t_1, nous savons qu'il suffit d'exprimer que le système des vecteurs, représentant la variation de quantité de mouvement de chaque point changée de sens, fait équilibre au système des vecteurs qui représentent les percussions.

On est donc ramené à un problème purement géométrique : l'équilibre d'un système de vecteurs.

Nous le traiterons en appliquant le principe des vitesses virtuelles. Nous écrirons que la somme des travaux virtuels de tous ces vecteurs est nulle pour tout déplacement compatible avec toutes les liaisons introduites ou préexistantes. Nous supposerons que, dans ces déplacements, les percussions de liaisons donnent des travaux virtuels nuls. Ce sera, par exemple, le cas d'un corps qui vient heurter un plan sur lequel il peut glisser avec frottement, ce frottement étant assez considérable pour qu'à la fin de la percussion le corps roule sans glisser. La percussion sera alors représentée par un vecteur quelconque appliqué au point de contact; et, pour tout déplacement virtuel dans lequel le corps roule sur le plan, le travail de ce vecteur sera nul.

Nous poserons :

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), & d\mu_1 = A_{11} dq_1 + \ldots + A_{1k} dq_k + A_1 dt, \\ \lambda_2 = \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_r = \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), & d\mu_s = A_{s1} dq_1 + \ldots + A_{sk} dq_k + A_s dt. \end{array}$$

Si $n = k - r - s$, on pourra prendre pour paramètres, au lieu de $q_1 q_2 \ldots q_k$, les quantités $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r$; $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_s$; $q_1 q_2 \ldots q_n$. Les nouvelles liaisons introduites s'exprimeront par les équations

$$\lambda_1 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_r = 0; \qquad d\mu_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\mu_s = 0.$$

Calculons dans ces conditions les travaux virtuels de ces vecteurs :

1° *Travail virtuel des variations des quantités de mouvement.* — L'expression de ce travail est

$$\delta\mathfrak{T} = \Sigma m[(x'_1 - x'_0)\delta x + (y'_1 - y'_0)\delta y + (z'_1 - z'_0)\delta z].$$

Or, avant la percussion, on peut exprimer le déplacement $dx\, dy\, dz$ d'un point quelconque (x, y, z) du système par des expressions intégrables ou non de la forme

$$\begin{aligned} dx &= a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \ldots + a_k dq_k + a\, dt, \\ dy &= b_1 dq_1 + \ldots \qquad\qquad\qquad + b\, dt, \\ dz &= c_1 dq_1 + \ldots \qquad\qquad\qquad + c\, dt, \end{aligned}$$

où $a_1, a_2, \ldots, c$ sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_k, t$.

Effectuons le changement de variables indiqué; nous pourrons calculer $dq_{n+1} \ldots dq_k$ à l'aide des équations linéaires (2) et des équations

$$\begin{gathered} \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} dt = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_r}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial\varphi_r}{\partial t} dt = 0 \end{gathered}$$

obtenues en différentiant les équations (1).

Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
dx &= \alpha_1 \, dq_1 + \ldots + \alpha_n dq_n + \alpha_{n+1} d\lambda_1 + \ldots \\
&\quad + \alpha_{n+r+1} d\mu_1 + \ldots + \alpha_k d\mu_s + \alpha\, dt, \\
dy &= \beta_1 \, dq_1 + \ldots + \beta_n dq_n + \beta_{n+1} d\lambda_1 + \ldots \\
&\quad + \beta_{n+r+1} d\mu_1 + \ldots + \beta_k d\mu_s + \beta\, dt, \\
dz &= \gamma_1 \, dq_1 + \ldots + \gamma_n dq_n + \gamma_{n+1} d\lambda_1 + \ldots \\
&\quad + \gamma_{n+r+1} d\mu_1 + \ldots + \gamma_k d\mu_s + \gamma\, dt.
\end{aligned}$$

Dans un déplacement virtuel pour lequel

$$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \ldots = \delta\mu_1 = \ldots = \delta t = 0,$$

l'expression de $\delta\varpi$ sera

$$\begin{aligned}
\delta\varpi = \sum m \big[& (x'_1 - x'_0)(\alpha_1 \delta q_1 + \ldots + \alpha_n \delta q_n) \\
& + (y'_1 - y'_0)(\beta_1 \delta q_1 + \ldots + \beta_n \delta q_n) \\
& + (z'_1 - z'_0)(\gamma_1 \delta q_1 + \ldots + \gamma_n \delta q_n) \big].
\end{aligned}$$

Posons

$$2\,\mathrm{T} = \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

et remarquons que la vitesse du point (x, y, z) a pour projections

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 q'_1 + \alpha_2 q'_2 + \ldots + \alpha_k \mu'_s + \alpha, \\
y' &= \beta_1 q'_1 + \beta_2 q'_2 + \ldots + \beta_k \mu'_s + \beta, \\
z' &= \gamma_1 q'_1 + \gamma_2 q'_2 + \ldots + \gamma_k \mu'_s + \gamma,
\end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\partial x'}{\partial q'_1}, & \ldots, & & \alpha_n &= \frac{\partial x'}{\partial q'_n}, \\
\beta_1 &= \frac{\partial y'}{\partial q'_1}, & \ldots, & & \beta_n &= \frac{\partial y'}{\partial q'_n}, \\
\gamma_1 &= \frac{\partial z'}{\partial q'_1}, & \ldots, & & \gamma_n &= \frac{\partial z'}{\partial q'_n}.
\end{aligned}$$

Or, le coefficient de δq_1 dans l'expression de $\delta \varpi$ a pour valeur

$$\sum m(x'\alpha_1 + y'\beta_1 + z'\gamma_1)_0^1;$$

il peut donc s'écrire

$$\sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_1}\right)_0^1$$

et par suite

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_0^1;$$

on a donc

$$\delta\varpi = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_0^1 \delta q_1 + \ldots + \left(\frac{\partial T}{\partial q'_n}\right)_0^1 \delta q_n.$$

2. *Travail virtuel des percussions données.* — On sait qu'on peut mettre ce travail sous la forme

$$\delta\varpi' = Q_1\delta q_1 + \ldots + Q_n\delta q_n.$$

Nous avons donc à écrire, quels que soient les déplacements $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$, l'égalité

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_0^1 \delta q_1 + \ldots + \left(\frac{\partial T}{\partial q'_n}\right)_0^1 \delta q_n = Q_1\delta q_1 + \ldots + Q_n\delta q_n$$

qui se décompose en les suivantes :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_0^1 = Q_1, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial q'_n}\right)_0^1 = Q_n.$$

On retrouve ainsi les équations de Lagrange.

Remarque I. — Il peut arriver dans certains cas que, pendant la percussion, certaines des liaisons antérieures viennent à disparaître. Si une liaison antérieure disparaît à l'instant t_0, de façon à ne donner lieu à aucune percussion de liaison, il est évident que tout se passe comme si elle n'existait pas; nous avons donc à nous occuper uniquement du cas où la liaison disparaît à l'instant θ compris entre t_0 et t_1, après avoir donné lieu à une percussion de liaison; dans ce cas, la forme d'équations précédente est encore applicable; on opérera comme si cette liaison n'existait pas avant la percussion et comme si on l'introduisait pendant l'intervalle $t_0 \theta$; on la traitera donc de la même manière que les liaisons introduites. On obtiendra ainsi des équations en nombre insuffisant pour déterminer l'état des vitesses à l'instant t_1.

Remarque II. — Si l'on a à traiter un problème dans lequel le travail virtuel de certaines percussions de liaison n'est pas nul pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons, et si, parmi tous ces déplacements, il y en a pour lesquels ce travail est nul, on pourra imaginer qu'on ait introduit des liaisons auxiliaires telles que ces déplacements soient les seuls possibles. — On traitera alors le problème dans ce cas par les équations de Lagrange qui donneront un certain nombre d'équations nécessaires, mais qui ne suffiront pas pour déterminer l'état des vitesses à l'instant t_1.

Soit, par exemple, une sphère dépolie qui vient heurter un plan sur lequel elle peut glisser avec frottement. Avant la percussion, sa position dépend de six paramètres. Les déplacements compatibles avec les liaisons introduites dépendent de cinq paramètres. Parmi ces déplacements choisissons ceux pour lesquels la vitesse du point de contact est nulle; le travail virtuel de la percussion de liaison sera nul: on sera ramené à traiter le problème dans lequel la sphère est assujettie à rouler à la fin du choc; on introduit de cette manière trois équations de liaison, de sorte que la position du corps ne dépend que de trois paramètres. Les équations de Lagrange sont au nombre de trois et s'appliquent au problème proposé. Il restera à trouver deux ou trois équations suivant que la liaison persiste ou non après le choc. Observons que les équations trouvées sont complètement indépendantes du coefficient de frottement.

On peut remarquer que ce qui précède n'est pas sans analogie avec le principe de solidification qu'on applique en Statique.